Matematica: Parla come mangi!
(elementi di analisi matematica
per tutti, ma proprio tutti!)

Riccardo Carlesso

April 29, 2021

Contents

1 Introduzione **5**
- 1.0.1 Per chi e' questo libro . . . 7

2 Notazione e definizioni **9**
- 2.0.1 simboli . . . 9
- 2.1 Come leggere una funzione . . . 10
  - 2.1.1 Una funzione facile: una retta . . . 10
  - 2.1.2 Una funzione piu' complessa: un generico polinomio . 11

3 Numeri **13**
- 3.1 Insiemi notevoli, in breve . . . 13
- 3.2 I numeri naturali . . . 14
- 3.3 I numeri interi . . . 15
- 3.4 I numeri reali . . . 15
- 3.5 I numeri complessi . . . 15

4 Funzioni **17**
- 4.1 Cos'è una funzione . . . 17
- 4.2 Funzioni notevoli . . . 20
  - 4.2.1 Polinomi . . . 20
  - 4.2.2 $\sin(x)$ . . . 21
  - 4.2.3 $\cos(x)$ . . . 22
  - 4.2.4 $\tan(x)$ . . . 22
  - 4.2.5 Funzioni iperboliche ($\sinh(x)$, $\cosh(x)$,..) . . . 23
  - 4.2.6 e^x . . . 23
  - 4.2.7 $\log(x)$ . . . 24
- 4.3 Studi di funzione . . . 24
  - 4.3.1 Dominio e codominio . . . 25
  - 4.3.2 Incontro con gli assi . . . 26
  - 4.3.3 Massimi e minimi . . . 27
  - 4.3.4 Aree e integrali . . . 28
- 4.4 Altro sulle funzioni . . . 29
  - 4.4.1 Relazioni . . . 29

4.4.2 Funzioni inverse 29
4.4.3 Funzioni di piú variabili 31
4.4.4 Funzioni composte 31

5 Trigonometria **33**
5.1 Seni & co. 33
5.2 Altro 35

6 Limiti **37**
6.1 Limiti: un'introduzione 37
6.2 Limiti: definizione 38
6.2.1 Limiti sinistri e destri 40
6.2.2 Limiti e infinito 41
6.3 Limiti notevoli 41
6.4 Derivate notevoli 41
6.5 Limiti: uso pratico 41

7 Derivate **43**
7.1 Cos' èuna derivata 43
7.1.1 Esempio 1: sport 44
7.2 Derivate notevoli 48
7.2.1 Proprietá delle derivate 49
7.3 Massimi e minimi 50

8 Equazioni differenziali **53**
8.1 Introduzione 53

9 Serie di Taylor **55**
9.1 Lo sviluppo di Taylor 55
9.2 Esempio facile 56
9.3 Esempio piu' complicato 57
9.4 Conclusione 58

Chapter 1

Introduzione

“ “Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty—a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show.” “

– Bertrand Russell

Se vi trovaste su un'isola deserta per qualche anno, una volta messi a posto i bisogni primari, e foste alla ricerca di un hobby, non potreste dedicarvi a ricercare la storia perche' vi mancherebbero i libri e i dati per studiarla, e correlare eventi; non potreste dedicarvi alla geografia. Potreste probabilmente dedicarvi alla Fisica, ma vi fermereste abbastanza presto a riscoprire Newton e presumo non potreste andare oltre un certo punto per mancanza di un laboratorio ben equipaggiato; potreste inventare una pila, una doccia, e sicuramente vi sarebbe utile. Se vi passasse per la mente di studiare la matematica, tutto cio' che vi serve e' un bastoncino e tanta sabbia. L'indomani probabilmente dovreste riscrivere alcuni passi spazzati via dal vento, ma le conquiste importanti (ad esempio, supponiamo che ieri abbiate riscoperto Pitagora) vi rimarrebbero impresse in mente. A me personalmente piace giocare con la matematica inventando un problema e cercando di risolverlo con carta e penna, senza altri aiuti - come in un'isola deserta. Ho sviluppato per questo motivo un approccio inquisitivo (ma perche' facciamo cosi'? E' davvero l'unico modo di fare cosi' o i Marziani potrebbero farlo diversamente? E se avessi mo 6 dita invece di 5, quanto varrebbe Pi greco? E il teorema di pitagora varrebbe anche su Marte o su una sfera?).

In questo libro cerco di non dirvi pedissequamente cos'e' un limite o una funzione, ma cerco di spiegare con esempi che - si spera - possano avvicinare persone che fino a ieri hanno ODIATO la matematica, magari dissacrando quegli altarini di "aulicita'" che magari ve l'hanno resa antipatica sulla crosta. La matematica per me e' come una noce di cocco: ci vuole un cacciavite per aprirla, ed e' difficile la prima volta, ma l'interno e' succoso e pieno di sorprese. Il mio scopo e' fornirvi il cacciavite e mostrarvi quanto succoso sia il contenuto.

1.0.1 Per chi e' questo libro

Questo libro e' inteso per due categorie di persone:

1. Persone con la terza media (o piu') che abbiano completato la parte piu' elementare della matematica (somme, sottrazioni, percentuali, qualche funzione a sistema) e siano curiose di conoscere concetti un po' piu' complessi.

2. Universitari che sono costretti ad affrontare questi concetti complessi.

Cerchero' di insegnare la matematica con toni giocosi, talvolta volgari (e slang bolognese), con l'arrogante ipotesi che questo linguaggio possa essere piu' vicino ai giovani, e possa insegnare la matematica divertendo. Passero' particolare tempo a spiegare non tanto COSA sia un certo concetto[1] ma perche' lo studiamo, perche' e' importante, e tutte quelle piccole cose che i vostri professori hanno probabilmente dato per scontato.

[1] Persone piu' brave di me avranno fatto un ottimo lavoro e saranno disponibili online, se volete definizioni esatte e teoremi ben enunciati.

In altre parole cerchero' di fare per la matematica quello che un bravo professore di storia cerca di fare per la Storia: fornirvi il contesto.

E visti gli ultimi tempi con il Covid-19, mi sono accorto di quanto ci sia bisogno di matematica (e statistica) nella vita di tutti per evitare di dire le baggianate che sto ascoltando nei social Network. :)

N$\underline{o}$ta. Questo "libro" e' stato scritto a internet spenta (probabilmente alla prossima passata mi accertero' di non aver scritto baggianate).

Chapter 2

Notazione e definizioni

" You don't have to be a mathematician to have a feel for numbers "

– John Forbes Nash, Jr.

In questo capitoletto tratteremo il difficile problema di capirci: non solo quando si parla italiano (il che e' lasciato alla mia capacita' di scriverlo e a quella delle vostre maestre delle elementarii), ma anche quando si parla matematichese (con quegli strani simboli come $\forall$, ν, $\doteq$, $|$, $\ldots$). Questo capitolo vuole in parte spiegare come i matematici parlano matematichese (80% circa) e in parte come *io* parlo matematichese (il rimanente 20%). Tenetelo in considerazione almeno ogni tanto; ora come ora, vi do il permesso di saltarlo, poiche' e' certamente il piu' noioso.

2.0.1 simboli

1. $\doteq$ Simbolo di definizione; il 90% delle volte si intende: definisco ció che sta a *sinistra* con ció che sta a *destra*. Ad esempio: $x \doteq 2$ vuol dire: definiamo X come il numero 2 (facile), mentre con $f(x) \doteq x$ intendiamo: definiamo come f la funzione che e' uguale a x per ogni x, ovvero la funzione identita' (molto piu' coomplesso). Nel primo caso associamo a un acino d'uva il valore 2, nel secondo associamo a un grappolo d'uva tanti valori diversi che dipendono da che acino sia. Una nota estetica: non amo questo simbolo perche' non c'e' nulla dentro ad esso che privilegi la sinistra sulla destra, per cui preferico questo simbolo, ad esso equivalente: :=

2. $\equiv$ Simbolo di equivalenza; $a \equiv b$ vuole dire che a é equivalente a b (el 90% delle volte si intende: definisco ció che sta a *sinistra* con ció che sta a *destra*). E' qualcosa di piú forte dell'uguaglianza (so che fa strano, ma pensate a dire $f(x) = g(x)$ e a dire $f(x) \equiv g(x)$: nel

primo caso cerchiamo di vedere per quali x f e g si ugagliano, nel secondo stiamo dicendo che le due funzioni sono perfettamente identiche). Da notare che il segno di equivalenza tende ad aver senso solo per concetti complessi come funzioni e insiemi che a sinistra e a destra possano avere diversi valori. Per singoli valori come 3 e 4, equivalenza e uguaglianza sono equivalenti (pun intended), quindi e' inutile scomodare l'equivalenza dato che l'uguaglianza ha piu' anzianita'.

3. positivo. Una cosa che spesso confonde e' la definizione di numero positivo: chiameremo un numero positivo un numero come 0,1,2,42. Anche lo 0 e' positivo. Chiameremo un numero *strettamente positivo un numero da 1 in su. Allo stesso modo chiameremo un numero negativo se va da 0 in giu', e strettamente negativo un numero strettamente minore di 0. Da notare: 0 e' sia positivo che negativo, ma non e' ne' strettamente positivo ne' strettamente negativo. Il piu' piccolo numero positivo e' 0, ma il piu' piccolo numero strettamente positivo esiste solo per pochi insiemi (come i naturali, che e' 1); buona fortuna a dirmi il piu' piccolo reale maggiore di 0! Se lo trovate, io vi trovo il simbolo, lo chiamero'* 0^+ *o* ε*, ma per favore, ditemi il suo valore esatto ;)*

2.1 Come leggere una funzione

2.1.1 Una funzione facile: una retta

Cominciamo con un esempio facile. Proviamo adesso a leggere insieme una formula "complessa" e cercare di sfatare i miti.

$$y = ax + b \tag{2.1}$$

Oppure (piu esplicita):

$$f(x) = ax + b \tag{2.2}$$

Come leggerla: la funzione f o y e' funzione della variabile X. Quanto vale? Beh, cambiando a casaccio X e assegnadogli valori come 0, 1, 42, 1000, .. la funzione vi dice che il suo valore sara', rispettivamente: b, $a+b$, $42a+b$ e $1000a + b$.

La parte piu' complessa di questa operazione e' capire il ruolo di tutte quelle lettere, per cui faro' uno sforzo a dirlo in modo semplice e chiaro:

* X e' la variabile, e in quanto tale puo' far cio' che vuole. La funzione "itera" (o meglio, si muove) al variare di X e quindi X e' libera di pascolare dove e come meglio crede. * a, b sono invece dei coefficienti noti. Sono un po' ipocriti, lo ammetto, perche' il matematico sa che i valori sono fissi ma invece di dire che valgono, ad esempio, 2 e -3, diciamo semplicamente a, b. C'e' un motivo aldila' del sadismo puro: in genere se facciamo cosi' e' perche'

l'andamento concettuale della funzione non cambia molto al cambiare di a,b. Lo capiremo meglio durante lo studio di funzione.

2.1.2 Una funzione piu' complessa: un generico polinomio

Questa e' abbastanza criptica:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{2.3}$$

Essa va letta come: somma per i (parametro libero di spaziare su N valori) che va da 0 a n di a_i che moltiplica x alla i.

La parte a mio avviso piu' difficile qui e' capire cosa e' un numero e cosa e' una variabile.

Come sempre, siamo in una funzione di x quindi capiamo dal lato a sinistra dell'uguale che la variabile e' la x. E il resto? Cosa sono quei pedici? Ebbene, ricordate il caso facile $ax + b$? Bene, ora iniziamo una discussione virtuale col vostro professore:

- Bene, ora estendila ad una generica equazione di grado due - Voi: facile, basta aggiungere un X quadro, con un coefficiente a raglio davanti:

$$f(x) = ax + b + cx^2 \tag{2.4}$$

Si pero' e' bruttina (ha i coefficienti a raglio, a,b,c moltiplicano rispettivamente frado 1,0,2, non va bene), permutiamo i coefficienti e rendiamola piu' leggibile:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{2.5}$$

Molto meglio! Ovvio che in questo caso i coefficienti a,b della retta sono ora b,c, ma poco male.

- Bene, bravo, ora generalizzala ad un'equazione di grado tre:
- Nulla di piu' facile prof, ormai ho capito:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{2.6}$$

- Bene, bravissimo! Ora generalizzala ad un'equazione di grado N:
- Uhm, N? che significa N? Dieci? Di piu'? Beh cosi' a occhio se N fosse anche 100 verrebbe fuori qualcosa tipo:

$$f(x) = ax^{100} + bx^{99} + ... + vx + z \tag{2.7}$$

Ora ho un problem amolto piccolo, le lettere sono solo 21 (26 se scomodiamo le anglosassoni), ma io ho 101 coefficienti qui, come faccio? Beh i matematici hanno risolto questo problema con un trucco: invece di scomodare una lettera diversa a, b, c usiamo una sola lettera a e la iteriamo da 1 a 100: $a_1, a_2, a_3, ...a_100$. Facile no? Possiamo addirittura anche assegnare

a_0, a_{-1} alla bisogna, purche' siano iterabili (quindi della cardinalita' di $\mathbb{N}$, non di $\mathbb{R}$).

Bene, allora un modo piu' elegante di esprimere questa notazione e':

$$f(x) = a_{100}x^{100} + a_9 9x^9 9 + ... + a_1 x + a_0 \tag{2.8}$$

Ora, se voleessimo fare i pignoli e togliere quei puntini di sospensione che fanno molto "il mio completo elegante e' in lavatrice quindi sono venuto a fare l'esame in tuta", potremmo scomodare una sommatoria e fare un'ottima impressione:

$$f(x) = \sum_{i=0,100}^{1} 00 a_i x^i \tag{2.9}$$

Da notare che qui abbiamo due "variabili": la X che e' la nostra cara variabile di funzione e la i. Si noti che la i serve solo per "sgirellare" la sommatoria, vuol dire: hey tu, si', proprio tu: prendi un generico i che va da 0 a 100 e srotolalo al mio segnale.

* Quando i vale 0, sostituiscila e scrivi quel che vien fuori: $a_0 x^0$ (convenzionalmente 1), quindi a_0. e quindi a_0. Wow, questo era strano - vediamo se von gli altri e' piu' facile: * Quando i vale 1, $a_1 x^1$ ovvero $a_1 x$. Ok, facile. * Quando i vale 2, $a_2 x^2$ ovvero $a_2 x^2$. Ok, facile. * Potrei andare avanti cosi' da 3 a 99 ma non lo faro'. * Quando i vale 100, $a_1 00x^1 00$ ovvero $a_1 00x^1 00$. Ok, facile. * Ora capisco. Mettendo tutti i pezzi insieme vengono:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_1 00x^1 00 \tag{2.10}$$

il che e' la versione in tuta del piu' elegante:

$$f(x) = \sum_{i=0,100}^{1} 00 a_i x^i \tag{2.11}$$

Ed eccoci da capo.

Come vedete, quando i matematici scrivono queste equazioni criptiche, non lo fanno per sfoggiare (ok, forse un po'..), lo fanno soprattutto per rendere un concetto complesso con un piccolo numero di caratteri, che definisce *precisamente quel che vogliono definire. Questa notazione e' fondamentale per esprimere concetti complessi. Voi potreste pensare: ma si' dai Riccardo, siamo onesti, potevi usare i 3 puntini invece della sommatoria, volevi solo fare lo sborone. In verita' la risposta corretta e': si', in questo caso particolare i 3 puntini erano sufficienti a far capire questa sommatoria, ma come avrei potuto spiegare qualcosa di complesso come una sommatoria tripla? Con 3 serie di 3 puntini? E chi itera su chi? Con piu' somme, ci saremmo tutti confusi e la versione con Σ sarebbe l'unica con spiegazione univoca.*

Chapter 3

Numeri

*" Per tre punti non allineati
passa una ed una sola retta,
purche' abbastanza spessa "*

– Giulio Cesare Barozzi, Lezioni di Analisi III

*" Perfect numbers like perfect
men are very rare "*

– Rene Descartes

s

In questo capitolo si parlerá della teoria dei numeri (nella quale son sempre stato poco ferrato): vi diró lo stretto necessario per capire i numeri naturali, reali, complessi senza la pretesa di dare rigorose specifiche formali degli stessi.

I numeri fondamentali che servono nella matematica sono naturali, interi, razionali, reali e complessi. Cercheró di darne una rudimentale definizione, di fare qualche esempio, e di vederne alcune proprietá.

3.1 Insiemi notevoli, in breve

Cominciamo con una carrellata degl'insiemi notevoli (gruppi di numeri con cui ci piace giocare) ed alcune loro proprieta', particolarmente il loro comportamento all'infinito:

** $\mathbb{N}$: Questo e' l'insieme dei **Naturali**, ovvero 0,1,2,3, .. 42, 100, 1000, 1000000, ... , e tanti altri . Quelli che in italiano chiamiamo numeri interi in matematica si chiamano numeri naturali.*

** $\mathbb{Z}$: L'insieme degl'**Interi** e' simile al precedente ma include anche i numeri negativi. E' grande esattamente il doppio di $\mathbb{N}$, eppure e' grande* *uguale ad* $\mathbb{N}$ [1]. *I numeri che contiene sono* $0, 1, -1, 42, -42, 1000, -1000$, *e cosi' via.*

** $\mathbb{Q}$: Questo e' l'insieme dei **Razionali**, ovvero l'insieme dei numeri frazionari espriminbili come $\frac{p}{q}$. Alcuni esempi sono:* $1, 2/5, 3/4, -42$ *. Da notare che i razionali contengono gli interi ma contengono moltissimi piu' numeri. E' un insieme molto denso nel senso che tra i suoi 2 valori* $1/10$ *e* $2/10$ *ci sono infiniti valori. La cosa forse piu' incredibile e' che (Peano lo dimostro' per primo) la cardinalita' di $\mathbb{Q}$ e la stessa di $\mathbb{N}$. Lo so, assurdo. Eppur vero. L'infinita' di questi interi e infiniti ad essa isomorfi e' di difficile comprensione, ve lo concedo.*

** $\mathbb{R}$: insieme dei **reali**. Chiameremo $\mathbb{R}+$ l'insieme dei reali ¿= 0 e con $\mathbb{R}-$ i reali con x¡=0, e con $\mathbb{R}*$ l'insieme dei reali senzalo$\{0\}$.*

** C: insieme dei **complessi**. I complessi meritano un capitolo a parte. L'insieme èisomorfo a R^2 (ovveri tutti i punti in un piano).*

** $\mathbb{R}^3$: insieme di terne di reali. In matematica non esiste ma in fisica si usa un casino per definire la posizione di un punto nello spazio e ci tenevo a contestualizzarlo qui.*

** $\mathbb{Z}_p$: insieme di di interi modulo p. Questo insieme si dice anello, e gode di interessantissime proprieta' ma e' difficile parlarne se non decidiamo p. Se p e' un numero primo, gode di ulteriori proprieta' ad esempio la possibilita' di inversione per la moltiplicazione. Esempio:* $\mathbb{Z}_5 := 1, 2, 3, 4, 5$ *o ancora meglio* $\mathbb{Z}_5 := 0, 1, 2, 3, 4$. *Si', la cosa incredibible di questo insieme e' che 0 e 5 sono la stessa cosa, quindi intercambiabili. Un professore bastardo potrebbe addirittura dirvi che* $\mathbb{Z}_5 := 420, -4, 427, -42, 420004$. *Se dividete un numero per 5 e guardate al resto, 1 e 6 e 66 sono la stessa cosa, no? Per maggiori informazioni: Aritmetica modulare su Wikipedia.*

3.2 I numeri naturali

Tutto nasce dai naturali. Schiere di filosofi e matematici hanno provato a darne una definizione. Peano e Russell (se ben ricordo) ne hanno dato una definizione operativa che vi propongo.

- Esiste un numero iniziale che chiameremo zero (0).

- Per ogni numero naturale N esiste un successore, che chiameremo $s(N)$ (é una funzione, se ci si pensa).[2].

- Mi pare vi siano altre proprietá, ma non mi vengono in mente.

Ora, si puó tranquillamente fare matematica in queso modo, per esempio il famoso $2 + 2 = 4$ *diventa* $s(s(0)) + s(s(0)) = s(s(s(s(0))))$. *Capite pero' che per scrivere* $12 * 12 = 144$ *servirebbero tante righe e per* $1'000 * 1'000 =$

[1] Eh gia', strana cosa gli infiniti. Si puo' dimostrare che la cardinalita' di N e Z sono uguali, e le sorprese non sono finite..

[2] Quindi $1 = s(0), 2 = s(s(0))$, e cosí via. No, non vi invito a scrivere 1000 in questa notazione.

$1'000'000$ *servirebbero intere pagine. Ecco perché la notazione 'posizionale' che tutti conosciamo (10=dieci, 100=cento, 110=centodieci) torna utile per risparmiare inchiostro. Quando capirete che la matematica sfrutta ogni possibile strada per risparmiare inchiostro, comincerete a pensare come dei veri matematici...*

Una interessante proprietá dei naturali é che non hanno un limite destro, per cui si dice che vanno all'infinito. Vi sono anche studi su quanti siano i naturali. L'infinitá dei naturali viene detta $\aleph_0$, *ed é la piú piccola infinitá conosciuta. Ebbene sí, ci sono tanti infiniti, alcuni piú grandi, alcuni piú piccoli.*

Denoteremo con $\mathbf{N}$ *l'insieme dei naturali:* $\mathbf{N} \cdot \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$

3.3 I numeri interi

Tutti pensano che gl'interi siano i naturali. In matematica, invece, i naturali sono i numeri interi "positivi", men tre si chiamano interi i numeri interi positivi o negativi. Credo che la definizione sia:

- Esiste lo zero (0).

- Per ogni z *esiste un successore* $s(z)$.

- Per ogni numero z *esiste l'opposto* $-z$.

L'insieme che viene fuori é: $\mathbf{Z} \cdot \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$. *Attenti, potevo anche dire che l'insieme é:* $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

3.4 I numeri reali

I numeri reali sono espressi come numeri che possono essere definiti come limite di una successione di razionali. E' davvero buffo pensare che sommando ingredienti tutti razionali dal primo all'ultimo (e potrete immaginare che la somma di due razionali sia sempre razionale!) possa dare come risultato qualcosa che non sia razionale.

3.5 I numeri complessi

Introduzione. I numeri complessi sono numeri molto interessanti perché ci si é arrivati ben dopo agli altri numeri e ci si é accorti della loro esistenza a causa di "buchi" nella matematica comune che non potevano essere spiegati in altro modo. La genesi di questi numeri, a quanto ne so, nasce dalla necessita' di trovare soluzioni a equazioni polinomiali di grado N. ci si é infatti accorti che la soluzione di un'equazione polinomiale di grado 3 (ad esempio) e' spesso data da 3 numeri, ma talvolta da uno solo. E le soluzioni di un'equazione di grado 7 possono essere 7,5,3 oppure 1. Se ci inventiamo questo mondo "fittizio" dove facciamo finta che la radice quadrata di -9 abbia un senso, ecco che quasi per magia si scopre che in questo mondo favoloso le soluzioni di un'equazione di grado N sono sempre N! Quindi restate con me se la cosa vi incuriosisce, come incuriosisce me.

Chapter 4

Funzioni

In questo capitolo si parlerá di funzioni. Nella prima parte ne verranno dati definizioni ed esempi, nella seconda si parlerá dello 'studio di funzione', e nella terza si affronteranno tanti piccoli temi collaterali. Ho speso molte parole per spiegarne il concetto poiché é a mio parere uno dei piú affascinanti e complessi della matematica: l'uomo riesce con facilitá a ragionare su numeri, ma su qualcosa che associa infiniti numeri a infiniti numeri tende ad avere sempre delle perplessitá. Molto spazio verrá dato alle funzioni notevoli, poiché é a partire da questi mattoncini che si costruiscono quei maestosi castelli che i professori mettono nei vostri compiti...

■ **Domande propedeutiche** *P*rima di passare oltre,
'e opportuno che sappiate rispondere alle seguenti domande (se non sapete rispondere ad esse, difficilmente riuscirete a capire ci
'o che segue).
Dovete guardare prima i grafici.

4.1 Cos'è una funzione

Cosa è una *funzione*? Essa é una applicazione che associa tutti i valori di un dominio (ovvero un insieme **X**) a certi valori su un codominio **Y** (un altro insieme).

$$f : x \in \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y} \tag{4.1}$$

Detto in parole piú povere, *é un oggetto che mangia numeri e sputa fuori numeri in maniera prevedibile.* Se gli date da mangiare una stessa cosa (per esempio $x_0 := 46,2$) e lui 'gradisce' questa cosa (ovvero x_0 è contenuta nel dominio $\mathcal{X}$), la funzione sparerá sempre fuori uno stesso numero. Esso é detto $f(x_0)$. Il concetto di funzione è molto importante poichè è quanto di piú generale ci sia: una funzione puó mangiare qualunque cosa e 'spararla' in quasi qualunque altra cosa. Ció che é piú difficile da capire é che il nome della funzione é indipendente da quello che le si dá in 'ingresso'.

Vediamo di inventarci qualche funzione per fissare il concetto.

$$f(0) \doteq 3; f(1) := 4; f(2) := 5; f(-5) := -2; \dots \qquad (4.2)$$

La funzione che ho scritto potrebbe essere qualunque cosa; probabilmente la piú semplice funzione che si comporti come lei é: $f_1(x) = x + 3$[1]. Non bisogna sottovalutare la *potenza* di questa notazione, per cui prendiamoci un po' di tempo per capirla. Quando scrivo $f(x \in \mathbf{R}) = x + 3$ intendo un oggetto che, dato un numero, vi risponde con un altro numero. In ingressso dovete dargli un numero reale e in uscita vi restituirá un altro numero reale. Per capirci meglio, daremo d'ora in poi a f il simpatico nome di '**sommatre**'

Mi piacerebbe spiegarvi le funzioni in un modo alternativo, come me lo spiegó il mio prof di Geometria, Massimo Ferri nel 1995. Pensate di avere un asse orizzontale in cui é libero di muoversi un cannone; esso puó sparare solo in verticale, su o giú, ma sempre in verticale rispetto a dov'é. Ora immaginate che il cannone sia programmato per sparare sempre in un medesimo punto (esempio in 3) se si trova in una certa posizione (ad esempio 0). Se il cannone si trova nel punto -5 (che sta ad ovest, per intenderci), sparerá sempre in basso all'altezza di -2. Infine, quando si trova in -3, si spara addosso, ma questo non é un problema che ci tocchi. Se dopo aver istruito il cannone su come sparare, lo fate andare all'infinito a destra e a sinistra, potrete osservare la scia che lascia su un ipotetico foglio di carta; questa é il *grafico* della funzione. Cos'é la funzione? L'equazione? Il grafico? Il carroarmato? No! Essa é l'insieme di istruzioni che avete dato al carroarmato. Ció che piú si avvicina alla sua definizione senza perdere infiniti fogli a scrivere $f(0, 1, 2, 3, \dots)$ é la parola 'sommatre'; ma attenti: se la funzione si complica non sempre avrete la fortuna di poterle dare un nome semplice quindi dovrete adeguarvi alla notazione usata in quei noiosissimi libri di matematica. Ma prima di arrivare a quella notazione, cerchiamo di capire il senso dietro ad essa.

E' importante capire che la funzione **sommatre** é qualcosa che somma tre al numero che le date in pasto. Alcune domande *ben poste* potrebbero essere: quanto vale $f(0)$? Per quale x, $f((x)$ vale 15? Quando é massima f? Quand'é che f incontra gli assi cartesiani? Per quali valori del dominio $\mathcal{X}$ f é definita? [2].

Tutte queste sono domande che vi potrebbero essere fatte quando vi si chiede di fare lo *studio di funzione di f.*

Mi ritengo soddisfatto se sapete rispondere (per iscritto) a queste domande a trabocchetto: **Che cos'é $f(x)$? Che cos'é $f(t)$? Che cos'é $f(0)$?**

[1] Ma attenti, esistono un bel po' di funzioni che rispettano questi vincoli. E' un po' come cercare moglie secondi i vincoli: '2 occhi', '2 seni', 'che respiri'. Un altro esempio, solo per persuadere i piú scettici, é $f(x) = 4 + sen(\frac{\pi}{2}(x-1))$

[2] Alcune domande mal poste potrebbero essere: 'sí ok $f(x)$, ma questa benedetta x quanto cacchio vale?!?'

Una risposta puó essere: le prime due sono funzioni (per la precisione sono sempre la nostra amica 'sommatre'), la terza é un *numero (ed é il numero* 3*, poiché* $0 + 3 = 3$*: provatelo con le vostre calcolatrici tascabili). Ma allora che cos'é x? E che differenza c'é tra x e t? Questa credo sia la domanda piú difficile che ci si possa fare sulle funzioni. Una buona risposta é che la t é la* 20^{ma} *lettera dell'alfabeto anglosassone mentre la x é la* 24^{ma}*.. a parte la battuta il fatto é che non c'é alcuna differenza tra $f(x)$ e $f(t)$, se non il fatto che nel primo caso f dipende da x e nel secondo da t: la variabile é muta di per se stessa, e ha senso solo nella definizione stessa della funzione*[3]*; ma la funzione sará sempre lei, nel nostro caso sará sempre 'sommatre', ovvero qualcosa che mangia un numero, gli somma 3 e sputa fuori il risultato. Un altro modo per capirlo, é inventarsi un mondo senza x; proviamoci per un attimo. Prendiamo la nota funzione $f(x) = x^2 + 2x + 1$; prima dell'ottocento, i matematici la leggevano come 'prendi un numero, elevalo al quadrato, poi aggiungi il doppio del numero e infine aggiungi uno'. Capirete che se un prof vi chiede se questa sia una parabola o un'iperbole farete abbastanza fatica a rispondergli, no? Allora diremo: $f(numero) = numero^2 + 2 \cdot numero + 1$. Ancora troppo lungo. Proviamo con la x: $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Oh! Ora va meglio.*

Scusate la lunghezza della digressione, ma dopo anni e anni di matematica, vedo persone ancora perplesse sul vero significato della fatidica variabile indipendente. Potete pensare che x sia una variabile *muta, assolutamente inutile, e quindi il vero modo per chiamare la nostra amica 'sommatre' in modo matematico non sia $f(x)$, bensí $f(\dot{})$*[4]*. Ricordate: se scrivo $f(x) = x+3$ e $g(y) = y + 3$, definisco la stessa funzione: f e g sono* perfettamente identiche*!!! O se preferite $f(Franca) = Franca+3$ e $g(Iolanda) = Iolanda+3$. D'ora in poi, peró, preferiremo chiamare x ció che la $f()$ mangia e y ció che la f sputa, e al posto della x useremo t se penseremo a tempi o θ se pensiamo ad angoli: i matematici ci tengono molto a dare significati diversi alle diverse lettere, e ne hanno cosí tanti che le 26 dell'alfabeto anglosassone non bastan loro, e devon tirarne fuori anche da quello greco ed ebraico...*

Vi faccio un esempio stupido: quando davanti a una birra un amico/a mi dice "Sai Riccardo, mi e' capitato X volte ...." il mio volto si scurisce perché ho la certezza che la persona davanti a me non abbia studiato o apprezzato la matematica quanto me. Cosí come abbiamo l'archetipo delle Susan e dei Dick in inglese, cosí abbiamo l'archetipo delle lettere:

** a,b,c sono parametri/coefficienti * x,y,z sono variabili reali * i,j,k,l,m,n sono variabili intere * α, β, γ sono coefficienti piú eleganti di a,b,c. Talvolta usati in congiunzione/parallelo (a vs alpha, ..) * θ, ϑ, ϕ sono angoli*

[3]La cosa diventerebbe rilevante in qualcosa come: $f(x) = 3tx$, in tal caso x é la variabile e t sará probabilmente un parametro.

[4]credo che l'unico modo di apprezzare una funzione per ció che é sia proprio quella di usare un puntino, del tipo $f(\cdot) = \frac{\cdot+1}{1+\cdot^2}$; ovvio che se usate una x al posto di $\cdot$ si legge meglio, no?

Come avrete capito, l'amico avrebbe dovuto usare N e non X per avere la mia stima :) E sí, ovviamente la persona bacata nel cervello sono io, non l'amico.

4.2 Funzioni notevoli

In questa sezione cercheró di analizzare le funzioni piú famose. La maggior parte delle funzioni che vi cappiterá di studiare saranno 'case' costruite con questi mattoncini... Per ciascuna funzione cercheró di evidenziare le caratteristiche piú interessanti di ciascuna, tra cui il grafico (un giorno), derivate, primitive, estremanti, poli, ..

4.2.1 Polinomi

Un polinomio é una equazione nella forma:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^x + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{4.3}$$

Alcuni esempi di funzione sono: $x^4 2+37x+41$,$3x^2+6x+3$, x^2+1, *ma non* $\frac{1}{x^2+1}$. *Attenzione, anche* $3-x$ *e* 5 *(una delle mie funzioni preferite, l'avrete notato) sono polinomi, e questo la gente tende a dimenticarlo spesso...*

Attenzione, come sempre le x^n *sono potenze della nostra amica variabile indipendente, mentre le varie* $a_0, a_1, \ldots$ *sono il DNA del polinomio stesso (non mi credete? Andate a leggervi il capitolo su Taylor, 8.1, pag. 53). Capiamolo con un esempio stupido: in* $x^2+3x+41$ $a_0 = 41; a_1 = 3; a_2 = 1; a_3 = 0; a_4 = 0; a_5 = 0; a_6 = 0; \ldots$. *Se non vi offendete mi fermo qua, dicendovi che da* a_3 *in poi tutti i coefficienti son nulli. Si dice allora che il polinomio é di grado* 2 *poiché é alla posizione* 2[5] *che c'é l'*ultimo *valore non nullo.* [6]

Dominio *I polinomi non han problemi di dominio: tutto* **R** *va bene.*

Codominio *Bazza: se ponete* $x = 0$ *si annulla tutto meno il termine noto, quindi* $f(0) = a_0$.

Zeri *Tanti. In realtá ce ne possono essere tanti quanti il grado del polinomio, ma se non avete gli 'occhiali' complessi ci possono essere coppie di soluzioni (complesse coniugate) che non potete vedere. Esempio: un polinomio di terzo grado ha o* 3 *o* 1 *soluzioni. Esiste bun trucco*

[5] che é al terzo posto, ma ai matematici piace complicarsi la vita, e spoiler alert! Quasi sempre hanno ragione loro...

[6] Un modo molto elegante per definire il polinomio é di identificarlo la lista ordinata $(41, 3, 1)$. Ancora una volta, é scomparsa la x, che guarda caso é l'unica cosa non importante per il polinomio!

per calcolare le soluzioni di un polinomio di secondo grado [7]*, un altro per le equazioni di terzo e quarto grado, e - se non sbaglio - é stato dimostrato che non possono esistere trucchi per i polinomi di grado oltre al quarto.* Attenti alle molteplicitá: $f = x^4 + x$ ha 4 zeri: $(0, 0, 0, -1)$; -1 é uno zero normalissimo, mentre 0 (che solo per caso si pronuncia allo stesso modo) é uno zero di molteplicitá tripla. Questo é molto importante: quando ad esempio una funzione ha uno zero doppio tende non solo a passare per il punto ma a esservi tangente (ovvero arrivarci da sotto, toccarlo, e tornar giá proprio in quel punto - o viceversa). In generale, non trascurate la molteplicitá nei vostri scritti: certe persone ci tengono molto ;).

Poli *Nessuno.*

Derivata, massimi e minimi *E' molto facile e divertente derivare polinomi. Per la proprietá di linearitá, possiamo derivarla a pezzi, ovvero vale la comodissima proprietá che la derivata della somma é uguale alla somma delle derivate. Se sapete derivare un generico pezzettone* x^n *(che fa* nx^{n-1}*), sapete derivare tutto. Vien fuori:* $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i x^{i-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1$*. Fate attenzione che é scomparso il termine noto* a_0*. Il nuovo polinomio ha un grado in meno dell'originale, a meno che non avesse grado zero (nel qual caso rimane zero). I massimi/minimi saranno tanti, fino a* $n-1$*. Calcolate la derivata, e di essa calcolate gli zeri. (Io dico sempre: lo studio di funzione di un polinomio é per il* 60% *studio degli zeri di* f*, per il* 40% *studio degli zeri di* f'*: rimane ben poco ancora di interessante).*

Primitiva *Anche qui é molto facile, se sapete qual é una primitiva dei mattoncini* x^i *(che é* $\frac{x^{n+1}}{n+1}$*). Viene fuori:* $F(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + 37 = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + 37$*. Il* 37 *l'ho aggiunto io per ricordarvi che le primitive son tante, e nessuna ha una dignitá maggiore delle altre. Se volete usare quella col* $+0$ *anziché quella col* $+37$*, avete il mio permesso: io farei lo stesso.*

4.2.2 $\sin(x)$

La funzione seno (una delle mie preferite) é una funzione trigonometrica. Essa é periodica, di periodo 2π*. Ció vuol dire che potete disegnarla e studiarla da* 0 *a* 2π *(ma anche da* 7π *a* 9π*!) perché si ripeterá all'infinito con lo stesso andamento. Ci limiteremo a studiarla su* $[0, 2\pi]$*. Per una definizione pratica di seni e coseni rimando al capitolo su di essi* *(4.4.4, pag. 32)**. Capirete che una funzione come questa se ha uno zero ne ha infiniti, se*

[7]Il famoso $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ha un polo ne ha infiniti e cosí via... Mi limiteró al solo intervallo $[0, 2\pi[$. *Spesso potrebbe capitarvi di studiiare invece* $]-\pi;\pi]$

$[rcl]$**Dominio** *Tutto* $\mathbf{R}$. (4.4)

Codominio *E' piccolissimo:* $[-1; 1]$ (4.5)

Zeri $0, \pi$ (4.6)

Poli *Nessuno.* (4.7)

Derivate $D\sin(x) = \cos(x)$. *Massimo:* $\frac{\pi}{2}$. *Minimo:* $-\frac{\pi}{2}$ (4.8)

Integrali $\int \sin(t)dt = k - \cos(x)$. *Aree:* $A_S[0;\pi] = 2$ [8]. (4.9)

Altro *La funzione e' periodica di periodo* 2π. (4.10)

Punti notevoli $f(0) = 0; f(\pi/2) = 1; f(\pi) = 0; f(3\pi/2) = -1$[9] (4.11)

(4.12)

4.2.3 $\cos(x)$

Come il seno é periodica di periodo 2π*: useremo, tanto per allenarci, l'intervallo* $]-\pi;\pi]$.

$[rcl]$**Dominio** *Tutto* $\mathbf{R}$. (4.13)

Codominio $[-1; 1]$ (4.14)

Zeri $-\pi/2, \pi/2$ (4.15)

Poli *Nessuno.* (4.16)

Derivate $D\cos(x) = -\sin(x)$. *Massimo:* 0. *Minimo:* π (4.17)

Integrali $\int \cos(t)dt = k + \sin(x)$ (4.18)

Altro *La funzione e' periodica di periodo* 2π. (4.19)

Punti notevoli $f(0) = 1; f(\pi/2) = 0; f(\pi) = -1; f(-\pi/2) = 0$ (4.20)

(4.21)

4.2.4 $\tan(x)$

La tangente altri non é che $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$*, e ne eredita la periodicitá. Anzi, é addirittura periodica di periodo* π *(il che non inficia la frase prededente, rifletteteci).*

La studieremo su $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

[*rcl*]**Dominio**	$]novanta; \frac{\pi}{2}[;$ [10]	(4.22)
Codominio	*Tutto* **R**.	(4.23)
Zeri	0	(4.24)
Poli	$\frac{\pi}{2}$	(4.25)
Derivate	$D\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ *(come preferite). Massimi/minimi: nessuno*	(4.26)
Integrali	$\int \tan(t)dt = k - \log \lvert cos(x) \rvert$	(4.27)
Altro	*La funzione e' periodica di periodo* π.	(4.28)
Punti notevoli	$f(0) = 0; f(\pi/4) = 1; f(\pi/2^-) = +\infty; f(-\pi/2^+) = -\infty.$	(4.29)
		(4.30)

4.2.5 Funzioni iperboliche ($\sinh(x)$, $\cosh(x), ..$)

Le funzioni iperboliche sono fondamentalmente degli esponenziali che puzzano dannatamente di funzioni trigonometriche. Se li disegnate, o li derivate, sono proprio degli esponenziali. Se li guardate al microscopio (con le serie di Taylor (8.1, pag. 53)), troverete delle inquietanti somiglianze con i 'cugini' trigonometrici (seno con seno iperboolico, coseno con coseno iperbolico, e soprattutto tangente e tangente iperbolica). La cosa piú buffa é che le funzioni sono completamente diverse (ad esempio, le iperboliche vanno spesso all'infinito e sono aperiodiche mentre le trigonometriche sono spesso limitate tra -1 *e* 1 *e sono periodiche). Vediamone la definizione.*

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tanh(x) := \frac{sinh(x)}{cosh(x)}\left(= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) \tag{4.31}$$

Le funzioni inverse di queste tre funzioni iperboliche sono facilmente esprimibili con logaritmi. Riuscite a trovarle?

■ *Ricavate la funzione* $arcsinh(x)$ *e le sue sorelle.* Hint: $y = arcsinh(x) \Rightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, ponete \theta = e^y, \cdots$. Dovrebbe venir fuori qualcosa con logaritmi e radici quadrate mi pare. ■

Provate un po' a derivarli: cosa notate di strano?

4.2.6 e^x

Che cos'é l'esponenziale (e^x)? E' una particolare funzione che viene usata tantissimo in tutti i campi dell'analisi, dell'ingegneria, della fisica; perché?

Credo la sua importanza sia dovuta al fatto che sbuca fuori magicamente dalla Equazioni Differenziali. Prima di andare avanti, vi consiglio di guardare la sezione sugli esponenti (sez. **??**, *pag.* **??**).

Come si calcola un esponenziale? Se l'argomento é intero, lo puó fare chiunque sia dotato di addizione e moltiplicazione. Negli altri casi, la faccenda si complica e richiede anche le radici (quadrate, subiche, ...). Vediamo una defizizione ridondante sufficiente a definire gli esponenziali 'di esponente intero' (poniamo $a \neq 0$*):*

$$a^0 \doteq 1 \tag{4.32}$$

$$a^{n+1} \doteq a \cdot a^n \tag{4.33}$$

$$a^{-n} \doteq \frac{1}{a^n} \tag{4.34}$$

Da questa definizione, segue che $10^0 = 1, 10^1 = 10, 10^2 = 100, 10^3 = 1000, \cdots, 10^{-1} = \frac{1}{10}, 10^{-2} = \frac{1}{100}, \cdots, \ldots$. *Come vedete questa funzione cresce in fretta:* $f(9)$ *vale un miliardo,* $f(18)$ *vale un miliardo di miliardi e* $f(-27)$ *vale un miliardesimo di miliardesimo di miliardesimo*[11]. *Questa funzione é sicuramente la piú veloce di tutte le colleghe (potete immaginare quindi il comportamento della sua funzione inversa, il logaritmo...). Ora vediamo di capire la parte in mezzo*

Per capire e^x *credo dovremo cominciare da qualcosa cui siete piú familiari, tipo la funzione (molto simile)* 10^x *(che si legge* $10allax$*).*

4.2.7 $\log(x)$

TBDs

Notiamo anzitutto che la derivata di $\ln(x)$ *coincide con quella di* $\ln|x|$. *Se guardate i grafici, vi accorgete che a destra vale ln(x) e a sx dell'asse* $y - \ln(x)$. *Qui il valore assoluto puó essere visto come un 'completamento naturale di dominio'.*

4.3 Studi di funzione

Cosa vuol dire studiare una funzione? Vuol dire semplicemente dire tante cose interessanti di una funzione. Supponiamo che il vostro prof di matematica vi porti in centro cittá il sabato pomeriggio e vi proponga qualcosa di simile: lo *studio di persona*. Vi addita un passante e vi dice: cosa puoi dirmi di lui? Voi direte: é alto $1,70$ circa, pesa sui $70kg$, ha una corporatura media, i capelli mori ricci e porta gli occhiali; ha un neo vicino alle labbra e ha dei seni particolarmente grossi. C'é qualcosa di non banale in ció che avete detto: l'altezza, il peso, il colore dei capelli, degli occhi eccetera sono caratteristiche di *qualsiasi persona. Gli occhiali, i nei, lentiggini, eccetera*

[11] Come si pronuncia $f(-16)$?

sono invece caratteristiche di alcuni individui, eccezioni della cui presenza ci si accorge ma la cui assenza passa inosservata. Difficilmente direte: "senza occhiali", "senza barba", "senza néi visibili", o sbaglio? (Ovvio che alla polizia direte anche queste cose se si tratta di un ricercato!)

Lo studio di funzione é qualcosa di molto simile: si tratta di delineare una funzione (come la nostra amica 'sommatre') secondo alcune caratteristiche comuni a *tutte* le funzioni, e di trovare quei tratti della funzione che sono interessanti.

4.3.1 Dominio e codominio

La prima cosa da studiare in una funzione é sicuramente il dominio di definizione della funzione stessa, ovvero l'insieme di valori (le x, per intenderci) su cui la funzione é definita. Alcuni esempi:

$$\begin{array}{l} f_1(x) = 3x^4 - 2x^3 + 87x - 57\pi \\ f_2(x) = \sin(x) \\ f_3(x) = \log(x) \\ f_4(x) = \sqrt{(}x+1) \\ f_5(x) = \frac{(x-29)(x+3)}{(x-29)(x-12)(x-1976)} \end{array} \tag{4.35}$$

I casi piú complicati sono certamente i primi due: teniamoli dunque per ultimi. Se conoscete la funzione logaritmo, sapete che essa é definita solo per $x > 0$, quindi il $\mathcal{D}_{f_3} = \{\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}^-\}$. Attenti alla pignoleria: $\mathbf{R}^+$ comprende lo zero, quindi un modo carino é prendere tutto $\mathbf{R}$ e togliergli $\mathbf{R}^-$, liberandomi in un sol colpo dei numeri negativi e dello zero. Il caso f_4 é molto simile: la radice quadrata esige un argomento non negativo (ovvero i numeri minori di zero le sono indigesti). Attenti peró all'argomento: non c'é x questa volta, ma una funzione *molto* piú complicata: $x+1$. Abituatevi a ció: per calcolare il dominio della funzione dovete imporre che l'argomento sia non negativo, il che produce la seguente equazione: $x+1 \geq 0$. Dunque $\mathcal{D}_{f_4} = \{x | x \geq -1\}$.

Il caso f_5 vi capiterá spesso. Come sapete dalle elementari, la funzione *divisione* non accetta un divisore (che é la parte che sta dopo il diviso) uguale a zero, quindi se avete che la vostra funzione é uguale a $f(x) = \frac{qualcosa}{Pippo \cdot Bluto}$ dovrete imporre che *sia* Pippo *sia* Bluto siano diversi da zero. Ció significa, nel nostro caso particolare, imporre x diverso da quei tre numerini presi *assolutamente* a caso: $\mathcal{D}_{f_5} = \mathcal{R} \setminus \{12; 29; 1976\}$. Un appunto: quei tre numeri hanno assolutamente la stessa dignitá, e non ne viene uno prima dell'altro (lo dico perché molta gente pensa il contrario).

Veniamo ora ai primi due: vedete qualche pezzettone di funzione che vi faccia scattare un qualche allarme? Vedete poli, radici, logaritmi, o cose del genere? No, dunque il dominio delle prime funzioni é proprio $\mathbf{R}$.

In generale, studiare il dominio di una funzione vuol dire partire da $\mathbf{R}$, e poi cominciare a stringerlo per ogni funzione strana che c'é lá dentro, introducendo le limitazioni della funzione (logaritmi, equazioni fratte, radici, etc).

Parliamo ora di **codominio**. Il codominio é l'insieme di valori che la funzione produce.

4.3.2 Incontro con gli assi

Questa caratteristica é una delle piú generiche eppur interessanti: si tratta semplicemente di vedere in quali punti la nostra f incontra l'asse delle x (detti 'zeri') e l'asse delle y (che non hanno nome che io sappia: li chiameremo *antizeri*). La seconda é facilissima, mentre la prima é piú complicata. Vediamo, ricordandoci che l'asse x ha come equazione $y = 0$ (disegnare per credere!) e viceversa l'asse y ha $x = 0$:

$$zeri : \begin{cases} y = f(x); \\ y = 0; \end{cases} \quad anti - zeri : \begin{cases} y = f(x); \\ x = 0; \end{cases} \tag{4.36}$$

Nel primo caso otteniamo l'equazione $f(x) = 0$, che pone la domanda '*Per quali x otteniamo un valore nullo?*': non necessariamente la soluzione c'é, né se c'é é unica. Esempio 1: $f = x^2 + 42$ non si annulla mai (se $x \in \mathbf{R}$), quindi non ha zeri; esempio 2: $f = x^2 - 81$ ha due zeri, poiché si annulla sia per $x = 9$ (lo zero piú famoso) che per $x = -9$ (lo zero che amo chiamare '*forse non tutti sanno che*', anche qui provare per credere). Purtroppo non sempre é facile ottenere gli zeri di una funzione; un modo per risolvere il problema é quello di invertire la funzione (vedi **??**), ma non aspettatevi di trovare in genere TUTTE le soluzioni. :(

Tutto ció che si puó dire é che si ottiene una relazione nella forma $h(x) = 0$, dove non sempre é facile estrapolare le x per cui h si azzera. Non saprei darvi dei trucchi, poiché la soluzione va vista caso per caso; se la funzione é facile, la soluzione é facile; se é media, la soluzione di solito é abbastanza facile (per esempio: $f = \frac{sin(x)}{x}$); se é molto difficile, la soluzione é ancora piú vantaggiosa: nemmeno il vostro prof la saprebbe risolvere e quindi di certo non ve lo chiede. Come vedete, in ogni caso ce l'abbiamo fatta.

Esempio. La funzione 'sommatre' incontra l'asse delle x nel punto -3.

Il secondo caso é talmente facile (non sto scherzando) che la maggior parte degli studenti ci si perde (secondo il motto 'piú la soluzione é vicina piú é difficile da vedere'). Esso pone la domanda: '*Per quali y la x vale zero?*' Ma attenzione: noi abbiamo una funzione 'esplicitata' per dirci a quale x corrisponde quale y. E' in generale difficile dire quali x producono 0 (ad esempio), ma é facilissimo dire quale y é prodotta da 0!!! Quindi, é sufficiente mettere 0 nella scatola magica e vedere cosa viene fuori; qui abbiamo la certezza che il risultato sará esistente (purché la x data appartenga al dominio) e unico.

Nota. Molto spesso alle superiori o in esami universitari é richiesto il famigerato 'Studio di funzione'. Chiedere a uno studente di prepararsi a casa *per poter sostenere a un esame uno studio di funzione é un po' come chiedere a un cuoco di prepararsi a casa a fare piatti per poi alla prova finale saper realizzare un piatto su richiesta: ci si puó preparare su tante cose diverse ma alla fine ogni funzione ha caratteristiche rilevanti che la rendono unica. Per alcune, ad esempio, é importantissimo calcolare l'asintoto, eppure la maggior parte delle funzioni non ha asintoti! Esse possono avere poli, zeri, assi o poli di simmetria, e via dicendo.*

4.3.3 Massimi e minimi

Un'altra cosa importantissima per qualunque funzione sono i punti in cui questa smette di crescere cominciando a scendere, e viceversa. Purtroppo per fare questo tipo di studio occorre conoscere derivate (6.5, pag. 41) e limiti (5.2, pag. 36): rimando fortemente a questi capitoli prima di procedere con la lettura.

Dando ora per scontato che sappiate derivare meglio che allacciarvi le scarpe, diró qualche cosa sulla connessione tra derivate e massimi (o minimi, che é la stessa cosa[12]*: quando in una funzione si azzera la derivata é* molto *probabile che sia un punto di massimo (*49.5%*) o minimo (*49.5%*), ma puó essere anche nessuno dei due (*1%*). Per saperlo con esattezza, occorre ispezionare meglio la funzione con le derivate successive; il modo esatto se ben ricordo é (e lo percorreremo con un esempio):*

1. *Prendere la funzione.* Ad esempio $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4$
2. *Derivarla e calcolare gli zeri (chiameremo questi valori* estremanti*);* $f'(x) = 4x^3+6x^2$ nell'esempio vien fuori $x_1 = 0; x_1 = 0; x_2 = -frac32$ [13] .
3. *Calcolare la derivata seconda e vedere quanto vale f'' per ciascuno degli estremanti: $h_i = f''(x_i)$.* $f''(x) = 12(x^2 + x)$; $f''(x_1) = 0$; $f''(x_2) = 9$.
4. *Per tutti gli estremanti con derivata seconda non nulla, siamo a posto: $f''(x_i) > 0$ implica che l'estremante x_i é effettivamente un* minimo, *mentre se la derivata é minore di zero lo lascio alla vostra immaginazione. Se la derivata é nulla é un grosso guaio (quell'*1% *di cui vi parlavo). In tal caso occorre procedere con le derivate successive.*[14]

[12] Ai matematici piace parlare cosí: se Dio vi dá in mano il modo di tirar fuori un massimo da ogni funzione, non avete bisogno d'altro: per il minimo basta studiare la funzione '$-f(x)$': meditare, gente.

[13] Scusate la pignoleria: abbiam detto che la molteplicitá degli zeri é importante, quindi ve lo rimarco; ma il punto é sempre uno e uno solo, quindi diamogli un nome solo, no?

[14] Trucchetto che uso io per ricordarmi a memoria che $f'' > 0$ é minimo e $f'' < 0$ é massimo: prendo la funzione $f(x) = x^2$. E' una parabola che conosco a memoria: ha il culetto nell'oriegine e si protende verso l'alto quindi in $(0; 0)$ ha un minimo. La derivata prima é $2x$ (che ci dá ovviamente $x = 0$) e derivata seconda $f'' = 2$ che é sempre positiva.

5. *(Caso sfortunato) Per ogni estremante che ha derivata seconda nulla, esso puó essere: flesso (98%), massimo (1%) o minimo (1%). Cosa vuol dire flesso? Vuol dire che se tagliate la funzione nelle parti sinistra e destra e date i grafici delle due metá a due passanti a caso (possibilmente laureati in matematica), uno dei due vi dirá che l'avete tagliato intorno a un minimo, l'altro vi dirá che l'avete tagliato intorno a un massimo. Per vedere cosa sia, dovete fare la derivata terza (tranquilli, se siete sfortunati abbastanza potreste dover andare avanti fino alla derivata centesima). Se é non nulla, é un flesso e siamo a posto. Se é nulla, ricominciamo daccapo con la derivata quarta; se non é nulla abbiamo massimo o minimo (esattamente come con la derivata seconda); se é nulla avanti con la quinta: si ripete il caso sfortunato in cui peró dovete sommare due agli ordini delle derivate.* $f'''(x_1) = 24x_1 = 0$: non é un flesso, purtroppo, quindi si va avanti con $f''''(x) = 24$. Eccoci alla fine del calvario: il punto $(0; 4)$ é un minimo. Nella mia vita mi é capitato una volta un caso come questo, e u altro centinaio di volte di potermi fermare alla derivata seconda. Ma dovevo prepararvi al meglio no? Spero di non aver generato confusione.

Limiti notevoli

Se dovete stuudiare una funzione che non é definita in un punto (come $\frac{1}{x+1}$*) o non é definita* a partire *da un certo punto (ad esempio* $log(x)$*) é opportuno che vi calcoliate il limite della funzione nel punto d'interesse; nel primo caso, é il punto 'fuori dominio' (nell'esempio* -1*): , nel secondo é il primo punto (da sinistra o destra) fuori dominio (nell'esempio* 0*).*

4.3.4 Aree e integrali

A volte vi si potrebbe chiedere di calcolare una l'area di una porzione di piano che abbia vagamente a che fare col vostro grafico. In tal caso, l'integrale della funzione (se non lo sapete calcolare, andatevelo a studiare a **??***, pag.* **??***) puó tornarvi molto utile. L'unica cosa da sapere é che, se* $f(x)$ *é la vostra funzione e* $F(x)$ *é una sua primitiva, vale la relazione:*

$$A_R = F(b) - F(a)\left(= \int_a^b f(\xi) d\xi \right), \tag{4.37}$$

dove A_R *é l'area del rettangoloide delimitato dai seguenti 4 punti:* $A \equiv (a; 0)$, $B \equiv (b; 0)$, $C \equiv (b; f(b))$, $D \equiv (a; f(a))$. *Si chiama rettangoloide poiché ha 3 lati belli dritti piú uno completamente curvo; esso é l'area del luogo dei*

Dunque positivo $\iff$ minimo. Spero vi aiuti, ma ora che la scrivo non so quanto sia mnemonica...

punti che stanno in verticale *tra* 0 *e* $f(x)$ *nel percorso orizzontale che va da* a *a* b. [15]

4.4 Altro sulle funzioni

In questa sezione verranno descritte caratteristiche interessanti sulle funzioni che non potevano essere messe nei capitoli precedenti.

4.4.1 Relazioni

E' brutto definire una funzione senza aver definito una relazione, poiché quest'ultima nasce concettualmente prima. Vediamolo con un esempio:

$$x^2 + y^3 - 2xy = 0 \tag{4.38}$$

Questa equazione definisce un insieme di punti del piano (coppie $(x; y)$*). In particolare un punto* $P(x_0; y_0)$ *appartiene a questa curva se e solo se, mettendo i numerini* x_0 *e* y_0 *nella parte sinistra dell'equazione viene fuori* 0*! Esempio:* $(0; 0)$ *fa parte della equazione, mentre* $(7, 6)$ *non appartiene (provare per credere:* $49 + 216 - 84$ *non fa* 0*, purtroppo)*

4.4.2 Funzioni inverse

Data una qualunque funzione f*, la funzione inversa* g *di una funzione* f *é una funzione ad essa 'complementare' che ha il seguente scopo: se* f *mangia* x *e sputa* y*,* g *dev'essere in grado di mangiare quella* y *e sputare di nuovo* x*. Vi assicuro che questo non é un compito facile, e infatti invertire una funzione non sempre é possibile. Vediamo alcune funzioni:*

$$f_1 : y = x + 3; \;\; f_2 : y = 41; \;\; f_3 : y = x^2 + 1; \;\; f_4 : y = 2x; \;\; f_5 : y = \frac{9}{5}x + 32; \tag{4.39}$$

Diamo intanto un nome alle quattro funzioni per poterne parlare meglio: nell'ordine le chiameremo 'sommatré', 'quarantuno', 'Pippo', 'doppiodi' e 'c2f'[16]*. Vediamo: 'doppiodi(8)=16', hmmm... sí, direi che torna. A dir il vero avrei potuto chiamare 'Pippo' col nome 'unopiuquadratodi': ho scelto Pippo cosí quando vi troverete a un esame a studiare* $f = \frac{e^{x+3}+1}{x^3+\log(x)}$ *non vi*

---

[15] In realtá questo non é corretto: l'integrale é talmente bravo che conta le aree come negative se f va sotto l'asse delle x, e positive altrimenti. Con ció potreste anche ritrovarvi (e succede spesso, fidatevi) con l'area di due triangoloni - uno sotto l'altro sopra l'asse x - che ammonta a zero! Per evitare questi errori, dovete spezzare l'integrale in piú pezzi, anziché su $[a, b]$, su $[a, x_1], [x_1, x2], ..., [x_n, b]$, dove i vari x_i sono i punti in cui la funzione si annulla, e prendere di ogni area il valore assoluto.

[16] La quinta é un tipico caso di funzione che ha un'utilitá nella vita vera, ma voglio lasciare un'aura di mistero su di essa e sul perché del nome

sentirete costretti a terminare l'inchiostro con 'segnodifrazioneconalnumeratoreesponenzialediicspiútreiltuttopiúunoealdenomminatorexallatrepiúlogícs' e potrete usare un simpatico 'Luisa'.

Il modo piú facile per trovare la funzione inversa é non ragionarci (se no saremmo uomini, e non macchine), fare un'operazione che in matematica non ha pari quanto a inutilitá ma che aiuta l'uomo per i secoli di preconcetti sui simboli: invertire il simbolo x col simbolo y. [17].

$$g_1 : x = y{+}3; \quad g_2 : x = 41; \quad g_3 : x = y^2{+}1; \quad g_4 : x = 2y; \quad g_5 : x = \frac{9}{5}y{+}32; \tag{4.40}$$

Chiamiamo pseudoinversa la schifezza che viene fuori (dico schifezza poiché non necessariamente viene fuori una funzione) ricavando la nuova y (che era la vecchia x) in funzione di x (la vecchia y). Portiamo come si suol dire 'a sinistra' la y:

$$g_1 : y = x{-}3; \quad g_2 : y = ?!?; \quad g_3 : y = \pm\sqrt{x-1}; g_4 : y = \frac{x}{2}; g_5 : y = \frac{5}{9}(x{-}32); \tag{4.41}$$

Ehi, ma che succede? La funzione g_2 non ha una y: come la porto a sinistra?!?!? E g_3? Non mi piace mica tanto: prima per ogni x veniva fuori qualcosa, ora invece per alcune x ha un valore doppio, per altre non ha proprio valore! Che casino!

*Ebbene, questo é ció che vien fuori a usare la matematica col 'pilota automatico'. Vediamo di ragionare su ogni funzione. Vediamo intanto le funzioni 'ben educate': g_1 é diventata la funzione 'sottraitre', g_4 é 'metádi' e g_5 la chiamo $f2c$ (*soddiabbolico, lo so).

Perché g_2 e g_3 non si comportano bene? La definizione di funzione era semplice: per ogni cosa che mangi devi sparare fuori *uno ed un solo valore* e sempre lui. Se f_2 sputa fuori 41 qualunque cosa le si dia in bocca, allora g_2 dovrá per forza fare una dieta a base di 41, per sua stessa definizione: queso vuol dire che g_2 avrá come dominio il solo numero 41 (in matematichese si scrive $\mathcal{D} = \{41\}$) e come codominio tutto $\mathbf{R}$. Ma questo é impossibile, e lo si vede dal fatto che se il vostro cuginetto vi chiede quanto vale $g_2(41)$, voi non potrete rispondergli se non in maniera zen: essa vale tutto e niente. Tra gl'infiniti punti che g_2 tocca, se vogliamo renderla una *funzione*, dobbiamo sceglierne uno solo. Propongo 5040, dato che ha un valore affettivo per me. Ecco dunque che g_2, definita come $g_2(x) = 5040, x \in \{41\}$, é ora una funzione. Se vi divertite a re-invertirla non otterrete f_2, come potreste aspettarvi, ma otterrete qualcosa di vagamente simile: ovvero una restrizione di f_2 ad un dominio che le consenta di essere invertibile (ovvero la sola $x = 5040$).

[17] E se non credete a quanto vi ho detto ditemi che figura geometrica corrisponde all'equazione $y = ax^2 + bx + c$ e quale a $b = xa^2 + ya + z$... eheheeh.

Veniamo ora a g_3 che, essendo piú difficile da calcolare, é paradossalmente molto piú facile da capire [18]. Siamo d'accordo che non ha valori per $x < 1$. Dunque il dominio di g_3 é $\mathcal{D}_\ni = \{x|x \geq 1\}$. Altro problema é quello del '$\pm$': é necessario infatti battezzare uno dei due, e per farvi capire che nessuna scelta ha una dignitá rispetto all'altra lancerá un dado: 1,2,3: piú, 4,5,6: meno. E' uscito 6, quindi scelgo meno. Ecco dunque che $g_3 \doteq -\sqrt{x-1}$ (con $x \in \mathcal{D}_\ni$) é una funzione inversa di f_3.

Cosa abbiamo imparato? Che invertire una funzione f é fattibile solo se prima si restringe il dominio di f (a propria scelta) in modo che essa sia iniettiva (ad ogni elemento e' associato al piu' un elemento del codominio) e suriettiva (ogni elemento del codominio e' coperto).

4.4.3 Funzioni di piú variabili

Le funzioni di cui abbiam parlato finora sono le funzioni di singola variabile. Esse sono le piú interessanti poiché si parte da esse per studiare le altre. Sappiate peró che esistono anche funzioni di piú variabili, come ad esempio:

$$f(x, y) \doteq x^2 + 3y^2 - 8 \tag{4.42}$$

Esse sono, in generale, funzioni che hanno bisogno di mangiare piú variabili per sputarne fuori *una sola*. La piú famosa credo sia $f(x, y) \doteq x + y$ che in Italia e in altre nazioni viene chiamata *somma*, ma essa ha la stessa dignitá di $x - y$ (differenza), x/y (rapporto), $x^2 + y^2 - 1$ (circonferenza goniometrica) e $e^{x^2+y^2}$ (collinetta di Gauss). Sinceramente, l'ultima é quella che preferisco. Da notare che in generale $f(x, y) \neq f(x, y)$, e lo potete notare dalla funzione differenza. Poco importa se in quasi tutti i miei esempi ció vale: chiamatela coincidenza; in realtá l'uomo fa fatica a sparare cose *davvero* a caso, pure quando ci si impegna. Davvero.

4.4.4 Funzioni composte

Le funzioni composte sono funzioni di funzioni. Se f e g sono due funzioni e c'é compatibilitá tra il codominio di g e il dominio di f, allora definiamo $h \doteq f \circ g$ come quella funzione che associa a ogni x il valore $f(g(x))$. Perché c'é un problema di dominio? E' un semplicissimo problema di dieta: se g é onnivoro e sputa fuori di tutto, mentre f é vegetariana esisterá probabilmente una x che g trasforma in carne, e f non puó mangiarla. L'unico modo é restringere il dominio di g a quelle sole x che - trasformate in y da g - non possano essere indigeste per f. Il vincolo, in matematichese é che $\mathcal{Y}_g \in \mathcal{X}_f$. I domini non devono coincidere: non c'é alcun problema, infatti, se f é onnivoro ma g gli passa soltanto verdure.

[18] Se non ci credete, chiedete a uno studente universitario di disegnarvi la funzione $sin(x)$ e la funzione 5: di solito avrá meno problemi a disegnare la prima! Oppure vi chiederá se non vi siete sbagliati a scrivere la seconda!

Molti miei conoscenti fanno confusione con le funzioni composte. Vediamo di fare qualche esempio, definendo alcune funzioni e chiamandole per nome (rispettivamente 'sommauno','cinque','Pippo','raddoppia'):

$$\begin{array}{cc} f_1 : y = x + 1; & f_2 : y = 5; \\ f_3 : y = x^2 + 1; & f_4 : y = 2x; \end{array} \tag{4.43}$$

Proviamo a giocherellare con le 16 combinazioni possibili, vi va?

$$\begin{array}{lcll}
f_1(f_1) & = & sommauno(sommauno(x)) = x + 2; & (sommadue) \\
f_1(f_2) & = & sommauno(cinque(x)) = 6; & (sei) \\
f_1(f_3) & = & sommauno(Pippo(x)) = x^2 + 2; & (Pluto) \\
f_1(f_4) & = & sommauno(raddoppia(x)) = 2x + 1; & (unopiudoppiodi) \\
f_2(f_1) & = & cinque(sommauno(x)) = 5; & (cinque) \\
f_2(f_2) & = & cinque(cinque(x)) = 5; & (cinque) \\
f_2(f_3) & = & cinque(Pippo(x)) = 5; & (cinque) \\
f_2(f_4) & = & cinque(raddoppia(x)) = 5; & (cinque) \\
f_3(f_1) & = & Pippo(sommauno(x)) = x^2 + 2x + 2; & (Paperino) \\
f_3(f_2) & = & Pippo(cinque(x)) = 26; & (ventisei) \\
f_3(f_3) & = & Pippo(Pippo(x)) = x^4 + 2x^2 + 2; & (Paperone) \\
f_3(f_4) & = & Pippo(raddoppia(x)) = 4x^2 + 1; & (Minny) \\
f_4(f_1) & = & raddoppia(sommauno(x)) = 2x + 2; & (duepiudoppiodi) \\
f_4(f_2) & = & raddoppia(cinque(x)) = 10; & (dieci) \\
f_4(f_3) & = & raddoppia(Pippo(x)) = 2x^2 + 2; & (Qui) \\
f_4(f_4) & = & raddoppia(raddoppia(x)) = 4x; & (quadruplica)
\end{array} \tag{4.44}$$

Secondo il solito famoso 'principio inverso della semplicitá', la funzione 'cinque' é quella piú dispotica e piú difficile da usare. Notate che la funzione meno intuitiva, Pippo, é quella responsabile della nascita di un'intera famiglia di funzioni non intuitive (che ho chiamato in modo simile a lui). Molte persone confondono la 'composizione' di funzioni con il prodotto; non poche volte ho visto porre $f_1(f_1(x)) = (x + 1)^2$. Se date un nome alle funzioni come faccio io, questi errori dovrebbero capitarvi di rado. *Si noti che in generale* $f \circ g \neq g \circ f$.

■ Cosa risulta dalla composizione delle funzioni 'sommauno' $(x + 1)$ e 'togliuno' $(x - 1)$? E dalla composizione di 'raddoppia' $(2x)$ e 'dimezza' $(\frac{1}{2})$? Qual é l'elemento neutro della composizione? ■

Chapter 5

Trigonometria

Come diceva il mio prof di Analisi 3, la trigonometia serve solo a 3 categorie di persone: ai navigatori, agli astronomi, e agli scrittori di libri di trigonometria.

A parte la battuta, la trigonometria é qualcosa di molto utile nell'analisi (meno nella vita di tutti i giorni, temo) e merita un capitolo a s
'e.

5.1 Seni & co.

Per capire questo paragrafo vi consiglio vivamente di armarvi di carta e penna, o carta e matita, insomma di scrivibile e scrivente.

Il mattone fondamentale della trigonometria é - a mio dire - la funzione $\sin(x)$. La funzione coseno é molto simile alla funzione seno (cosí come seni e sederi sono due caratteristiche indissolubili in una donna), e ha quindi piú senso entrare nel merito della prima per poi vedere le affinitá con la seconda. Prendete carta e matita e disegnate una circonferenza di raggio 1 sugli assi cartesiani con centro nell'origine $=\equiv (0,0)$. Se l'avete disegnata bene, osserverete che essa interseca gli assi nei punti $E \equiv (1,0)$, $N \equiv (0,1)$, $W \equiv (-1,0)$ (ovest), $S \equiv (0,-1)$. Prendete una semiretta che parte dall'origine e taglia il primo quadrante circa a metá, ma abbastanza bassa (in modo che l'angolo $E \hat{O} P$ sia di circa 30 gradi). Chiameremo θ l'angolo tra la semiretta per $\overrightarrow{OP}$ e la semiretta per $\overrightarrow{OE}$. La funzioen seno é definita come l'altezza del punto P al variare dell'angolo θ (e il coseno ne é l'ascissa, ovvero la proiezione orizzontale). Segue direttamente dalla definizione che il punto P, al variare di θ, varrá: $P \equiv (\cos(\theta), \sin(\theta))$. L'angolo θ (e qui davvero non chiedetemi il perché[1]) viene posto a zero nel punto E, e si muove in senso antiorario (anche qui ho una mia teoria sul perché).

[1]OK, se insistete vi dico la mia teoria: i numeri complessi sul piano cartesiano hanno il numero piú importante (uno) corrispondente alla coppia [1,0] che si trova appunto a EST.

Non credete mi sia dimenticato di voi, prendete carta e matita e disegnate i tre punti notevoli che vi diró: tagliate il primo quadrante in due parti uguali (quindi θ vale 45) e intersecatelo con la circonferenza goniometrica (ovvero una circonferenza di raggio uno centrata nell'origine). Tagliatelo ora in 3 parti uguali, tagliando sempre il quadrante di nordest con angoli di 30 e 60. I tre punti in cui la circonferenza taglia la bisettrice e le due 'trisettrici' li chiameremo A, B, C partendo da est e arrivando a nord. Dalla definizione di θ che vi ho dato, gli angoli relativi ai tre punti sono, rispettivamente, $30, 45, 60$. Dato che le cose son troppo facili, vi devo dire che i matematici non ragionano in gradi. L'angolo *naturale* che si usa (e con ottime ragioni) é il radiante, che vale $\frac{180}{\pi}$ (circa $57, 3$). Se pensate che 180 sian $3, 14$ radianti non vi passerá mai, quindi vi do un consiglio: dimenticate la parola radiante e fate finta che l'angolo si misuri in 'pigrechi': un angolo giro son due pigrechi, un angolo retto é mezzo 'pigreco', e un angolo piatto é un pigreco esatto (to', che coincidenza). Cosa ulteriore, all'occorrenza un 'pigreco' vale *esattamente* quanto il π che avete conosciuto alle medie; ma per ora dimenticatevene, fate finta che sia un'altra cosa. Se proprio non vi piace come atteggiamento, chiamate π radianti 'un gradone'; e adottate come suo simbolo π: cosí vi ho fregati di nuovo. Attenti, metá degli errori che si fanno con la trigonometria nascono da quanto poco sia intuibile un radiante, quindi perdeteci qualche minuto...

Adesso prendete E, A, B, C, N e calcolatemi i valori delle x e delle y. E' molto facile, perció calcolatevelo e imparatevi a memoria questi valori. Allora, vi aiuto: E e N sono dati dall'inizio; BOE é un bel triangolo rettangolo isoscele; ne conoscete l'ipotenusa ma non i cateti (la cui lunghezza poniamo uguale a x). Come calcolarlo? Usiamo pitagora, sapendo che l'ipotenusa é unitario: $x^2 + x^2 = 1^2 \longrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.707$. Ora veniamo ad A: OAA' (con A' proiezione di A sul lato di sud est della circonferenza) é un triangolo equilatero, lo si vede dagli angoli. Ma allora, l'ipotenusa é noto, l'altezza di AA' é sempre unitaria, manca solo l'ascissa di A che é l'altezza dl triangolo equilatero. Si ricava che $y_A = \frac{1}{2}$ (poiché é metá di AA') e con pitagora possiamo anche scoprire $x_A : x^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1^2 \longrightarrow x_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0.866$ (il famoso apotema del triangolo, pensa che coincidenza!). Mettendo insieme i valori, otteniamo che:

$$
\begin{aligned}
&E \equiv (1; 0); \theta = 0 \\
&A \equiv (\tfrac{\sqrt{3}}{2}; \tfrac{1}{2}); \theta = \tfrac{\pi}{6} \\
&B \equiv (\tfrac{\sqrt{2}}{2}; \tfrac{\sqrt{2}}{2}) \theta = \tfrac{\pi}{4} \\
&C \equiv (\tfrac{1}{2}; \tfrac{\sqrt{3}}{2}) \theta = \tfrac{\pi}{3} \\
&N \equiv (0; 1) \theta = \tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Negli altri quattro quadranti i valori sono gli stessi, solo che cambiano i segni (nella metá sud il seno é negativo, nella metá ovest il coseno é negativo).

Ci sono molte cose da notare: vediamone alcune. Anzitutto, seno e coseno si scambiano al passare dei 45°: i valori a 30° sono gli stessi di 60° e state tranquilli che lo stesso vale anche tra 20° e 70° (sebbene sian valori un po' piú ostici da calcolare); ehi, ma se questa proprietá é vera, seno e coseno devono essere per forza uguali in 45°! E infatti é cosí [2]! Altra cosa: gli angoli in natura sono piccoli (ho fatto molti studi psicologici alla Peter Vienkmann e vi posso assicurare che se chiedete a qualcuno di disegnari un angolo questo sará dannatamente vicino a 30); se é vero che nella vostra vita avete in mente angoli piccoli, avete in mente coseni molto grandi (tra $0,8e0.9$) e seni piccoli (tra $0.3e0.5$). Questo discorso *é* effettivamente da pazzi, ma vi aiuterá (spero) quando vi troverete a confondervi tra seni e coseni all'esame. Ricordate: per angoli piccoli il coseno é tanto e il seno é piccolo; e di solito é il seno che piú si avvicina alla metá ed é il piú sensibile alle variazioni (ovvero se variate di poco l'angolo, il seno varierá di piú in proporzione[3]. Per quanto riguarda i segni, ricordate che il seno é negativo per angoli che vanno da 180° a 360°, mentre i coseni son negativi da 90° a 270°[4].

Ricordate che il 90% degli errori nella trigonometria sono nei segni o nella confusione tra seno e coseno, mentre il 999% rimanente sta negli errori di scrittura. :)

■ Quanto vale circa il seno di 40°? E il seno di 40? Non dico di dirmi i valori esatti, ma a occhio? Riuscite ad abbozzare un valore senza calcolatrice e poi vedere se avete sbagliato di molto? Lo zio Ric vi consiglia di perderci qualche minuto, é *davvero* istruttivo. Scrivete su un pezzo di carta la vostra soluzione *prima di usare la calcolatrice.* Hey tu! Ti ho visto, stai barando! ■

5.2 Altro

Ci sono altre funzioni trigonometriche; le piú famose sono la tangente ($\doteq \sin(x)/\cos(x)$), la secante ($\frac{1}{\cos(x)}$) e la cosecante ($\frac{1}{\sin(x)}$). in tanti anni non ho mai trovato alcuna applicazione pratica a secanti e cosecanti, quindi non m'impegneró a trovare qualche rilevanza. La tangente, invece é importantissima e sarebbe opportuno studiarla un po'. Essa é periodica di periodo π, e tende all'infinito nei suoi estremi piú famosi ($\pm\pi/2$). Se v'interessa, la sua funzione inversa (l'arcotangente) é una delle mie funzioni preferite e si

[2] Riflettete su questa cosa, se avete un minuto.

[3] Poiché a mio parere questa regola potrebbe salvarvi ad un esame di Analisi o soprattutto di Meccanica Razionale, vorrei darvi una regola per ricordarvela a vita: **"Se vedete una donna con il seno piccolo e il sedere (= coseno) grosso, vi girerete poco per guardarla (= angoli piccoli)"**. L'esempio é terribile, lo so, ma ho visto troppi amici cadere per un errore di segno o di angolo in trigonometria, quindi mandatelo a mente, o trovate un esempio migliore e piú gender-neutral (faccio fatica a visualizzare seni per uomini)

[4] Anche qui, regola mnemonica (e non importa che sia vera o meno): **"Le scandinave (=nord) hanno un bel seno, e le russe (=est) hanno un bel sedere"**.

usa abbastanza nell'elettronica (insieme al logaritmo, e' una delle due funzioni trascendenti con derivata algebrica). Credo sia la funzione piú educata seppur elegante che io conosca.

Chapter 6

Limiti

Questo paragrafo spiega il difficile (almeno a mio parere) e anti-intuitivo concetto di *limite*. Esso è propedeutico al concetto di derivata ed integrale, per esempio, e consiglio di familiarizzare coi limiti prima di procedere con argomenti che li usano.

6.1 Limiti: un'introduzione

I limiti sono a mio parere uno dei più potenti e interessanti costrutti umani per l'analisi matematica; con ciò voglio dire che grazie ad essi si va molto lontano, ma sono anche convinto che se degli extraterrestri inventassero un loro sistema di matematica non potrebbero vivere senza interi, reali, derivate e funzioni questi potrebbero però benissimo andare avanti senza la nostra definizione di limite. E' una mia impressione: trattatela come tale.

Vediamo di iniziare con un esempio. Prendiamo la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \qquad \left(= \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \right) \tag{6.1}$$

Attenti! Non barate! So che vi verrà la tentazione di dire che $f(x) = x+2$, ma a essere esatti la cosa non vale. Se facciamo un piccolo studio di funzione, ci persuadiamo subito che la funzione *non* è definita per $x = 2$, mentre in ogni altro punto essa vale $f(x) = x + 2$ (il che dimostra che non avete ancora completamente dato di matto). Questo capitolo serve a creare una base teorica per poter dire la seguente, rilassante frase: "La funzione f non è definita in 2, ma se la differenza tra x e 2 è piccola, f si avvicina molto a 4". Sembra banale ma, come diceva il mio professore di Analisi III, "Sono 50 anni che faccio matematica e nessuno mi ha mai spiegato cosa sia un numero piccolo". Anzitutto provare per credere (calcolatrice alla mano, se vi serve):

$$\begin{aligned}
f(1.9) &= 3.9 \\
f(1.99) &= 3.99 \\
f(1.9999) &= 3.9999 \\
f(2) &= ?!? \\
f(2.0001) &= 4.0001 \\
f(2.01) &= 4.01
\end{aligned} \tag{6.2}$$

La tentazione che mi viene è di mettere un cerotto a f e creare una funzione simile (chiamiamola $\overset{g}{f}$ o f_{rep}) che viene 'riparata' nel punto di discontinuità (nel nostro caso la f_{rep} varrebbe proprio $x+2$, esattamente come vi sareste aspettati).

6.2 Limiti: definizione

Diremo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \tag{6.3}$$

(che si legge 'limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è y_0') se vale la seguente condizione:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \nu_\epsilon : \{|x - x_0| < \nu_\epsilon \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon\} \tag{6.4}$$

Lo so, lo so, suona assolutamente incomprensibile; vediamo di capirlo; anzitutto chiamiamo $P_{incriminato} \doteq (x_0; y_0)$. Detto ciò, potete asserire che il limite di f in x_0 è y_0 con assoluta certezza solo se, comunque un antipatico (che chiameremo Andrea poiché ne condivide l'iniziale) fissi una ϵ 'piccola a piacere', voi siete in grado di trovare una ν in funzione di ϵ tale che se la funzione dista in orizzantale da P meno di quanto avete detto voi, essa dista pure in verticale meno di quel che vi ha detto Andrea. In altre parole, ϵ è il ΔY massimo che Andrea accetterà, e ν_ϵ è il ΔX massimo, dettato da voi, intorno al quale la funzione si comporterà così bene da non uscire dai limiti (che brutta parola!) imposti da Andrea.

Notiamo anzitutto una cosa: la definizione di limite non aiuta a *scoprire* quanto un limite valga, bensì a *verificare* se esso tenda effettivamente a un certo valore. Ovvero: se un uccellino vi dice che $\lim_{x \to 5} f(x) = 7$, potete verificare se l'uccellino abbia ragione o torto; ma questa definizione non vi aiuta assolutamente a capire quanto sia $\lim_{x \to 5} f(x)$: se 7,8,9, o $-\pi$.

Vediamo di usare questa definizione per verificare la funzione definita all'inizio del capitolo (**??**, pag. **??**). Anzitutto concorederete con me che calcolare il limite in un punto diverso da 2 sia possibile ma alquanto inutile: non serve la potenza dei limiti dato che la funzione fuori da 2 è definita in modo semplice.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 \tag{6.5}$$

Vediamo se è vero applicando la definizione:

$$\begin{array}{l} \forall\epsilon > 0 \exists \nu_\epsilon : \{|x-2| < \nu_\epsilon \Longrightarrow |\frac{x^2-4}{x-2} - 4| < \epsilon\} \\ |\frac{x^2-4-4(x-2)}{x-2}| < \epsilon \longrightarrow |\frac{x^2-4x+4}{x-2}| < \epsilon \\ |\frac{x^2-4x+4}{x-2}| < \epsilon \longrightarrow |\frac{(x-2)^2}{x-2}| < \epsilon \\ |x-2| < \epsilon \end{array} \tag{6.6}$$

Ora che abbiamo semplificato, è il turno di Andrea a fissare un ϵ (errore massimo voluto): diciamo che lui dica 0.1 (un decimo). Non è gentile con noi, poteva dire 10, ma dobbiamo abituarci a tali bassezze se vogliamo andare in giro orgogliosi a dire che il limite vale 4! Ora noi dobbiamo trovare un ν_ϵ che faccia valere la definizione. Ehi! Prendiamo la metà di quel che ha detto lui, 0.05 (mezzo decimo): dobbiamo mostrare la parte tra parentesi graffe dell'eq. 6.4:

$$|x-2| < \nu_\epsilon \Longrightarrow |\frac{x^2-4}{x-2} - 4| < \epsilon |x-2| < 0.05 \Longrightarrow |\frac{x^2-4}{x-2} - 4| = |x-2| < 0.1 \tag{6.7}$$

Bè, chiamando $|x-2|$ col nome 'Pippo', è dannatamente ovvio che se Pippo è minore di 0.05, allora Pippo sarà anche minore di 0.1! C'è però un problema: io vorrei andare a casa prima di sera, e invece con questa tecnica devo aspettare che Andrea si stanchi di sparare numeri sempre più piccoli! Lui potrebbe dire 0.01, 0.0000001, $\pi/10^{42}$, e io dovrei sempre andare avanti a dimostrare che so trovare un ν_ϵ che freghi il suo ϵ. Dobbiamo essere più furbi di così, dobbiamo inventarci una funzione (che con molta fantasia chiameremo $\nu(\epsilon)$ che ad ogni numero che ci dia Andrea associ un numero buono per fregarlo. Proviamo con $\nu(\epsilon) \doteq \frac{\epsilon}{2}$. Applichiamo la definizione:

$$\begin{array}{l} |x-2| < \nu(\epsilon) \Longrightarrow |x-2| < \epsilon \\ |x-2| < \frac{\epsilon}{2} \Longrightarrow |x-2| < \epsilon \end{array} \tag{6.8}$$

Direi che funziona: se Pippo è minore della metà di ϵ, a maggior ragione è minore di ϵ (attenti, questo vale solo perché $\epsilon > 0$!!! Non sottovalutate i cavilli). D'ora in poi, possiamo mettere una segreteria telefonica, e ogni volta che Andrea telefona gli risponderà: "Quello che hai detto diviso due!", e così potremo anche uscire di casa a farci una birra, ogni tanto.

Attenzione, questa volta l'uccellino ha suggerito giusto (che $f = 4$), ma se ci avesse detto 5?!? Proviamo, tanto per vedere.

$$\begin{array}{l} \forall\epsilon > 0 \exists\nu_\epsilon : \{|x-2| < \nu_\epsilon \Longrightarrow |\frac{x^2-4}{x-2} - 5| < \epsilon\} \\ |\frac{x^2-4-5(x-2)}{x-2}| < \epsilon \longrightarrow |\frac{x^2-4x+4}{x-2}| < \epsilon \\ |\frac{x^2-5x+6}{x-2}| < \epsilon \longrightarrow |\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}| < \epsilon \\ |x-3| < \epsilon \end{array} \tag{6.9}$$

Adesso, Andrea - che si è fatto più gentile - ci dice: $\epsilon = 10$. Noi rispondiamo, ad esempio (tiro a caso), $\nu = 1$. Vediamo se funziona:

$$|x-2| < 1 \Longrightarrow |\frac{x^2-4}{x-2} - 5| = |x-3| < 10 \tag{6.10}$$

Direi che ci siamo: la parte di sinistra dice che x sta nell'intervallo $[1, 3]$ e per qualunque di questi valori direi che $|x-3|$ sta abbondantemente sotto a 10. Ma aspettate a cantar vittoria: Andrea ci propone $\epsilon = 0.1$. Noi prendiamo un ν piccolissimo, diciamo 0.001. Vediamo che succede:

$$|x-2| < 0.001 \Longrightarrow |x-3| < 0.1 \tag{6.11}$$

Questa volta, $x \in [1.999, 2.001]$; è forse vero che per qualunque valore nel range dato x dista da 3 non più di 0.1?!? Certamente no: la distanza va da 1.001 a 0.999 e in ogni caso è ben più grande del valore datoci di Andrea! Siamo stati fregati! L'uccellino non ci ha detto la verità!

Dagli esempi visti, siamo stati in grado di dire che il limite $e'4$ e che il limite $none'5$, ma non abbiamo imparato a fare due cose: (1) a sapere che se è 4 non può essere nient'altro; (2) a scoprire che fa 4 senza l'aiuto dell'uccellino. La prima prendetelo come atto di fiducia, la sezonda sarà scopo del paragrafo successivo.

6.2.1 Limiti sinistri e destri

Nota: In realtà, per ogni funfione f e punto x_0 esistono *due* limiti, detti sinistro e destro; questo è molto importante poiché non sempre i due limiti coincidono (spesso sì, comunque). Vediamo la definizione di limite sinistro:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = y_0 \tag{6.12}$$

(che si legge 'limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è y_0') se vale la seguente condizione:

$$\forall\epsilon > 0 \exists\nu_\epsilon : \{x < x_0 \wedge |x - x_0| < \nu_\epsilon \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon\} \tag{6.13}$$

Come semplice esercizio scrivete anche la definizione di limite destro.

Una funzione f si dice avere limite in un punto x_0 se (1) esistono i limiti destro e sinitro e (2) coincidono.

6.2.2 Limiti e infinito

Vi ricordo che coi limiti l'infinito ha senso di esistere come non mai... la deifnizione cambia TBDS

6.3 Limiti notevoli

6.4 Derivate notevoli

x_0	$f(x)$	$\lim_{x \to x_0} f(x)$
0	x^n	0
1	x^n	1
$+\infty$	x^n	0

6.5 Limiti: uso pratico

Il modo migliore per affrontare i limiti è di em non sfruttare la definizione (che serve solo per le interrogazioni) ma adottare i trucchettini che v'insegnerò, quasi fossero dogmi (mica li ho inventati io, sia chiaro!).

Una volta trovati i limiti dei cosiddetti 'mattoncini', potrete usarli liberamente per trovare i limiti fi unzioni ben più complesse.

Trattiamo tutti i limiti 'notevoli' come esercizi, e poi mettiamoli alla fine in una tabella riassuntiva (che deprecabilmente fotocopierete e lillipuzianamente metterete negli astucci, ...).

- $$\lim_{x \to 0} log(x) =$$ ■

Chapter 7

Derivate

" Nothing takes place in the world whose meaning is not that of some maximum or minimum. "

– Leonhard Euler

Questo capitolo tenterá di spiegare il concetto di derivata che é tanto importante per tutta l'analisi matematica. Esso esige come prerequisito una buona conoscenza delle funzioni come concetto e delle funzioni notevoli.

7.1 Cos' èuna derivata

La derivata é una specie di 'lastra' della vostra funzione: é un aiuto che vi consente di comprendere meglio la funzione che state studiando. Buffamente, é essa stessa una funzione; mentre la vostra $f(x)$ é qualcosa che associa ad ogni x una y che voi - o il vostro prof - ritenete interessante in quanto tale, la derivata (che chiameremo f') fornisce invece una ulteriore informazione su f stessa: non tanto il valore di f nel punto (per questa informazione basta f!!!) quanto la sua *v*ariazione lá intorno a x. Ma facciamo un passo indietro.

definizione2 1 (Andazzo) *Definiamo* **andazzo di una funzione la pendenza media che ha una curva $f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$ (possibilmente continua sull'intervallo stesso); poiché l'ho inventato io, lo definiró in maniera pignola; esso é un operatore che accetta in ingresso una funzione f e due numeri $a; b \in \mathcal{D}_f$: $\mathcal{A}nd[f(x); a; b] \doteq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Per comoditá assumeremo $b > a$. Il suo significato pratico é di dire quant'é l'andamento (o pendenza) medio di una funzione su un certo intervallo.**

Vediamo di sfruttare questa definizione per qualche uso pratico.

7.1.1 Esempio 1: sport

Supponiamo che andiate in bicicletta in zona Zurigo e che la vostra montagna preferita (AlbispassHohe) sia ad un'altitudine di 793m contro i 408m a Zurigo. Ebbene, l'andazzo della Zurigo-Albispass e' il rapporto tra altitudine e distanza "orizzontale" (non diagonale, che e' quella invece segnata dal conta-kilometri ahime') tra i due punti. Questa pendenza e' un numero, ed e' la pendenza che avrebbe una ipotetica rampa perfetta e costante (immaginate una pista di ghiaccio lasciata dall'Uomo Ghiaccio, ma buona fortuna a pedalarci su!). Ovviamente la realta' e' piu' sfumata, e in realta' la pendenza della strada e' piu' ripida in certi punti (eg, subito dopo lo svincolo per Langnau) e meno in altri (eg, in punta). Ma l'andazzo vi da la pendenza media. Ovvio che se la pendenza media la calcolate da Zurigo, viene un numero irrisorio siccome avete 15km di piano prima di salire, quindi una persona furba calcolera' l'andazzo al piede del monte (che chiameremo per comodita' piemonte). L'andazzo piemontese di Albispass puo' essere visto in maniera dettagliata in questo sito e vedete che l'andazzo medio da dove dice lui a dove dice lui e' di 5.5%, ovvero circa 1.055. Ricordate che di solito il vostro GPS vi dice l'altitudine (y) e il vostro conta-km vi dice lo spazio percorso ($\sqrt{x^2+y^2}$) quindi la x di solito e' meno intuitiva.

$$\mathcal{A}nd[strada; Adliswil; Albispass] \cong 1.055 \tag{7.1}$$

Esempio_1 (soldi) Ho scoperto che la matematica, quando parli di soldi, diventa subito piu' comprensibile a tutti. Supponiamo che abbiate investito il vostro danaro (diciamo 10 €). A gennaio investite quei 10 e nei mesi successivi vi trovate i seguenti soldi: $(10, 11, 10, 9, 9, 10, 9, 12, 13, 14, 11, 11)$. Come potete notare, a gennaio dell'anno dopo avete guadagnato soltanto 1 €, mentre qualche mese prima vi eravate illusi di guadagnare ben di piú. Prima di parlare di derivate, vediamo una cosa: quanto vale f? Ció é tutt'altro che banale. Poiché vi ho dato soltanto 12 punti, la cosa piú corretta da dire é che f ha come dominio 12 punti ($= \{1, 2, 3, \cdot, 12\}$) e come codominio i valori dati. Un altro approccio é di dire che la funzione é definita per tutti i giorni dell'anno, o addirittura per tutti i minuti dell'anno (basta vedere l'andamento di borsa dei vostri soldi minuto per minuto), ma di tutti questi valori son noti solo i dodici valori mensili. In generale, qualunque sia f, pensiamo che f passi per dodici punti noti: $(1; 10), (2; 11), (3; 10), \cdots, (12, 11)$. Ai matematici questa definizione puntiforme di solito piace poco. Esistono infinite funzioni passanti per questi dodici punti, ma una delle piú semplici é sicuramente (senza usare i *sinc*, per chi li conosce) il polinomio di grado 12 che passi per quei punti, che chiameremo $P(x)$.

In questo caso l'andazzo del vostro investimento e' chiaramente l'ultimo valore meno il primo (1 €) in 12 mesi. Avete guadagnato 1 € in 12 mesi (o 11 a seconda di come li contate): complimenti!

$$\mathcal{A}nd[investimento; Gen; Dic] \cong \frac{1e}{12mesi} \cong 0.08cents/mese \tag{7.2}$$

definizione2 2 (Derivata) *Sia data una funzione $f(x)$ continua sull'intervallo $[a; b]$. Sia x_0 un punto interno a tale intervallo ($x_0 \in]a; b[$). Definiamo la derivata di f nel punto x_0 come il valore:*

$$\lim_{x \to x_0} \mathcal{A}nd[f; x_0; x] \doteq f'(x_0) \tag{7.3}$$

Ovvero la derivata coincide con l'andazzo man mano che avvicinate le due ascisse l'una all'altra.

Poiché molti veterani potrebbero essere schifati dal mio operatore fatto in casa (l'Andazzo) vi do ua definizione che non lo usa:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \doteq f'(x_0) \tag{7.4}$$

Notiamo intanto che la derivata non sembra essere una funzione, ma un semplice numero. Tranquilli, non vi ho ingannato. In realtá, per ogni x_0 su cui é definita f é definita anche f': potremmo definire la $f$unzione derivata come la funzione che segue, punto per punto, i valori dati dalla definizione. Attenzione, peró! La derivata non é necessariamente calcolabile su ogni punto su cui é definita f: su ogni punto deve esserci abbastanza spazio sia a sinistra che a destra affinché il limite possa essere calcolato[1]. Un modo spesso piú facile per definire la derivata é quella di non dire: "limite per x che tende a x_0" ma di dire: "limite per $x = x_0 + h$ con h che tende a 0". Se ci pensate non cambia assolutamente nulla, ma i calcoli son spesso piú semplici; in tal caso, abbiamo ottenuto non piú $f'(x_0)$ ma giá $f'(x)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \doteq f'(x) \tag{7.5}$$

Il significato fisico piú semplice (e che non dovrete mai dimenticare) della derivata é: $f'(x_0)$ é sempre il valore della *p*endenza della retta tangente a f nel punto x_0.

La derivata é, per nostra fortuna, sempre facile da calcolare (ció non vale, ad esempio per gli integrali). Per ogni funzione 'notevole', esiste una funzione che di essa é la derivata. vediamo di ricavarne alcune; delle rimanenti daremo semplicemente la ricetta giá fatta.

[1] Questo ha a che fare con i cosiddetti *p*unti di accumulazione, di cui non parleró. In generale, é sufficiente che esista un insieme $[a, b]$ compatto che racchiuda il punto x_0 affinché il limite sia calcolabile.

■ Calcolare la derivata di $x(t) = 2t^2 + 3t + 10$, che chiameremo $x'(t)$.

$$[rcl]x'(t) = \lim_{t \longrightarrow h} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \quad (7.6)$$
$$= \lim \frac{(2(t+h)^2 + 3(t+h) + 10) - (2t^2 + 3t + 10)}{h} = \quad (7.7)$$
$$= \lim \frac{2t^2 + 4ht + 2h^2 + 3t + 3h + 10 - 2t^2 - 3t - 10}{h} = (7.8)$$
$$= \lim \frac{4ht + 2h^2 + 3h}{h} = \quad (7.9)$$
$$= \lim \frac{(h)(3 + 4t + 2h)}{h} = \quad (7.10)$$
$$= \lim 3 + 4t + 2h = \quad (7.11)$$
$$= 3 + 4t \quad (7.12)$$

Semplice, no? Notate che le parti che non contenevano h si sono elise a vicenda (riflettete un attimo sul perché), le parti che la contenevano di grado 1 (ovvero $(3 + 4t)h$) sono rimaste fino alla fine, mentre le parti che la contenevano di grado 2 sono state elise in quanto infinitesimi di ordine superiore. ■

Ora possiamo finalmente rispondere alla domanda (5): quanto stiamo guadagnando in un certo momento? Nel momento in cui versiamo i soldi (tempo 0), il nostro patrimonio é crescente. Esso vale $f'(0) = 3$. Questo vuol dire che la pendenza della retta tangente a f nel punto 0 é 3, quindi vuol dire che in un istante *p*iccolissimo a sinistra e a destra dello zero noi stiamo guadagnando 3 soldi (nell'esempio, 3000 €) al secondo. Attenzione! Non vuol dire come potreste pensare che tra un secondo avrete esattamente 3 soldi in piú[2], ma qualcosa di comunque simile: vuol dire che tra un secondo avrete *c*irca 3 soldi in piú, tra $\frac{1}{1000}$ di secondo avrete circa $\frac{3}{1000}$ di soldi in piú, tra $\frac{1}{1'000'000}$ di secondo avrete circa $\frac{3}{1'000'000}$ di soldi in piú, e che questi 'circa' si avvicinano a realtá tanto piú quanto piú il tempo diventa piccolo. Vi sembra poco? Se sí, vi sbagliate di grosso.

■ Calcolare la derivata di $f(x) = x^n$ (con $n \in \mathbf{N}^+$).

Per risolvere questa, occorre conoscere i binomi di Newton. Per essi rimando a **??**, pag. **??**. Vi ricordo che:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n, \quad (7.13)$$

[2] Questo perché in 0 la funzione f' vale 3, ma dopo mezzo secondo ha giá un altro valore, e per sapere quanto avete dovete calcolare l'*i*ntegrale di ques'andamento, che banalmente é la f stessa.

Sapendo ció, usiamo la definizione di derivata:

$$\begin{aligned}
D[x^n] &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = &(7.14)\\
&= \lim \frac{(x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n) - (x^n)}{h} &(7.15)\\
&= \lim \frac{((\binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n)}{h} &(7.16)\\
&= \binom{n}{1}x^{n-1} &(7.17)\\
&= nx^{n-1} &(7.18)
\end{aligned}$$

Anche qui, i termini di ordine h^2 o superiori sono morti, lasciandoci qualcosa di pulitissimo! La cosa piú bella di questo risultato é che ora sapete derivare ogni singolo pezzo di un polinomio, quindi in pratica sapete derivare un polinomio (non é ovvio, dovete ringraziare il principio di multilinearitá della derivata che trovate in seguito).

Se questo risultato vi sembra magia nera, dovete pensare in quest'ottica: quando elevate $(x + h)^n$ con x numero normale e h numero infitesimo, il binomio di Newton incrocia n volte le X e le H con pesi crescenti, vediamolo con $n = 3$ per capirci: $(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3h^2x + h^3$. Siccome h e' infinitesimo, i valori sono sempre piu' piccoli man mano che andate da sinistra a destra, il che vuol dire: x^3 e' un gigante, $3x^2h$ e' una piccola nullita' (tende a zero, ma lentamente), $3h^2x$ e' una grande nullita' (tende a 0 piu' velocemente del secondo termine), infine h^3 e' la piu' piccola e minuscola nullita' che fa sentire persino $3h^2x$ un gigante (se non mi credete, pensate a $h = 0.001$ e pensate ai valori delle tre parti per numeri normali). Ebbene, nel limite di cui sopra, il pezzo piu' grosso si elide e scompare, quindi il comprimario piu' grande e' $3x^2h$ che nel caso generico di grado n sara' nx^{n-1}. Spero questa spiegazione aiuti a capire il risultato un po' magico. ■

■ Provate a calcolare la derivata di e^x, $\log(x)$, $\sin(x)$. Attenti perché il limite é fattibile ma richiede una buona 'cultura' supplementare ;) ■

7.2 Derivate notevoli

Funzione	Derivata
42	0
$\mathbf{x^n}$	$\mathbf{nx^{n-1}}$
$ax^n + bx + c$	$2ax + b^\dagger$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{x^{n+1}}^\dagger$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}^\dagger$
$\sqrt[n]{x}(= x^{\frac{1}{n}})$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}^\dagger$
$\log_a(x)$	$\frac{\log_a(e)}{x}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}^\dagger$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}^\dagger$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}(= 1 + \tan^2(x))$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	$e^{x\dagger}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)^\dagger$
$\cosh(x)$	$-\sinh(x)^\dagger$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}^\dagger$
$arcsinh(x)(= ln\|x + \sqrt{x^2+1}\|)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}^\dagger$
$arccosh(x)(= ln\|x \pm \sqrt{x^2-1}\|)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}^\dagger$
$arctanh(x)(= \frac{1}{2}ln\|\frac{1+x}{1-x}\|)$	$\frac{1}{x^2-1}^\dagger$
e^x	la lascio come (facile?) esercizio al lettore

(†): questa derivata puó essere tranquillamente dedotta dalle altre (non é 'primitiva'); l'ho messa solo per comoditá (leggasi pigrizia) vostra.

Le derivate piú stupefacenti sono senz'altro quella del logaritmo e quella dell'arcotangente.. ricordatevene quando studierete gl'integrali selle funzioni polinomiali fratte ;)

Ho notato che molta gente ha paura a derivare $\sqrt{x}$ e non dorme al pensiero di derivare $\sqrt[3]{x}$. Vi ricordo che la radice n-ma di qualcosa equivale, in campo reale, a un'esponenziazione: $\sqrt[n]{x} \equiv x^{\frac{1}{n}}$; ció la riduce a godere delle proprietá di derivazione di qualsiasi polinomio!!!

7.2.1 Proprietá delle derivate

Multilinearitá della derivata

$D\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$

Tirerei gentilmente un pugno in faccia a chi desse per scontata la relazione seguente, e amabilmente chiederei a queste persone di dirmi quanto vale la derivata del prodotto di due funzioni... ebbene sappiate che *n*on vale assolutamente la seguente: $Df(x)g(x) = f'(x)g'(x)$. Alla faccia delle ovvietá.

Derivata del prodotto

$Df(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Derivata del rapporto

Questa é davvero incasinata: $D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'g-g'f}{g^2}$

Se mai ve la doveste dimenticare (per esempio é facilissimo sbagliare il segno, cosa che succede se al numeratore invertite f con g), con un po' di tempo ve la potete ricavare, dopotutto é il prodotto di f e $\frac{1}{g}$, e la seconda é la funzione composta $\frac{1}{g(x)} = [\frac{1}{x}] \circ [g(x)]$.

Derivata di funzione composta

$Df(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

Attenti, la precedente é facilissima da enunciare, ma difficile da capire e applicare. Mi piacerebbe che i piú bravini di voi deducessero dalla precedente equazione la seguente:

$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'g-g'f}{g^2}$

Oltre questa, potete dedurre anche le seguenti [3] (potete dedurle da voi; se avete 5 minuti, investiteli nel dedurre le seguenti):

$De^{f(x)} = f'\dot{e}^f$

$D\log^{f(x)} = \frac{f'}{f}$

$D\sin^{f(x)} = f'\dot{\cos}(f)$

$D\sqrt{f(x)} = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

State molto attenti alla derivata del logaritmo: d'ora in poi quando troverete $\frac{2x}{x^2+42}$ vi dovrá suonare un allarme, solo cosí diventerete dei bravi integratori.

[3] Dedurle da voi fa la differenza tra il ricordarle o meno al prossossimo esame: tutti sappiamo che al prossimo avrete i bigliettini; ma un giorno potrebbe servirvi in un esame in cui non credete che vi possa servire; é *lí* che potrebbe tornarvi utile. Sono sinceramente convinto che la matematica che non sapete a memoria sia completamente inutile (ma non mi darete retta poiché voi volete solo passare esami, non sapere le cose, e vi capisco perché la pensiamo tutti cosí in un intorno sinistro dell'esame).

■ Calcolate le derivate di $\cos(f(x)), \arctan(f(x)), f(x)^x, f(x)^{g(x)}$. Attenti che le ultime due son difficilotte. ■

Derivata di funzione inversa

Anzitutto mettiamo in chiaro una cosa: la funzione inversa *n*on é $\frac{1}{f(x)}$, come molti credono. E' in realtá la funzione che si estrare da f invertendo x e y; i grafici delle due funzioni sono speculari rispetto alla retta $(y = x)$, se non ci credete guardate il grafico di e^x e della sua inversa $\ln(x)$.

Se io so la derivata di $sin(x)$, non sarebbe bello se potessi usare una scorciatoia per avere la derivata di $\arcsin(x)$? Ebbene, la c !

$Df^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)}\Big|_{y=f^{-1}(x)}$

Questo non é affatto banale: derivate f e la mettete al denominatore; ora avrete una $g(y)$ che non c'entra piú nulla con f. Dovete fare in modo che non dipenda da x, y o altro, ma solo da f, e ció é tutt'altro che semplice. Esempio da manuale:

$D\arcsin(x) = \frac{1}{cos(y)}\Big|_{y=arcsin(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2(arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Antipatico, vero? Eh giá. Credo meriti un minuto di riflessione: "Quanto fa $\cos(\arcsin(x))$?" Non lo so. Ma so che $\cos = \pm\sqrt{1 - sin^2(x)}$. E' un passo avanti, dato che so che $\sin(\arcsin(x)) = x$, cosí come $pippo(pippo^{-1}(x)) = x$ per qualunque funzione *pippo*. C un unico appunto da fare: nulla é gratis, e abbiamo dovuto pagare un prezzo. Il fatto é che abbiamo avuto in risposta x applicando la funzione *seno* e *arcoseno*, e per far ció ci siam dovuti 'restringere' secondo tutti i restringimenti di dominio apportati dalle funzioni (nel nostro caso, solo la seconda, che restringe $\mathcal{D} = [-1; 1]$). Anche il nostro barbatrucco di dire che $\cos(x) = \pm\sqrt{1 - sin^2(x)}$ ha avuto un costo; ad esser pignoli dobbiamo dividere il dominio in due parti, a seconda che venga fuori il piú o il meno. Metterei una mano sul fuoco (sperando di non fare scevolate) che alla fine venga ció che ho detto io, ovvero $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Ma fate i conti per sicurezza.

7.3 Massimi e minimi

Sicuramente, l'aiuto maggiore che possono dare le derivate nello studio di funzione é il calcolo di massimi e minimi; poiché la derivata é la pendenza della retta tangente a f nel punto, gli zeri di f' sono proprio quei punti in cui la funzione smette di crescere o decrescere e si gode un attimo di pace; se passa da positiva a negativa, abbiamo un massimo (cresceva poi decresce), se da negativa diventa positiva abbiamo un minimo; se invece dopo lo zero il segno viene mantenuto [4] possiamo osservare un flesso, che ai nostri fini é

[4] Vi segnalo l'interessante effetto matrioska: se la derivata intorno a zero passa da positiva a nulla e di nuovo a positiva ha un minimo in zero, e quindi si annulla la derivata

solo un falso allarme.

Per maggiori dettagli su derivate, massimi e minimi rimando allo studio di funzione (cap. 4.3.2, pag. 27).

seconda!!!

Chapter 8

Equazioni differenziali

Questo capitolo ha come prerequisito che conosciate *alla perfezione* derivate e integrali. Non dovete solo averle studiate, ma dovete a sapere a memoria tutte le derivate e integrali notevoli. Se no, fidatevi, non ne uscirete pi
'u.

■ **Domande propedeutiche** *P*rima di passare oltre,
'e opportuno che sappiate rispondere alle seguenti domande (se non sapete rispondere ad esse, difficilmente riuscirete a capire ci
'o che segue).
Qual é quella funzione uguale alla propria derivata? e qual é quella funzione che derivata una volta cambia di segno? Cosa si ottiene derivando n volte un innocente $\sin(x)$? Quali famiglie di funzioni derivate un po' di volte e sommate tra loro possono dare una polinomiale fratta (vi aiuto, sono 3)? ■

8.1 Introduzione

Chapter 9

Serie di Taylor

Questo capitolo tratta l'interessantissimo - a mio vedere - mondo delle serie di Taylor. A cosa servono? Boh, direi che la serie di Taylor é un modo 'pixelloso' di vedere una cosa 'curva', o un modo semplice di vedere una cosa complessa. Purtroppo, per capirne i concetti dovrete avere buone basi di serie/successioni, derivate e funzioni. Vi anticipo subito che Taylor é il mio argomento preferito, ed é per farlo capire al mondo che ho deciso di scrivere 'sto libro. Se avrete capito questo capitolo e saprete calcolare Taylor di $sin(x)$ alla fine di questa lettura, il mio lavoro si potrá dire concluso e saró una persona molto felice (per favore fatemelo sapere!)

■ **Domande propedeutiche** Prima di passare oltre,
'e opportuno che sappiate rispondere alle seguenti domande (se non sapete rispondere ad esse, difficilmente riuscirete a capire ci
'o che segue).
1. Quanto vale la derivata n-ma di $\sin(x)$? 2. Quanto vale la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$? 3. Quanto vale *in* 0 la derivata k-ma di e^x? E di $\sin(x)$? E della nostra amica $ax^2 + bx + c$? ■

Se non sapete rispondere a questi prerequisiti, vi consiglio di rileggervi i capitoli Limiti e Derivate, e ripassare di qui.

9.1 Lo sviluppo di Taylor

Taylor e' una specie di Raggi X di una funzione, o meglio ancora una TAC: mentre con una fotocopiatrice potete fare solo una copia della superficie di un oggetto (di solito un foglio A4), mentre nella TAC potete fare tante (N) fotocopie, a diverse profondita' e quindi fare una scansione 3D di un oggetto (il vostro cervello, reni, milza, ..), data dalla giustapposizione concettuale di tutti questi strati. Taylor fa la stessa identica cosa con una dimensione in meno (quindi e' una TAC semplificata).

Cominciamo con una definizione che probabilmente pochi capiranno, poi faremo un esempio facile, taylorizzando una funzione che non ha bisogno, e infine una funzione un po' piu' difficile e dovreste poi vedere la luce.

definizione2 3 (Taylor) *Definiamo operatore Taylor di ordine n data una funzione $f(x)$ su un punto x_0 (detto anche "punto di microscopio")*

$T_n[f(x), x_0] := \varsigma_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-x_0)^k}{k!}$, *dove*

$a_k := f^(k)(x_0)$, *con $f^{(k)}$ derivata k-ma di f in x_0*

In altre parole, il polinomio di Taylor di grado N (se non capite, pensate a 10) e' definito come quel polinomio di grado N (10) che passa per dove passa la funzione nel punto x_0 (punto dove mettete il vostro ipotetico microscopio), e ha anche la derivata prima uguale alla funzione nel punto dove avete messo il microscopio, e cosi' via con la derivata seconda, fino alla n-ma.

Se non capite il perche' del $k!$ al denominatore vi accorgerete che e' necessario per contrastare le N derivate del vostro polinomio. E' come se Dio non avesse creato i polinomi in forma $x, x^2, x^3, ...$ ma piuttosto in forma $x, x^2/2, x^3/6, ...$, ma di questo vi accorgete solo dopo aver passato 5 anni a derivare.

Ora per costruzione questo polinomio "fantoccio" si comporta esattamente come la funzione in x_0: ha lo stesso valore, la stessa pendenza, varianza, curtosi, asimmetria (skewness) e cosi' via. Stiamo costruendo un sosia che nel punto di osservazione e' il piu' simile possibile alla funzione, ma allontanandoci dal punto ci sara' probabilmente una divergenza (a meno che le due funzioni si eguaglino). Ora se fate abbastanza derivate (1000? Un milione?), il polinomio artefatto e pixelloso che avete costruito aderira' sempre di piu' alla funzione anche allontanandoci da x_0.

D'ora in poi considereremo $x_0 = 0$ senza perdere in generalita' (spostiamo l'asse delle ordinate sul punto dove volete mettere il microscopio). A questo punto Taylor si semplifica notevolmente in:

9.2 Esempio facile

Esempio 1 idiota: polinomio.

1. Prendiamo la funzione: $f(x) = x^2 + 5$ e calcoliamo Taylor nel punto di microscopio 0. Questo e' un polinomio di secondo grado e sappiamo che abbiamo solo 2 derivate al piú non nulle. L'ho scelta perché cosí non facciamo notte, e poi passiamo ad una piú bella e interessante.

* Quanto vale $f(0)$? Facile: $\underline{5}$. * Quanto vale $f'(0)$? Semi-facile. Dobbiamo prima derivare e poi azzerare la x. Derivata: $f' = 2x$. Ok, ora sostituiamo 0, e anche la y viene $\underline{0}$. * Quanto vale $f''(0)$? Piu' difficile. Dobbiamo derivare due volte e poi azzerare la x. Fortunatamente per la derivata seconda basta derivare un'altra volta la Derivata prima: $f'' = 2$. Ok, ora sostituiamo 0, e anche la y viene $\underline{2}$ (notate che non c'e' x qui, sarebbe venuto 2 in ogni punto di microscopio).

Ricapitolando, i coefficienti al microscopio di questa funzione sono 5,0,2. Splendido, ora costruiamo il sosia della nosatra funzione originale.

$T_2[f(x)] = 5 + 0x + 2(x^2/2)$

Ovvero:

$T_2[f(x)] = 5 + x^2$

Hey! Ma e' la stessa funzione di partenza! Che delusione! Beh, avete creato in vitro una riproduzione polinomiale di una funzione polinomiale, cosa vi aspettavate? Abbiamo imparato una lezione importante pero': la taylorizzazione di un polinomio e' il polinomio stesso :)

9.3 Esempio piu' complicato

Prendiamo ora $f(x) = cos(x)$.

Cerchiamo il polinomio di Taylor di grado 5 del coseno (capirete poi perche' 5) nel punto 0 (ascissa di microscopio):

$T_5[cos(x)] =???$

Allora, qui dobbiamo calcolare 5 valori, per le 4 derivate e la funzione stessa. Ricordiamoci una proprieta' rocambolesca del coseno: il coseno ha derivate cicliche! La derivata del coseno e' meno seno. Del seno e' il coseno. Quindi ogni due derivate il coseno torna se stesso (come dopo una notte di sbronza) ma cambiato di segno, ma tranquilli, ancora due derivate e torna davvero se stesso. Permettetemi di usare delle frecce per meglio esprimere questa circolarita':

$cos(x) \Rightarrow -sin(x) \Rightarrow -cos(x) \Rightarrow sin(x) \Rightarrow cos(x)$

Quindi dopo 4 iterazioni siamo al punto di partenza. Ora ricordiamoci che in 0, i seni valgono 0, i coseni valgono 1 (dato che -0 vale 0, possiamo ignorare il segno per i seni).

* funzione. $cos(0) = \mathbf{1}$ * derivata prima: $-sin(0) = \mathbf{0}$ * derivata seconda: $-cos(0) = \mathbf{-1}$ * derivata terza: $sin(0) = \mathbf{0}$ * derivata quarta: $cos(0) = \mathbf{1}$ (come al punto 0) * derivata quarta: $-sin(0) = \mathbf{0}$ (come al punto 1)

Hey! Ma sti coefficienti sembravano tanto difficili, in verita' sono semplicissimi! Sono 0 per numeri dispari, e alternativamente 1/-1 per le posizioni pari! Scriviamolo *ad mentula canis* :

$T_5[cos(x)] = 1 + 0x - x^2/2! + 0x^3 + x^4/4! = 1 - x^2/2 + x^4/24$

Sono convinto che tutti abbiate individuato i coefficienti di grado 6,8,10 se volessimo andare avanti oltre il quinto.

Una sottigliezza: $1-x^2/2+x^4/24$ e' il polinomio di grado CINQUE (non solo 4) che meglio approssima il vostro coseno. Semplicemente la migliore rappresentazione del coseno al grado 5 e' di NON avere un x^5: non l'abbiamo dimenticato, l'abbiamo calcolato e il coefficiente e' esattamente zero. Come dire: abbiamo comprato lo zucchero, ma in questa torta non serve. In un'altra torta servira' magari in quantita' 70gr, o magari -1. :) So che i piu' pragmatici di voi diranno: stai barando, questo e' un polinomio di grado

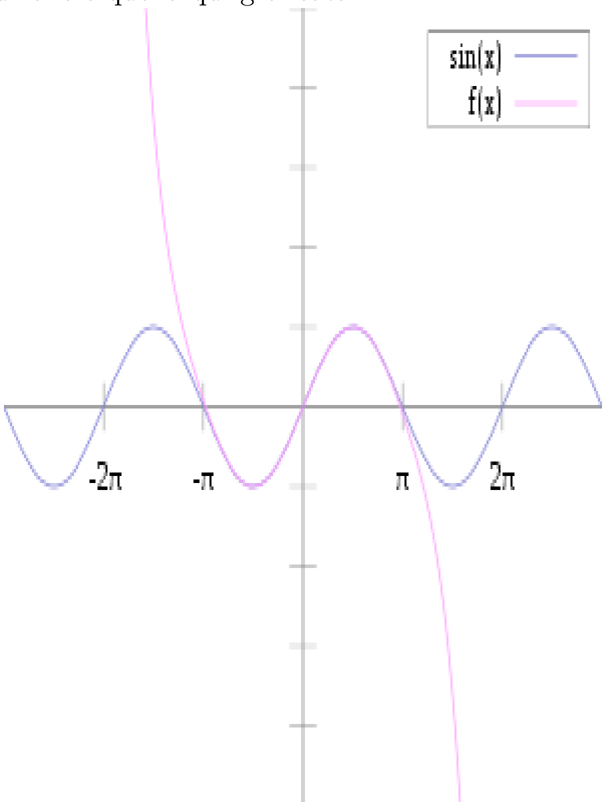
4 - lo e', ma e' anche un polinomio di grado 5 con coefficiente piu' alto nullo. Ai pignoli dico: potrebbe essere che stiamo barando, ma spero me lo perdonerete ai fini della narrazione.

9.4 Conclusione

Avete scoperto come analizzare una funzione polinomiale (booh!) e una trascendente al microscopio elettronico. Bravi!

■ Ora provate voi a fare il polinomio di Taylor di grado 8 di $sin(x)$

Osservate qui l'approssimazione presa da Wikipedia di un $sin(x)$ approssimato con un polinomio di grado 7. In cosa differiscono la vostra soluzione e quella qui graficata?



■Calcolate il polinomio di Taylor di grado 5 della funzione esponenziale "scostumata" 10^x