**Случайным** называют событие, которое при осуществлении совокупности условий может либо произойти, либо не произойти.

Достаточно большое число однородных случайных событий (многократно наблюдающиеся при осуществлении одних и тех же условий) независимо от их конкретной природы подчиняется определенным вероятностным закономерностям.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

**Событие – результат испытания**. (пр. Стрелок стреляет по мишени. Выстрел – испытание. Попадание в область мишени – событие.)

События называют **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Два события называют **совместными**, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

Если события, образующие **полную группу**, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий. (пр. стрелок произвел выстрел по цели, обязательно произойдет одно из двух событий, попадание или промах, эти несовместные события образуют полную группу).

**Противоположными событиями** называются два единственно возможных события, образующих полную группу (событие A и противоположное событие Ā). (пр. попадание по цели и промах)

Каждый из возможных результатов испытания называют **элементарным исходом (событием)**. (пр. при испытании стрелка – это попадание и промах). Эти исходы образуют полную группу попарно несовместных равновозможных событий.

Элементарные исходы, в которых интересующее событие наступает являются **благоприятствующими** этому событию. (пр. Имеется в корзине 6 шариков – 3 красных, 2 синих, 1 белый. Интересующее событие – это появление цветного шарика. Возможны 6 элементарных исходов {}, которые образуют полную группу попарно несовместных равновозможных событий. Благоприятствуют интересующему событию 5 исходов)

**Отношение числа благоприятствующих событию A элементарных исходов m к их общему числу n называется вероятностью события A и обозначается через**

Множество всех элементарных событий, которые могут появиться в испытании, называется **пространством элементарных событий Ω**, а сами элементарные события – точками пространства Ω.

Событие A будет являться подмножеством пространства Ω, элементы которого есть элементарные исходы, благоприятствующие событию A. Таким образом, множество всех событий, которые могут наступить в испытании, есть множество всех подмножеств Ω.

Каждому элементарному исходу ставят в соответствие положительное число – вероятность этого исхода, а .

Свойства вероятности:

1. Вероятность достоверного события равна 1.
2. Вероятность невозможного события равна 0.
3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и 1.

**Формулы комбинаторики**

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества.

**Перестановками** называются комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающие только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок:

Пр. Есть цифры 1, 2, 3, сколько есть перестановок этих цифр?

(Проверка: 123, 132, 213, 231, 312, 321)

**Перестановки с повторениями** характеризуются количеством способов, которыми можно переставить n объектов, среди которых 1-й объект повторяется раз, 2-й объект повторяется раз, 3-й объект – раз,…, k-й объект – раз.

Уникальные (не повторяющиеся) объекты, в этом случае соответствующие значения равны единице.

**Размещениями** называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений:

Пр. Сколькими способами можно заполнить 2 места, если есть 4 претендента (1,2,3,4)?

(Проверка: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43)

**Размещения с повторениями**. Дано множество, состоящее из n объектов, при этом любой объект можно выбирать неоднократно. Сколькими способами можно выбрать m объектов, если важен порядок их расположения в выборке?

**Сочетаниями** называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний:

Пр. Сколькими способами можно вытащить два цветных шарика из коробки, содержащей 4 шарика разных цветов?

(Проверка: 12, 13, 14, 23, 24, 34)

**Сочетания с повторениями**. Для выбора предложено n множеств, каждое из которых состоит из одинаковых объектов. Сколькими способами можно выбрать m объектов?

Числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством:

**Правило суммы**. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать, либо A, либо B можно m+n способами.

**Правило произведения**. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана m\*n способами.

**Относительная частота.**

**Относительная частота события** – отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

Вероятность вычисляют до опыта, частоту после.

В качестве **статистической вероятности** события принимают относительную частоту или число близкое к ней.

**Сложение вероятностей несовместных событий.**

Суммой A+B двух событий A и B называется событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий. Если два события несовместные, то их сумма является событием, состоящим в появлении одного из них, безразлично какого.

**Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:**

Пр. В корзине 10 красных, 7 синих и 13 белых шаров. Вероятность появления цветного шара?

Вероятность появления красного шара 10/30. Вероятность появления синего шара 7/30. События несовместны. Вероятность появления цветного = 10/30 + 7/30 = 17/30 = 0.57

**Теорема. Сумма вероятностей событий образующих полную группу равна единицы.**

**Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единицы:**

**Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:**

**Для независимых событий:**

**Для зависимых событий:**

**Умножение вероятностей**

Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий (грань кубика белая и четная).

**Условной вероятностью**  называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Пр. в мешке 3 черных и 3 белых шара, из мешка дважды вынимают по одному шару, найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B) если известно, что при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

После первого испытания в мешке осталось 3 белых и 2 черных шара. Искомая условная вероятность равна:

**Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного их них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:**

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже наступили:

Пр. в мешке 3 белых и 7 черных шаров, вытащили один шар, затем второй, какова вероятность того, что первый взятый - белый шар, а второй черный?

**Для независимых событий теорема умножения имеет вид:**

**Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий , , …, , независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий , , …, :**

Пр. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: p1=0.8, p2=0.7, p3=0.9. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

**Формула полной вероятности**

**Теорема. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий , , …, , образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:**

Пр. Имеется два набора деталей. Вероятность, того что деталь первого набора стандартна – 0.8, второго 0.9. Найти вероятность того, что взятая на удачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартная.

Событие A – извлеченная деталь стандартна. Событие – деталь извлечена из первого набора. Событие – из второго. Вероятность что деталь из первого набора, = 0.5. Вероятность что деталь из второго набора, = 0.5. Условная вероятность что из первого набора будет извлечена стандартная деталь = 0.8, из второго набора = 0.9.

**Формула Байеса**

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных события , , …, , образующих полную группу. Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют гипотезами. Вероятность появления события A вычисляется по формуле полной вероятности.

**Формула Байеса позволяет переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A:**

**Формула Бернулли**

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми относительно события A.

Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит n-k раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна . Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, т.е. . Так как эти сложные события не совместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность (появление k раз события A в n испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:

Пр. Стрелок совершает 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна. Найти вероятность того, что стрелок попадёт только один раз.

Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле считается известной, равна p, вероятность промаха в каждом выстреле q = 1-p.

Cобытие «Стрелок попадёт только один раз» имеет вероятность (индексы понимаются как «одно попадание из четырёх»). Данное событие состоит в 4 несовместных исходах: стрелок попадёт в 1-й или во 2-й или в 3-й или в 4-й попытке.

По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:

В каждом случае имеет место 1 попадание и 3 промаха. Вероятность того, что стрелок попадёт только один раз из четырёх:

**Локальная теорема Лапласа.**

Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее чем больше n) значению:

Пр. Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет ровно 200 раз.

n=400, k=200, p=0.5, q=1-p=0.5

На первом шаге вычислим требуемое значение аргумента:

Далее находим соответствующее значение функции .

Вероятность равна:

**Интегральная теорема Лапласа**

Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что событие A появится в n испытаниях от до раз, приближенно равна определенному интегралу:

**Случайная величина**

**Случайной** называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. Сама по себе случайная величина – это просто описание возможных состояний, ее можно использовать вместе с распределением вероятности, показывающим, насколько вероятно каждое состояние.

**Дискретной (прерывной**) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

**Непрерывной** называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Распределение вероятности описывает, с какой вероятностью случайная величина или множество случайных величин принимает каждое возможное значение.

**Законом распределения дискретной случайной величины** называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями. Его можно задать таблично, аналитически (в виде формул) и графически.

В одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, поэтому события образуют полную группу, следовательно, сумма вероятностей этих событий равна 1.

Если множество возможных значений случайной величины бесконечно, то ряд p1+p2+… сходится и его сумма равна 1.

Распределение дискретных случайных величин описывается функцией вероятности P(x) и имеет свойство .

Распределение непрерывных случайных величин описывается функцией плотности вероятности p(x) и имеет свойство .

**Равномерное распределение**

Случайную величины x с k состояниями. Равномерное распределение x – когда все состояния равновероятны, а сумма равна 1:

**Математическое ожидание.**

Среднее значение случайной величины, полученное при бесконечном числе испытаний, в результате которых величина определяется, или по выборке бесконечного размера. Если для каждого значения, принимаемого случайной величиной X известна его вероятность P, то ее математическое ожидание будет равно сумме произведений каждого значения на его вероятность:

Если случайная величина является непрерывной, то вместо суммы будет использоваться интеграл, а вместо вероятности — ее плотность:

Математическое ожидание может служить в качестве усредненной оценки случайной величины.

Математическое ожидание иногда называют «центром тяжести» распределения случайной величины. Фундаментальным свойством математического ожидания является то, что среднее значение любой случайной величины при увеличении числа ее наблюдений будет стремиться к своему математическому ожиданию.

**Дисперсия.**

Величина, которая характеризует меру разброса значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

Если случайная величина X дискретная:

Если случайная величина X непрерывна:

Квадратный корень из дисперсии, обозначаемый σ, называется **среднеквадратическим отклонением:**

Дисперсия является одним из параметров нормального закона распределения. Чем больше дисперсия, тем более пологими являются «склоны» распределения и длиннее его «хвосты».

Чем выше дисперсия параметров модели (коэффициентов регрессии, значений переменных и т.д.), тем менее устойчивой она будет. Высокая дисперсия исходных данных позволяет предположить высокую значимость в них случайной компоненты, возможном наличии шума и аномальных значений.