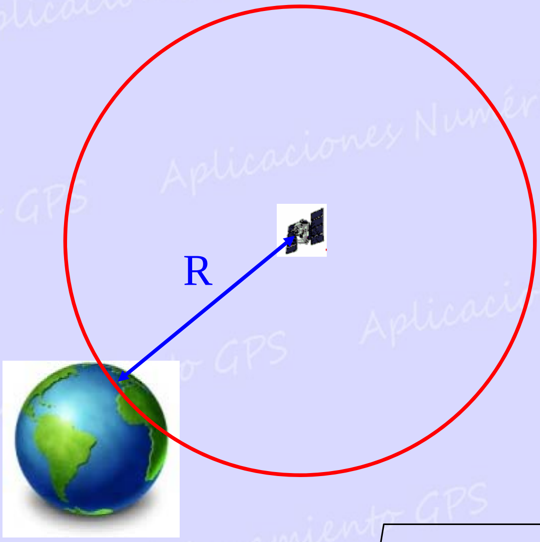
REPASO: Posicionamiento GPS básico



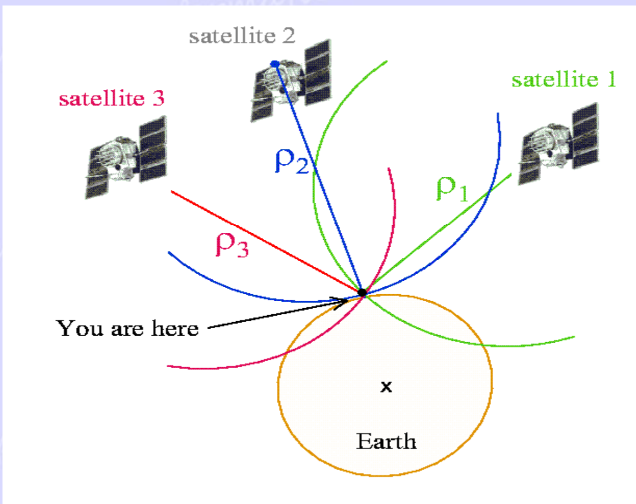
- El satélite emite señal en tiempo Tx
- El receptor recibe señal en tiempo Tr
- El tiempo de vuelo es τ = (Tr-Tx)
- Multiplicando τ por la velocidad luz c obtenemos R distancia satélite-receptor.
- Conociendo la posición del satélite XYZ_S se plantea la siguiente ecuación (esfera):

$$R = c\tau = \sqrt{(X_S - x)^2 + (Y_S - y)^2 + (Z_S - z)^2}$$

La posición (x,y,z) se encuentra en algún punto de una esfera de radio R centrada en la posición del satélite (X,Y,Z) (que podemos conocer a partir del mensaje que manda el satélite o de los datos de un fichero SP3).

REPASO: Num. ecuaciones = Num. incógnitas

En teoría la intersección de tres esferas en 3D nos permite fijar nuestra posición (xyz)



- En general, para poder resolver el problema se precisa que el número de ecuaciones (observaciones) del modelo >= número de incógnitas.
- Teníamos 3 incógnitas (x,y,z) → 3 ecuaciones (mínimo de 3 satélites).

Sincronización con tiempo GPS

Nuestro experimento mental de los relojes se basaba en que el tiempo del satélite y el del observador estaban sincronizados al tiempo GPS.

Desgraciadamente, ninguno de ellos lo está:

- El tiempo de los satélites (que cuentan con varios relojes atómicos) se monitoriza y no se permiten desviaciones mayores de un milisegundo respecto al tiempo GPS. Sin embargo, incluso un solo milisegundo causa errores inaceptables en la posición (0.001 sec x 300000 km/sec = 300 km).

  Solución: en su mensaje de navegación el satélite nos informa del error de su reloj. En los ficheros SP3 tenemos la cuarta columna de datos.

- El reloj del observador es más problemático: es de mucha menor precisión y nadie se ocupa de monitorizarlo y decirnos su error.

  Solución: los error de nuestro reloj se trata como una incógnita más en las ecuaciones de posicionamiento. Esto convierte a nuestro un GPS en un reloj muy preciso, pero necesitamos una ecuación (satélite) adicional.

Efectos de la falta de sincronía

1) El satélite cree emitir su señal en un tiempo GPS Tx_gps, pero en realidad lo está haciendo en el tiempo Tx_sat. Entre ambos tiempos hay una diferencia dT (el error de sincronía del satélite): Tx_sat = Tx_gps + dT(Tx).

2) El receptor recibe señal en tiempo GPS Tr_gps, pero al mirar su reloj para ver la hora no ve ese tiempo sino Tr_rec, distinto del anterior por un error dt (error de sincronía del reloj del receptor): Tr_rec = Tr_gps + dt(Tr)

El receptor no ve nunca Tx_gps ni Tr_gps sino Tx_sat y Tr_rec.

3) La diferencia entre ambos ya no es el tiempo de vuelo real, por lo que al multiplicar por c no obtendremos la distancia o "rango" R al satélite sino un *pseudo-rango o pseudo-distancia* ρ que incluye los errores de reloj (dt y dT).

Idealmente tendría $(\mathrm{T_R}, \mathrm{T_x})_{\mathrm{GPS}}$ Distancia o rango $R = c \cdot (T_R - T_x)_{GPS} = c \cdot \tau$

Lo que tengo es: $\mathrm{T_R}(\mathrm{rec}), \mathrm{T_x}(\mathrm{sat})$ Pseudo-rango: $\rho = c(T_R(rec) - T_x(sat))$

Pseudo-rangos ρ y tiempo de vuelo τ

El pseudo-rango es el observable básico en GPS, definido como la diferencia entre el tiempo de recepción (según el receptor) y el de transmisión (según satélite) multiplicado por c (para pasar a metros):

$$\rho = c\cdot\left(T_r^{rec} - T_x^{sat}\right) = c\cdot\left(\left(T_r + dt\right) - \left(T_x + dT\right)\right) = c\cdot\left(T_r - T_x\right) + cdt - cdT$$

$$\rho = c\tau + cdt(T_R) - cdT(T_X)$$

Ambos errores, dT (sat) y dt (rec), varían con el tiempo y deberían ser evaluados en sus momentos respectivos (Tx para dT y en Tr para dt)

En la fórmula anterior, como τ es el tiempo de vuelo, podríamos pensar que la verdadera distancia (o “rango” R) al satélite sería:

$$R = c\cdot\tau$$

y por lo tanto, la expresión del pseudorango ρ quedaría como:

$$\rho = R + cdt(T_R) - cdT(T_X)$$

Correcciones atmosféricas

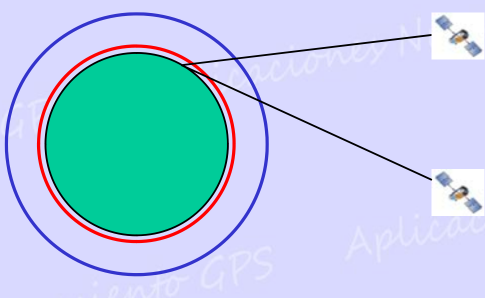
PROBLEMA: La velocidad de la señal no es c durante todo el camino

- Ventajas: tener una atmósfera es agradable.
- Desventajas: $c\cdot\tau$ no nos da la distancia exacta R al satélite.

El producto $c \cdot \tau$ es (un poquito) mayor que la distancia geométrica R debido a los retrasos en la última parte del viaje donde la señal va más lenta → τ es un poco mayor de lo esperado.

Dependiendo de su origen, se distingue entre el retraso ionosférico I y el retraso troposférico T, ambos expresados en metros:

$$c\tau = R + I + T$$



Todo junto: ecuación de posicionamiento

El receptor mide un pseudo-rango (que incluye los errores de reloj):

$$\rho = c \cdot \tau + cdt(T_R) - cdT(T_X)$$

El producto (c·τ) es la distancia real R más los retrasos atmosféricos:

$$c\tau = R + (I + T)$$

La distancia geométrica R entre satélite-receptor es simplemente:

$$R = \sqrt{(X_S - x)^2 + (Y_S - y)^2 + (Z_S - z)^2}$$

Juntándolo todo tenemos nuestro modelo entre pseudo-rango ρ y posición:

$$\rho = \sqrt{(X_S - x)^2 + (Y_S - y)^2 + (Z_S - z)^2} + cdt(T_R) - cdT(T_R - \tau) + I + T + \ldots$$

¿Qué hacer con todos esos parámetros?

¿Qué parámetros son medidas, estimaciones factibles o incógnitas en el modelo?

$$\rho = \sqrt{(X_S - x)^2 + (Y_S - y)^2 + (Z_S - z)^2} + cdt(T_R) - cdT(T_R - \tau) + I + T + \ldots$$

1. El pseudo-rango ρ y el tiempo de recepción (según receptor) Tr (rec) son medidos por el receptor y son los datos de partida conocidos.
2. Los datos del satélite (error del reloj dT y posición Xs,Ys,Zs) se calculan a través del mensaje de navegación o de los datos de los ficheros SP3.
3. El tiempo de vuelo τ se considerar constante inicialmente (~ 0.07 seg). Luego podremos ir recalculandolo más exactamente.
4. El retraso de la ionosfera I (50-100 metros) se puede modelar o ignorarse. El retraso troposférico T (unos 10-20 mt) normalmente se ignora.
5. Quedarían 4 incógnitas: la posición (x,y,z) y el error de nuestro reloj (cdt) en el momento de la toma de datos (Tr)

En diferentes situaciones las incógnitas pueden cambiar.

Número ecuaciones = Número incógnitas

- Cada satélite presente plantea una nueva ecuación.
- Para poder resolver se precisa que el número de ecuaciones del modelo sea igual (como mínimo) al número de incógnitas.
- En el problema típico tenemos 4 incógnitas (x,y,z + cdt).

$\Downarrow$

- Precisaremos un mínimo de 4 ecuaciones

= 4 satélites visibles para posicionarnos.

¡¡ El problema típico no es el único que podemos plantear !!

Otros posibles problemas

1) Imaginad que sabemos nuestra posición (estación fija) y nuestra única incógnita es el error de reloj: ¿cuántos satélites necesito?

SOLO 1

2) Antes de saber nada sobre problemas de sincronía pensábamos que sólo necesitábamos 3 satélites (ya que sólo había 3 incógnitas xyz)

¿Se os ocurre como podríamos hallar una solución con sólo 3 satélites?

Fijando h (altura) y resolviendo para (lat, lon, cdt): 3 incógnitas.

3) Estando quieto tomo observaciones a 6 satélites en 10 instantes de tiempo sucesivos. ¿Cuántas ecuaciones tendré? ¿Incógnitas?

Incógnitas: 3 (xyz que no cambia) + 10 dt's (cambian con el tiempo)

Ecuaciones: 60 = 10 x 6 (10 observaciones a cada uno de los 6 sats).

Resolución de las ecuaciones (1)

Nuestro modelo es una función (más o menos complicada) relacionando las incógnitas $\underline{x}$=(x,y,z,cdt) con los observables/medidas GPS (ρ):

$$\rho(\overline{x}) = \sqrt{(X_S - x)^2 + (Y_S - y)^2 + (Z_S - z)^2} + cdt(T_R) - cdT(T_R - \tau)$$

IDEA 1: por muy complicada que sea f($\underline{x}$), lo que es fácil es evaluarla: en este caso obtener ρ si conocemos las incógnitas (x, y, z, cdt).

Nosotros estamos interesados en el problema inverso (más complicado):

- Nuestro GPS mide un cierto valor del observable ρobs.
- Hay que encontrar la solución $\underline{s}$ tal que $\rho(\underline{s})$ = **ρobs**

Resolución de las ecuaciones (2)

IDEA 2: al evaluar el modelo estimo lo cerca/lejos que estoy de la solución. Si tengo una hipótesis x para la solución:

$$F_{esp} = f(x)$$

Fesp (esperado) es lo que mi modelo espera ver en la posición x.

Fobs (observado) son las medidas que mi GPS realmente ve.

- La discrepancia (Fobs – Fesp) me da una idea del error de la hipótesis.
- Si es muy grande, mi hipótesis x no me da para nada los resultados correctos, y por lo tanto, debe estar muy lejos de la verdadera solución

$$\left.\begin{aligned} F_{obs} &= f(s) \\ F_{esp} &= f(x) \end{aligned}\right\} (F_{obs} - F_{esp})$$

Predicción modelo para hipótesis x

Datos medidos por el GPS

¿Cómo usar esta diferencia para mejorar x?

Resolución ecuaciones (3)

IDEA 3: ¿Puedo establecer una relación entre el error de la hipótesis δx = (s - x) y la discrepancia entre observado y predicho (Fobs – Fesp)?

δx es lo que le falta a x para ser la solución correcta s → (s = x + δx)

Desarrollando f por Taylor y despreciando términos en $\delta x^2, \delta x^3, \ldots$:

$$f(s) = f(x + \delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \delta x + \ldots$$

Como $F_{obs} = f(s)$ y $F_{esp} = f(x)$ tenemos que:

$$F_{obs} \approx F_{esp} + f'(x) \cdot \delta x \longrightarrow \boxed{\delta x \approx \frac{(F_{obs} - F_{esp})}{f'(x)}}$$

Esta ecuación relaciona la discrepancia entre observables (ΔF) con la corrección de posición (δx) necesaria para cancelarla (usando derivada)

Formulación multidimensional (I)

En posicionamiento GPS la ecuación básica es un observable (pseudo-rango). La única diferencia es que ρ(x) depende ahora de un vector x=(x,y,z,cdt).

$$f(\bar{x}) = \rho(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Al igual que antes, podemos evaluar ρ(x) en nuestra hipótesis x para obtener el observable (ρ_esp) esperado. Si "acertamos" con la solución correcta s el modelo nos daría el observable (ρ_obs) medido por el GPS.

$$f(\bar{s}) = \rho_{obs} \qquad f(\bar{x}) = \rho_{esp}$$

De nuevo podemos asumir que s = x + dx y desarrollar en serie de Taylor:

$$f(\bar{s}) = \rho_{obs} = f(\bar{x} + \delta\bar{x}) = f(\bar{x}) + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}} \delta x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}} \delta x_2 + \ldots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\bar{x}} \delta x_n \right) + \ldots$$

$$(\rho_{obs} - \rho_{esp}) \approx \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}} \delta x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}} \delta x_2 + \ldots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\bar{x}} \delta x_n \right)$$

Formulación multidimensional (II)

En forma vectorial: $$\Delta\rho = \rho_{obs} - \rho_{esp} = \left.\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\right|_{\bar{x}} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \ldots \\ \delta x_n \end{pmatrix} = \nabla f(\bar{x}) \cdot \delta\bar{x}$$

La idea básica es la misma del caso 1D: pasar de una ecuación no lineal entre observable y posición a una aproximación lineal entre discrepancias entre observables $\Delta\rho$ (obs – esp) y la diferencia δx entre hipótesis y la solución.

Ahora una ecuación no es suficiente al tener varias incógnitas.

Necesitamos más ecuaciones → más observaciones → más satélites

tantos satélites (ecuaciones) como incógnitas en el modelo.

Normalmente las incógnitas = posición (x,y,z) y el error de reloj del GPS (cdt)

Como mínimo precisaremos observaciones a 4 satélites.

Planteamiento con m satélites visibles

Problema con m satélites observados (m ecuaciones) y 4 incógnitas:

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ \rho_m \end{pmatrix}_{obs} - \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ \rho_m \end{pmatrix}_{esp} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \frac{\partial f_m}{\partial x_3} & \frac{\partial f_m}{\partial x_4} \end{pmatrix}\right|_{\bar{x}} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \ldots \\ \delta x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \Delta\rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ H \\ \\ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\bar{\rho}_{obs} - \bar{\rho}_{esp}\right) = H(\bar{x}) \cdot \delta\bar{x} \Rightarrow \Delta\bar{\rho} = H \cdot \delta\bar{x}$$

En vez de una sola derivada f’ tenemos ahora toda una matriz.

H=matriz de diseño o jacobiano del sistema

obtenida derivando todos los observables con respecto a todas las incógnitas.

Resumen: caso multidimensional

Caso 1D: $f'(x)\cdot\delta x \approx \left(F_{obs} - F_{esp}\right)$ despejar δx y hacer $x = x + \delta x$

En el caso multidimensional, la matriz jacobiano H (o matriz del diseño del sistema) generaliza el concepto de la derivada 1D:

Caso nD: $H \cdot \delta\overline{x} \approx \left(\overline{\rho}_{obs} - \overline{\rho}_{esp}\right)$ despejar <u>δx</u> y hacer $\overline{x} = \overline{x} + \delta\overline{x}$

Al tener muchas funciones (pseudorangos) y muchas incógnitas hay que calcular las derivadas de todas las funciones respecto a todas las variables.

Caso 1D

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} & \frac{\partial \rho_1}{\partial y} & \frac{\partial \rho_1}{\partial z} & \frac{\partial \rho_1}{\partial (cdt)} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial x} & \frac{\partial \rho_2}{\partial y} & \frac{\partial \rho_2}{\partial z} & \frac{\partial \rho_2}{\partial (cdt)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \rho_n}{\partial x} & \frac{\partial \rho_n}{\partial y} & \frac{\partial \rho_n}{\partial z} & \frac{\partial \rho_n}{\partial (cdt)} \end{pmatrix}_{(x,y,z,cdt)}$$

Cálculo de la matriz H para nuestro modelo

$$\rho(x,y,z,cdt) = \sqrt{(X_S - x)^2 + (Y_S - y)^2 + (Z_S - z)^2} + cdt - cdT$$

Para obtener la matriz de diseño H derivamos los observables ρ con respecto a todas las incógnitas (en este nuestro caso x,y,z y cdt):

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{-2(X_S - x)}{2\sqrt{(X_S - x)^2 + (Y_S - y)^2 + (Z_S - z)^2}} = \frac{-(X_S - x)}{R}$$

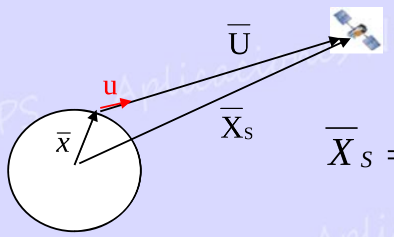
$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{-2(Y_S - y)}{2\sqrt{(X_S - x)^2 + (Y_S - y)^2 + (Z_S - z)^2}} = \frac{-(Y_S - y)}{R}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{-2(Z_S - z)}{2\sqrt{(X_S - x)^2 + (Y_S - y)^2 + (Z_S - z)^2}} = \frac{-(Z_S - z)}{R}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial (cdt)} = 1$$

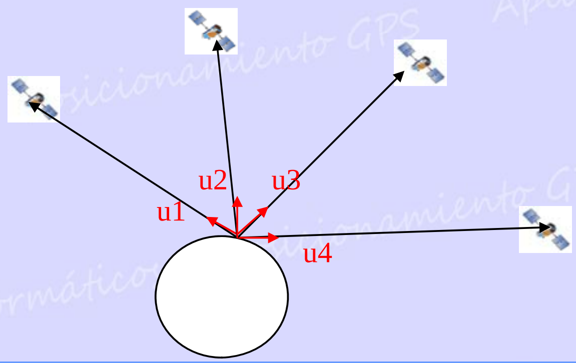
Interpretación de las filas de H

Cada fila de la matriz H queda: $\left(\frac{-(X_S - x)}{R}, \frac{-(Y_S - y)}{R}, \frac{-(Z_S - z)}{R}, 1 \right)$



$$\overline{X}_S = \overline{x} + \overline{U} \longrightarrow \overline{U} = \overline{X}_S - \overline{x} \longrightarrow \overline{u} = \frac{\overline{U}}{\left\|\overline{U}\right\|} = \frac{\overline{X}_S - \overline{x}}{R}$$

Las primeras tres componentes de cada fila son el vector normalizado <u>u</u> que apunta desde el receptor hacia el correspondiente satélite (signo cambiado)



$$H = \begin{pmatrix} \boxed{-\overline{u}^1} & 1 \\ \boxed{-\overline{u}^2} & 1 \\ \boxed{-\overline{u}^3} & 1 \\ \boxed{-\overline{u}^4} & 1 \end{pmatrix}$$

Tamaño de H: ecuaciones e incógnitas

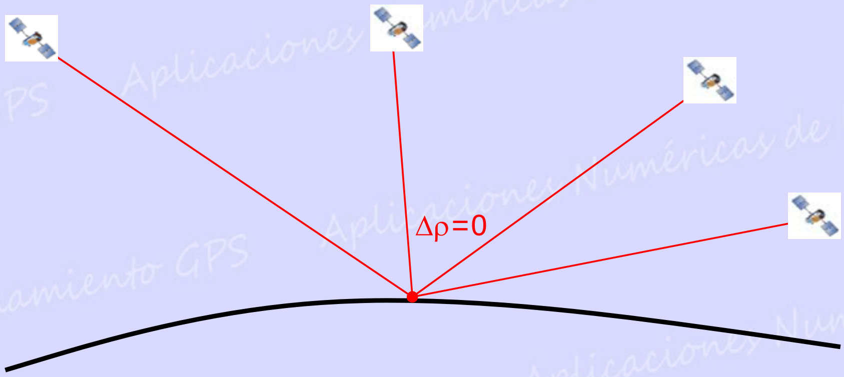
$$H = \begin{pmatrix} -u_X^1 & -u_Y^1 & -u_Z^1 & 1 \\ -u_X^2 & -u_Y^2 & -u_Z^2 & 1 \\ -u_X^3 & -u_Y^3 & -u_Z^3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -u_X^M & -u_Y^M & -u_Z^M & 1 \end{pmatrix}$$

filas de H = M = número de satélites

columnas de H = número de incógnitas = 4

- Tenemos 4 incógnitas = 4 columnas → necesitamos como mínimo 4 sats (4 filas) para poder resolver (H sería una matriz cuadrada 4x4).
- Con más de 4 satélites es un sistema sobredeterminado (más alto que ancho)
  - No podremos resolver las ecuaciones de forma exacta.
  - Calcularemos la solución que mejor ajuste a las observaciones.

Resolución con el mínimo de 4 satélites

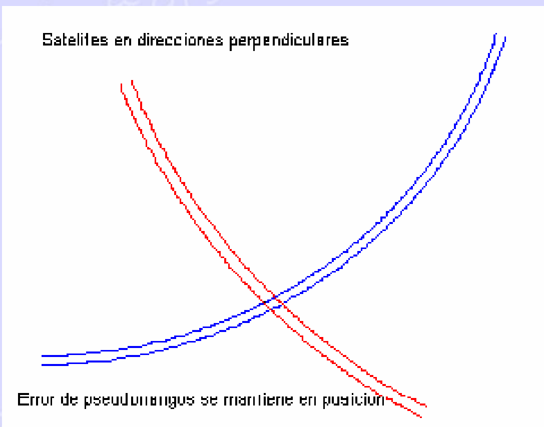


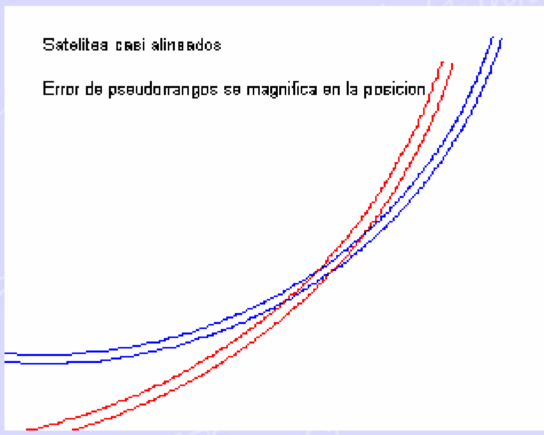
Con 4 satélites (matriz H 4x4) estamos seguros de poder obtener una solución exacta: la posición que verifica las 4 observaciones ($\Delta\rho$ = 0).

Aunque matemáticamente exacta, no va a ser la “verdadera” solución debido a los errores de las medidas, aspectos que hemos simplificado u omitido al plantear nuestro modelo (retrasos atmosféricos, etc.)

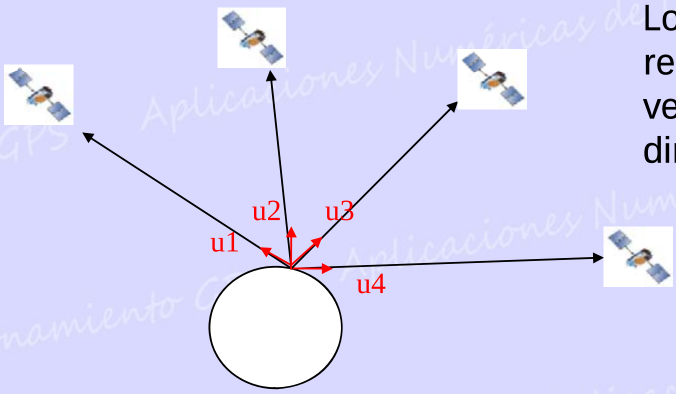
Error en la solución

- La existencia de una solución matemática no garantiza que sea buena.
- Incluso en este modelo simplificado tendremos errores (en la medida de las distancias a los satélites, posición de los satélites, etc.)
- Estos errores pueden ser magnificados más o menos en la solución (nuestra posición x,y,z), dependiendo de la “geometría” del problema:





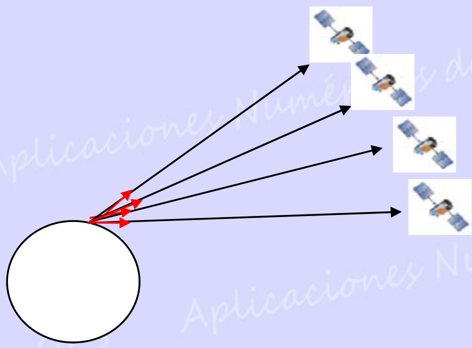
Error y geometría satélites



Lo ideal es tener satélites bien repartidos por el cielo, con los vectores <u>u</u> apuntando hacia direcciones diferentes

Con los satélites sólo en un sector o alineados sus vectores <u>u</u> serán muy parecidos o una combinación lineal unos de otros.

Una matriz (H) con filas “similares” se parece a una matriz singular (mal condicionada), con errores mayores en la solución obtenida



Cuantificación (DOP, Dilution of Precision)

- Cuantificar la magnificación de los errores de partida: $DOP \approx \frac{\|\Delta\bar{x}\|}{\|\Delta\bar{\rho}\|}$
- En el mejor de los casos DOP será del orden de la unidad.
- Pueden definirse DOPs específicos para las diferentes componentes de la solución: PDOP (posición), TDOP (tiempo), HDOP (horizontal), etc.
- DOP se estima a partir de la matriz H (construida para los satélites visibles):

$$Q = \left(H^T H\right)^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{21} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix}$$

$$PDoP = \sqrt{q_{11} + q_{22} + q_{33}}$$

$$TDoP = \sqrt{q_{44}}$$

- Es aplicaciones muy precisas puede ser necesario calcular previamente los valores de PDOPs para planificar la hora ideal para las observaciones.

Solución con más de 4 satélites

Sistema sobredeterminado: 4 incógnitas y M>4 observaciones (ecs.)

$$\begin{pmatrix} \\ \\ & H & \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \\ \Delta\rho_3 \\ \Delta\rho_4 \\ \dots \\ \dots \\ \Delta\rho_m \end{pmatrix}$$

Es imposible cumplir de forma exacta las M observaciones con solo 4 incógnitas.

Cambiamos "igual" por un "parecido a"

El nuevo sistema (aproximado) se resuelve usando mínimos cuadrados.

La solución minimiza la discrepancia:

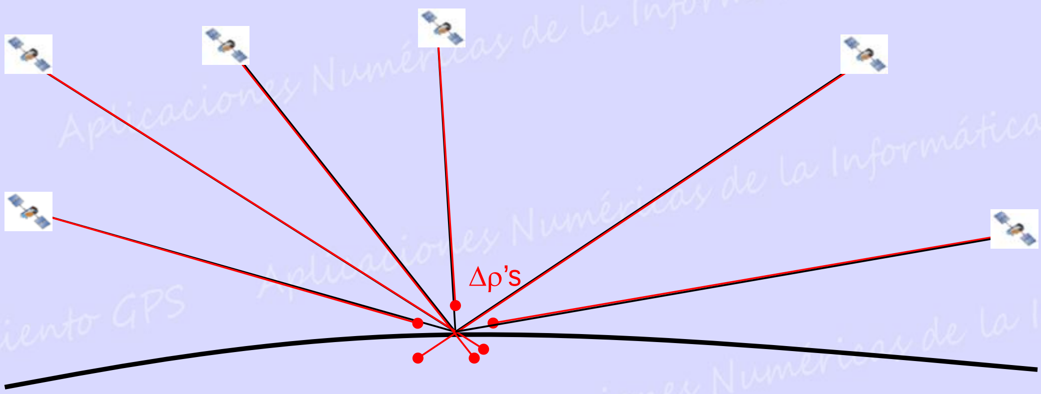
$$\left\| \Delta\overline{\rho} - H\Delta\overline{x} \right\|_2$$

La solución de mínimos cuadrados viene de las ecuaciones normales:

$$H^T(H\Delta x) = H^T(\Delta\rho) \Rightarrow \Delta x = \left(H^T H\right)^{-1} H^T(\Delta\rho)$$

En MATLAB: $\delta\overline{x} = H \setminus \Delta\overline{\rho}$ (igual que para el caso no sobredeterminado).

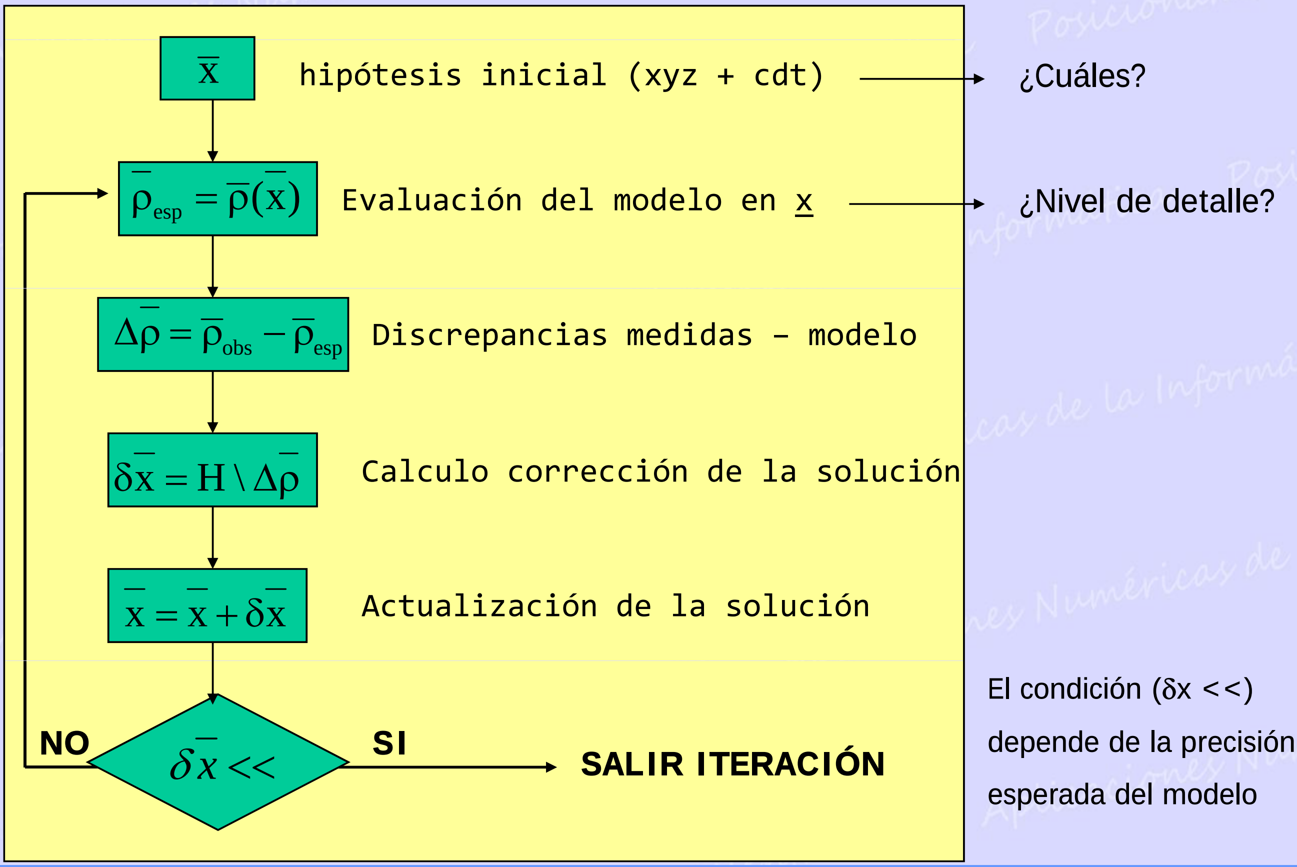
Resolución con más de 4 satélites



Con más de 4 satélites tendremos una solución matemática aproximada, porque ninguna posición verifica exactamente TODAS las observaciones.

Llegaremos al final de la iteración sin conseguir que todos los residuos $\Delta\rho$ se anulen: no podremos cumplir exactamente todas las condiciones (recordad que se cambió el "igual" por un "parecido a" en las ecuaciones).

Proceso Iterativo completo



Hipótesis iniciales de las incógnitas

El método iterativo necesita una hipótesis de partida (al arrancar el receptor o empezar a procesar datos de un fichero) para las incógnitas, aunque su elección no es crítica.

1. (x,y,z): podemos hacer xyz =[0; 0; 0] (centro Tierra) y funciona. Lo normal es usar la última posición conocida. Si no se dispone de ella (primer arranque o pérdida de memoria) una hipótesis más razonable que (0,0,0) puede obtenerse de la posición media de los satélites visibles proyectada sobre la superficie de la Tierra.

2. cdt: en una primera aproximación puede tomarse cdt = 0.

   Una mejor hipótesis de partida es la diferencia entre la media de los pseudo-rangos observados y la distancia media esperada a los satélites (unos 20000 km).

Estas hipótesis son para el arranque inicial. Una vez funcionando usaremos los valores obtenidos en la medida anterior (típicamente un segundo antes).

Nivel de detalle en el modelo (I)

1) Usamos el error de reloj del receptor para hallar el tiempo recepción GPS:

Tr_gps = Tr_rec – dt.

2) Necesitamos el tiempo de transmisión Tx_gps para calcular los datos del satélite (posición + error de reloj) en ese momento.

En una primera aproximación podemos un valor medio (70 msec) y hacer

Tx_gps = Tr_gps – 0.070

Alternativamente podemos considerar que el tiempo de vuelo será distinto entre cada satélite y el receptor.

En ese caso definiríamos un valor medio $\tau = 0.070$ seg antes de entrar en la iteración y en cada paso se calcularía:

Tx_gps = Tr_gps – τ

La diferencia es que ahora los τ's se actualizarán en cada paso dividiendo las distancias R (entre cada satélite y el receptor) por la velocidad de la luz c (y serán distintos para cada satélite).

Nivel de detalle en el modelo (II)

3) Una vez "conocido" el tiempo de transmisión (con mejor o peor precisión) llamaremos a nuestra rutina para obtener los datos del satélite. Podemos proseguir usando esos datos o aplicar algunas correcciones adicionales:

a) Con la velocidad de rotación de la Tierra (ω =7.2921151467e-5 rad/s), modificar la posición de los satélites compensando por el giro de la Tierra ($\theta=\omega\cdot\tau$) durante el tiempo de vuelo. Se trata de aplicar a las coordenadas XYZ obtenidas la correspondiente matriz de giro:

$$matR = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Adicionalmente podemos aplicar una corrección relativista al error de reloj del satélite, cdT:

$$cdT = cdT - 2\frac{\overline{X}_s \overline{V}_s}{c}$$

Producto escalar

Nivel de detalle en el modelo (III)

4) Hallar para la actual estimación de la posición (x,y,z) y la de los satélites las nuevas distancias (R) a los satélites y los vectores unitarios u (rec → sat). Construir con ellos la matriz H.

$$R = \sqrt{(X_S - x)^2 + (Y_S - y)^2 + (Z_S - z)^2} \qquad \bar{u} = \frac{1}{R}\left((X_S - x),(Y_S - y),(Z_S - z)\right)$$

4bis) Si usamos diferentes tiempos de vuelo, actualizarlos como τ = R/c

5) Calcular pseudo-rangos según modelo: $\rho_{esp}(\bar{x}) = R + cdt - cdT \boxed{+ I + T + ..}.$

y las discrepancias con las medidas del GPS: $\Delta\bar{\rho} = \bar{\rho}_{obs} - \bar{\rho}_{esp}$

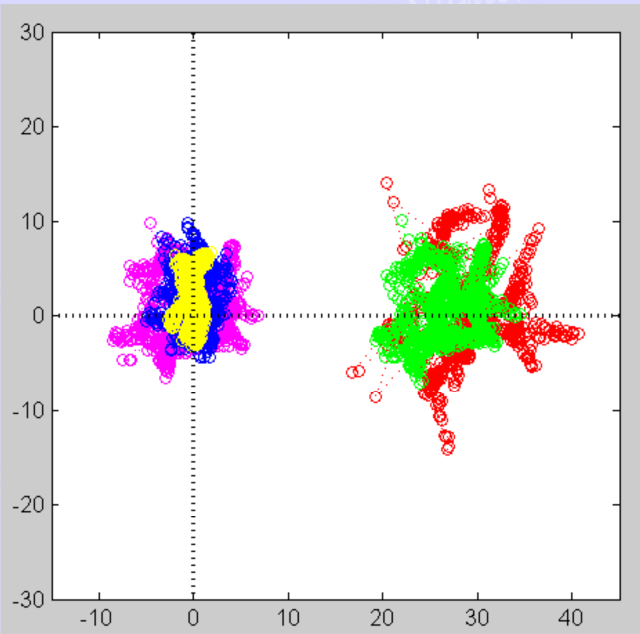
6) Resolver el sistema $H\delta\bar{x} = \Delta\bar{\rho}$, determinando la corrección: $\delta\bar{x} = H \setminus \Delta\bar{\rho}$

6bis) Podemos definir calidades diferentes para las medidas de cada satélite en función de p.e. su elevación → resolver δx usando pesos.

7) Actualizar nuestra solución $\bar{x} = \bar{x} + \delta\bar{x}$

8) Terminar el bucle si la corrección aplicada δx es lo suficientemente pequeña.

Resultados usando muchos datos



Esta gráfica muestra los resultados de resolver nuestra posición para un conjunto grande de datos tomados en una posición **estática** conocida.

Se representa el error (en mt) en ambas coordenadas horizontales.

Rojo → Básico (τ constante)

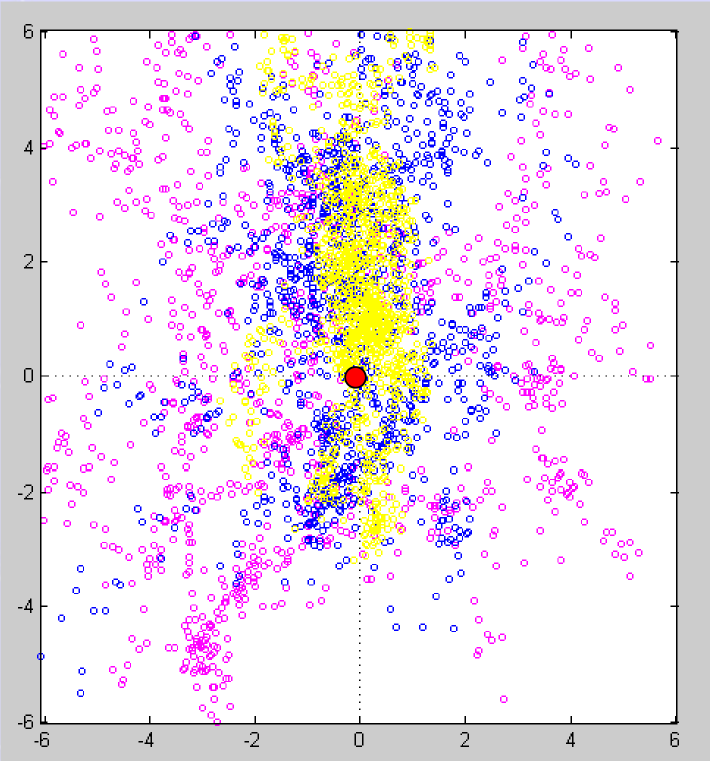
Verde → uso de τ's variables.

Magenta → + corrección giro Tierra

Azul → + corrección relativista.

Amarillo → + uso de pesos.

Detalle de los mejores resultados (zoom)



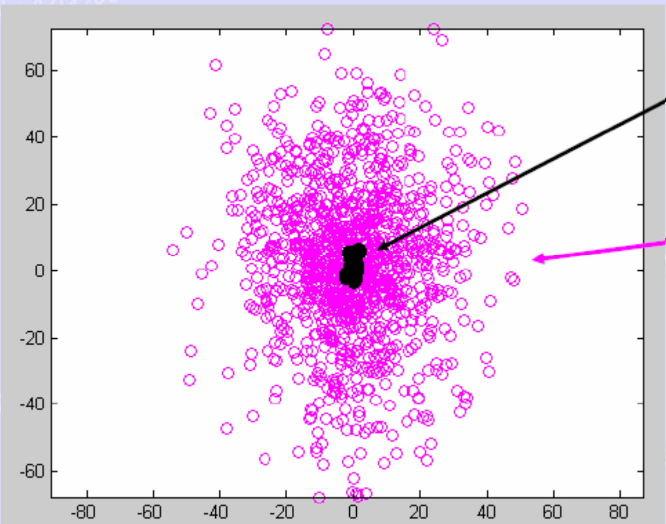
La mayoría de los resultados se observan en un área de +/-5 mt, (incluso mejor en algún caso)

¿Cómo puede ser eso si hemos ignorado los retrasos de la ionosfera y la troposfera en nuestro modelo?

Eso suponía errores de decenas de metros en los pseudorrangos.

GPS funciona mejor de lo que cabría esperar (sobre todo en hallar nuestra posición en el plano, latitud/longitud)

No siempre fue así: disponibilidad selectiva



Nuestro mejor algoritmo aplicado a datos actuales.

El mismo algoritmo aplicado a datos previos a mayo del 2000

Tras ver lo bien que funcionaba GPS usando sólo el canal “civil” el DoD procedió a mandar una señal artificialmente “estropeada”: disponibilidad selectiva (SA).

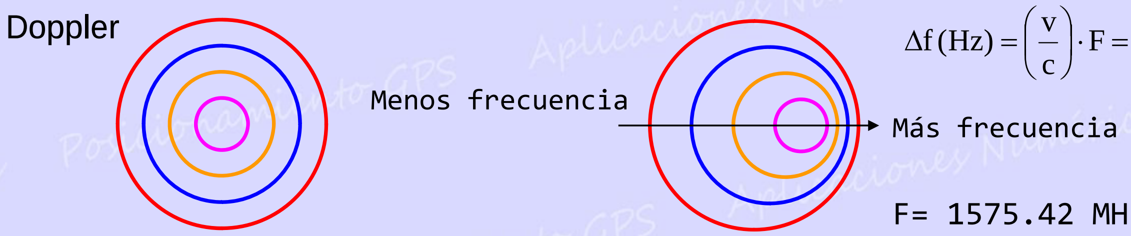
En mayo de 2000 se volvió a la situación original, eliminándose la SA.

Otros observables

Observable Doppler

- Para escuchar a los satélites un GPS debe sintonizar su frecuencia, que no será exactamente su frecuencia nominal de emisión F = 1575.42 MHz
- El desplazamiento de frecuencia observado (respecto a la F nominal) se convierte en un nuevo observable medido por el GPS para cada satélite.
- Razones de ese corrimiento de frecuencia:

  - Derivas de los relojes involucrados (sat + receptor)
  - Corrimiento Doppler por la velocidad relativa satélite-receptor.



$$\Delta f\,(\mathrm{Hz}) = \left(\frac{v}{c}\right)\cdot F = \frac{v}{\lambda}$$

F= 1575.42 MHz
λ= 0.19029367 m.

La velocidad de los satélites causa corrimientos Doppler de unos 10-15 KHz.

Observable Doppler

- El deplazamiento de frecuencia observado está relacionado con la derivada del pseudorrango (mt/s) a través de la longitud de onda λ :

$$\lambda \cdot \Delta f\,(Hz) = \dot{\rho}$$

- Derivando la ecuación del pseudo-rango obtenemos la ecuación:

$$\lambda \cdot \Delta f = u_X (V_{SX} - v_X) + u_Y (V_{SY} - v_Z) + u_Z (V_{SZ} - v_Z) + cd - cD$$

- u es nuestro conocido vector unitario desde el receptor al satélite.
- (vx, vy, vz) es la velocidad del receptor y d la deriva de su reloj (la derivada del error de reloj). En total 3+1 = 4 incógnitas.
- (Vx,Vy,Vz) son las velocidades del satélite y D la deriva de su reloj (calculable con mensaje de navegación/datos ficheros SP3).

Ecuaciones de posicionamiento / velocidad

$$\rho(\bar{x}) = \sqrt{(X_S - x)^2 + (Y_S - y)^2 + (Z_S - z)^2} + cdt - cdT$$

$$\lambda \cdot \Delta f = u_X (V_{SX} - v_X) + u_Y (V_{SY} - v_Z) + u_Z (V_{SZ} - v_Z) + cd - cD$$

Medidas del receptor GPS: pseudorrangos ρ's
corrimientos Doppler Δf

Datos calculables: posiciones (XYZ) y velocidades (Vx,Vy,Vz) de sats, junto con el error (dT) y deriva (D) de sus relojes.

8 Incógnitas: Posición (x y z), Velocidad (vx vy vz)
Error de reloj dt y deriva del reloj d (del receptor)

Necesitamos un mínimo de 8 ecuaciones = 4 satélites (ahora cada satélite aporta dos medidas (ecuaciones): pseudorrango + doppler)

Modelo de posicionamiento solo con Doppler

• Sólo con medidas Doppler (sin usar pseudorangos) se puede determinar la posición de un observador estático.

• Poner vx=vy=vz=0 en las ecuaciones de Doppler: la información de la posición está dentro del vector u=(ux,uy,uz) receptor → sat.

• Base del antiguo sistema TRANSIT (posicionamiento de submarinos).

• En la actualidad un sistema similar se usa en los llamados PLBs

<u>PERSONAL LOCATOR BEACONS</u>

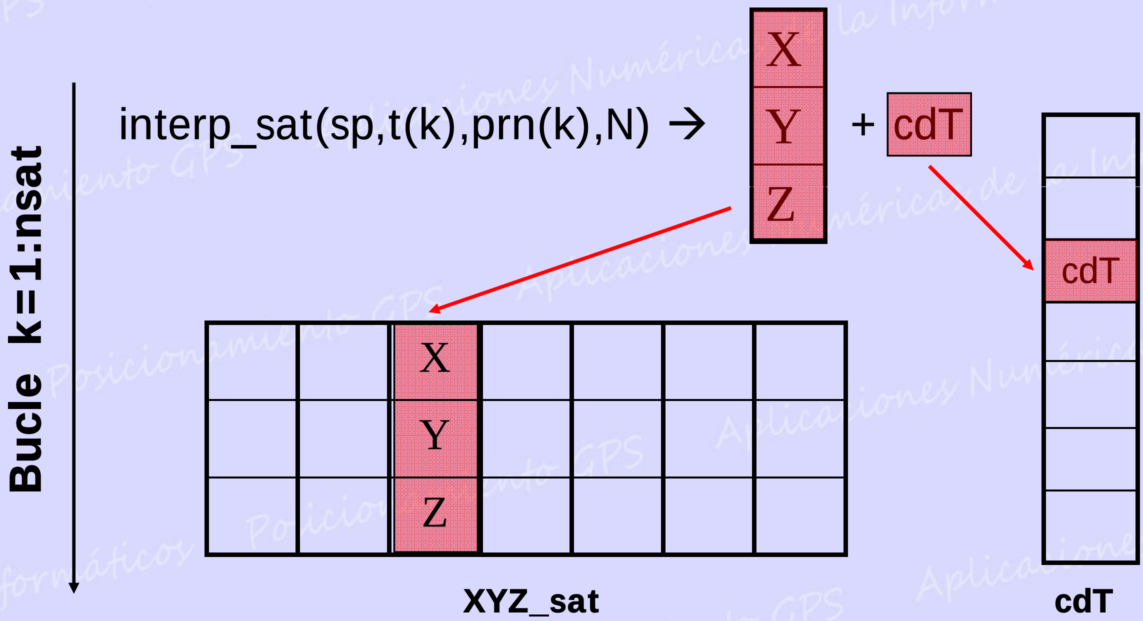
• La situación está invertida respecto a GPS o TRANSIT: el dispositivo PLB es el emisor.

• El PLB emite una señal (406 Mhz) y una red de satélites (SARSAT) la detecta y usa el corrimiento Doppler observado para estimar su posición con un error de unos centenares de metros.

2ª clase de LAB (ejer 1a)

[XYZ_sat, cdT]=get_data_sats(sp,t,prn,N)

Simplemente es hacer un bucle llamando a interp_sat() para los diferentes satélites (prn) en el tiempo o tiempos (t) dados. Devuelve matriz 3 x nsat con posiciones de los sats y vector cdT (nsat x 1) con los errores de reloj.

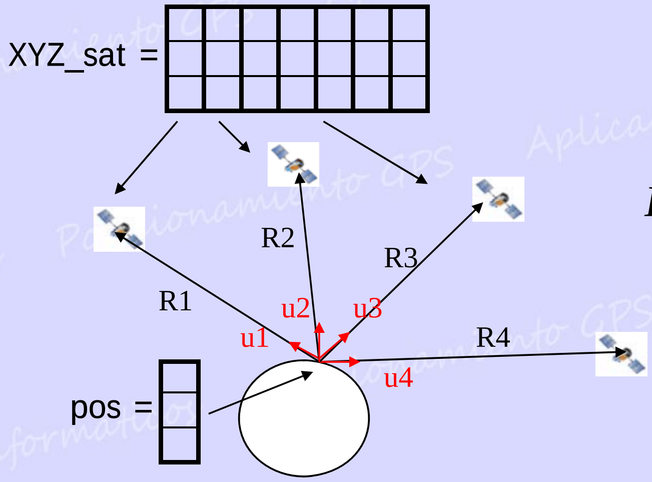


2ª clase de LAB (ejer 1b)

[H, R] = get_HR(XYZ , pos)

Dada una matriz 3 x nsat con las posiciones de los satélites (la matriz dada por la función anterior y la posición del observador pos (vector 3x1) calcula:

- La **matriz H** del jacobiano del sistema (tamaño nsat x 4)
- Un **vector columna R** (nsat x 1) con las distancias satélites-observador.



$$H = \begin{pmatrix} -\overline{u}^1 & 1 \\ -\overline{u}^2 & 1 \\ -\overline{u}^3 & 1 \\ -\overline{u}^4 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix}$$

OBJETIVO FINAL del 2º LAB (ejercicio 2)

X=get_pos(sp, Tr, prn, pseudorangos, X, N)

ENTRADA: - estructura **sp** con los datos de los satélites.
- datos del GPS: un tiempo **Tr** (tow) + lista de **PRNs** + lista de ρ**'s**

Opcionalmente (por defecto X=[0;0;0;0], N=8):
- hipótesis inicial X: vector 4x1 con la posición XYZ + cdt (error reloj).
- número de nodos N (par) a usar en las interpolaciones.

SALIDA: un **vector columna 4 x 1** con la solución final X = [x; y; z; cdt] conteniendo la posición (x,y,z) y error de reloj (cdt) del receptor.

La probaremos con los siguientes datos:

DATOS de igs13230.sp3 (Semana 1323) usando interpolación con N=8 nodos.

Tow 7200.00000000	SAT	Pseudorango
	1	23096478.313
	2	24501265.177
	5	24401880.133
	6	20555740.449

traza0_4sat.txt : traza con pasos intermedios (usando la implementación mínima)