Conteúdo

- **O que é “Inteligência” Computacional?**
- **Áreas de Aplicação**
- **Técnicas Inteligentes**
  - **Sistemas Especialistas**
  - **Lógica *Fuzzy***
  - **Redes Neurais**
  - **Algoritmos Genéticos**
- **Sistemas Inteligentes do LIRA**

O que é Inteligência Computacional?

"Técnicas e sistemas computacionais que imitam aspectos humanos, tais como: percepção, raciocínio, aprendizado, evolução e adaptação".

Inspiração na Natureza

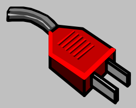
● ***Sistemas Especialistas***	**inferência humana**
● ***Lógica Fuzzy***	**processamento lingüístico**
● ***Redes Neurais***	**neurônios biológicos**
● ***Algoritmos Genéticos***	**evolução biológica**
● ***Sistemas Híbridos***	**aspectos combinados**

Sistemas Computacionais de Suporte à Decisão

- *Sistemas Especialistas*
- *Lógica Fuzzy*
- *Redes Neurais*
- *Algoritmos Genéticos*
- *Sistemas Híbridos*

- **Aquisição de Conhecimento**
- **Previsão**
- **Otimização**
- **Controle**
- **Planejamento**
- **Data Mining**
- **Análise de Risco**
- **Detecção de Fraude**

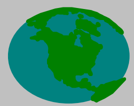
Áreas de Aplicação

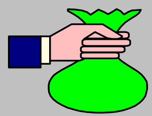
 **Energia**

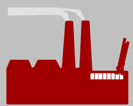
 **Finanças**

 **Telecomunicações**

 **Medicina**

 **Meio-Ambiente**

 **Comércio**

 **Indústria**

Sistemas Especialistas

Conceitos Básicos

⇒ *São programas que armazenam e manipulam o* ***conhecimento*** *adquirido de um especialista*.

Conceitos Básicos

⇒ *São programas que armazenam e manipulam o **conhecimento** adquirido de um especialista*.

⬇

➔ Requer entrevistas e observações para **extrair o conhecimento**.

➔ Conhecimento é representado em formato **manipulável pelo computador**.

Representação do Conhecimento

Regras de produção

Regra i

IF <condição_1> **AND** <condição_2>...

THEN <ação_A> **AND** <ação_B> ....

Representação do Conhecimento

Regras de produção

Regra i

IF <condição_1> **AND** <condição_2>...

THEN <ação_A> **AND** <ação_B> ....

Exemplo 1:

IF Carro = ***BMW*** **AND** cidade = ***São Paulo***

THEN seguro = *10% valor carro*

IF carro = ***Fiat*** **AND** cidade = ***Icapuí***

THEN seguro = *4% valor carro*

Representação do Conhecimento

Regras de produção

Regra i

IF <condição_1> **AND** <condição_2>...

THEN <ação_A> **AND** <ação_B> ....

Exemplo 2:

IF idade ≥ ***65 anos***

THEN seguro = *R$ 1.500,00*

IF idade ≥ ***50 anos*** **AND** pressão ≥ ***14 por 10***

THEN seguro = *R$ 1.200,00*

IF idade < ***40 anos*** **AND** pressão = ***12 por 8 ± 10%***

THEN seguro = *R$ 650,00*

Organização de Sistemas Especialistas

Base de conhecimento

IF Carro = ***BMW*** **AND** cidade = ***SP***
THEN seguro = 10%

IF Carro = ***Fiat*** **AND** cidade = ***Icapuí***
THEN seguro = 4%

Organização de Sistemas Especialistas

Base de conhecimento

IF Carro = ***BMW*** **AND** cidade = ***SP***
THEN seguro = 10%

IF Carro = ***Fiat*** **AND** cidade = ***Icapuí***
THEN seguro = 4%

↔

Memória de Trabalho

carro = ***Fiat***
cidade = ***Icapuí***

Organização de Sistemas Especialistas

Base de conhecimento

IF Carro = ***BMW*** **AND** cidade = ***SP***

THEN seguro = 10%

IF Carro = ***Fiat*** **AND** cidade = ***Icapuí***

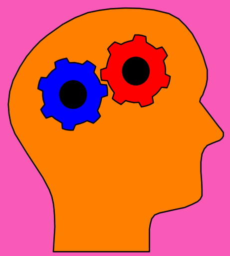
THEN seguro = 4%

Memória de Trabalho

carro = ***Fiat***

cidade = ***Icapuí***

Máquina de Inferência



Organização de Sistemas Especialistas

Base de
conhecimento

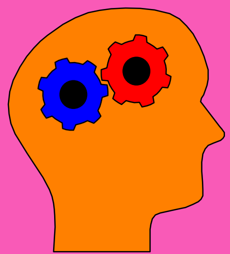
IF Carro = ***BMW*** **AND** cidade = ***SP***
THEN seguro = 10%

IF Carro = ***Fiat*** **AND** cidade = ***Icapuí***
THEN seguro = 4%

Memória
de
Trabalho

carro = ***Fiat***
cidade = ***Icapuí***

Máquina de
Inferência



Valor do Seguro

Organização de Sistemas Especialistas

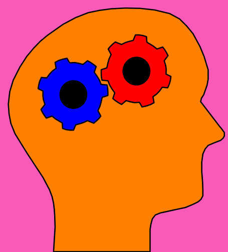
Base de
conhecimento

IF Carro = ***BMW*** **AND** cidade = ***SP***
THEN seguro = 10%
IF Carro = ***Fiat*** **AND** cidade = ***Icapuí***
THEN seguro = 4%

Memória
de
Trabalho

carro = ***Fiat***
cidade = ***Icapuí***

Máquina de
Inferência



Valor do Seguro

Sistema de
Explicações

Aquisição de
Conhecimento

Avaliação

Adequada para aplicações onde:

- ✓**o *conhecimento* (o especialista) é *acessível;***
- ✓**as *regras são conhecidas* e *fáceis* de serem formuladas por este especialista;**
- ✓**quando *explicações* são necessárias.**

Avaliação

Vantagens

- utiliza representação explícita do conhecimento
- capazes de gerar justificativas (explicações)

Desvantagens

- ausência de mecanismo automático de aprendizado
- processo longo e caro de extração do conhecimento
- exigência de declarações precisas dos especialistas

Aplicações Comerciais

- **American Express:** Sistema de Auxílio para Autorização de Crédito (CC)
- **Citibank, National Westminster, Midland Bank:** Análise de empréstimos pessoais, Gerência de Carteira de Investimento

Lógica *Fuzzy*

Conceitos Básicos

Técnica inteligente que tem como objetivo modelar o modo *aproximado de raciocínio*, imitando a habilidade humana de tomar decisões em um ambiente de *incerteza* e *imprecisão*

Conceitos Básicos

Permite que os sistemas inteligentes de *controle* e *suporte à decisão* lidem com informações imprecisas ou *nebulosas*

Conceitos Básicos

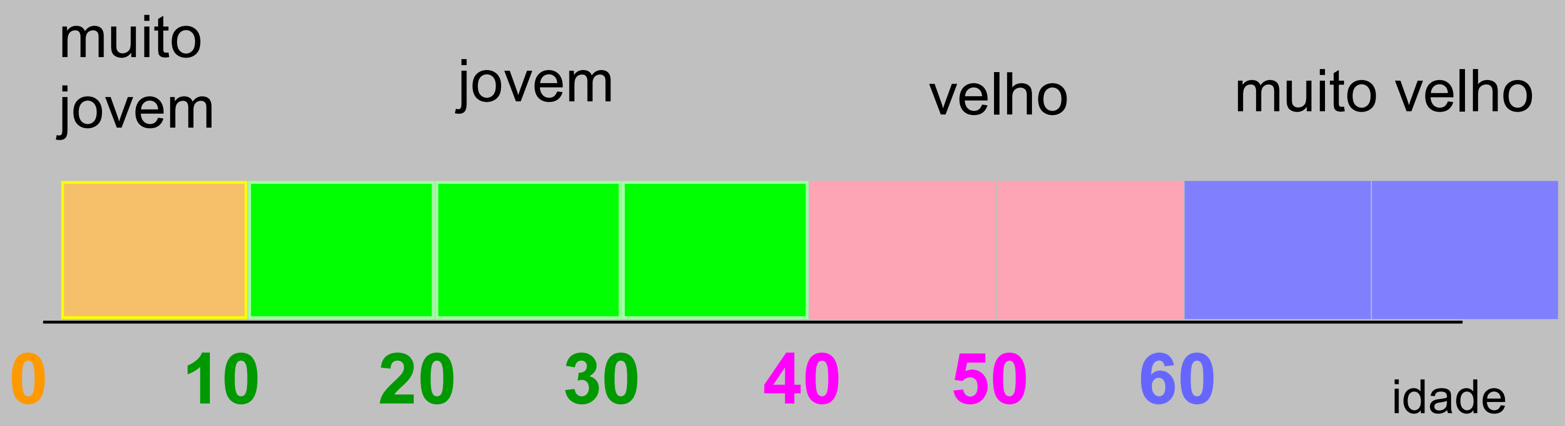
Permite que os sistemas inteligentes de *controle* e *suporte à decisão* lidem com informações imprecisas ou *nebulosas*

Exemplos:
- **investimento de alto risco**
- **pressão média**
- **fluxo muito intenso**
- **alta temperatura**
- **muito jovem**
- **meia-idade**

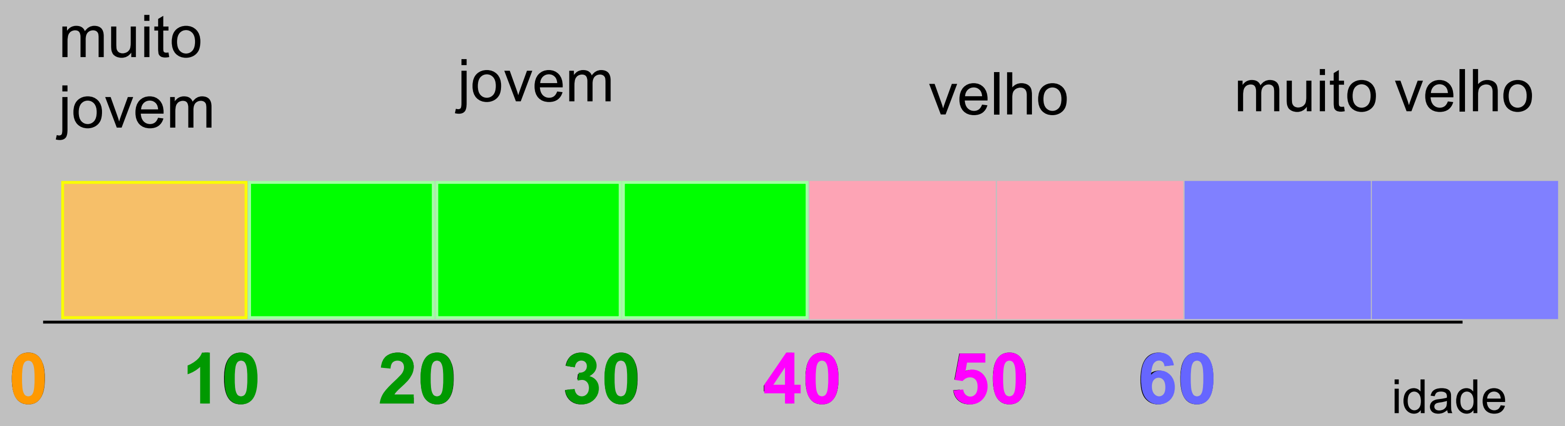
Novos Conceitos

- Conjuntos *Fuzzy*
- Grau de Pertinência a um Conjunto
- Regras *Fuzzy*
- Inferência *Fuzzy*

Conjuntos e Regras Rígidos

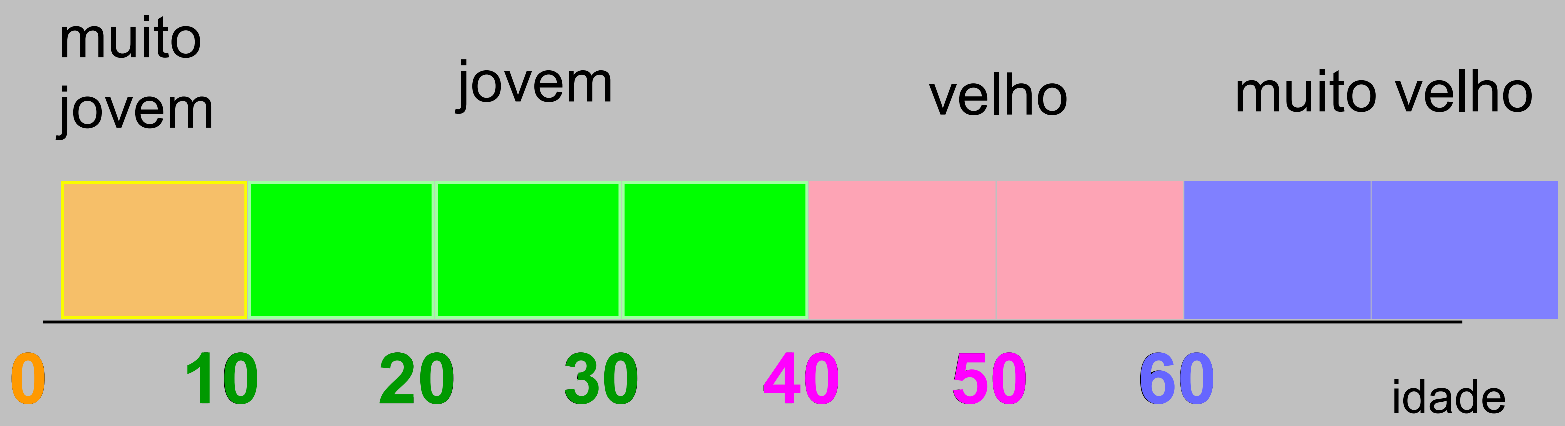


Conjuntos e Regras Rígidos



Se idade igual a 40 então sou velho.

Conjuntos e Regras Rígidos



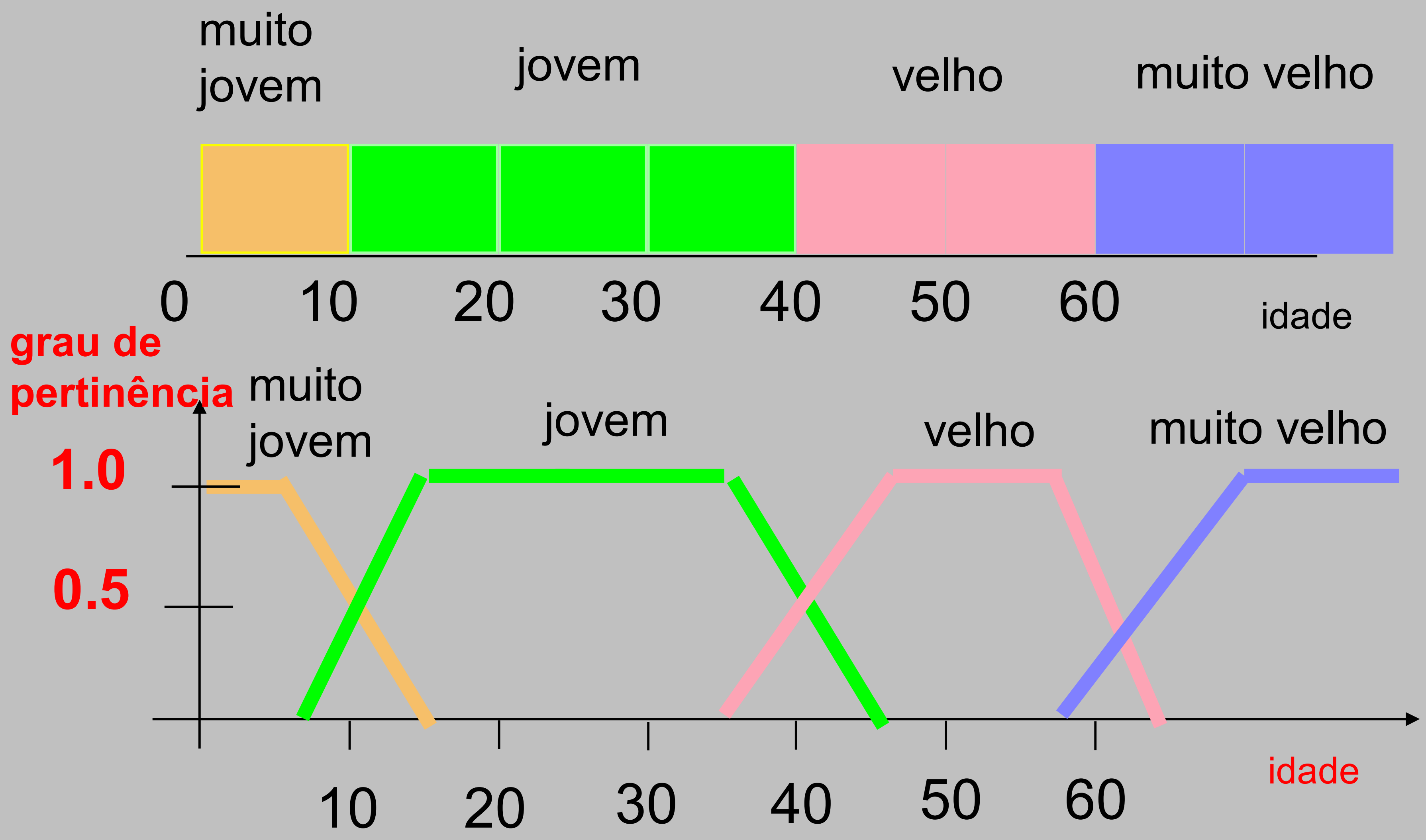
Se idade igual a 40 então sou velho.

Se idade igual a 39 então sou jovem.

Novos Conceitos

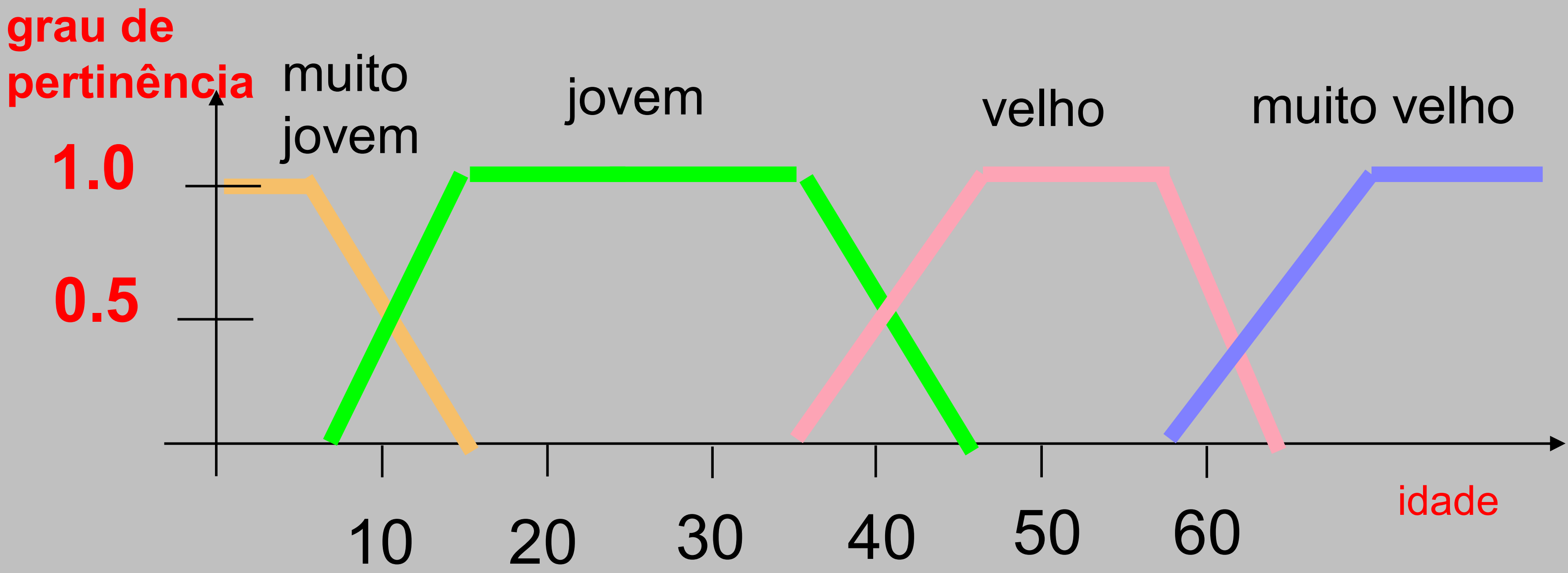
- ***Conjuntos Fuzzy***
- ***Grau de Pertinência a um Conjunto***
- Regras *Fuzzy*
- Inferência *Fuzzy*

Conjuntos *Fuzzy*



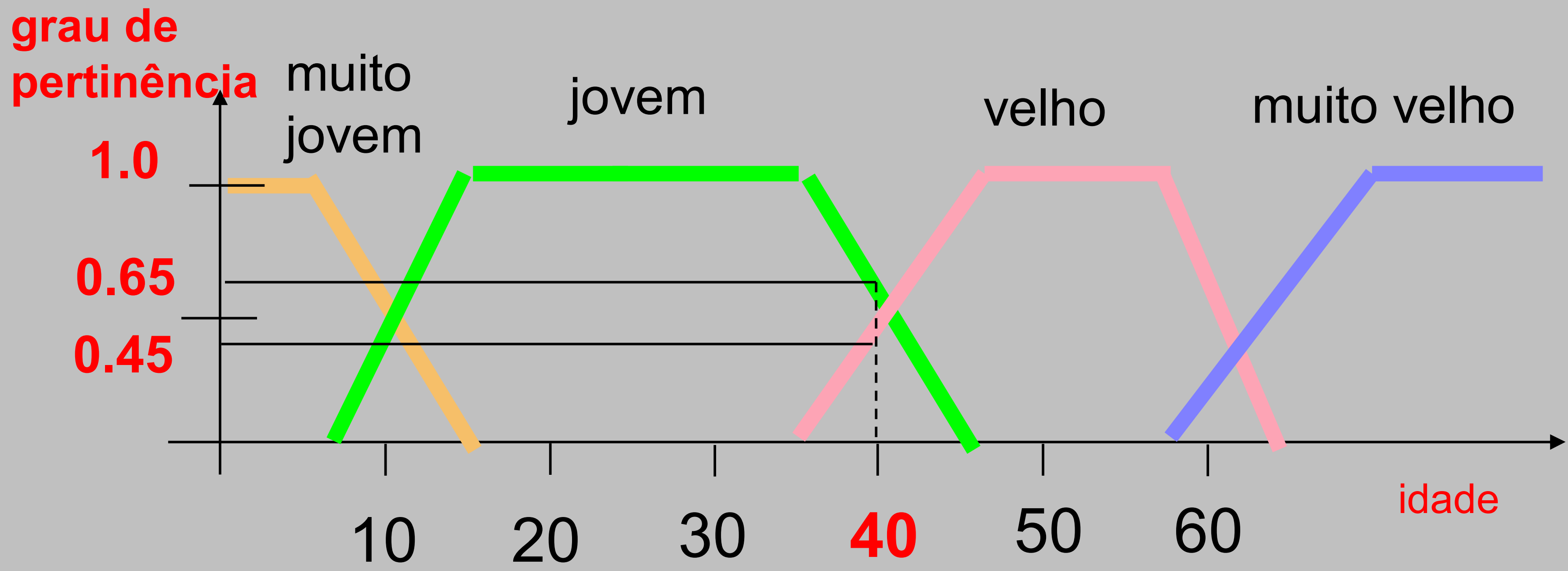
Conjuntos *Fuzzy*

Pedro tem 40 anos.
Ele é jovem ou velho?



Conjuntos *Fuzzy*

Pedro tem 40 anos.
Ele é jovem ou velho?



Conjuntos *Fuzzy*

Pedro tem 40 anos.
Ele é jovem ou velho?

- ➲ **Pedro é *jovem* E *velho*, ao mesmo tempo (com graus diferentes)**
- ➲ **Os graus de pertinência demostram que Pedro não é *nem tão jovem*, *nem tão velho***

Novos Conceitos

- Conjuntos *Fuzzy*
- Grau de Pertinência a um Conjunto
- ***Regras Fuzzy***
- Inferência *Fuzzy*

Sistema para Análise de Seguro Saúde

Regras *Fuzzy*

- **SE** idade é ***meia-idade*** **E** pressão é ***baixa*** **ENTÃO** seguro é ***baixo***

Sistema para Análise de Seguro Saúde

Regras *Fuzzy*

- **SE** idade é ***meia-idade*** **E** pressão é ***baixa*** **ENTÃO** seguro é ***baixo***

- **SE** idade é ***jovem*** **E** pressão é ***alta*** **ENTÃO** seguro é ***alto***

Novos Conceitos

- Conjuntos *Fuzzy*
- Grau de Pertinência a um Conjunto
- Regras *Fuzzy*
- ***Inferência Fuzzy***

Conjuntos *Fuzzy*

Idade	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Meia-Idade	0.3	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	0.8	0.6	0.3	0.1
Jovem	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.3	0.1	0.0	0.0	0.0

Pressão Máx.	95	100	110	120	130	140	150	160	170	175
Pressão Mín.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	100
Alta	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Baixa	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1

Seguro	300	500	700	800	900	1000	1200
Alto	0.1	0.3	0.4	0.5	0.8	0.9	1.0
Baixo	1.0	0.9	0.6	0.5	0.3	0.1	0.1

Conjuntos *Fuzzy*

SE idade é *meia-idade* **E** pressão é *baixa* **ENTÃO** seguro é *baixo*

Idade	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**	**55**	**60**	**65**
Meia-Idade	0.3	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	0.8	0.6	0.3	0.1
Jovem	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.3	0.1	0.0	0.0	0.0

Pressão Máx.	**95**	**100**	**110**	**120**	**130**	**140**	**150**	**160**	**170**	**175**
Pressão Mín.	**50**	**55**	**60**	**65**	**70**	**75**	**80**	**85**	**90**	**100**
Alta	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Baixa	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1

Seguro	**300**	**500**	**700**	**800**	**900**	**1000**	**1200**
Alto	0.1	0.3	0.4	0.5	0.8	0.9	1.0
Baixo	1.0	0.9	0.6	0.5	0.3	0.1	0.1

Conjuntos *Fuzzy*

SE idade é *meia-idade* **E** pressão é *baixa* **ENTÃO** seguro é *baixo*

Idade	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Meia-Idade	0.3	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	0.8	0.6	0.3	0.1
Jovem	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.3	0.1	0.0	0.0	0.0

Pressão Máx.	95	100	110	120	130	140	150	160	170	175
Pressão Mín.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	100
Alta	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Baixa	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1

Seguro	300	500	700	800	900	1000	1200
Alto	0.1	0.3	0.4	0.5	0.8	0.9	1.0
Baixo	1.0	0.9	0.6	0.5	0.3	0.1	0.1

Conjuntos *Fuzzy*

SE idade é *jovem* **E** pressão é *alta* **ENTÃO** seguro é *alto*

Idade	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**	**55**	**60**	**65**
Meia-Idade	0.3	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	0.8	0.6	0.3	0.1
Jovem	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.3	0.1	0.0	0.0	0.0

Pressão Máx.	**95**	**100**	**110**	**120**	**130**	**140**	**150**	**160**	**170**	**175**
Pressão Mín.	**50**	**55**	**60**	**65**	**70**	**75**	**80**	**85**	**90**	**100**
Alta	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Baixa	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1

Seguro	**300**	**500**	**700**	**800**	**900**	**1000**	**1200**
Alto	0.1	0.3	0.4	0.5	0.8	0.9	1.0
Baixo	1.0	0.9	0.6	0.5	0.3	0.1	0.1

Conjuntos *Fuzzy*

SE idade é *jovem* **E** pressão é *alta* **ENTÃO** seguro é *alto*

Idade	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Meia-Idade	0.3	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	0.8	0.6	0.3	0.1
Jovem	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.3	0.1	0.0	0.0	0.0

Pressão Máx.	95	100	110	120	130	140	150	160	170	175
Pressão Mín.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	100
Alta	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Baixa	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1

Seguro	300	500	700	800	900	1000	1200
Alto	0.1	0.3	0.4	0.5	0.8	0.9	1.0
Baixo	1.0	0.9	0.6	0.5	0.3	0.1	0.1

Conjuntos *Fuzzy*

Idade	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Meia-Idade	0.3	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	0.8	0.6	0.3	0.1
Jovem	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.3	0.1	0.0	0.0	0.0

Pressão Máx.	95	100	110	120	130	140	150	160	170	175
Pressão Mín.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	100
Alta	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Baixa	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1

Seguro	300	500	700	800	900	1000	1200
Alto	0.1	0.3	0.4	0.5	0.8	0.9	1.0
Baixo	1.0	0.9	0.6	0.5	0.3	0.1	0.1

Insurance = (700 x 0.6 + 800 x 0.5)/(0.6 + 0.5) = 745.45

Avaliação

<u>Técnica utilizada em aplicações</u>:

- *onde o conhecimento envolve conceitos subjetivos e intrinsecamente imprecisos;*
- *e onde deseja-se obter explicações sobre o resultado do problema.*

Avaliação

<u>**Vantagens**</u>

- facilidade de lidar com dados imprecisos.
- facilita a descrição das regras pelos especialistas.
- menor número de regras.
- explicação do raciocínio

<u>**Desvantagens**</u>

- especificação das funções de pertinência.
- necessidade de um especialista e/ou dados históricos.

Aplicações Industriais

- ➔ ***NISSAN***: freios antiderrapantes
- ➔ ***GM***: sistema de transmissão nebuloso
- ➔ ***SANYO***: microondas
- ➔ ***SHARP***: refrigeração
- ➔ ***BOSCH***: máquinas de lavar
- ➔ ***HITACHI***: aspirador
- ➔ ***PANASONIC***: camcorder

Aplicações Comerciais

- **Yamaichi Securities:** Sistema de Gerenciamento de Fundos de Investimento
- **Fuji Bank:** Sistema de Negociação de Bolsa de Valores
- **World Bank:** Sistema de Investimento
- **Metus Systems:** Sistema *fuzzy* de detecção de fraude no sistema de saúde

Aplicações do Curso

- Controle de Coloração e Nível de Tanques
- Controle de Braço mecânico com extração automática de regras
- Sistema de Análise de Seguro Saúde
- Análise de Crédito Bancário
- Previsão da Classificação da Volatilidade
- Previsão de Carga Elétrica Horária e 10 em 10 min.
- Previsão de produção de cacau
- "*Clusterização*" de Banco de Dados (países, imagens de satélite, etc)
- Análise de Hipertensão
- Classificação de clientes inadimplentes
- Sistema de Avaliação de Risco Bancário
- Sistema para definição de preço de produto novo
- Consultas Fuzzy a bancos de dados relacionais
- Controle de Veículos
- Análise de produção de empregados

Alguns Projetos Desenvolvidos

Setor	Tema
Ensino	Software Educacional para o Ensino de Sistemas Inteligentes
Energia	Previsão de Carga Elétrica por Redes Neurais: Mensal, Horária, Pico, Intervalos 10min Sistema Híbrido de Detecção e Diagnóstico de Falhas em Sistemas Elétricos Otimização de Despacho por Algoritmos Genéticos Otimização da Alocação de Capacitores em Sistemas Elétricos Controle de Cheias em reservatórios de usinas hidrelétricas Reconhecimento de Descargas Parciais em Equipamentos Elétricos
Petroquímico	Simulação de Forno de Craqueamento da Refinaria REDUC Utilizando Redes Neurais Sensor Virtual por Redes Neurais para a Medição de Intemperismo na Produção do GLP Otimização da Distribuição Combustíveis por Algoritmos Genéticos
Industrial	Sistema Inteligente de Reconhecimento de Imagens Bidimensionais Redes Neurais Aplicadas a Ensaios Não-Destrutivos de Materiais Condutores Sistemas Inteligentes Aplicados ao Reconhecimento de Voz Otimização e Planejamento da Produção Controle e Navegação de Robos Compressão de Imagens Digitalizadas por Redes Neurais
Comercial	Otimização do Planejamento de Horários/Alocação de Salas por Algoritmos Genéticos Reconhecimento de Dígitos Manuscritos por Redes Neurais para Leitura de Código Postal Reconhecimento de Caracteres Impressos (OCR) Utilizando Redes Neurais Previsão da Demanda de Lubrificantes Descoberta de Padrões em Bancos de Dados Comerciais Classificação/Segmentação de Clientes a partir de Informações Cadastrais em BD
Econômico/ Financeiro	Planejamento de Fluxo de Caixa Inteligente (FCI) Gerência de Carteira de Investimentos (Risco x Retorno) por Algoritmos Genéticos Previsão de Indicadores Financeiros por Redes Neurais Previsão do Índice Bovespa por Redes Neurais Modelos Híbridos de Previsão de Séries Temporais
Meio Ambiente	Previsão de Precipitação Pluviométrica na Área do Nordeste por Redes Neurais

Empresa	Sistema Inteligente	Técnicas
Souza Cruz	• Fluxo de Caixa Inteligente	• Alg. Genéticos
Eletrobrás	• Previsão do Consumo Mensal de Energia Elétrica	• Redes Neurais
Embratel	• Classificação de Clientes	• Redes Neurais • Alg.Genéticos
PUC-Rio	• Alocação de Salas de Aula • Avaliação da Produção Científica	• Alg. Genéticos • Lógica Fuzzy
Cia. Vale do Rio Doce	• Projeto S4: Planejamento e Otimização de Embarque de Minério no Porto de Tubarão • Projeto S4-V2: Planejamento e Otimização de Embarque de Minério Porto de Tubarão • Projeto Monitor: Fase de Especificação	• Alg. Genéticos • Oracle • UML
Petrobrás	• Inferência de Propriedades de Derivados do Petróleo • Gestão Conhecimento Instrumentação e Automação • Análise de Alternativas de Investimento em Projetos de Exploração e Prospeção de Petróleo sob Incertezas Técnicas e de Mercado – Fases 1, 2 e 3 • Otimização da Quantidade e Localização de Poços Petrolíferos para o Desenvolvimento de um Campo de Petróleo sob condições de certeza – Fases 1 a 3 • Análise Econômica de Projetos de E&P sob Incerteza de Campos Inteligentes • CONFPETRO: Sistema de Caracterização da Confiabilidade Humana para a Área de Petróleo	• Redes Neurais • Sistemas Especialistas • Alg. Genéticos • Neuro-Fuzzy • UML • CORBA
ScoreTec	• Software Vox Score para a aquisição, gerenciamento e análise da voz, para triagem de recursos humanos	• SQL / UML • Redes Neurais
Light	• Sistema Inteligente Apoio à Decisão na Recuperação de Perdas por Fraude e na Caracterização dos Fraudadores • Identificação e Prevenção de Inadimplência para o Mercado de Grandes Clientes	• Redes Neurais • Neuro-Fuzzy • Alg. Genéticos

Previsão

- *Previsão de* ***Demanda de Energia Elétrica***: mensal, horária, 10 em 10 min., horário de pico.
- *Previsão mensal de* ***Demanda de Lubrificantes***
- *Previsão de* ***Vazão de Rios****:* diária e semanal
- *Previsão* ***Consumo de cigarros****:* semanal, mensal
- *Previsão de* ***Safra de Cacau***
- *Previsão de* ***Índices financeiros***

Otimização e Planejamento

- *Otimização do **Fluxo de Caixa***
- *Otimização de **Carteira de Investimentos***
- *Otimização de **Alocação de Espaço Físico***
- *Planejamento da **Manutenção de Máquinas***
- *Planejamento de **Embarque de Minério***
- *Otimização da **Exploração de um Campo de Petróleo***

Data Mining

- *Caracterização do Negócio*
  - **extrair regras de BD que caracterizem o negócio**
- *Enriquecimento de Banco de Dados*
  - **inferir informações a partir de levantamento parcial**
- *Segmentação de Mercado*
  - **agrupar entradas “similares” em clusters**
- *Classificação de Padrões*
  - **pré-classificar um nova entrada em um grupo**
- *Detecção de Fraude*
  - **cartões de crédito, roubo de energia, água, etc.**
- *Análise de Risco em Investimentos*
  - **identificação de regras de investimento**

Processos Industriais

- *Detecção e Diagnóstico de Falhas*
  - **Rede Neural detecta falha em equipamentos e Sistema Fuzzy fornece o diagnóstico**
- *Controle de Tensão em Sistemas Elétricos*
  - **Rede Neural determina a operação necessária para manter a tensão em nível pré-determinado**
- *Manutenção Preditiva*
  - **Rede Neural determina o momento ideal para a realização de manutenção em cada equipamento**
- *Inferência/Predição de Propriedades*
  - **Rede Neural infere propriedades de derivados de petróleo em refinarias (soft sensor)**
- *Caracterização da Confiabilidade Humana*
  - **Sistema fuzzy determina curvas de possibilidade de erro humano, para cada trabalhador, de forma a minimizar os riscos ambientais e aumentar a segurança do trabalho.**

Generating Fuzzy Rules by Learning from Examples

Li-Xin Wang, *Fellow, IEEE*, and Jerry M. Mendel, *Fellow, IEEE*

Abstract— **A general method is developed to generate fuzzy rules from numerical data. This new method consists of five steps: Step 1 divides the input and output spaces of the given numerical data into fuzzy regions; Step 2 generates fuzzy rules from the given data; Step 3 assigns a degree of each of the generated rules for the purpose of resolving conflicts among the generated rules; Step 4 creates a combined fuzzy rule base based on both the generated rules and linguistic rules of human experts; and, Step 5 determines a mapping from input space to output space based on the combined fuzzy rule base using a defuzzifying procedure. The mapping is proved to be capable of approximating any real continuous function on a compact set to arbitrary accuracy. Applications to truck backer-upper control and time series prediction problems are presented. For the truck control problem, the performance of this new method is compared with a neural network controller and a pure limited-rule fuzzy controller; the new method shows the best performance. For the time series prediction problem, results are compared by using the new method and a neural network predictor for the Mackey–Glass chaotic time series.**

I. Introduction

For most real-world control and signal processing problems, the information concerning design, evaluation, realization, etc., can be classified into two kinds: numerical information obtained from sensor measurements, and, linguistic information obtained from human experts. Most current intelligent control and signal processing approaches are heuristic in nature, i.e., they combine some standard control or signal processing methods with expert systems in an *ad hoc* way for a specific problem; simulations are then performed to show that the new approaches work well for the specific problem. This kind of approach has two weakpoints: 1) it is quite problem dependent, i.e., a method may work well for one problem but is not suited for another problem; and, 2) there is no common framework for modeling and representing different aspects of control or signal processing strategies, which makes theoretical analyses for these approaches very difficult. In this paper, we propose a general method for combining both numerical and linguistic information into a common framework—a fuzzy rule base.

Suppose we have the following problem: there is a complex control system in which a human controller is an essential part; the environment facing this human controller is so complicated

Manuscript received March 3, 1991, revised April 20, 1992.

L. X. Wang was with the Signal and Image Processing Institute, Department of Electrical Engineering Systems, University of Southern California, Los Angeles, CA 90089-2564 and is now with the Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, CA 94720.

J. M. Mendel is with the Signal and Image Processing Institute, Department of Electrical Engineering Systems, University of Southern California, Los Angeles, CA 90089-2564.

IEEE Log Number 9202126.

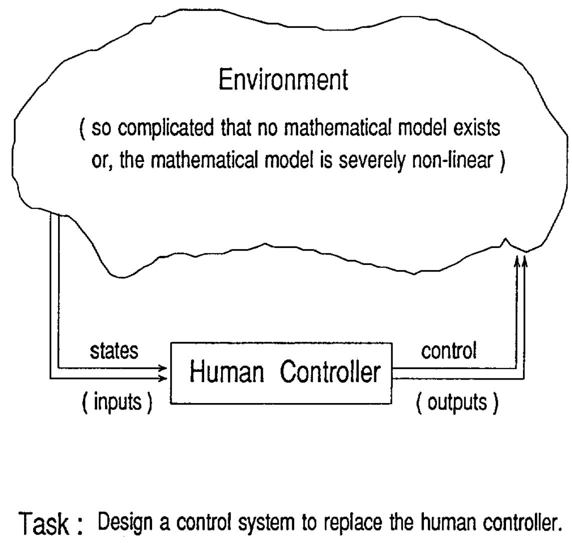


Fig. 1. A practical problem: Design a control system to replace the human controller.

that no mathematical model exists for it, or, the mathematical model is strongly nonlinear so that a design method does not exist. The task here is to design a control system to replace the human controller (see Fig. 1).

To design such a control system, we first need to see what information is available. We assume that there is no mathematical model, i.e., we consider a model-free design problem. Since there already is a human controller who is successfully controlling the system, there are two kinds of information available to us: 1) the experience of the human controller; and, 2) sampled input–output (state-control) pairs that are recorded from successful control by the human controller. The experience of the human controller is usually expressed as some linguistic "IF-THEN" rules that state in what situation(s) which action(s) should be taken. The sampled input–output pairs are some numerical data that give the specific values of the inputs and the corresponding successful outputs.

Each of the two kinds of information alone is usually incomplete. Although the system is successfully controlled by a human controller, some information will be lost when human controllers express their experience by linguistic rules. Consequently, linguistic rules alone are usually not enough for designing a successful control system. On the other hand, the information from sampled input–output data pairs is usually also not enough for a successful design, because the past

0018-9472/92$03.00 © 1992 IEEE

operations usually cannot cover all the situations the control system will face. If expert linguistic rules and numerical data pairs are the only information we can get for such a control system design, the most interesting case for us is when the combination of these two kinds of information is sufficient for a successful design.

Fuzzy control is an effective approach to utilizing linguistic rules [3], [4], whereas neural control is suited for using numerical data pairs (i.e., desired input–output pairs) [1], [4]. Present fuzzy controllers only use linguistic rules, whereas present neural controllers only use numerical data pairs. This leads to the following question: "Is it possible to develop a general approach that combines both kinds of information into a common framework, and uses both information, simultaneously and cooperatively, to solve the control design or similar problems?" In this paper, we develop such a general approach.

The key ideas of our new approach are to generate fuzzy rules from numerical data pairs, collect these fuzzy rules and the linguistic fuzzy rules into a common fuzzy rule base, and, finally, design a control or signal processing system based on this combined fuzzy rule base.

In Section II, we propose a five step procedure for generating fuzzy rules from numerical data pairs and show how to use these fuzzy rules to obtain a mapping from input space to output space. Step 1 divides the input and output spaces into fuzzy regions; Step 2 generates fuzzy rules from given desired input–output data pairs; Step 3 assigns a degree to each generated rule; Step 4 forms the combined fuzzy rule base; and, Step 5 presents a defuzzifying procedure for obtaining a mapping based on the combined fuzzy rule base. In Section III, we prove that the resulting mapping is capable of approximating any nonlinear continuous function on a compact set to arbitrary accuracy using the well-known Stone–Weierstrass theorem in analysis [5]. In Section IV, we apply our new method to a truck backer-upper control problem [1], [4]. We compare this new approach with pure neural and fuzzy approaches. The power of our new approach becomes apparent when it is used in the case where neither linguistic fuzzy rules nor input–output pairs are sufficient to successfully control the truck to a desired position, but the combination of both is sufficient. In Section V, we show that our new method can be used for time-series prediction; and, we use it to predict the Mackey–Glass chaotic time series, and compare the results with those obtained using a neural network predictor. Conclusions are given in Section VI.

II. Generating Fuzzy Rules from Numerical Data

Suppose we are given a set of desired input–output data pairs:

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}; y^{(1)}), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}; y^{(2)}), \cdots \tag{1}$$

where x_1 and x_2 are inputs, and y is the output. This simple two-input one-output case is chosen in order to emphasize and to clarify the basic ideas of our new approach; extensions to general multi-input multi-output cases are straightforward and will be discussed later in this section. The task here is to generate a set of fuzzy rules from the desired input–output pairs of (1), and use these fuzzy rules to determine a mapping $f : (x_1, x_2) \to y$.

Our approach consists of the following five steps:

Step 1—Divide the Input and Output Spaces into Fuzzy Regions

Assume that the domain intervals of x_1, x_2 and y are $[x_1^-, x_1^+], [x_2^-, x_2^+]$ and $[y^-, y^+]$, respectively, where "domain interval" of a variable means that most probably this variable will lie in this interval (the values of a variable are allowed to lie outside its domain interval). Divide each domain interval into $2N+1$ regions (N can be different for different variables, and the lengths of these regions can be equal or unequal), denoted by SN (Small N), $\cdots, S1$ (Small 1), CE (Center), $B1$ (Big 1), $\cdots, BN$ (Big N), and assign each region a fuzzy membership function. Fig. 2 shows an example where the domain interval of x_1 is divided into five regions ($N = 2$), the domain region of x_2 is divided into seven regions ($N = 3$), and the domain interval of y is divided into five regions ($N = 2$). The shape of each membership function is triangular; one vertex lies at the center of the region and has membership value unity; the other two vertices lie at the centers of the two neighboring regions, respectively, and have membership values equal to zero. Of course, other divisions of the domain regions and other shapes of membership functions are possible.

Step 2—Generate Fuzzy Rules from Given Data Pairs

First, determine the degrees of given $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ and $y^{(i)}$ in different regions. For example, $x_1^{(1)}$ in Fig. 2 has degree 0.8 in $B1$, degree 0.2 in $B2$, and zero degrees in all other regions. Similarly, $x_2^{(2)}$ in Fig. 2 has degree 1 in CE, and zero degrees in all other regions.

Second, assign a given $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ or $y^{(i)}$ to the region with maximum degree. For example, $x_1^{(1)}$ in Fig. 2 is considered to be $B1$, and $x_2^{(2)}$ in Fig. 1 is considered to be CE.

Finally, obtain one rule from one pair of desired input–output data, e.g.,

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}; y^{(1)}) \Rightarrow [x_1^{(1)}(0.8 \,\text{in}\, B1,\ \max), x_2^{(1)}(0.7 \,\text{in}\, S1,\ \max); \\ y^{(1)}(0.9 \,\text{in}\, CE,\ \max)] \Rightarrow \text{Rule 1:}$$

IF x_1 is $B1$ and x_2 is $S1$, THEN y is CE;

$$(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}; y^{(2)}) \Rightarrow [x_1^{(2)}(0.6 \,\text{in}\, B1,\ \max), x_2^{(2)}(1 \,\text{in}\, CE,\ \max); \\ y^{(2)}(0.7 \,\text{in} B1,\ \max)] \Rightarrow \text{Rule 2:}$$

IF x_1 is $B1$ and x_2 is CE, THEN y is $B1$.

The rules generated in this way are "and" rules, i.e., rules in which the conditions of the IF part must be met simultaneously in order for the result of the THEN part to occur. For the problems considered in this paper, i.e., generating fuzzy rules from numerical data, only "and" rules are required since the antecedents are different components of a single input vector.

Step 3—Assign a Degree to Each Rule

Since there are usually lots of data pairs, and each data pair generates one rule, it is highly probable that there will be some conflicting rules, i.e., rules that have the same IF part but a

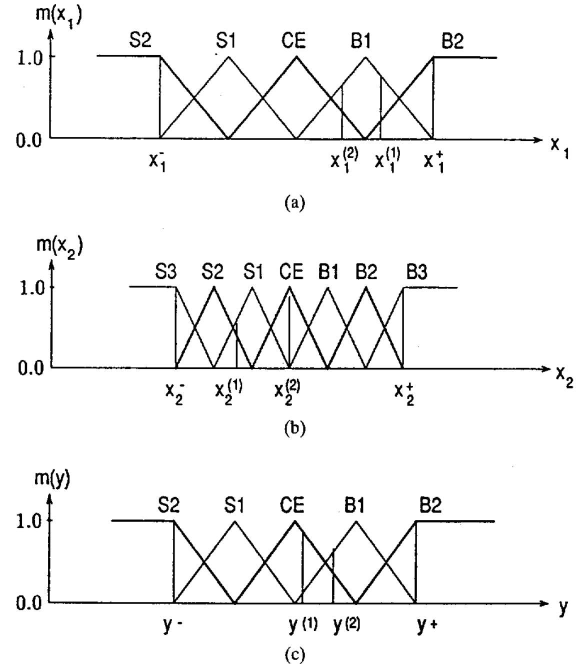


Fig. 2. Divisions of the input and output spaces into fuzzy regions and the corresponding membership functions. (a) $m(x_1)$. (b) $m(x_2)$. (c) $m(y)$.

different THEN part. One way to resolve this conflict is to assign a degree to each rule generated from data pairs, and accept only the rule from a conflict group that has maximum degree. In this way not only is the conflict problem resolved, but also the number of rules is greatly reduced.

We use the following product strategy to assign a degree to each rule: for the rule: "IF x_1 is A and x_2 is B, THEN y is C," the degree of this rule, denoted by D(Rule), is defined as

$$D(\text{Rule}) = m_A(x_1)m_B(x_2)m_C(y). \tag{2}$$

As examples, Rule 1 has degree

$$\begin{aligned} D(\text{Rule1}) &= m_{B1}(x_1)m_{S1}(x_2)m_{CE}(y) \\ &= 0.8 \times 0.7 \times 0.9 = 0.504 \end{aligned} \tag{3}$$

(see Fig. 2) and Rule 2 has degree

$$\begin{aligned} D(\text{Rule2}) &= m_{B1}(x_1)m_{CE}(x_2)m_{B1}(y) \\ &= 0.6 \times 1 \times 0.7 = 0.42. \end{aligned} \tag{4}$$

In practice, we often have some a priori information about the data pairs. For example, if we let an expert check given data pairs, the expert may suggest that some are very useful and crucial, but others are very unlikely and may be caused just by measurement errors. We can therefore assign a degree to each data pair that represents our belief of its usefulness. In this sense, the data pairs constitute a fuzzy set, i.e., the fuzzy set is defined as the useful measurements; a data pair belongs to this set to a degree assigned by a human expert.

Suppose the data pair $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}; y^{(1)})$ has degree $m^{(1)}$, then we redefine the degree of Rule 1 as

$$D(\text{Rule1}) = m_{B1}(x_1)m_{S1}(x_2)m_{CE}(y)m^{(1)} \tag{5}$$

i.e., the degree of a rule is defined as the product of the degrees of its components and the degree of the data pair that generates this rule. This is important in practical applications, because real numerical data have different reliabilities, e.g, some real data can be very bad ("wild data"). For good data we assign higher degrees, and for bad data we assign lower degrees. In this way, human experience about the data is used in a common base as other information. If one emphasizes objectivity and does not want a human to judge the numerical data, our strategy still works by setting all the degrees of the data pairs equal to unity.

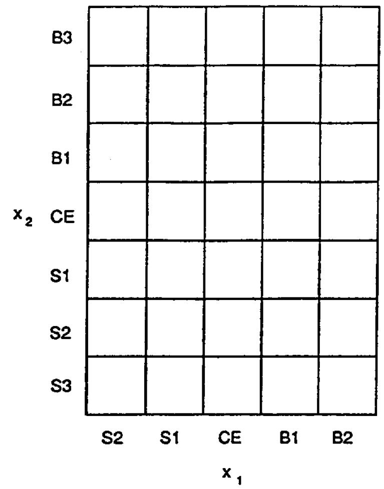


Fig. 3. The form of a fuzzy rule base.

Step 4—Create a Combined Fuzzy Rule Base

The form of a fuzzy rule base is illustrated in Fig. 3. We fill the boxes of the base with fuzzy rules according to the following strategy: a combined fuzzy rule base is assigned rules from either those generated from numerical data or linguistic rules (we assume that a linguistic rule also has a degree that is assigned by the human expert and reflects the expert's belief of the importance of the rule); if there is more than one rule in one box of the fuzzy rule base, use the rule that has maximum degree. In this way, both numerical and linguistic information are codified into a common framework—the combined fuzzy rule base. If a linguistic rule is an "and" rule, it fills only one box of the fuzzy rule base; but, if a linguistic rule is an "or" rule (i.e., a rule for which the THEN part follows if any condition of the IF part is satisfied), it fills all the boxes in the rows or columns corresponding to the regions of the IF part. For example, suppose we have the linguistic rule: "IF x_1 is $S1$ or x_2 is CE, THEN y is $B2$" for the fuzzy rule base of Fig. 3; then we fill the seven boxes in the column of $S1$ and the five boxes in the row of CE with $B2$. The degrees of all the $B2$'s in these boxes equal the degree of this "or" rule.

Step 5—Determine a Mapping Based on the Combined Fuzzy Rule Base

We use the following defuzzification strategy to determine the output control y for given inputs (x_1, x_2): first, for given inputs (x_1, x_2), we combine the antecedents of the ith fuzzy rule using product operation to determine the degree, m^i_{Oi}, of the output control corresponding to (x_1, x_2), i.e.,

$$m^i_{O^i} = m_{I^i_1}(x_1)m_{I^i_2}(x_2), \tag{6}$$

where O^i denotes the output region of Rule i, and I^i_j denotes the input region of Rule i for the jth component, e.g., Rule 1 gives

$$m^1_{CE} = m_{B1}(x_1)m_{S1}(x_2) \tag{7}$$

then, we use the following centroid defuzzification formula to determine the output

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{K} m^i_{O^i}\bar{y}^i}{\sum_{i=1}^{K} m^i_{O^i}} \tag{8}$$

where $\bar{y}^i$ denotes the *center* value of region O^i (the center of a fuzzy region is defined as the point that has the smallest absolute value among all the points at which the membership function for this region has membership value equal to one), and K is the number of fuzzy rules in the combined fuzzy rule base.

From Steps 1 to 5 we see that our new method is simple and straightforward in the sense that it is a one-pass build-up procedure that does not require time-consuming training; hence, it has the same advantage that the fuzzy approach has over the neural approach, namely, it is simple and quick to construct.

This five step procedure can easily be extended to general multi-input multi-output cases. Steps 1 to 4 are independent of how many inputs and how many outputs there are. In Step 5, we only need to replace $m^i_{O^i}$ in (6) with $m^i_{O^i_j}$, where j denotes the jth component of the output vector (O^i_j is the region of Rule i for the jth output component; $m^i_{O^i_j}$ is the same for all j), and change (8) to

$$y_j = \frac{\sum_{i=1}^{K} m^i_{O^i_j}\bar{y}^i_j}{\sum_{i=1}^{K} m^i_{O^i_j}} \tag{9}$$

where $\bar{y}^i_j$ denotes the center of region O^i_j.

If we view this five step procedure as a block, then the inputs to this block are "examples" (desired input–output data pairs) and expert rules (linguistic IF-THEN statements), and the output is a mapping from input space to output space. For control problems, the input space is the state of the plant to be controlled, and the output space is the control applied to the plant. For time-series prediction problems, the input and output spaces are subsequences of the time series such that the input subsequence precedes the output subsequence (details are given in Section V). Our new method essentially "learns" from the "examples" and expert rules to obtain a mapping that, hopefully, has the "generalization" property that when new inputs are presented the mapping continues to give desired or successful outputs. Hence, our new method can be viewed as a very general *model-free trainable fuzzy system* for a wide range of control and signal processing problems, where: "Model-Free" means no mathematical model is required for the problem; "Trainable" means the system learns from "examples" and expert rules, and can adaptively change the mapping when new "examples" and expert rules are available; and, "Fuzzy" denotes the fuzziness introduced into the system by linguistic fuzzy rules, fuzziness of data, etc.

III. Fuzzy System as a Universal Approximator

The five step procedure of the last section generates a fuzzy system, i.e., a mapping from input space to output space. Specifically, this mapping is represented by (6) and (8) for the two-input one-output case. Using simplified notations, we rewrite (6) and (8), for the general n-input one-output case, as

$$m^i = \Pi_{1\le j\le n}[m^i_j(x_j)] \tag{10}$$

$$f(\underline{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{K} \bar{y}^i m^i}{\sum_{i=1}^{K} m^i} = \frac{\sum_{i=1}^{K} \bar{y}^i \Pi_{1\le j\le n}[m^i_j(x_j)]}{\sum_{i=1}^{K} \Pi_{1\le j\le n}[m^i_j(x_j)]} \tag{11}$$

where m^i_j is the membership function of the ith rule for the jth component of the input vector, and $\bar{y}^i$ is the center value of the output region of the ith rule. We will prove that this generated fuzzy system, i.e., (11), is a universal approximator from a compact set $Q \subset R^n$ to R, i.e., it can approximate any real continuous function defined on Q to any accuracy, where the compact set Q is defined as

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset R^n. \tag{12}$$

For notational convenience, we represent Rule i $(i = 1, 2, \cdots, K)$ in the fuzzy rule base as: "IF x_1 is RG^i_1, x_2 is $RG^i_2, \cdots, x_n$ is RG^i_n, THEN y is RG^i_0," where $RG^i_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ denotes the region for the j'th input antecedent of Rule i (e.g., it can be $S2, CE, B1$, etc.), and RG^i_0 denotes the outupt region of Rule i.

Let F be the family of functions of the form of (11) on the compact set Q. There are three factors that determine a member of F: 1) the definition of fuzzy regions, i.e., how to define and divide the domain intervals; 2) the specific form of membership functions m^i_j; and, 3) the specific statements of fuzzy rules in the fuzzy rule base. By fixing fuzzy regions, membership functions, and fuzzy rules, we obtain an element of F. If f_1 and f_2 are different elements of F, then at least one of the three factors for f_1 and f_2 must be different. In order to analyses the family F, we make the following assumptions for these three factors:

AS.1: The fuzzy regions for the input and output spaces can be arbitrarily defined.

AS.2: The membership functions m_j^i can be any continuous functions from $[a_j, b_j]$ to [0, 1] for $j = 1, 2, \cdots, n$ (i.e., for inputs) and from $(-\infty, \infty)$ to [0, 1] for $j = 0$ (i.e., for output); however, m_j^i must satisfy the following constraint: $m_j^i(x_j) \neq 0$ for $x_j \in RG_j^i, i = 1, 2, \cdots, K, j = 0, 1, \cdots, n$, with $x_0 = y$. This constraint means that the membership value of an antecedent for a rule cannot equal zero if the actual input value of this antecedent falls into the required region of the rule.

AS.3: Any rule can be assigned to any box of the fuzzy rule base.

These assumptions are usually satisfied in practice. Specifically, we have total freedom in defining fuzzy regions; we can choose any membership functions subject to the constraint of AS.2; and, we can assign any rule to any box of the fuzzy rule base.

To analyses the properties of the function family F, we must first establish that the mapping defined by (11) is well-defined, i.e., for any input $\boldsymbol{x} \in Q$, (11) will generate an output $f(\boldsymbol{x}) \in R$. The following two lemmas give sufficient conditions for (11) to be well-defined.

Lemma 1: If all the membership functions m_j^i are nonzero, and there is at least one rule in the fuzzy rule base, then the mapping defined by (11) from Q to R is well-defined.

Proofs of lemmas and theorems are given in Appendix I.

Lemma 2: If every box in the fuzzy rule base has a rule associated with it, i.e., there are no empty boxes in the fuzzy rule base, then the mapping defined by (11) from Q to R is well-defined under AS.2.

In practice, the input space is usually high dimensional, whereas the given successful data pairs and expert rules are often quite limited; as a result, many boxes of the fuzzy rule base may be empty. However, it is possible to fill up these empty boxes based on the limited given rules using the method of Section II. Specifically, Steps 1–4 are first used to generate a fuzzy rule base based on the limited data pairs and linguistic rules; then, the output for some typical input for which the box in the fuzzy rule base is empty can be determined based on the limited fuzzy rule base; finally, the range in which the output has the maximum degree is assigned to the empty box as a new rule. This can be an iterative procedure, i.e., when a new rule is generated, this new rule and the existing rules are combined into a fuzzy rule base that is used to generate the next new rule. We can start the procedure from the empty boxes that are the nearest neighbors of the full boxes; in this way, the fuzzy rule base expands from existing rules until all the boxes are filled up. This procedure always works if we choose the nonzero regions of the membership functions to be large enough such that the values of the membership functions will not be zero for some points of their nearest neighbors. We will not study this procedure in detail in this paper; we gave the basic ideas of the procedure in order to show that the conditions of Lemma 2 can be satisfied.

Now we state the main result of this section.

Theorem 1: If the mapping defined by (11) is well-defined, and if AS.1–AS.3 are true, then the mapping defined by (11) is capable of approximating any real continuous function over the compact set Q to arbitrary accuracy. (The proof of Theorem 1 uses AS.4 and the definition of "active rule" that will be given later in this section; hence, we suggest the reader read the rest of this section before going to the proof of Theorem 1. The rest of this section will not use the result of Theorem 1.)

Theorem 1 is an existence theorem showing that there exists a way of defining fuzzy regions, a way of choosing membership functions, and a way of assigning fuzzy rules to the boxes of the fuzzy rule base, such that the resulting mapping, (11), approximates an arbitrary nonlinear continuous mapping from Q to R to any accuracy. This Theorem is similar to the results of [6] and [7], which showed that a three-layer feedforward neural network is a universal approximator provided that there are sufficiently large numbers of hidden-layer neurons. Theorem 1 provides the theoretical basis for successful applications of our new method to many different practical problems.

In many applications of fuzzy systems (e.g., [3], [4]), the membership functions are triangular. We now study some properties of the fuzzy systems that use the specific form of membership functions that are defined as follows.

AS.4: The membership function for any intermediate fuzzy region (i.e., not the smallest or the largest region) is a triangle whose vertices are at $(x, m) = (x_{-1}, 0), (x_0, 1)$, and $(x_1, 0)$, where the x-axis denotes a coordinate of the input or output space, the m-axis denotes the corresponding membership value, x_0 denotes the center of the region, and $x_{-1}(x_1)$ denotes the center of the left (right) region. See Fig. 11 for an example. The membership functions for the smallest and largest regions are determined by the way shown in Fig. 11.

If every box of the fuzzy rule base has a rule and $[a_j, b_j]$ is divided into r_j fuzzy regions ($j = 1, 2, \cdots, n$), then there are $N = r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_n$ rules in the fuzzy rule base. N can be a huge number if the r_j's and n are large. However, under the situation of AS.4, there are only a small fraction of these rules that are really used in (11) for any given $\boldsymbol{x} \in Q$.

Definition: The ith fuzzy rule in the fuzzy rule base is *active* for $\boldsymbol{x} \in Q$ if $m_j^i(x_j) \neq 0$ for all $j = 1, 2, \cdots, n$. Referring to (11), we see that a rule is active means that it will be used in (11).

Lemma 3: Under AS.4, the following is true:

1) There are at most 2^n active rules for any $\boldsymbol{x} \in Q$.
2) If r components of $\boldsymbol{x} \in Q$ are at the centers of some fuzy regions ($r = 0, 1, 2, \cdots, n$), there are at most 2^{n-r} active rules at the $\boldsymbol{x}$ (the center of a fuzzy region is defined in Step 5 of Section II).
3) If r components of $\boldsymbol{x} \in Q$ are at the centers of some fuzzy regions, and if q components of the $\boldsymbol{x}$ are smaller (greater) than the center values of the smallest (largest) regions of the corresponding components, then there are at most 2^{n-r-q} active rules at the $\boldsymbol{x}$.

Lemma 3 is useful in practice. Although we may need a huge memory to store the fuzzy rule base, when we use the fuzzy rule base for a given input $\boldsymbol{x} \in Q$, only a relatively small number of rules are used. In practice, we may store the fuzzy rule base in a cheap external memory; when we have an input, we only take the active rules from the fuzzy rule base into the host computer.

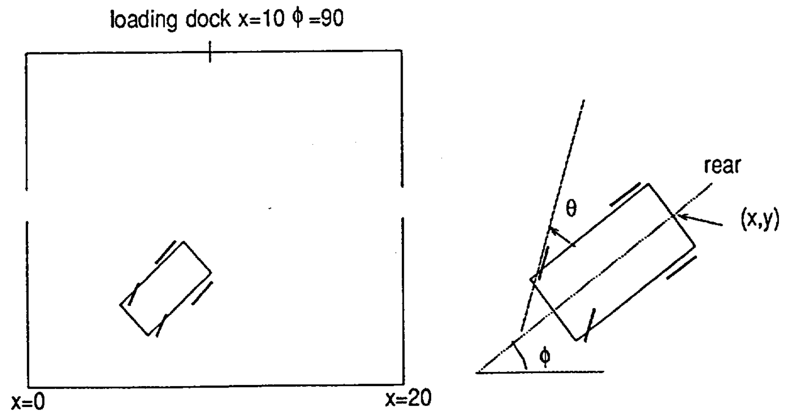


Fig. 4. Diagram of simulated truck and loading zone.

IV. Application to Truck Backer-Upper Control

Backing a truck to a loading dock is a difficult exercise. It is a nonlinear control problem for which no traditional control system design methods exist. In [1], Nguyen and Widrow develop a neural network controller for the truck backer-upper problem; and, in [4], Kong and Kosko propose a fuzzy control strategy for the same problem. The neural network controller [1] only uses numerical data, and cannot utilize linguistic rules determined from expert drivers; on the other hand, the fuzzy controller of [4] only uses linguistic rules, and cannot utilize sampled data. Since the truck backer-upper control problem is a good example of the control system design problem discussed in the Introduction of this paper (i.e., replace a human controller by a machine), it is interesting to apply the approach developed in Section II to this problem. In order to distinguish these methods, we call the method of [4] the "fuzzy approach," the method of [1] the "neural approach," and our new method the "numerical-fuzzy approach."

The results of [4] demonstrated superior performance of the fuzzy controller over the neural controller; however, the fuzzy and neural controllers use different information to construct the control strategies. It is possible that the fuzzy rules used in [4] to construct the controller are more complete and contain more information than the numerical data used to construct the neural controller; hence, the comparison between the fuzzy and neural controllers, from a final control performance point of view, is somewhat unfair. If the linguistic fuzzy rules were incomplete, whereas the numerical information contained lots of very good data pairs, it is highly possible that the neural controller would outperform the fuzzy controller.

Our new numerical-fuzzy approach provides a fair basis for comparing fuzzy and neural controllers (the numerical-fuzzy approach can be viewed as a fuzzy approach in the sense that it differs from the pure fuzzy approach only in the way it obtains fuzzy rules). We can provide the same desired input–output pairs to both the neural and numerical-fuzzy approaches; consequently, we can compare the final control performances of both controllers fairly since they both use the same information.

Example 1: In this example, we use the same set of desired input–output pairs to simulate neural and numerical-fuzzy controllers, and compare their final control performance.

Statement of the Truck Backer-Upper Control Problem: The simulated truck and loading zone are shown in Fig. 4 [1], [4]. The truck corresponds to the cab part of the neural truck in the Nguyen–Widrow [1] neural truck backer-upper system. The truck position is exactly determined by the three state variables ϕ, x, and y, where ϕ is the angle of the truck with the horizontal as shown in Fig. 4. Control to the truck is the angle θ. Only backing up is considered. The truck moves backward by a fixed unit distance every stage. For simplicity, we assume enough clearance between the truck and the loading dock such that y does not have to be considered as an input. The task here is to design a control system, whose inputs are $\phi \in [-90°, 270°]$ and $x \in [0, 20]$, and whose output is $\theta \in [-40°, 40°]$, such that the final states will be $(x_f, \phi_f) = (10, 90°)$.

Generating Desired Input–Output Pairs$(x, \phi; \theta)$: We do this by trial and error: at every stage (given ϕ and x) starting from an initial state, we determined a control θ based on common sense (i.e., our own experience of how to control the steering angle in the situation); after some trials, we chose the desired input–output pairs corresponding to the smoothest successful trajectory.

The following 14 initial states were used to generate desired input–output pairs: (x_0, ϕ_0^o) = (1, 0), (1, 90), (1, 270); (7, 0), (7, 90), (7, 180), (7, 270); (13, 0), (13, 90), (13, 180), (13, 270); (19, 90), (19, 180), (19, 270). Since we performed simulations, we needed to know the dynamics of the truck backer-upper procedure. We used the following approximate kinematics (see [8] for details):

$$x(t+1) = x(t) + \cos[\phi(t) + \theta(t)] + \sin[\theta(t)]\sin[\phi(t)] \quad (13)$$

$$y(t+1) = y(t) + \sin[\phi(t) + \theta(t)] - \sin[\theta(t)]\cos[\phi(t)] \quad (14)$$

$$\phi(t+1) = \phi(t) - \sin^{-1}\left[\frac{2\sin(\theta(t))}{b}\right] \quad (15)$$

TABLE I
DESIRED TRAJECTORY STARTING FROM $(x_0\phi_0) = (1, 0^\circ)$

t	x	ϕ°	θ°
0	1.00	0.00	-19.00
1	1.95	9.37	-17.95
2	2.88	18.23	-16.90
3	3.79	26.59	-15.85
4	4.65	34.44	-14.80
5	5.45	41.78	-13.75
6	6.18	48.60	-12.70
7	7.48	54.91	-11.65
8	7.99	60.71	-10.60
9	8.72	65.99	-9.55
10	9.01	70.75	-8.50
11	9.28	74.98	-7.45
12	9.46	78.70	-6.40
13	9.59	81.90	-5.34
14	9.72	84.57	-4.30
15	9.81	86.72	-3.25
16	9.88	88.34	-2.20
17	9.91	89.44	0.00
18			
19			
20			

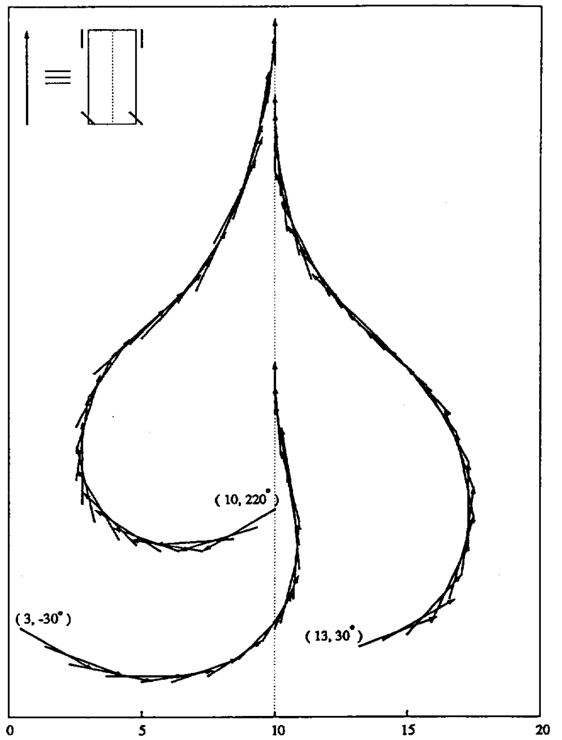


Fig. 5. Truck trajectories using the neural controller and the numerical-fuzzy controller.

where b is the length of the truck. We assumed $b = 4$ in the simulations of this paper. Equations (13)–(15) were used to obtain the next state when the present state and control are given. Since y is not considered a state, only (13) and (15) were used in the simulations. We wrote (14) here for the purpose of showing the complete dynamics of the truck. Observe, from (13)–(15), that even this simplified dynamic model of the truck is nonlinear. The 14 sequences of desired $(x, \phi; \theta)$ pairs are given in [8]; we only include one such sequence in this paper (Table I).

Neural Control and Simulation Results: We used a two-input single-output three-layer back-propagation neural network [9, 10] for our control task. Twenty hidden neurons were used, and a sigmoid nonlinear function was used for each neuron. The output of the third-layer neuron represents the steering angle θ according to a uniform mapping from [0, 1] to $[-40^\circ, 40^\circ]$, i.e., if the neuron output is $g(t)$, the corresponding output $\theta(t)$ is

$$\theta(t) = 80g(t) - 40. \tag{16}$$

In the simulations, we normalized $[-40^\circ, 40^\circ]$ into $[-1, 1]$. Similarly, the inputs to the neurons were also normalized into $[-1, 1]$.

Our neural network controller is different from the Nguyen–Widrow neural controller [1]. First, we have only one neural network that does the same work as the Truck Controller of the Nguyen–Widrow network; the truck emulator of the Nguyen–Widrow network is not needed in our task. Second, and more fundamentally, we train our neural network using desired input–output (state-control) pairs, which are obtained from the past successful control history of the truck, whereas Nguyen and Widrow [1] connect their neural network stage by stage and train the concatenated neural networks by back-propagating the error at the final state through this long network chain (the detailed algorithm is different from the standard error back-propagation algorithm in order to meet the constraint that the neural networks at each stage perform the same transformation; for details see [1]). Hence, the training of our neural network is simpler than that of the Nguyen–Widrow network. Of course, we need to know some successful control trajectories (state-control pairs) starting from some typical initial states; this is not required in the Nguyen–Widrow neural network controller.

We trained the neural network using the standard error back-propagation algorithm [9], [10] for the generated 14 sequences of desired $(x, \phi; \theta)$ pairs. We used the converged network to control the truck whose dynamics are approximately given by (13)–(15). Three arbitrarily chosen initial states, $(x_0, \phi_0^o) =$

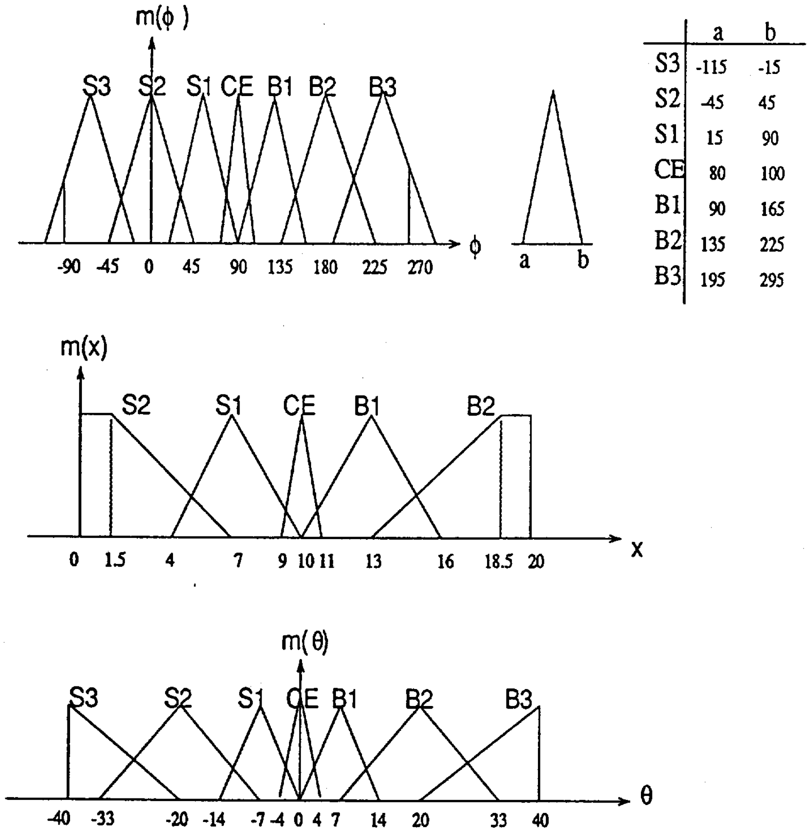


Fig. 6. Fuzzy membership functions for the truck backer-upper control problem.

(3, −30), (10, 220), and (13, 30), were used to test the neural controller. The truck trajectories from the three initial states are shown in Fig. 5. We see that the neural controller successfully controls the truck to the desired position starting from all three initial states.

Numerical-Fuzzy Control and Simulation Results: We used the five-step procedure of Section II to determine the control law $f : (x, \phi) \to \theta$, based on the 14 generated sequences of successful $(x, \phi; \theta)$ pairs. For this specific problem, we used membership functions shown in Fig. 6, which are similar to those used in [4] for fuzzy control of the problem based only on linguistic rules. The fuzzy rules generated from the desired input–output pairs and their corresponding degrees are given in [8]; we show only the generated rules for the data pairs of Table I (in this paper) in Table II. The final fuzzy rule base is shown in Fig. 7 (this is the result of Step 4 of our method in Section II; here we assume that no linguistic rules are available). We see from Fig. 7 that there are no generated rules for some ranges of x and ϕ. This shows that the desired trajectories from the 14 initial states do not cover all the possible cases; however, we will see that the rules in Fig. 7 are sufficient for controlling the truck to the desired state starting from some given initial states.

Finally, Step 5 of our numerical-fuzzy method was used to control the truck from the three initial states, $(x_0, \phi_0^o) =$ (3, −30), (10, 220), and (13, 30), which are the same states used in the simulations of the neural controller. The final trajectories of the truck have no visible difference from Fig. 5; hence, Fig. 5 also shows the track trajectories using the numerical-fuzzy controller.

ϕ \ x	S2	S1	CE	B1	B2
S3	S2	S3			
S2	S2	S3	S3	S3	
S1	B1	S1	S2	S3	S2
CE	B2	B2	CE	S2	S2
B1	B2	B3	B2	B1	S1
B2		B3	B3	B3	B2
B3				B3	B2

Fig. 7. The final fuzzy rule base generated from the numerical data for the truck backer-upper control problem.

We simulated the neural and numerical-fuzzy controllers for other initial truck positions, and observed that the truck trajectories using these two controllers were also almost the

TABLE II
FUZZY RULES GENERATED FROM THE DESIRED INPUT–OUTPUT PAIRS OF TABLE I AND THE DEGREES OF THESE RULES

Fuzzy rules for t=	IF x is	IF ϕ is	THEN θ is	Degree
0	S2	S2	S2	1.00
1	S2	S2	S2	0.92
2	S2	S2	S2	0.35
3	S2	S2	S2	0.12
4	S2	S2	S2	0.07
5	S1	S2	S1	0.08
6	S1	S1	S1	0.18
7	S1	S1	S1	0.52
8	S1	S1	S1	0.56
9	S1	S1	S1	0.60
10	CE	S1	S1	0.35
11	CE	S1	S1	0.21
12	CE	S1	CE	0.16
13	CE	CE	CE	0.32
14	CE	CE	CE	0.45
15	CE	CE	CE	0.54
16	CE	CE	CE	0.88
17	CE	CE	CE	0.92
18				
19				
20				

same. This is not surprising because both controllers used the same information to construct their control laws.

Example 2: In this example we consider the situation where neither linguistic fuzzy rules alone nor desired input–output pairs alone are sufficient to successfully control the truck to the desired position, i.e., neither the usual fuzzy controller with limited fuzzy rules nor the usual neural controller can control the truck to the desired position, but a combination of linguistic fuzzy rules and fuzzy rules generated from the desired input–output data pairs is sufficient to successfully control the truck to the desired position.

We consider the case where the beginning part of the information comes from desired input–output pairs whereas the ending part of the information comes from linguistic rules. To do this we used only the first three pairs of each of the 14 desired sequences, and generated fuzzy rules based only on these truncated pairs. The fuzzy rule base generated from these truncated data pairs is the same as Fig. 7 except that

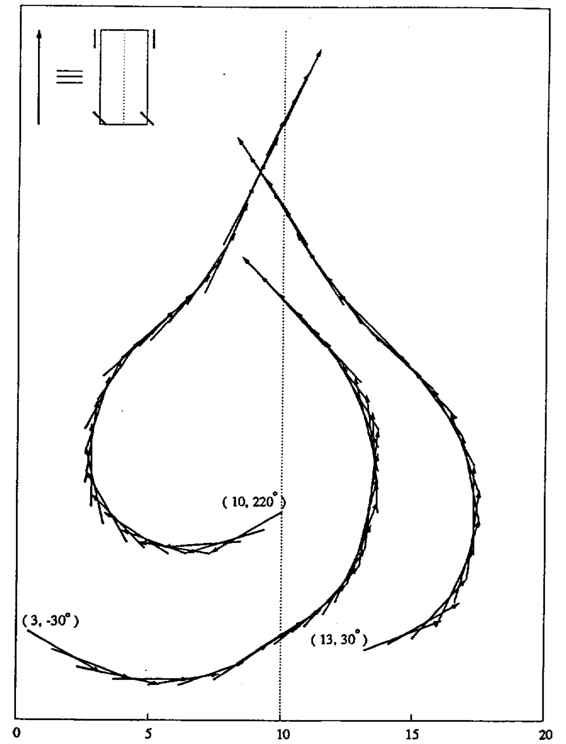


Fig. 8. Truck trajectories using the fuzzy rules from the truncated data pairs only.

there are no rules in the three center boxes outlined by the heavy lines. The fuzzy rule base of linguistic rules for the ending part was chosen to have only three rules that are the same as the three center rules of Fig. 7.

We simulated the following three cases in which we used the: 1) fuzzy rule base generated from only the truncated data pairs; 2) fuzzy rule base of selected linguistic rules; and, 3) fuzzy rule base which combined the fuzzy rule bases of 1) and 2). We see that for Case 3 the fuzzy rule base is the same as in Fig. 7; hence, the truck trajectories for this case must be the same as those using the fuzzy rule base of Fig. 7. For each of the cases, we simulated the system starting from the following three initial states: $(x_0, \phi_0^o) = (3, -30)$, (10, 220), and (13, 30). The resulting trajectories for cases 1), 2), and 3) for the three initial states are shown in Figs. 8, 9 and 5, respectively.

We see very clearly from these figures that, for cases (1) and (2) the truck cannot be controlled to the desired position, whereas for case (3) we successfully controlled the truck to the desired position.

V. APPLICATION TO TIME-SERIES PREDICTION

Time-series prediction is a very important practical problem [2]. Applications of time-series prediction can be found in the areas of economic and business planning, inventory and production control, weather forecasting, signal processing, control, and lots of other fields. Let $z(k)(k = 1, 2, 3, \cdots)$ be a time series. The problem of time-series prediction can be formulated as: given $z(k-m+1), z(k-m+2), \cdots, z(k)$,

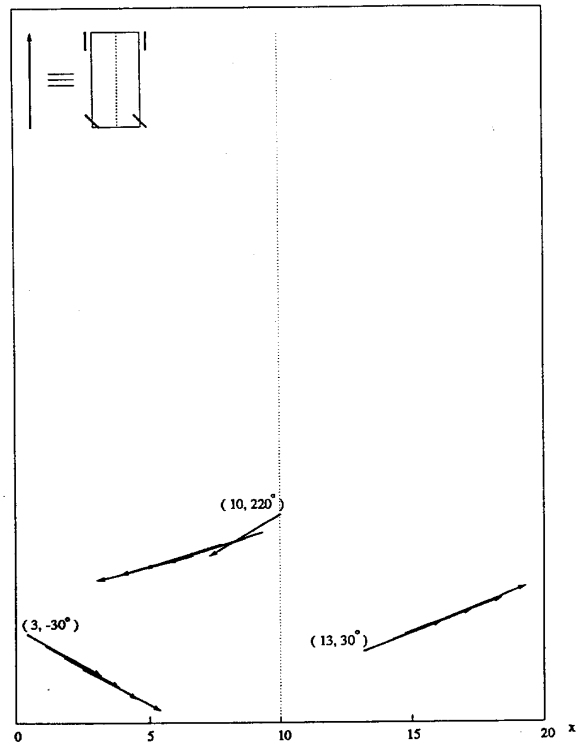


Fig. 9. Truck trajectories using the selected linguistic rules only.

determine $z(k+l)$, where m and l are fixed positive integers; i.e., determine a mapping from $[z(k-m+1), z(k-m+2), \cdots, z(k)] \in R^m$ to $[z(k+l)] \in R$.

A feedforward neural network can also be used for this problem [11]. For example, we can use a three-layer feedforward neural network, which has m input neurons and one output neuron, to represent the mapping from $[z(k-m+1), z(k-m+2), \cdots, z(k)]$ to $[z(k+l)]$. The network is trained for the known $z(k)$'s, and then the converged network is used for the prediction. Specifically, assume that $z(1), z(2), \cdots, z(M)$ are given; then we form $M-m$ desired input–output pairs:

$$\begin{aligned}&[z(M-m), \cdots, z(M-1); z(M)]\\&[z(M-m-1), \cdots, z(M-2); z(M-1)]\\&\cdots\\&[z(1), \cdots, z(m); z(m+1)].\end{aligned} \tag{17}$$

We train the neural network to match these $M-m$ pattern pairs using the error back-propagation algorithm [9], [10].

Our numerical-fuzzy method in Section II can also be used for this time series prediction problem. Similar to the neural network approach, we assume that $z(1), z(2), \cdots, z(M)$ are given, and we form the $M-m$ desired input–output pattern pairs in (17). Steps 1–4 of our numerical-fuzzy approach are used to generate a fuzzy rule base based on the pattern pairs (17); then this fuzzy rule base is used to forecast $z(M+p)$ for $p = 1, 2, \cdots$ using the defuzzifying procedure of Step 5 of our numerical-fuzzy method, where the inputs to the network are $z(M+p-m), z(M+p-m+1), \cdots, z(M+p-1)$.

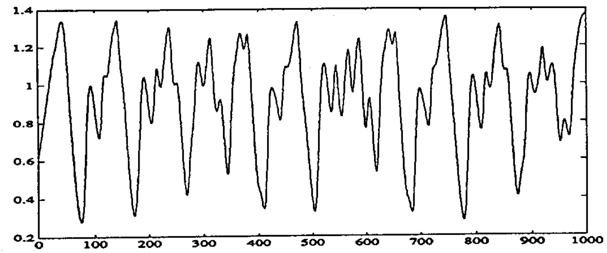


Fig. 10. A section of the Mackey-Glass chaotic time series.

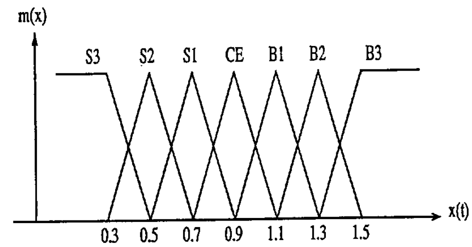


Fig. 11. The first choice of membership functions for the chaotic time series prediction problem.

Example 3: Now we apply our numerical-fuzzy approach to predict the Mackey–Glass chaotic time-series [11]. Chaotic time series are generated from deterministic nonlinear systems and are sufficiently complicated that they appear to be "random" time series; however, because there are underlying deterministic maps that generate the series, chaotic time series are not random time series. In [11], feedforward neural networks were used for chaotic time-series prediction, and were compared with conventional approaches, like linear predictive method, Gabor polynomial method, etc. The results showed that the neural network approach gave the best prediction, and the accuracy obtained using the neural network approach was orders of magnitude higher than that obtained using the conventional approaches. Here we use our numerical-fuzzy approach to the same Mackey–Glass chaotic time series in [11], and compare the results obtained with those obtained using the neural network approach.

The Mackey–Glass chaotic time series is generated from the following delay differential equation:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{0.2x(t-\tau)}{1+x^{10}(t-\tau)} - 0.1x(t). \tag{18}$$

When $\tau > 17$, (18) shows chaotic behavior. Higher values of τ yield higher dimensional chaos. In our simulation, we chose the series with $\tau = 30$. Fig. 10 shows 1000 points of this chaotic series that we used to test both the numerical-fuzzy and neural approaches.

We chose $m = 9$ and $l = 1$ in our simulation, i.e., nine point values in the series were used to predict the value of the next time point. The membership functions for any point are shown in Fig. 11 for the numerical-fuzzy predictor (later, we will use other membership functions). 40 hidden-layer neurons were used for the neural network predictor. The first 700 points of the series were used as training data, and the final 300

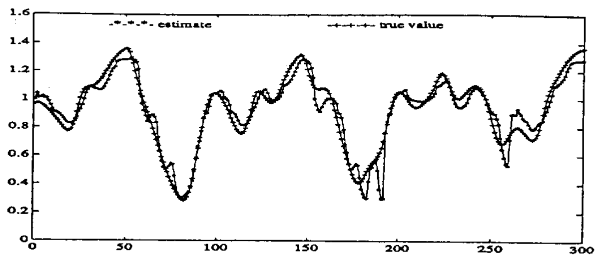


Fig. 12. Prediction of the chaotic time series from $x(701)$ to $x(1000)$ using the numerical-fuzzy predictor when 200 training data (from $x(501)$ to $x(700)$ are used.

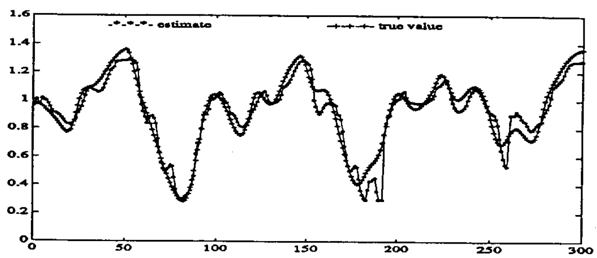


Fig. 13. Prediction of the chaotic time series from $x(701)$ to $x(1000)$ using the neural predictor when 200 training data (from $x(501)$ to $x(700)$) are used.

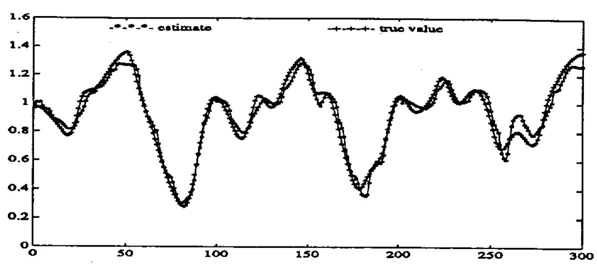


Fig. 14. Prediction of the chaotic time series from $x(701)$ to $x(1000)$ using the numerical-fuzzy predictor when 700 training data (from $x(1)$ to $x(700)$) are used.

points were used as test data (for additional cases, see [8]). We simulated two cases: 1) 200 training data (from 501 to 700) were used to construct the fuzzy rule base and to train the neural network; and, 2) 700 training data (from 1 to 700) were used. Figs. 12 and 13 show the results of the numerical-fuzzy and neural predictors respectively for case 1); and, Figs. 14 and 15 show similar results for case 2). As in [11], the "past" data needed to perform prediction is obtained from observing the actual time series; thus, one makes a prediction and uses the actual values to make the next prediction. We see from Figs. 12 to 15 that our new numerical-fuzzy predictor gave about the same results as the neural network predictor.

One advantage of the numerical-fuzzy approach is that it is very easy to modify the fuzzy rule base as new data become available. Specifically, when a new data pair becomes available, we create a rule for this data pair and add the new rule to the fuzzy rule base; then, the updated (i.e., adapted) fuzzy rule base is used to predict the future values. By using

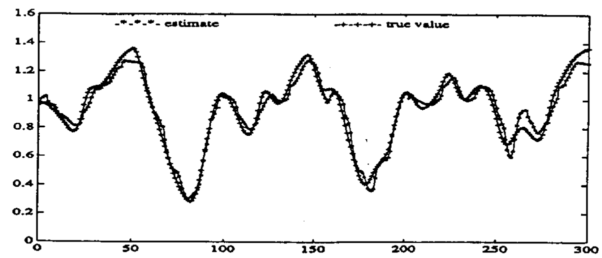


Fig. 15. Prediction of the chaotic time series from $x(701)$ to $x(1000)$ using the neural predictor when 700 training data (from $x(1)$ to $x(700)$) are used.

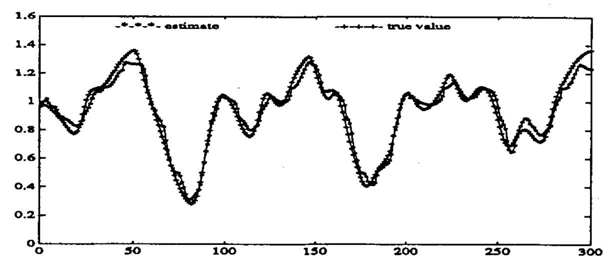


Fig. 16. Prediction of the chaotic time series from $x(701)$ to $x(1000)$ using the updating fuzzy rule base procedure.

this "adaptive" procedure we use all the available information to predict the next value of the series. We simulated this adaptive procedure for the chaotic series of Fig. 10: we started with the fuzzy rule base generated by the data $x(1)$ to $x(700)$, made a prediction of $x(701)$, then used the true value of $x(701)$ to update the fuzzy rule base, and this updated fuzzy rule base was then used to predict $x(702)$. This adaptive procedure continued until $x(1000)$. Its results are shown in Fig. 16. Comparing Figs. 16 and 14 we see that we obtain only a slightly improved prediction.

Finally, we show that prediction can be greatly improved by dividing the "domain interval" into finer regions. We performed two simulations: one with the membership function shown in Fig. 17, and the other with the membership function shown in Fig. 18. We used the adaptive fuzzy rule base procedure for both simulations. The results are shown in Figs. 19 and 20, for the membership functions of Figs. 17 and 18, respectively. Comparing Figs. 16, 19 and 20 we see very clearly that we obtain better and better results as the "domain interval" is divided finer and finer. Fig. 20 shows that we obtained an almost perfect prediction when we divided the "domain interval" into 29 regions. Of course, the price paid for doing this is a larger fuzzy rule base.

VI. Conclusion

In this paper, we developed a general method to generate fuzzy rules from numerical data. This method can be used as a general way to combine both numerical and linguistic information into a common framework—a fuzzy rule base. This fuzzy rule base consists of two kinds of fuzzy rules: some obtained from experts, and others generated from measured numerical data using the method of this paper. We proved that

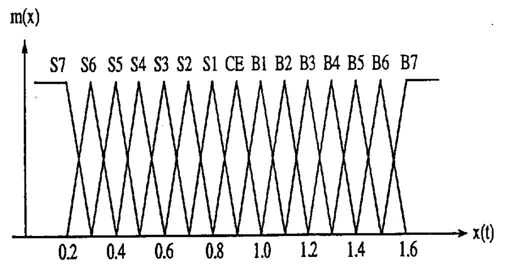


Fig. 17. The second choice of membership functions for the chaotic time series prediction problem.

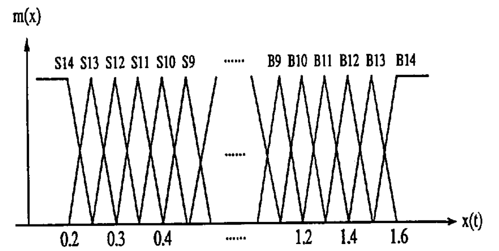


Fig. 18. The third choice of membership functions for the chaotic time series prediction problem.

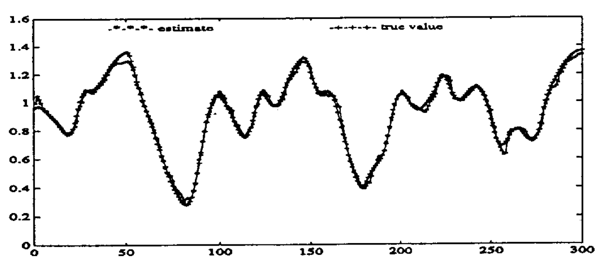


Fig. 19. Prediction of the chaotic time series from $x(701)$ to $x(1000)$ using the updating fuzzy rule base procedure with the membership functions of Fig. 18.

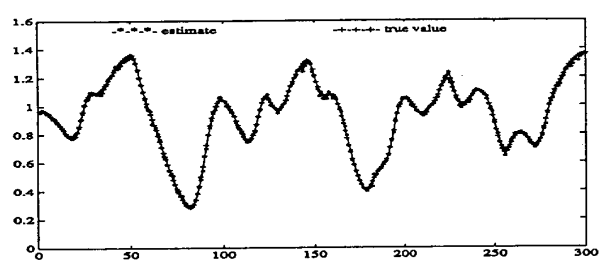


Fig. 20. Prediction of the chaotic time series from $x(701)$ to $x(1000)$ using the updating fuzzy rule base procedure with the membership functions of Fig. 19.

the generated fuzzy system is capable of approximating any nonlinear continuous function on a compact set to arbitrary accuracy. We applied our new method to a truck backer-upper control problem [1], [4], and observed that: 1) for the same training set (i.e., the same given input–output pairs), the final control performance of our new method is indistinguishable from that of the pure neural network controller; and, 2) in the case where neither numerical data nor linguistic rules contain enough information, both the pure neural and pure fuzzy methods failed to control the truck to the desired position, but our new method succeeded. We also applied our new method to a chaotic time-series prediction problem, and the results showed that our new method worked quite well.

The main features and advantages of the new method developed in this paper are: 1) it provides us with a general method to combine measured numerical information and human linguistic information into a common framework—a combined fuzzy rule base; this could be viewed as a first step to develop some theoretically analyzable control algorithms that use both numerical and linguistic information; 2) it is a simple and straightforward one-pass build-up procedure; hence, no time-consuming iterative training is required, so that it requires much less construction time than a comparable neural network; 3) there is lots of freedom in choosing the membership functions; this provides us with lots of flexibilities to design systems according to different requirements; and, 4) it can perform successful control for some cases where neither a pure neural network control nor a pure fuzzy control can.

Appendix I

Proof of Lemma 1: Since $0 \leq m_j^i(x_j) \leq 1$, it is sufficient to prove that for any $\boldsymbol{x} \in Q$ there exist some i such that $\Pi_{1\leq j\leq n}[m_j^i(x_j)] \neq 0$. Under the condition of this lemma, there exists at least one i such that $\Pi_{1\leq j\leq n}[m_j^i(x_j)] \neq 0$ for any $\boldsymbol{x} \in Q$, hence (11) is well-defined. Q.E.D.

Proof of Lemma 2: Since every box in the fuzzy rule base has a rule, for any $\boldsymbol{x} \in Q$ there must be a rule, say Rule i, such that $x_j \in RG_j^i$ for $j = 1, 2, \cdots, n$. By AS.2, $m_j^i(x_j) \neq 0$ for all $j = 1, 2, \cdots, n$, hence $\Pi_{1\leq j\leq n}[m_j^i(x)_j)] \neq 0$, i.e., (11) is well-defined. Q.E.D.

In order to prove Theorem 1 we need some definitions. A family F of real functions defined on a set E is an *algebra* if F is closed under addition, multiplication, and scalar multiplication. The family F *separates points on* E if for every $x, y \in E, x \neq y$, there exists a function $f \in F$ such that $f(x) \neq f(y)$. The family F *vanishes at no point of* E if for each $x \in E$ there exists $f \in F$ such that $f(x) \neq 0$. Our proof of Theorem 1 is based on the Stone-Weierstrass Theorem [5], which we state here for convenience of the reader.

Stone–Weierstrass Theorem: Let F be an algebra of real continuous functions on a compact set K. If F separates points on K and if F vanishes at no point on K, then the uniform closure B of F consists of all real continuous functions on K.

The uniform closure B of F is the union of F and its limit points; hence, if B consists of all real continuous functions on K, then F is capable of approximating any real continuous function on K to arbitrary accuracy.

Proof of Theorem 1: Let F be the family of well-defined functions of the form of (11) on the compact set Q under AS.1, AS.2, and AS.3. If we prove that F is an algebra of real continuous functions, F separates points on Q, and F vanishes at no point of Q, then the Stone–Weierstrass Theorem guarantees the conclusion of Theorem 1.

By AS.2, the $m_j^i(x_j)$'s are assumed to be real continuous functions; hence, F is a family of real continuous functions. Let $f_1, f_2 \in F$, so that we can write them as

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{K1} \overline{y1}^i \Pi_{1\le j\le n}[m1_j^i(x_j)]}{\sum_{i=1}^{K1} \Pi_{1\le j\le n}[m1_j^i(x_j)]} \tag{19}$$

$$f_2(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{K2} \overline{y2}^i \Pi_{1\le j\le n}[m2_j^i(x_j)]}{\sum_{i=1}^{K2} \Pi_{1\le j\le n}[m2_j^i(x_j)]}. \tag{20}$$

Thus we have (21), shown at the bottom of the next page. Now Define $m1_j^{i1}(x_j)m2_j^{i2}(x_j)$ as a new membership function of x_j, say $m_j^{i1,i2}(x_j)$, and define $\overline{y1}^{i1} + \overline{y2}^{i2}$ as the output center of a new rule, say $\overline{y}^{i1,i2}$; then, (21) is of the form of (11); hence, $f_1 + f_2 \in F$. Similarly, $f_1(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x})$ can be written as

$$f_1(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{i1=1}^{K1}\sum_{i2=1}^{K2} \overline{y1}^{i1}\overline{y2}^{i2} \Pi_{1\le j\le n}[m1_j^{i1}(x_j)m2_j^{i2}(x_j)]}{\sum_{i1=1}^{K1}\sum_{i2=1}^{K2} \Pi_{1\le j\le n}[m1_j^{i1}(x_j)m2_j^{i2}(x_j)]} \tag{22}$$

which is of the form (11); hence, $f_1f_2 \in F$. Finally, for any $c \in R$:

$$cf_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{K1} c\overline{y1}^i \Pi_{1\le j\le n}[m1_j^i(x_j)]}{\sum_{i=1}^{K1} \Pi_{1\le j\le n}[m1_j^i(x_j)]} \tag{23}$$

which is also of the form of (11); hence $cf_1(\boldsymbol{x}) \in F$. In summary, F is an algebra of real continuous functions.

Next, we prove that F separates points on Q. Let $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in Q$ and $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{z}$. We now construct $f \in F$ with $f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{z})$. First, we define the fuzzy regions of the input space Q such that each element of $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{z}$ is at the center of a fuzzy region (recall that the center of a fuzzy region is defined as the point that has the smallest absolute value among all the points at which the membership function for this region has membership value equal to one; see Section II, Step 5). Then, we choose the membership functions for the input space Q to be of the specific triangular form defined by AS.4 of Section III. By such a choice of fuzzy regions and membership functions, we have $m_j^i(x_j) = m_j^l(z_j) = 1$ for each active Rule i at $\boldsymbol{x}$, and each active Rule l at $\boldsymbol{z}$, and all $j = 1, 2, \cdots, n$ (the definition of *active rule* is given in Section III); additionally, there is one and only one active rule for $\boldsymbol{x}$ and one and only one active rule for $\boldsymbol{z}$, because (11) is well-defined (which guarantees that there is at least one active rule for $\boldsymbol{x}$ and at least one active rule for $\boldsymbol{z}$), and since only the membership functions for the regions with centers at the components of $\boldsymbol{x}$ or $\boldsymbol{z}$ are nonzero at $\boldsymbol{x}$ or $\boldsymbol{z}$, whereas all other membership functions are zero at $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{z}$ (which guarantees that there is at most one active rule for $\boldsymbol{x}$ and at most one active rule for $\boldsymbol{z}$). Since $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{z}$, there must be at least one j such that $x_j \neq z_j$, hence, the only active rule for $\boldsymbol{x}$ and the only active rule for $\boldsymbol{z}$ are at two different boxes of the fuzzy rule base. Since we are free to assign any rules to the boxes of the fuzzy rule base (AS.3), we just assign two different rules to these two boxes, and obtain the required $f \in F$ with $f(\boldsymbol{x}) = \overline{y}^i \neq \overline{y}^l = f(\boldsymbol{z})$ (see (11)), where $\overline{y}^i(\overline{y}^l)$ is the center of the output region of the active rule for $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{z})$.

Finally, we prove that F vanishes at no point of Q. By AS.1 and AS.2, we can make all the $\overline{y}^i > 0$. Since (11) is well-defined, there exists at least one i such that $\Pi_{1\le j\le n}[m_j^i(x_j)] \neq 0$ for any $\boldsymbol{x} \in Q$. Since (11) is a weighted average of positive $\overline{y}^i$'s with some nonzero weights, the result is also positive, i.e., we obtain $f \in F$ such that $f(\boldsymbol{x}) \neq 0$ (in fact, $f(\boldsymbol{x}) > 0$) for any $\boldsymbol{x} \in Q$. Q.E.D.

Proof of Lemma 3: For arbitrary $\boldsymbol{x} \in Q$ and fixed j, there are at most two m_j^i's which are nonzero at x_j under AS.4. Since a rule, say Rule i, is active only when $m_j^i(x_j) \neq 0$ for all $j = 1, 2, \cdots, n$, there are at most 2^n active rules for any $\boldsymbol{x} \in Q$; this proves (1). If r components of $\boldsymbol{x} \in Q$ are at the centers of some fuzzy regions, there is only one m_j^i, which is nonzero at each of these r components (in fact, these m_j^is are equal to unity at these r components), and for each of the other $n - r$ components there are at most two nonzero m_j^i's, hence the total number of active rules is at most 2^{n-r}; this proves (2). If r components of $\boldsymbol{x} \in Q$ are at the centers of

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x}) &= \frac{\sum_{i1=1}^{K1}\sum_{i2=1}^{K2} \overline{y1}^{i1} \Pi_{1\le j\le n}[m1_j^{i1}(x_j)m2_j^{i2}(x_j)] + \sum_{i1=1}^{K1}\sum_{i2=1}^{K2} \overline{y2}^{i2} \Pi_{1\le j\le n}[m1_j^{i1}(x_j)m2_j^{i2}(x_j)]}{\sum_{i1=1}^{K1}\sum_{i2=1}^{K2} \Pi_{1\le j\le n}[m1_j^{i1}(x_j)m2_j^{i2}(x_j)]} \\ &= \frac{\sum_{i1=1}^{K1}\sum_{i2=1}^{K2} (\overline{y1}^{i1} + \overline{y2}^{i2}) \Pi_{1\le j\le n}[m1_j^{i1}(x_j)m2_j^{i2}(x_j)]}{\sum_{i1=1}^{K1}\sum_{i2=1}^{K2} \Pi_{1\le j\le n}[m1_j^{i1}(x_j)m2_j^{i2}(x_j)]}. \end{aligned} \tag{21}$$

some fuzzy regions and q components of the $\boldsymbol{x}$ are smaller (or greater) than the center values of the corresponding smallest (or the corresponding largest) fuzzy regions, then there is only one nonzero m_j^i for each of these $r+q$ components, and the other $n-r-q$ components have two nonzero m_j^i's associated with each of them; hence, the total number of active rules is at most 2^{n-r-q}; this proves 3). Q.E.D.

REFERENCES

[1] D. Nguyen and B. Widrow, "The truck backer-upper: An example of self-learning in neural network," *IEEE Contr. Syst. Mag.*, vol. 10, no. 3, pp. 18–23, 1990.

[2] G. E. P. Box and G. M. Jenkins, *Time Series Analysis: Forecasting and Control.* Oakland, CA: Holden-Day, 1976.

[3] Y. F. Li and C. C. Lan, "Development of fuzzy algorithms for servo systems," *IEEE Contr. Syst. Mag.*, vol. 9, no. 3, pp. 65–72, 1989.

[4] S. G. Kong and B. Kosko, "Comparison of fuzzy and neural truck backer upper control systems," in *Proc. IJCNN-90*, vol. 3, June 1990, pp. 349–358.

[5] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis.* New York: McGraw-Hill, 1964.

[6] K. Hornik, M. Stinchcombe and H. White, "Multilayer feedforward networks are universal approximators," *Neural Networks*, vol. 2, pp. 359–366, 1989.

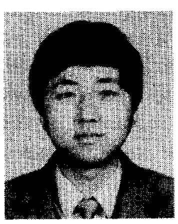
[7] G. Cybenko, "Approximations by superpositions of a sigmoidal function," *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 1989.

[8] L. X. Wang and J. M. Mendel, "Generating fuzzy rules from numerical data, with applications," USC SIPI Rep. No. 169, Univ. Southern Calif., Los Angeles, 1991.

[9] P. Werbos, "New tools for predictions and analysis in the behavioral science," Ph.D. dissertation, Harvard Univ. Comm. Appl. Math., 1974.

[10] D. E. Rumelhart and J. L. McClelland, Eds., *Parallel Distributed Processing*, Vol. 1. Cambridge, MA: MIT Press, 1986.

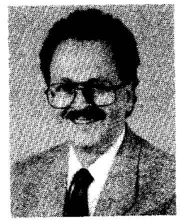
[11] A. Lapedes and R. Farber, "Nonlinear signal processing using neural networks: Prediction and system modeling," LA-UR-87-2662, 1987.



Li-Xin Wang received the B.S. and M.S. degrees from the Northwestern Polytechnical University, Xian, People's Republic of China, in 1984 and 1987, respectively, and the Ph.D. degree from the University of Southern California, Los Angeles in 1992, all in electrical engineering.

From 1987 to 1989, he was with the Department of Computer Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xian, People's Republic of China. From Fall 1989 to Spring 1992, he was a Research/Teaching Assistant in the Department of Electrical Engineering-Systems at the University of Southern California, Los Angeles. He is now a Postdoctoral Fellow in the Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California at Berkeley. His research interests are fuzzy systems and neural computing.

Dr. Wang received the Phi Kappa Phi Student Recognition Award for his work on fuzzy systems.



Jerry M. Mendel (S'59–A'61–M'72–F'78) received the B.S. degree in mechanical engineering and the M.S. and Ph.D. degrees in electrical engineering from the Polytechnic Institute of Brooklyn, Brooklyn, NY, in 1959, 1960, and 1963, respectively.

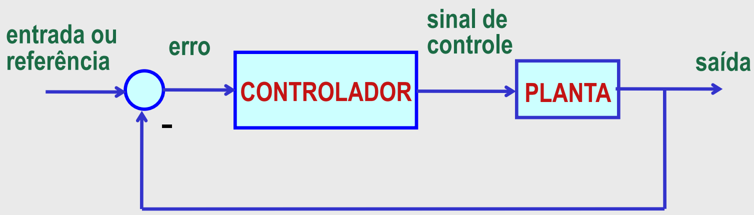
His experience has included teaching courses in Electrical Engineering at the Polytechnic Institute of Brooklyn, from 1960 to 1963, and has also included various consulting positions. From July 1963 to January 1974 he was with McDonnell Douglas Astronautics Company. Currently he is Professor of Electrical Engineering-Systems at the University of Southern California in Los Angeles, and is Director of the Signal & Image Processing Institute. He was Chairman of the EE-Systems Department from March 1984 to August 1991.

He teaches courses in estimation theory, deconvolution, and higher-order statistics. He has published more than 240 technical papers and is author of the monographs *Maximum-Likelihood Deconvolution: a Journey into Model-Based Signal Processing* (Springer-Verlag, 1990) and *Optimal Seismic Deconvolution: An Estimation-Based Approach* (Academic Press, 1983), the texts *Lessons in Digital Estimation Theory* (Prentice-Hall, 1987), and *Discrete Techniques of Parameter Estimation: The Equation Error Formulation* (Dekker, 1973), and, co-editor (with K. S. Fu (deceased)) of *Adaptive, Learning and Pattern Recognition Systems* (Academic Press, 1970). He is also author of the IEEE Individual Learning Program, *Kalman Filtering, and Other Digital Estimation Techniques.* He served as Editor of the IEEE Control Systems Society's IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, and is on the Editorial Board of the IEEE PROCEEDINGS.

Dr. Mendel is a Fellow of the IEEE, Distinguished Member of the IEEE Control Systems Society, member of the IEEE Geoscience and Remote Sensing Society, the IEEE Signal Processing Society, the Society of Exploration Geophysicists, the European Association for Signal Processing, Tau Beta Pi and Pi Tau Sigma, and a registered Professional Control Systems Engineer in California. He was President of the IEEE Control Systems Society in 1986. He received the SEG 1976 Outstanding Presentation Award for a paper on the application of Kalman Filtering to deconvolution; the 1983 Best Transactions Paper Award for a paper on maximum-likelihood deconvolution in the IEEE TRANSACTIONS ON GEOSCIENCE AND REMOTE SENSING; a Phi Kappa Phi book award for his 1983 research monograph on seismic deconvolution; a 1985 Burlington Northern Faculty Achievement Award; and a 1984 IEEE Centennial Medal.

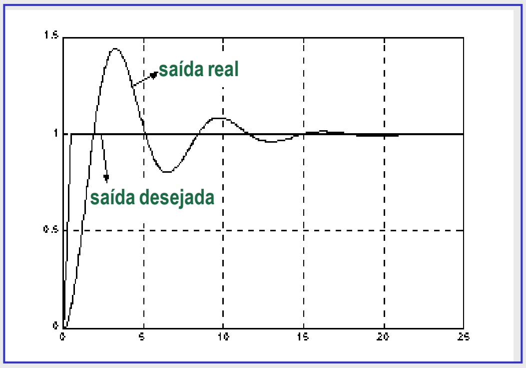
CONTROLADORES FUZZY

Diagrama de um sistema de controle típico:



CONTROLADORES FUZZY

Resposta típica

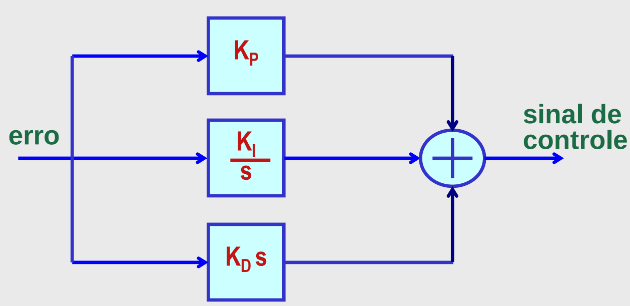


CONTROLADORES FUZZY

- Objetivo: minimizar o erro (diferença entre a saída real e a referência)
- Parâmetros de Projeto
  - Regime Transitório
    - tempo de subida
    - tempo de acomodação
    - percentual de *overshoot*
  - Regime Permanente
    - erro (em regime permanente)

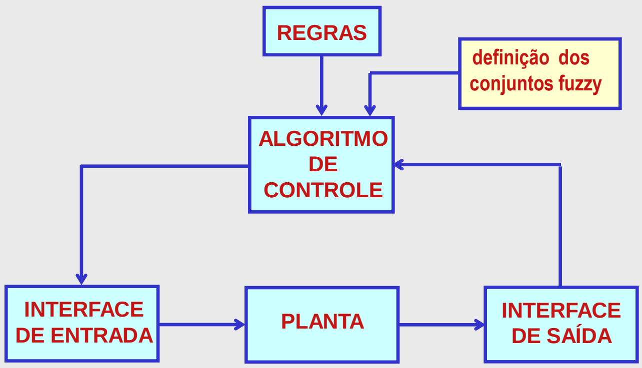
CONTROLADORES FUZZY

Exemplo de Controlador ("clássico"): PID



CONTROLADORES FUZZY

Sistema de Controle Fuzzy



CONTROLADORES FUZZY

- Interface de saída ⇒ adquire informações (*precisas*) a respeito da planta e as traduz para a linguagem de conjuntos fuzzy.
  - Compreende:
    - conversores A/D e D/A,
    - fatores de escala
    - procedimentos de quantização

CONTROLADORES FUZZY

- **Interface de entrada ⇒ converte a saída fuzzy do controlador para um valor preciso a ser fornecido à planta.**
  - **Compreende:**
    - **métodos de defuzzificação**
    - **fatores de escala**
    - **integradores**
    - **conversores**

CONTROLADORES FUZZY

- **Regras ⇒ definem a *estratégia* de controle**
- **Algoritmo de controle ⇒ *sistema de inferência fuzzy*; produz, a partir das regras disponíveis e para um determinado estado da planta, a decisão sobre a próxima entrada da planta.**

CONTROLADORES FUZZY

Controlador fuzzy aqui exemplificado:

- de caráter *geral*
- com duas entradas ⇒ *erro* e *variação do erro*
- uma saída ⇒ *variação no (sinal de) controle*
- faz uso de universos discretos e normalizados

{-6,-5,-4,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

ICA

CONTROLADORES FUZZY

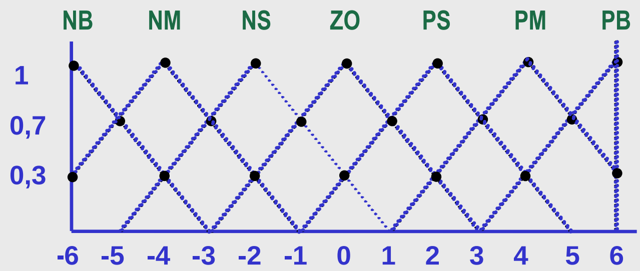
- Conjuntos "*triangulares*":

	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
PB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3	0,7	1
PM	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3	0,7	1	0,7	0,3
PS	0	0	0	0	0	0	0,3	0,7	1	0,7	0,3	0	0
ZO	0	0	0	0	0,3	0,7	1	0,7	0,3	0	0	0	0
NS	0	0	0,3	0,7	1	0,7	0,3	0	0	0	0	0	0
NM	0,3	0,7	1	0,7	0,3	0	0	0	0	0	0	0	0
NB	1	0,7	0,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ICA

CONTROLADORES FUZZY

• Conjuntos "*triangulares*" (graficamente):



CONTROLADORES FUZZY

• Escalonamento e quantização:

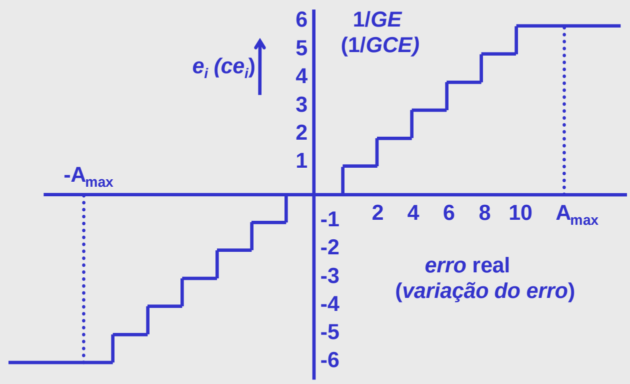
⇒ em um determinado instante *i*, as entradas quantizadas e normalizadas são

$$e_i = (GE \times erro)_{quantizado}$$
$$ce_i = (GCE \times variação\ do\ erro)_{quantizado}$$

GE e *GCE* ⟶ *fatores de escala*

CONTROLADORES FUZZY

- **Escalonamento e quantização**
  - ⇒ interpretação gráfica [para *GE* (*GCE*)=0,5]:



CONTROLADORES FUZZY

Estratégia de Controle (regras):

R^N: se erro é E^1 e variação do erro é CE^1 então $U=U^1$

ou

se erro é E^2 e variação do erro é CE^2 então $U=U^2$

ou

⋮

se erro é E^n e variação do erro é CE^n então $U=U^n$

⇒ E^j, CE^j e U^j : *valores lingüísticos* representados por conjuntos fuzzy

⇒ *U*: variação no controle

CONTROLADORES FUZZY

Considerando-se:

- um instante *i*,
- entradas precisas (singletons) e_i e ce_i
- a regra de inferência *max-min*
- *min* para representar o conectivo *e*

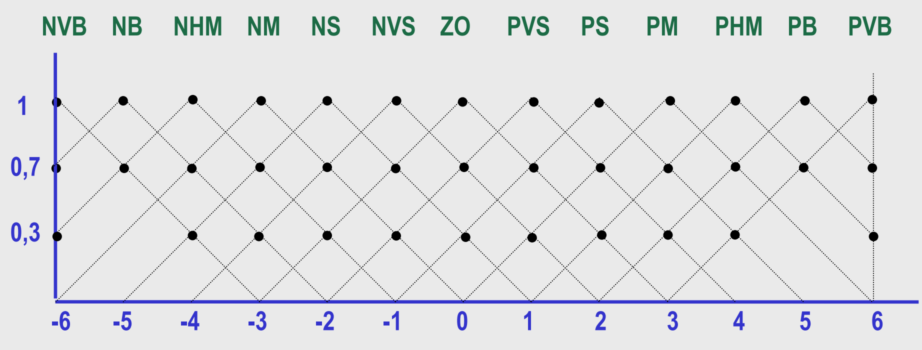
saída do controlador em um instante i

$$
\begin{aligned}
\mu_{U_i}(u) = f_{ou}[\, & f_{\to}(\mu_{E^1}(e_i) \wedge \mu_{CE^1}(ce_i), \mu_{U^1}(u)), \\
& f_{\to}(\mu_{E^2}(e_i) \wedge \mu_{CE^2}(ce_i), \mu_{U^2}(u)), \ldots. \\
& \ldots\ldots.., f_{\to}(\mu_{E^n}(e_i) \wedge \mu_{CE^n}(ce_i), \mu_{U^n}(u))]
\end{aligned}
$$

CONTROLADORES FUZZY

Exemplo:

- Conjuntos fuzzy (13):



CONTROLADORES FUZZY

Exemplo (continuação):

- combinação dos antecedentes (conectivo *e*): *min*
- implicação: *min*
- conectivo *ou*: *max*
- entradas (após escalonamento e quantização):

$$e_i = -1 \ \text{ e } \ ce_i = 0$$

ICA

CONTROLADORES FUZZY

Exemplo (continuação):

- supõe-se que duas regras sejam ativadas pelas entradas:

⇒ se *erro* é *NS* e *variação do erro* é *PS*

então variação na saída controlador é *NS*

⇒ se *erro* é *ZO* e *variação do erro* é *NVS*

então variação na saída controlador é *ZO*

ICA

CONTROLADORES FUZZY

Exemplo (continuação):

$$\left.\begin{array}{l}\mu_{NS}(e_i)=0{,}7\\ \mu_{PS}(ce_i)=0{,}3\end{array}\right\}\Rightarrow \mu_{NS}(e_i)\wedge\mu_{PS}(ce_i)=0{,}3$$

$$\left.\begin{array}{l}\mu_{ZO}(e_i)=0{,}7\\ \mu_{NVS}(ce_i)=0{,}7\end{array}\right\}\Rightarrow \mu_{ZO}(e_i)\wedge\mu_{NVS}(ce_i)=0{,}7$$

$$\Downarrow$$

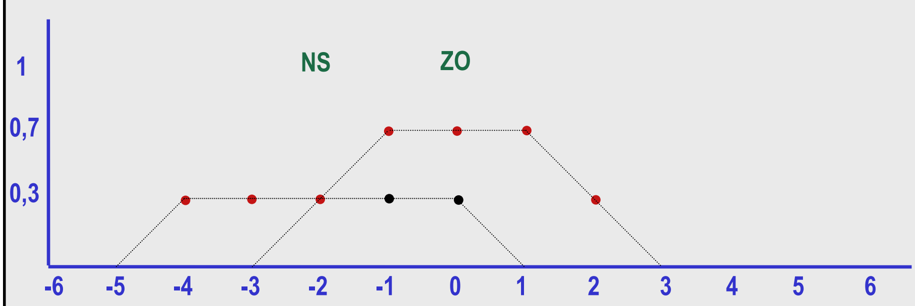
$$\boxed{\mu_{U_i}(u)=max\left[0{,}3\wedge\mu_{NS}(u);0{,}7\wedge\mu_{ZO}(u)\right]}$$

ICA

CONTROLADORES FUZZY

Exemplo (continuação):

- Conjunto fuzzy resultante (saída)



u_i = 0 (pela *Média dos Máximos*)

ICA

CONTROLADORES FUZZY

Armazenamento de Regras

Procedimento possível:

- **representa-se o *espaço de estado* *erro* × *variação do erro* por uma *grade***
- ***define-se o centro da regra* (e_R,ce_R) ⇒ ponto onde**

$$\mu_{E^j}(e) = \mu_{CE^j}(ce) = 1$$

ICA

CONTROLADORES FUZZY

Armazenamento de Regras

Observando que os suportes das funções de pertinência são conhecidos (no caso do exemplo as funções são simétricas)

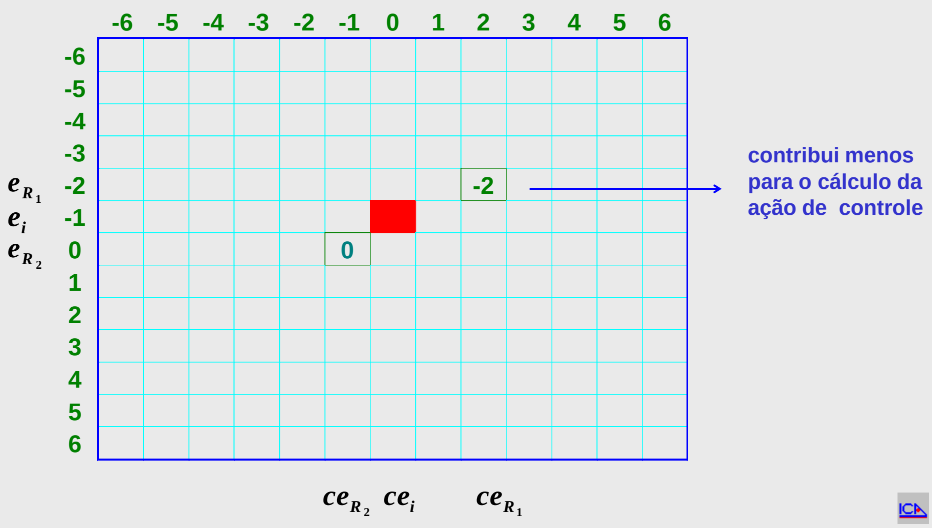
⇓

um simples número pode ser usado para representar um conjunto fuzzy ⇒ **o número representa a posição no universo em que o valor de pertinência é 1.**

ICA

CONTROLADORES FUZZY

Armazenamento de Regras



ICA

CONTROLADORES FUZZY

Região de influência de cada regra:

$\Rightarrow$ determinada pelo *degree of fulfilment* da regra *j* no instante *i* :

- Antecedentes combinados por *min*:

$$\boxed{DOF_i^j = \mu_{E^j}(e_i) \wedge \mu_{CE^j}(ce_i)}$$

- Antecedentes combinados por *produto*:

$$\boxed{DOF_i^j = \mu_{E^j}(e_i) \bullet \mu_{CE^j}(ce_i)}$$

ICA

CONTROLADORES FUZZY

Considerando

- os universos discretos
- os graus de pertinência do exemplo

min

0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
0,3	0,7	0,7	0,7	0,3
0,3	0,7	1	0,7	0,3
0,3	0,7	0,7	0,7	0,3
0,3	0,3	0,3	0,3	0,3

produto

0,09	0,21	0,3	0,21	0,09
0,21	0,49	0,7	0,49	0,21
0,3	0,7	1	0,7	0,3
0,21	0,49	0,7	0,49	0,21
0,09	0,21	0,3	0,21	0,09

poderiam ser excluídos por meio da fixação de um *limiar* ➡ a regra não teria influência nestes pontos

CONTROLADORES FUZZY

Uma regra *centrada* em (-3,2) teria a seguinte *região de influência* (operador *min*):

	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
-6													
-5							0,3	0,3	0,3	0,3	0,3		
-4							0,3	0,7	0,7	0,7	0,3		
-3							0,3	0,7	1	0,7	0,3		
-2							0,3	0,7	0,7	0,7	0,3		
-1							0,3	0,3	0,3	0,3	0,3		
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													

CONTROLADORES FUZZY

Contribuição de cada regra:

- **para um ponto (e_i ,ce_i) no espaço de estado, as regras que contribuem para o cálculo da ação do controlador são aquelas cujos centros estão a uma *certa distância* de (e_i ,ce_i).**
- **conjuntos suporte de *tamanhos diferentes* ⇒ os quadrados tornam-se paralelogramos e a distância de uma regra ao ponto (e_i ,ce_i) *não será uniforme* em todas as direções ⇒ implementação menos simples.**

ICA

CONTROLADORES FUZZY

Contribuição de cada regra:

- **Relação com o método de defuzzificação:**

COG ⇒

- **as regras mais próximas de (e_i,ce_i) terão uma contribuição maior do que as mais distantes**

MOM ⇒

- **as regras com maior *DOF* são as selecionadas ⇒ somente as regras mais próximas de (e_i,ce_i) contribuirão para o cálculo da ação de controle**
- **somente os picos no conjunto fuzzy da saída são efetivamente relevantes**

ICA

CONTROLADORES FUZZY

Influência das funções de pertinência:

- A *região de influência* de uma regra dependerá da abrangência (tamanho do *conjunto suporte*), em termos do universo considerado, dos conjuntos fuzzy das entradas
- Formas das funções de pertinência dos antecedentes
  - afetam a determinação de *DOF* ⇒ efeito no consequente de cada regra e no resultado final.
- Forma do conjunto do consequente de cada regra
  - afeta o conjunto fuzzy da saída diretamente.

ICA

CONTROLADORES FUZZY

Influência das funções de pertinência:

- Relação com o método de defuzzificação:

MOM ⇒

- a forma dos conjuntos dos antecedentes não é importante, desde que sejam *simétricos* e de forma *aproximadamente triangular*.
- só é necessário saber (através de *DOF*) a distância da regra de (e_i,ce_i); as magnitudes absolutas dos graus de pertinência não são importantes; apenas as magnitudes em relação às de outra regra interessam
- a forma dos conjuntos do consequente também não é importante

ICA

CONTROLADORES FUZZY

Influência das funções de pertinência:

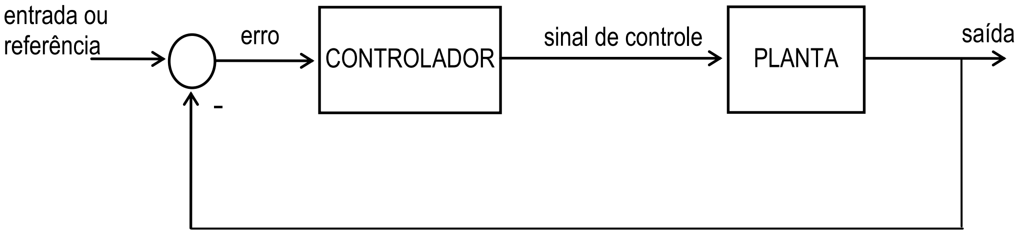
- **Relação com o método de defuzzificação:**

COG $\Rightarrow$

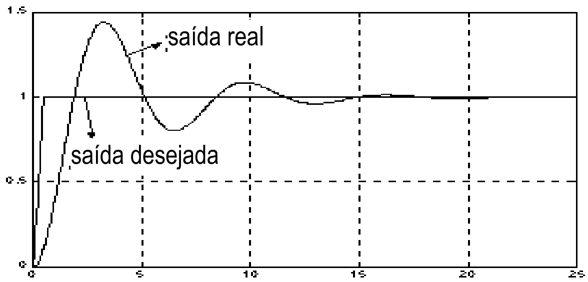
- **a forma dos conjuntos é importante mesmo quando há simetria; a área sob a curva é afetada diretamente pelo consequente de cada regra e indiretamente por *DOF*.**

CONTROLADORES FUZZY

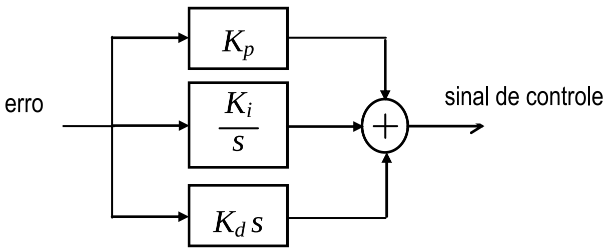
Um sistema de controle típico é representado pelo diagrama de blocos abaixo:



A *entrada ou referência* expressa a *saída desejada* (ou ideal) para a planta, enquanto que a *saída* desta corresponde ao que realmente ocorre (*saída real*). O controlador gera o sinal de controle, que atua sobre a planta de modo a, idealmente, levar o *erro* (diferença entre a entrada e a saída) a zero. Um resposta típica está mostrada abaixo e pode ser decomposta em duas partes: *regime transitório* e regime *permanente*. Parâmetros de projeto relativos ao regime transitório são o *tempo de subida*, *percentual de ultrapassagem* (da saída em relação à entrada) e *tempo de acomodação*. Quanto ao restante da resposta da planta, busca-se reduzir o *erro em regime permanente*.

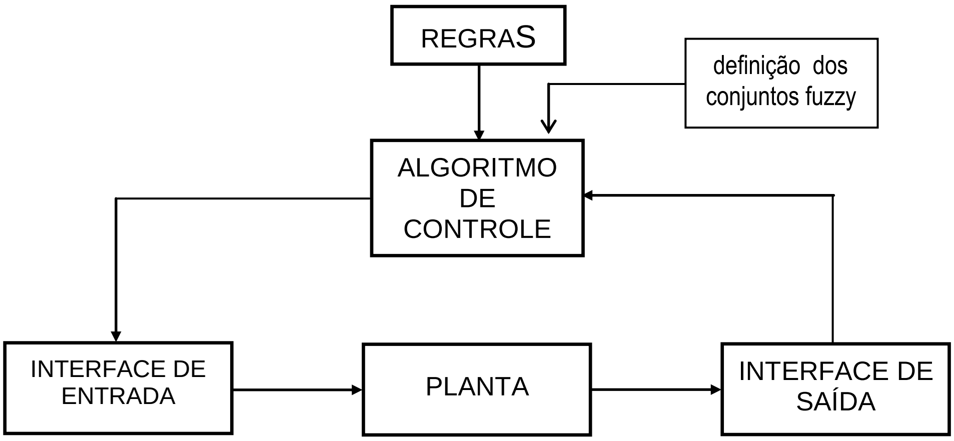


Um controlador bastante comum é denominado PID e apresenta a seguinte configuração:



No controlador PID, os ganhos Proporcional, Integral e Derivado são sintonizados de modo a se obter o melhor desempenho possível da resposta de saída da planta (em termos de parâmetros dos regimes transitório e permanente), cujo modelo matemático não necessita ser conhecido ou determinado. No caso de plantas mais complexas e com requisitos de projeto mais rígidos, faz-se uso de controladores mais sofisticados, projetados por meio de métodos analíticos. Nesta situação torna-se necessária a determinação do modelo matemático (em termos de equações diferenciais, função de transferência, por exemplo) da planta, o que pode ser feito através de um processo de *identificação*.

O controlador representado no diagrama de blocos da página anterior pode ser um *sistema de inferência fuzzy*. No chamado ***controlador fuzzy***, a estratégia de controle é descrita por intermédio de regras linguísticas que conectam, de modo impreciso, várias situações com as ações a serem tomadas. A exemplo do controlador PID, não é necessário um modelo matemático formal da planta, embora as regras linguísticas que definem a estratégia de controle se constituam em um *modelo linguístico da planta*. O diagrama de blocos pode ser "rearrumado", de modo a representar em mais detalhe os módulos de um controlador fuzzy:



A ***interface de saída*** adquire informações (precisas) a respeito da planta e as traduz para a linguagem de conjuntos fuzzy. Aí podem estar incluídos conversores A/D e D/A, fatores de escala, procedimentos de quantização, etc., conforme será descrito mais adiante. A ***interface de entrada*** converte a saída fuzzy do controlador para um valor preciso a ser fornecido ao processo. Aí se incluem métodos de defuzzificação, fatores de escala, integradores, conversores, etc. Também faz parte da estrutura a *definição dos conjuntos fuzzy* usados para representar as regras, incluindo-se aí também as definições dos universos usados para as variáveis de entrada e saída do controlador. O algoritmo de controle usa as regras disponíveis e produz, para um determinado estado do processo, a decisão sobre a próxima entrada do processo.

A estrutura apresentada aqui é de ***caráter geral*** e aplicável a qualquer planta controlável por essas técnicas. O que fornece ao controlador uma identidade é o conjunto de regras que lhe são fornecidas; estas constituem a quantidade de informação necessária para executar uma determinada tarefa de controle com o processo em questão. Isto é importante de ser enfatizado pois a essência do controlador reside nas regras de controle; a teoria de conjuntos fuzzy apenas fornece os meios para se traduzir as regras em termos matemáticos e para se inferir uma decisão a partir delas.

INTERFACE COM O PROCESSO

Nesta seção consideram-se a definição das variáveis de controle e itens como escalonamento, quantização e métodos de defuzzificação, necessários para se estabelecer a conexão do controlador fuzzy com uma planta (não-fuzzy).

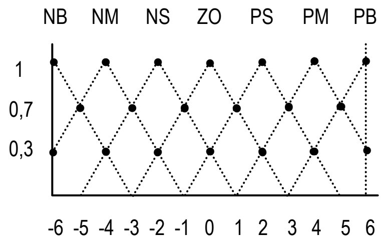
Variáveis de Controle

Em controladores fuzzy de *caráter geral* como o apresentado aqui, as variáveis de entrada são usualmente o ***erro***, gerado a partir da diferença entre o sinal de referência e a saída das planta, e a ***variação do erro***, normalmente gerada a partir do erro. A variável de saída do controlador é a ***variação no controle.*** A opção por uma *saída incremental*, ao invés de *absoluta*, é mais condizente com o raciocínio empregado por operadores humanos e, além disso, proporciona uma economia em termos do universo da saída. As variáveis fuzzy *erro* e *variação do erro* podem ser definidas, por exemplo, como correspondentes aos valores reais medidos das entradas. Entretanto, um procedimento *mais geral* faz uso de ***universos discretos e normalizados***, definidos como, por exemplo:

$$\{-6,-5,-4,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Nos controladores fuzzy do tipo aqui considerado, os conjuntos fuzzy são de *forma triangular* (aproximadamente), *simétricos*, com graus de pertinência {0,3; 0,7; 1; 0,7; 0,3). Na tabela a seguir estão representados 7 conjuntos fuzzy – denominados PB (*positive big*), PM (*positive medium*), PS (*positive small*), ZO (*zero*), NB (*negative big)*, NM (*negative medium*), NS (*negative small*) – e os graus de pertinência associados a cada um desses conjuntos, considerando um universo discreto e finito de 13 elementos conforme definido acima. Alternativamente pode ser empregada uma representação gráfica, conforme a figura ao lado da tabela.

	UNIVERSO												
	-6	**-5**	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
PB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3	0,7	1
PM	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3	0,7	1	0,7	0,3
PS	0	0	0	0	0	0	0,3	0,7	1	0,7	0,3	0	0
ZO	0	0	0	0	0,3	0,7	1	0,7	0,3	0	0	0	0
NS	0	0	0,3	0,7	1	0,7	0,3	0	0	0	0	0	0
NM	0,3	0,7	1	0,7	0,3	0	0	0	0	0	0	0	0
NB	1	0,7	0,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

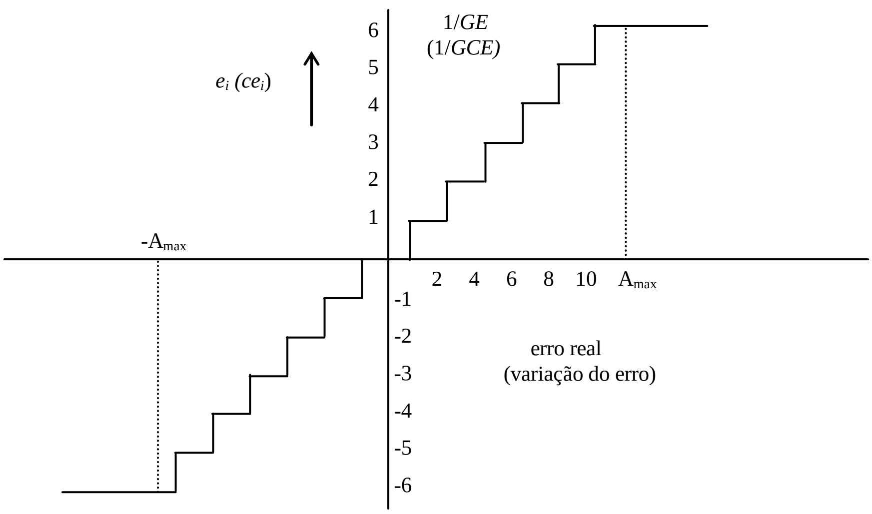


Escalonamento e Quantização

Conforme mencionado, os universos aqui considerados para as variáveis fuzzy são discretos, finitos e normalizados. Assim, torna-se necessário utilizar ***fatores de escala*** para fazer corresponder, aos valores reais e medidos do erro e variação do erro, valores normalizados. Além disto, deve ser efetuada uma quantização, resultando nas seguintes entradas para o controlador (em um instante *i*, por exemplo):

$$e_i = (GE \times erro)_{quantizado}$$
$$ce_i = (GCE \times \mathrm{var}\, iação\ do\ erro)_{quantizado}$$

onde *GE* e *GCE* são fatores de escala. O procedimento de escalonamento e quantização está representado na figura abaixo, onde, como um exemplo, *GE* (*GCE*) = 0,5:



Os fatores de escala *GE* e *GCE* determinam a forma da característica mostrada na figura. Um aumento em *GE*, por exemplo, significa que um número menor de valores reais poderá ser mapeado para o universo escolhido. A tolerância do erro é dada por 1/2*GE*. A1ém disso, valores que caírem fora da região entre A_{max} e $-A_{max}$ serão mapeados para +6 e -6, respectivamente. Isto significa que o controle será mais preciso na *janela* delimitada por aqueles valores. A escolha dos fatores de escala é parte do procedimento de sintonia do controlador e estes podem ser expressos por constantes ou por funções (do *erro*, por exemplo). Se o universo da saída do controlador também for normalizado, a exemplo das variáveis de entrada, um fator de escala *GO* é usado, após a defuzzificação (cf. seção seguinte), para mapear valores quantizados para valores reais compatíveis com a entrada do processo. Esse fator de escala também deve ser ajustado de acordo com o comportamento da resposta.

Defuzzificação

A saída do controlador fuzzy é um conjunto fuzzy U_i no universo da saída. Como o processo requer um sinal não-fuzzy (preciso) em sua entrada, deve-se fazer uma interpretação daquele conjunto fuzzy. Esta interpretação, denominada ***defuzzificacão***, pode ser feita através de vários métodos, como, por exemplo, *Média dos Máximos* (*MOM*) e *Centro de Gravidade* (*COG*).

Quando os universos utilizados são discretos, o resultado da defuzzificação tem de ser arredondado para o valor inteiro mais próximo no universo. O arredondamento para o valor inteiro imediatamente abaixo impossibilitará que se obtenha o valor mais alto do universo quando o conjunto suporte está localizado no extremo do universo – {0,3; 0,7; 1}, por exemplo. Na realidade, com COG não é possível obter os valores extremos do universo, devido a própria natureza do método. Isto pode dar origem a uma resposta mais lenta do que a obtida com MOM.

Regras de Controle

A estratégia de controle é descrita por um conjunto de regras linguísticas. Conforme mencionado, duas entradas são consideradas para cada saída: o *erro*, e a *variação do erro*. A saída é a *variação na saída do controlador* (*U*). O conjunto de regras é, então, da forma:

R^N: *se erro* é E^1 *e variação do erro* é CE^1 *então* $U = U^1$
ou
se erro é E^2 *e variação do erro* é CE^2 *então* $U = U^2$
ou
.
.
se erro é E^n *e variação do erro* é CE^n *então* $U = U^n$

onde E^j, CE^j e U^j são valores lingüísticos representados por conjuntos fuzzy.

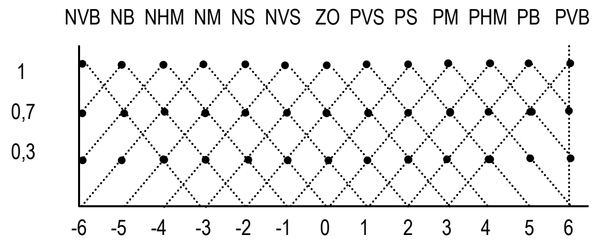
A estratégia de controle é representada por uma *matriz* μ_{R^N} .O controlador é então solicitado a fornecer, a partir do valores do *erro* e da *variação do erro*, uma saída apropriada. Assim, em um instante *i*, quando as entradas precisas (*singletons*) são e_i e ce_i, o conjunto fuzzy da saída U_i será dado por (utilizando-se a regra de inferência *max-min* e *min* para representar o conectivo *e*):

$$\mu_{U_i}(u) = f_{ou}[\, f_{\rightarrow}(\mu_{E^1}(e_i) \wedge \mu_{CE^1}(ce_i), \mu_{U^1}(u)), f_{\rightarrow}(\mu_{E^2}(e_i) \wedge \mu_{CE^2}(ce_i), \mu_{U^2}(u)), \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots, f_{\rightarrow}(\mu_{E^n}(e_i) \wedge \mu_{CE^n}(ce_i), \mu_{U^n}(u))]$$

<u>Exemplo</u>: controlador fuzzy com duas entradas – *erro* e *variação do erro* – e uma saída.

Dados:

- 13 conjuntos fuzzy para cada variável, todos eles "triangulares", simétricos, definidos em universos discretos e finitos – [-6,+6] – segundo as funções de pertinência a seguir:



- combinação dos antecedentes (conectivo *e*): ***min***
- implicação: ***min***
- conectivo *ou*: ***max***
- entradas (após escalonamento e quantização): $e_i = -1$ e $ce_i = 0$
- supõe-se que <u>duas</u> das 169 (13 x 13) regras possíveis sejam ativadas pelas entradas no instante *i* considerado::

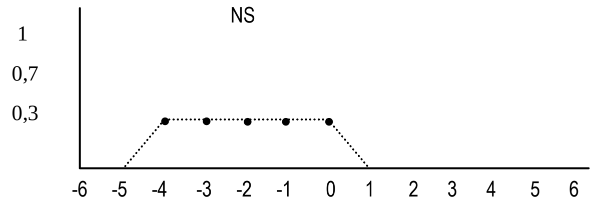
  se *erro* é *NS* *e* *variação do erro* é *PS* *então* *variação na saída controlador* é *NS*

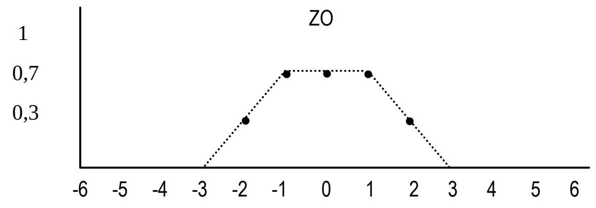
  se *erro* é *ZO* *e* *variação do erro* é *NVS* *então* *variação na saída controlador* é *ZO*

Logo:

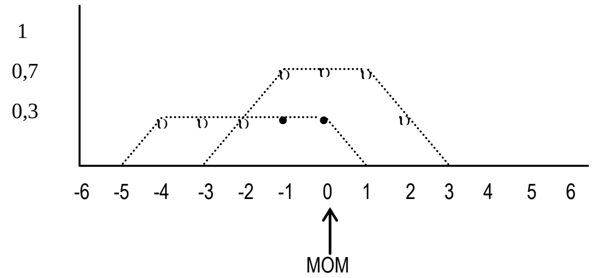
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\mu_{NS}(e_i) = 0{,}7 \\ \mu_{PS}(ce_i) = 0{,}3\end{array}\right\} \Rightarrow \mu_{NS}(e_i) \wedge \mu_{PS}(ce_i) = 0{,}3 \\ \left.\begin{array}{l}\mu_{ZO}(e_i) = 0{,}7 \\ \mu_{NVS}(ce_i) = 0{,}7\end{array}\right\} \Rightarrow \mu_{ZO}(e_i) \wedge \mu_{NVS}(ce_i) = 0{,}7 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mu_{U_i}(u) = max\left[0{,}3 \wedge \mu_{NS}(u); 0{,}7 \wedge \mu_{ZO}(u)\right]}$$

Ou seja, faz-se a ***união*** de:





obtendo-se:



A ***defuzzificação*** pela *Média dos Máximos*, por exemplo, proporciona uma saída precisa

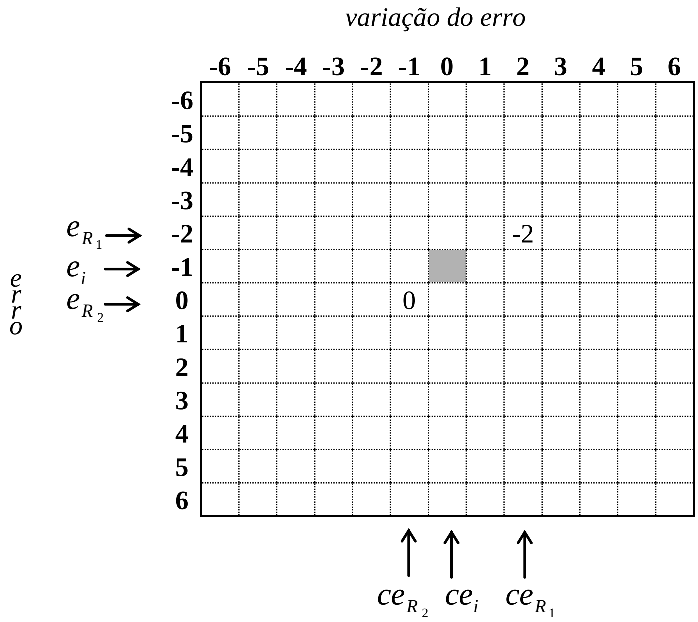
$$\boxed{u_i = 0}$$

ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO

É apresentada a seguir uma maneira simples de se tratar as regras, ***quando se consideram universos discretos***, com vistas à implementação do algoritmo de controle. São também comentados aspectos de ordem prática que devem ser levados em consideração quando da implementação e utilização do algoritmo.

Armazenamento de Regras

O exemplo visto na seção anterior pode ser resolvido de uma maneira mais eficiente se o espaço de estado *erro* × *variação do erro* for representado por uma *grade* e se for definido o ***centro da regra*** (e_R , ce_R) nesse espaço como o ponto onde $\mu_{E^j}(e) = \mu_{CE^j}(ce) = 1$. Como os suportes das funções de pertinência são conhecidos (no caso do exemplo as funções são simétricas), é possível utilizar um simples número para representar o conjunto fuzzy associado ao valor linguístico de uma variável em uma regra. A ação do controlador pode também ser representada da mesma forma: os valores numéricos na grade representam a posição no universo em que o valor de pertinência é 1. Assim, o armazenamento de regras torna-se bastante simples; conhecidos o conjunto suporte e o centro da regra, é fácil *recuperar* os conjuntos fuzzy correspondentes. Utilizando os dados do exemplo, a posição no espaço de estado no instante *i* (célula sombreada) e as duas regras, especificadas pelos seus *centros* (e_{R_1}, ce_{R_1}) e (e_{R_2}, ce_{R_2}), estão representadas na figura abaixo:



A regra centrada em (-2,2) está "mais distante" da célula sombreada, o que indica que ela contribui menos do que a centrada em (0,-l) para o cálculo da ação a ser tomada pelo controlador quando o estado presente é (-1,0). Isto foi indicado pelos valores $0{,}3 \wedge \mu_{NS}(u)$ e $0{,}7 \wedge \mu_{ZO}(u)$ obtidos na expressão para $\mu_{U_i}(u)$.

Região de Influência de cada regra

A expressão $\mu_{E^j}(e_i) \wedge \mu_{CE^j}(ce_i)$, que determina a *região de influência* de uma regra, descreve o quanto as entradas do controlador são compatíveis com os *antecedentes* de uma regra *j*. Esta expressão é normalmente chamada de ***degree of fulfilment*** da regra *j* no instante *i*, ou $\boldsymbol{DOF}_i^j$. Com *os universos (discretos) e os graus de pertinência usados no exemplo anterior*, a região de influência de cada regra é determinada por um quadrado de 5 unidades de lado; considerando os operador ***min*** e ***produto*** como representação do conectivo ***e*** (concatenação dos antecedentes), os graus de influência da regra dentro deste quadrado são representados pelas duas tabelas a seguir:

min

0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
0,3	0,7	0,7	0,7	0,3
0,3	0,7	1	0,7	0,3
0,3	0,7	0,7	0,7	0,3
0,3	0,3	0,3	0,3	0,3

produto

0,09	0,21	0,3	0,21	0,09
0,21	0,49	0,7	0,49	0,21
0,3	0,7	1	0,7	0,3
0,21	0,49	0,7	0,49	0,21
0,09	0,21	0,3	0,21	0,09

Como valores pequenos de *DOF* são obtidos com o operador *produto*, um procedimento razoável consiste em se estabelecer um limiar abaixo do qual a contribuição da regra é desconsiderada. Para um limiar de 0,3, por exemplo, a região de influência de cada regra excluiria os pontos onde *DOF* = 0,09 e *DOF* = 0,21.

Contribuição de cada Regra

Como visto, para um ponto $(e_i\ ,ce_i)$ no espaço de estado, as regras que contribuem para o cálculo da ação do controlador são aquelas cujos centros estão a uma certa distância de $(e_i\ ,ce_i)$. Se conjuntos suporte de *tamanhos diferentes* forem empregados, os quadrados tornam-se paralelogramos e a distância de uma regra ao ponto $(e_i\ ,ce_i)$ *não será uniforme* em todas as direções, tornando a implementação menos simples. Dependendo do método de defuzzificação empregado, menos regras podem contribuir para o cálculo da ação do controlador. Se *COG* for utilizado, todas as regras dentro de uma certa distância contribuem e devem ser incluídas nos cálculos. As regras mais próximas de $(e_i\ ,ce_i)$ terão uma contribuição maior do que as mais distantes, evidentemente. No entanto, se *MOM* for empregado, somente as regras mais próximas de $(e_i\ ,ce_i)$ contribuirão, e apenas elas precisam ser incluídas nos cálculos. Isto se deve ao fato de que, no método *MOM*, somente os picos no conjunto fuzzy da saída são relevantes. Esse método efetivamente seleciona as regras com maior *DOF*, ou seja, aquelas mais próximas de $(e_i\ ,ce_i)$. Em virtude desta característica, é possível criar algoritmos muito simples em que conjuntos fuzzy não são usados explicitamente no cálculo da ação do controlador.

Influência das Funções de Pertinência

A região de influência de uma regra dependerá da abrangência, em termos do universo considerado, dos conjuntos fuzzy das entradas. Portanto, o tamanho do conjunto suporte certamente influi no cálculo da ação de controle. No caso de conjuntos com a mesma abrangência mas com funções de pertinência de diferentes formas, a forma dos conjuntos dos antecedentes de cada regra afeta a determinação de *DOF*, o que terá um efeito no consequente (ou saída) de cada regra, e no resultado final. A forma do conjunto do consequente de cada regra afeta o conjunto fuzzy da saída diretamente. No entanto, a saída precisa do controlador dependerá do método de fuzzificação. Com *MOM*, a forma dos conjuntos dos antecedentes não tem importância, desde que sejam simétricos e de forma *aproximadamente triangular*. Só é necessário saber (através de *DOF*) a distância da regra de $(e_i\ ,ce_i)$; as magnitudes absolutas dos graus de pertinência não são importantes; apenas as magnitudes em relação às de outra regra interessam. Similarmente, a forma dos conjuntos do consequente também não é importante. No caso do método *COG*, a forma dos conjuntos é importante mesmo quando há simetria; a área sob a curva é afetada diretamente pelo consequente de cada regra e indiretamente por *DOF*.

Influência dos Operadores de Implicação

Diversos operadores têm sido propostos na literatura para a implicação, na maioria dos casos levando em consideração aspectos de *lógica*. Do ponto de vista prático (ou de *engenharia*), as funções mais adequadas são ***min*** e ***produto***[1].

Conclusões

O comportamento e o desempenho de sistemas de inferência fuzzy em geral, e de controladores fuzzy em particular, dependem de vários aspectos relacionados a sua estrutura e implementação, tais como: número de conjuntos fuzzy associados a cada variável, formas das funções de pertinência, operadores utilizados para a implicação e para representar os conectivos *e* e *ou*, método de defuzzificação e, se for o caso, técnicas de quantização e fatores de escala. Métodos automáticos de aprendizado têm facilitado o projeto de controladores fuzzy; sistemas híbridos (neuro-fuzzy e fuzzy genéticos) são particularmente apropriados para isto.

[1] Mendel, J.M., (1995). "Fuzzy logic systems for engineering: a tutorial". *Proc. IEEE*, Vol. 83(3): 345-377.

EXTRAÇÃO DE REGRAS

Previsão de Séries Temporais

⇨ Seja x(k), k = 1,2,.. uma série temporal

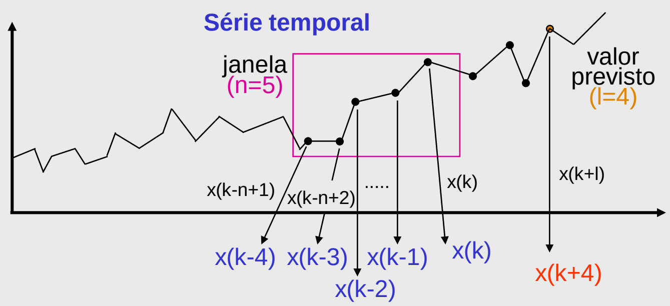
Objetivo: dada uma janela de <u>***n***</u> medidas de x(k)

x(k-n+1), x(k-n+2), ..., x(k)

⇒ determinar **x(k+l)**
o valor de x <u>***l***</u> pontos à frente

(<u>***n***</u> e <u>***l***</u>: inteiros positivos)

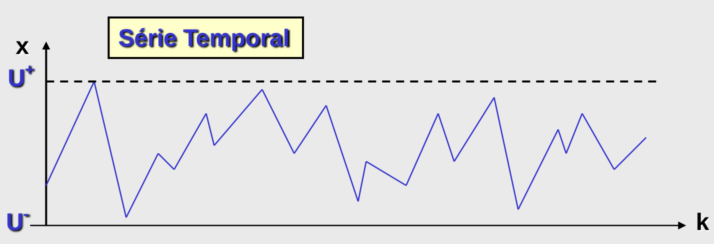
EXTRAÇÃO DE REGRAS



EXTRAÇÃO DE REGRAS

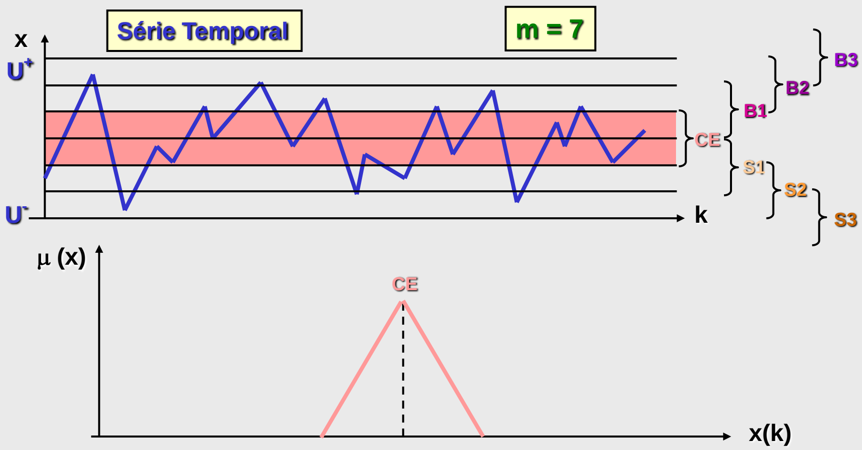
- especificam-se previamente os conjuntos fuzzy e depois associam-se os dados a esses conjuntos
- como o valor a ser previsto depende de ***n*** valores passados de x, cada regra possui ***n*** antecedentes

EXTRAÇÃO DE REGRAS

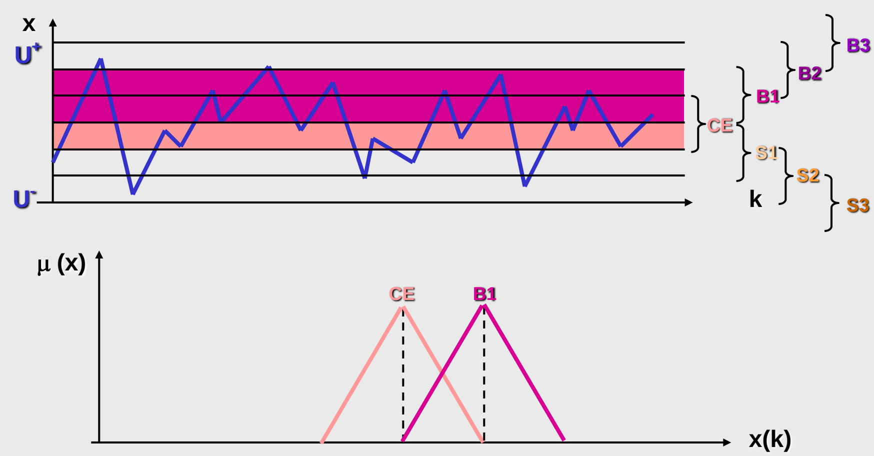


Divide-se a faixa de valores possíveis da série $[U^-,U^+]$ em ***m*** (ímpar) conjuntos fuzzy

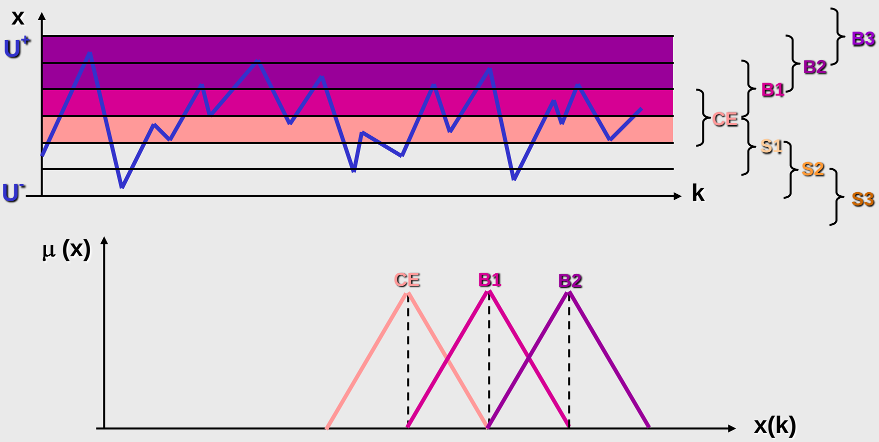
EXTRAÇÃO DE REGRAS



EXTRAÇÃO DE REGRAS

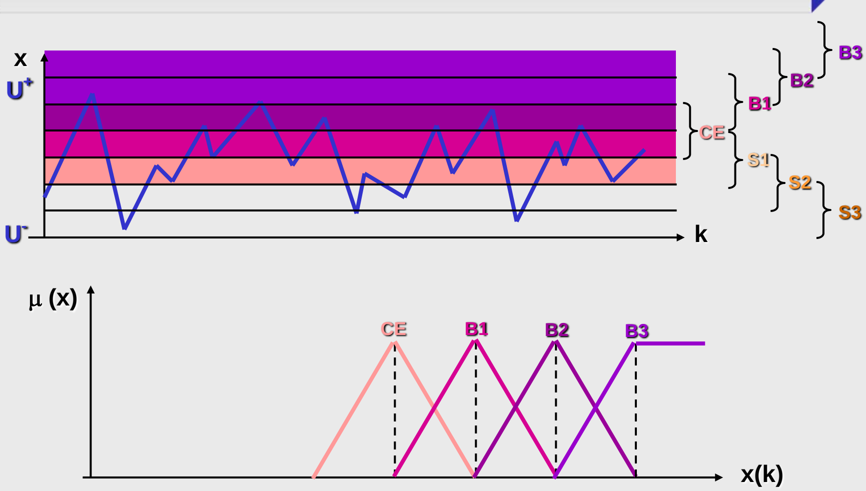


EXTRAÇÃO DE REGRAS



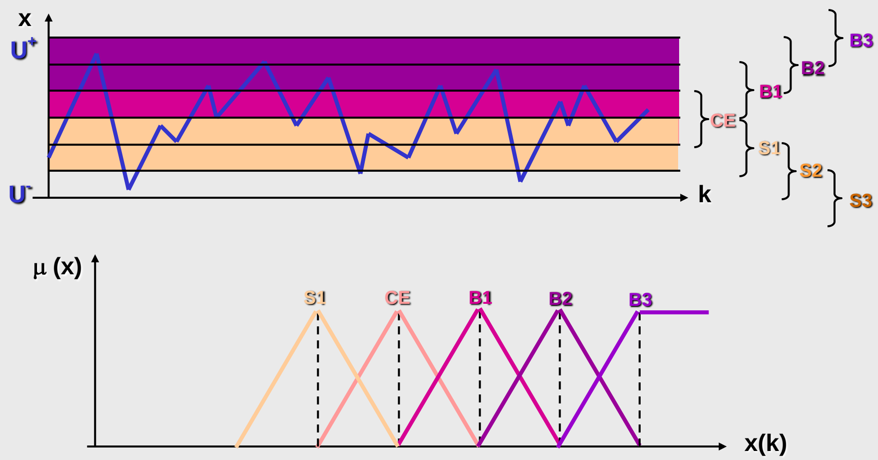
ICA

EXTRAÇÃO DE REGRAS

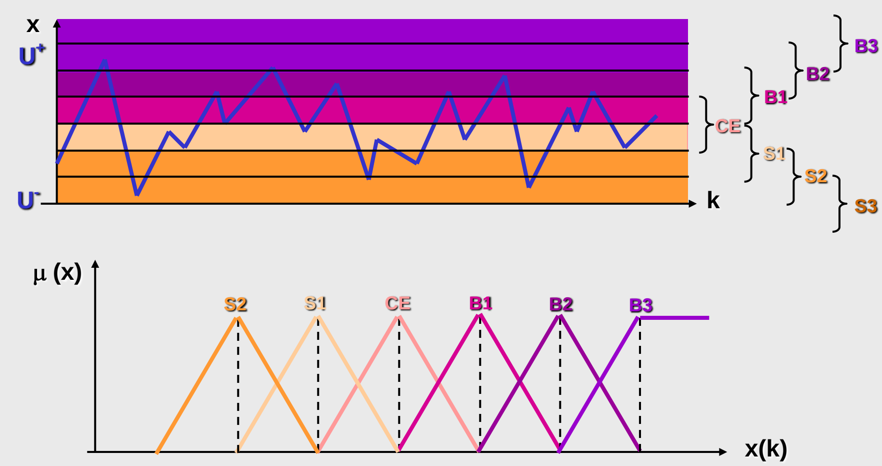


ICA

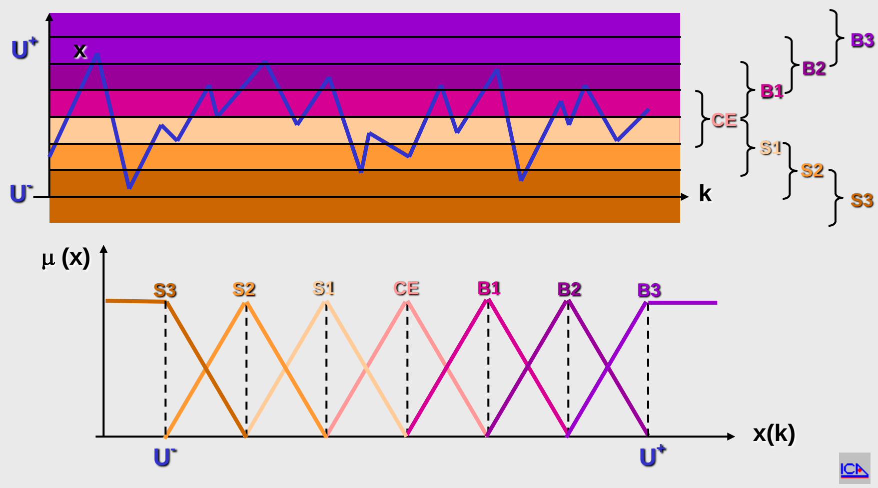
EXTRAÇÃO DE REGRAS



EXTRAÇÃO DE REGRAS



EXTRAÇÃO DE REGRAS



EXTRAÇÃO DE REGRAS

Geração das regras ⇨

✓determina-se o tamanho da janela *n*

✓determina-se o horizonte de previsão

✓executam-se os 3 passos a seguir, para cada regra j:

- determinam-se os *graus de pertinência* dos elementos de x^j
- atribui-se, a cada variável, o conjunto com o *maior grau*
- obtém-se uma regra para cada par entrada-saída

EXTRAÇÃO DE REGRAS

Tamanho da janela *n*

Depende da aplicação

⇓

Analisam-se *quantos* e *quais* valores passados têm mais influência no valor a ser previsto

⇓

Exemplo: para uma previsão de carga de 10 em 10 minutos, usa-se uma janela de 6, apresentando a última hora completa.

ICA

EXTRAÇÃO DE REGRAS

Horizonte de previsão *l*

Depende da aplicação

⇓

Define-se *l* em função de *quanto* valores *à frente* se deseja fazer a previsão

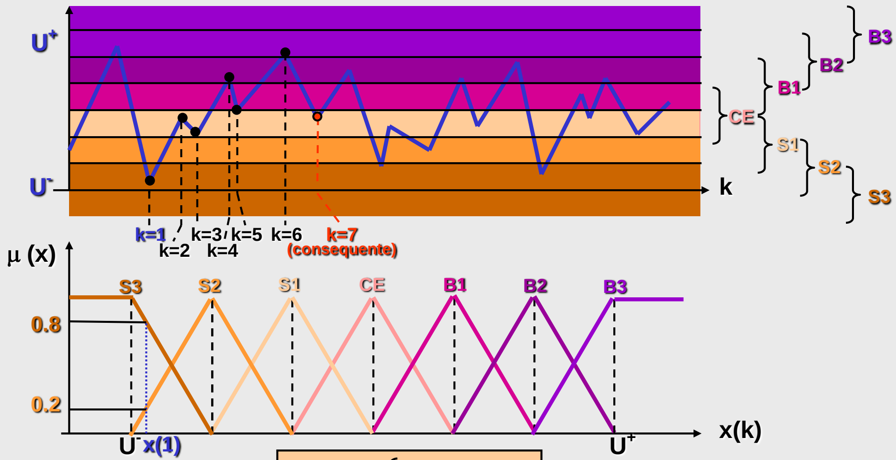
⇓

Exemplo: para uma previsão de carga de 10 em 10 minutos, deseja-se efetuar a previsão para os próximos 10 minutos ⇒ $l = 1$

ICA

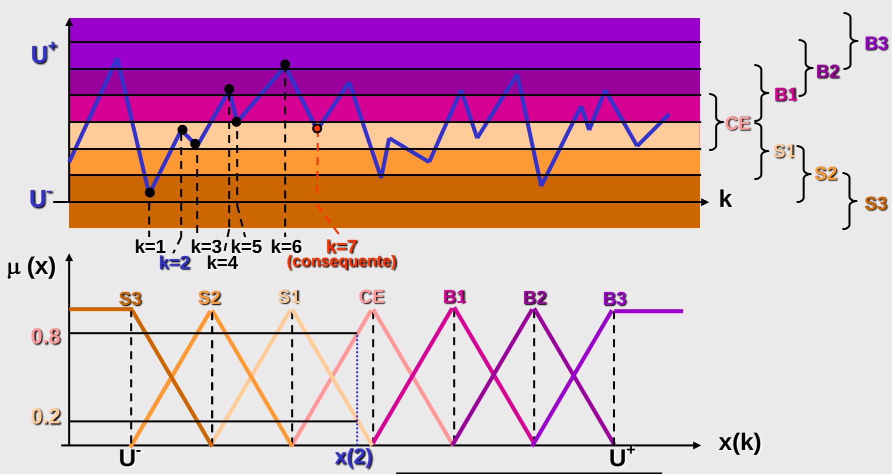
EXTRAÇÃO DE REGRAS

Graus de pertinência dos elementos de x^j



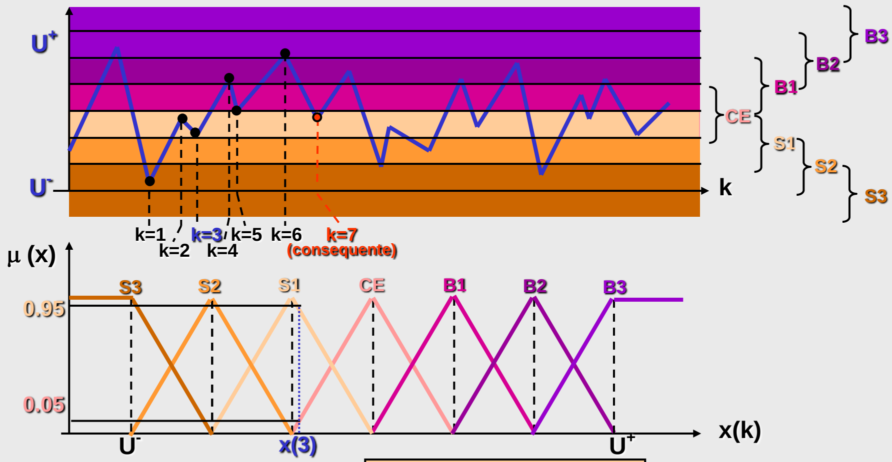
$$x^j(1) = \begin{cases} S3 = 0.8 \\ S2 = 0.2 \end{cases}$$

EXTRAÇÃO DE REGRAS



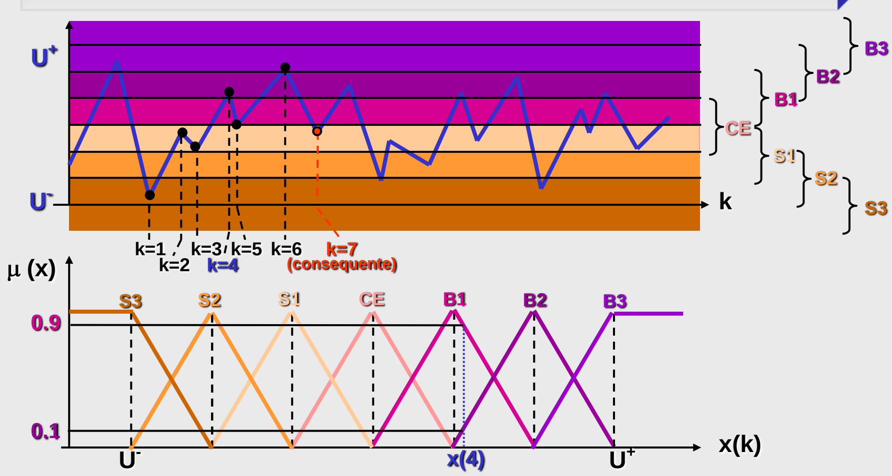
$$x^j(2) = \begin{cases} S1 = 0.2 \\ CE = 0.8 \end{cases}$$

EXTRAÇÃO DE REGRAS



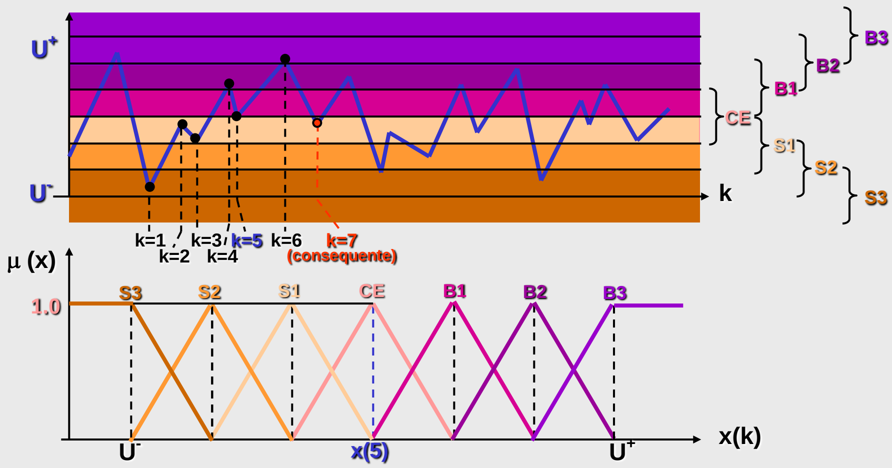
$$x^j(3) = \begin{cases} S1 = 0.95 \\ CE = 0.05 \end{cases}$$

EXTRAÇÃO DE REGRAS



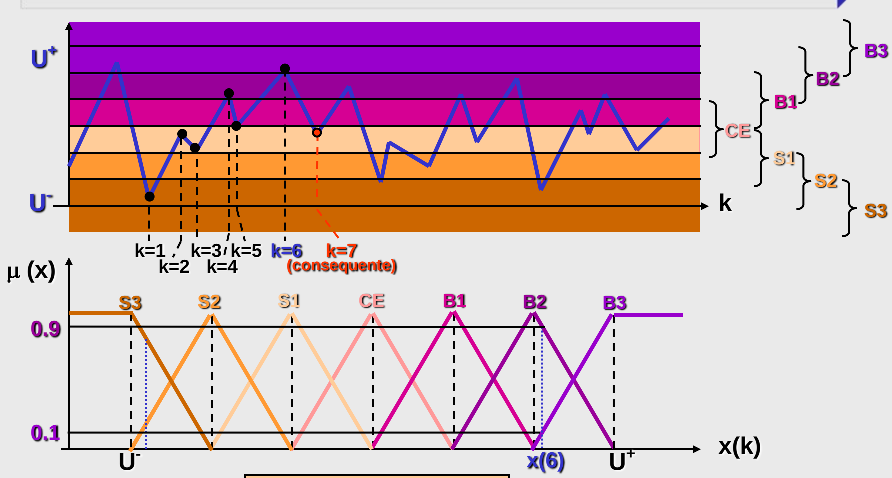
$$x^j(4) = \begin{cases} B1 = 0.9 \\ B2 = 0.1 \end{cases}$$

EXTRAÇÃO DE REGRAS



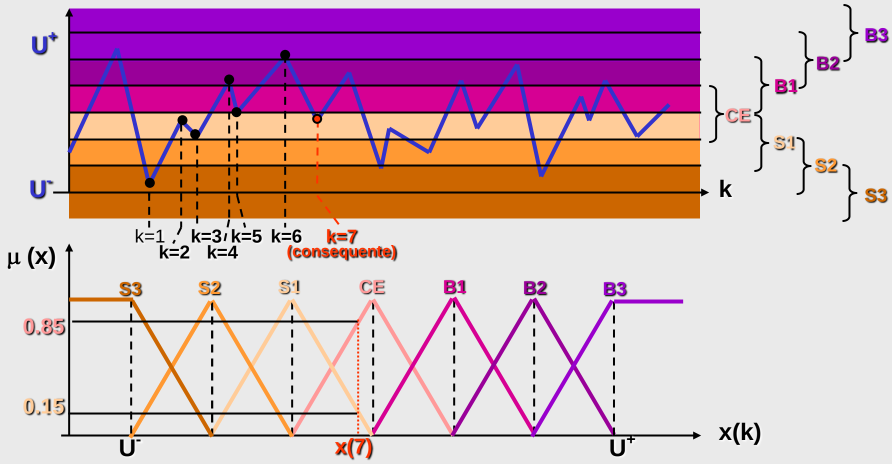
$x^j(5) = CE = 1.0$

EXTRAÇÃO DE REGRAS



$$x^j(6) = \begin{cases} B2 = 0.9 \\ B3 = 0.1 \end{cases}$$

EXTRAÇÃO DE REGRAS



$x^j(7) = \begin{cases} S1 = 0.15 \\ CE = 0.85 \end{cases}$

EXTRAÇÃO DE REGRAS

$x^j(1) = \begin{cases} S3 = 0.8 \\ S2 = 0.2 \end{cases}$

$x^j(2) = \begin{cases} S1 = 0.2 \\ CE = 0.8 \end{cases}$

$x^j(3) = \begin{cases} S1 = 0.95 \\ CE = 0.05 \end{cases}$

$x^j(4) = \begin{cases} B1 = 0.9 \\ B2 = 0.1 \end{cases}$

$x^j(5) = CE = 1.0$

ANTECEDENTE

$x^j(6) = \begin{cases} B2 = 0.9 \\ B3 = 0.1 \end{cases}$

CONSEQUENTE

$x^j(7) = \begin{cases} S1 = 0.15 \\ CE = 0.85 \end{cases}$

EXTRAÇÃO DE REGRAS

Atribuição, a cada variável, do conjunto com *maior grau de pertinência*

$x^j(1) = \begin{cases} S3 = 0.8 \\ S2 = 0.2 \end{cases}$ $x^j(2) = \begin{cases} S1 = 0.2 \\ CE = 0.8 \end{cases}$ $x^j(3) = \begin{cases} S1 = 0.95 \\ CE = 0.05 \end{cases}$

$x^j(4) = \begin{cases} B1 = 0.9 \\ B2 = 0.1 \end{cases}$ $x^j(5) = CE = 1.0$ $x^j(6) = \begin{cases} B2 = 0.9 \\ B3 = 0.1 \end{cases}$

ANTECEDENTE

CONSEQUENTE $x^j(7) = \begin{cases} S1 = 0.15 \\ CE = 0.85 \end{cases}$

ICA

EXTRAÇÃO DE REGRAS

Obtenção de uma regra para cada par entrada-saída

$x^j(1) = S3 = 0.8$ $x^j(2) = CE = 0.8$ $x^j(3) = S1 = 0.95$

$x^j(4) = B1 = 0.9$ $x^j(5) = CE = 1.0$ $x^j(6) = B2 = 0.9$

$x^j(7) = CE = 0.85$

Regra j

Se $x^j(1)$ é $S3$ E $x^j(2)$ é CE E $x^j(3)$ é $S1$ E $x^j(4)$ é $B1$ E $x^j(5)$ é CE E $x^j(6)$ é $B2$
Então $x^j(7)$ é CE

ICA

EXTRAÇÃO DE REGRAS

Devido a grande quantidade de dados, é possível que se obtenham ***regras conflitantes***, isto é, regras com os mesmos antecedentes mas com consequentes diferentes

⬇

Associa-se um grau $D(R^j)$ a cada regra, multiplicando-se o grau de pertinência de cada termo do antecedente e consequente; usa-se aquela regra que possui o ***maior grau*** entre as de um conjunto conflitante

ICA

EXTRAÇÃO DE REGRAS

Exemplo: ***REGRA R^j***

Se $x^j(1)$ é S3 E $x^j(2)$ é CE E $x^j(3)$ é S1 E $x^j(4)$ é B1 E $x^j(5)$ é CE E $x^j(6)$ é B2
Então $x^j(7)$ é CE

⬇

$D(R^j) = \mu[x^j(1)] \cdot \mu[x^j(2)] \cdot \mu[x^j(3)] \cdot \mu[x^j(4)] \cdot \mu[x^j(5)] \cdot \mu[x^j(6)] \cdot \mu[x^j(7)]$

⬇

$D(R^j) = 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.95 \cdot 0.9 \cdot 1.0 \cdot 0.9 \cdot 0.85 = 0.42$

ICA

EXTRAÇÃO DE REGRAS

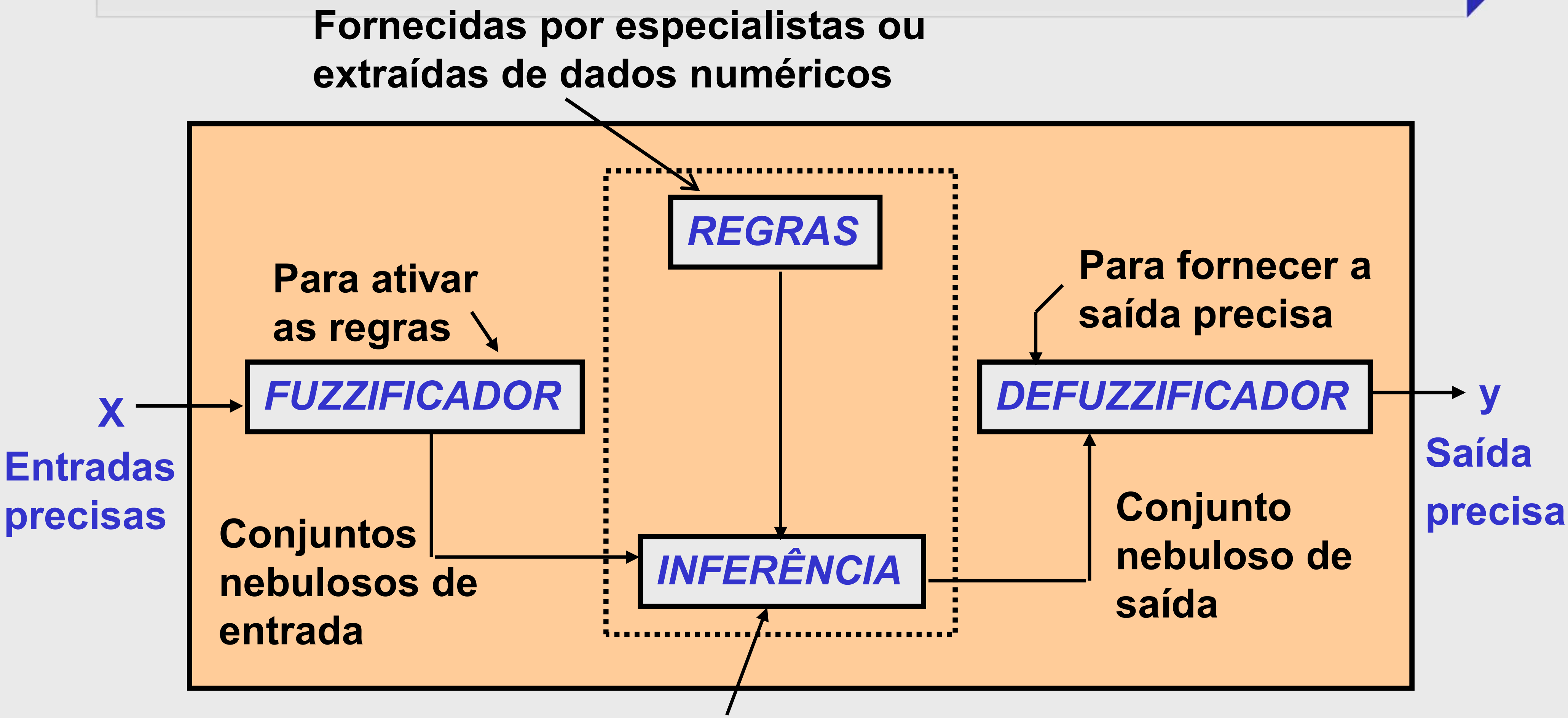
Observações:

- o desempenho tem relação direta com o número de conjuntos fuzzy pré-estabelecidos
- a metodologia é aplicável não somente a previsão de séries, mas também a problemas de Controle, por exemplo
- a aplicação em Controle requer dados referentes à saída do controlador, a qual nem sempre é conhecida (problema enfrentado também em redes neurais)

CONJUNTOS FUZZY

- Conjuntos Crisp x Fuzzy
- Definição
- Representação
- Propriedades
- Formatos
- Operações
- ***Hedges (modificadores)***

SISTEMA FUZZY



- Mapeia fuzzy sets em fuzzy sets
- Determina como as regras são ativadas e combinadas

REGRAS FUZZY

- ***Exemplo:***

antecedente

SE u_1 É *muito quente* E u_2 É *baixo*

ENTÃO gire v *um pouco para a direita*

consequente

- ***Conceitos Importantes:***
  - Variáveis Lingüísticas (quente x 36°)
  - Modificadores (muito, um pouco)
  - Conexões Lógicas (E/OU)
  - Implicações (SE A ENTÃO B)

MODIFICADORES
- Operadores Semânticos -

- São <u>operadores semânticos</u>
- Atuam na modelagem de um sistema fuzzy da mesma forma que <u>advérbios</u> e <u>adjetivos</u> atuam em uma sentença:

  ↳ modificam a natureza de um conjunto fuzzy

MODIFICADORES
- Operadores Semânticos -

- ***Modificadores:***

➩ *operadores que atuam sobre a função de pertinência de um conjunto fuzzy com o objetivo de* ***modificá-la!***

MODIFICADORES
- Operadores Semânticos -

- Existem diversas classes de Hedges:

  - *intensificadores:* *muito, extremamente*
  - *diluidores:* *pouco*
  - *complemento:* *não*
  - *aproximadores:* *em torno, aproximadamente*
  - ....

ICA

Aplicação de Modificadores

- Da mesma forma que com os advérbios e adjetivos, a *ordem* dos hedges *é importante*.

NÃO MUITO ALTO

≠

MUITO NÃO ALTO

Aplicação de Modificadores

- **De forma análoga à construção de sentenças, *múltiplos hedges* podem ser aplicados a um <u>único</u> conjunto fuzzy**
  - $\underbrace{\text{Positivamente não muito}}_{\text{Múltiplos modificadores}}$ ALTO

Conjunto fuzzy básico

Aplicação de Modificadores

- O processamento dos hedges é também feito de forma análoga à linguagem:
  - positivamente não muito ALTO

    ↓

    (positivamente (não (muito ALTO)))

Aplicação de Modificadores

- Hedges podem ser usados tanto no ***antecedente*** (predicado) quanto no ***consequente*** (ação):

  - SE custo é muito ALTO
    ENTÃO a margem de lucro é BAIXA

  - SE inflação (t-1) é muito grande
    ENTÃO vendas são positivamente pequenas

TIPOS DE MODIFICADORES

- ***Intensificadores (Concentradores):***
  - ***muito, extremamente***
- ***Diluidores:***
  - ***um pouco, levemente, mais ou menos***
- ***Aproximadores:***
  - ***em torno, aproximadamente, perto de***
- ***Restrição de uma região Fuzzy:***
  - ***abaixo de, acima de***
- ***Contraste:***
  - ***positivamente, de uma forma geral***

TIPOS DE MODIFICADORES

- ***Intensificadores (Concentradores):***
  - ***muito, extremamente***
- ***Diluidores:***
  - ***um pouco, levemente, mais ou menos***
- ***Aproximadores:***
  - ***em torno, aproximadamente, perto de***
- ***Restrição de uma região Fuzzy:***
  - ***abaixo de, acima de***
- ***Contraste:***
  - ***positivamente, de uma forma geral***

INTENSIFICADORES

- ***Reduzem*** **o grau de pertinência dos elementos que pertencem ao conjunto fuzzy**

MUITO, EXTREMAMENTE

$\downarrow$

$$\boxed{\mu_A(x) \geq \mu_{\text{MUITO A}}(x)}$$

INTENSIFICADORES

- ***Concentradores de ZADEH:***

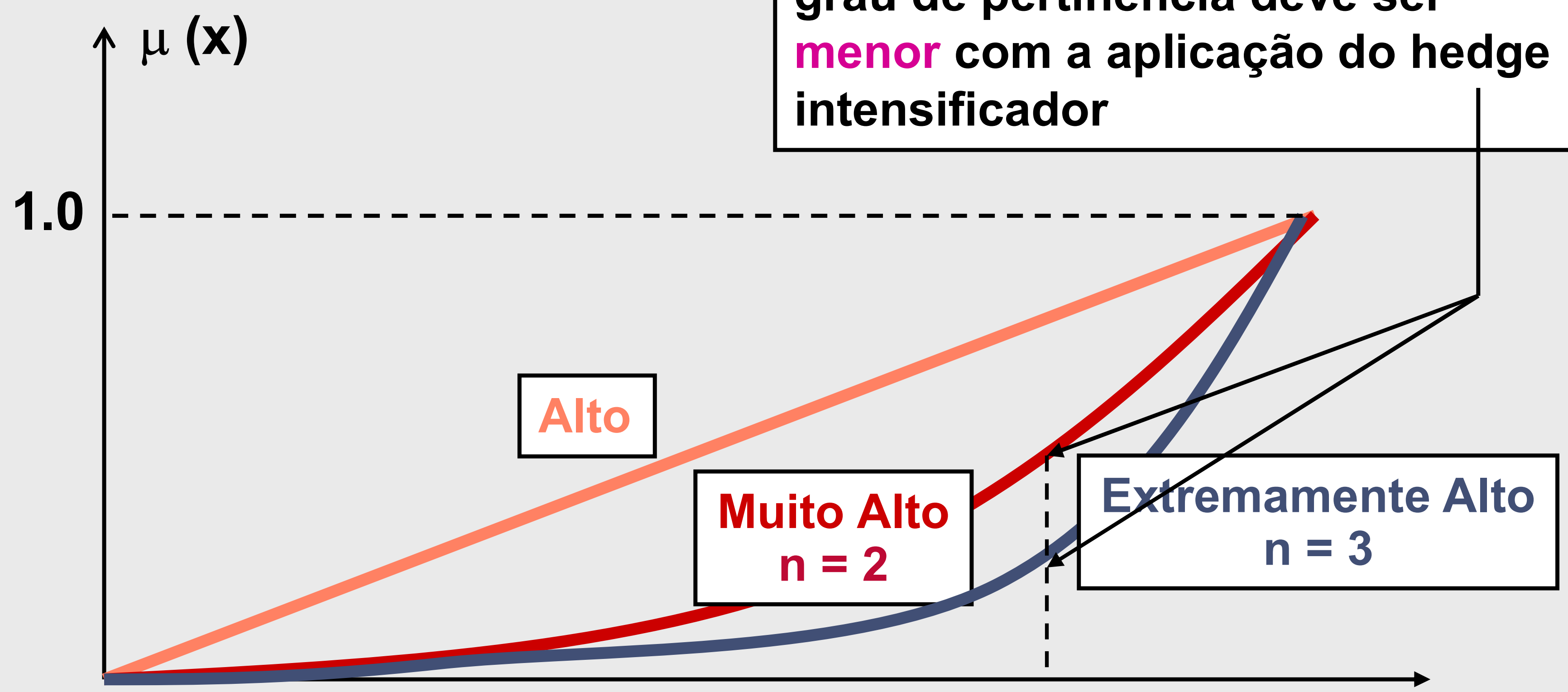
$$\mu_{\text{MUITO A}}(x) = [\mu_A(x)]^2$$

$$\mu_{\text{CONC A}}(x) = [\mu_A(x)]^n \quad n \in [1,4]$$

INTENSIFICADORES

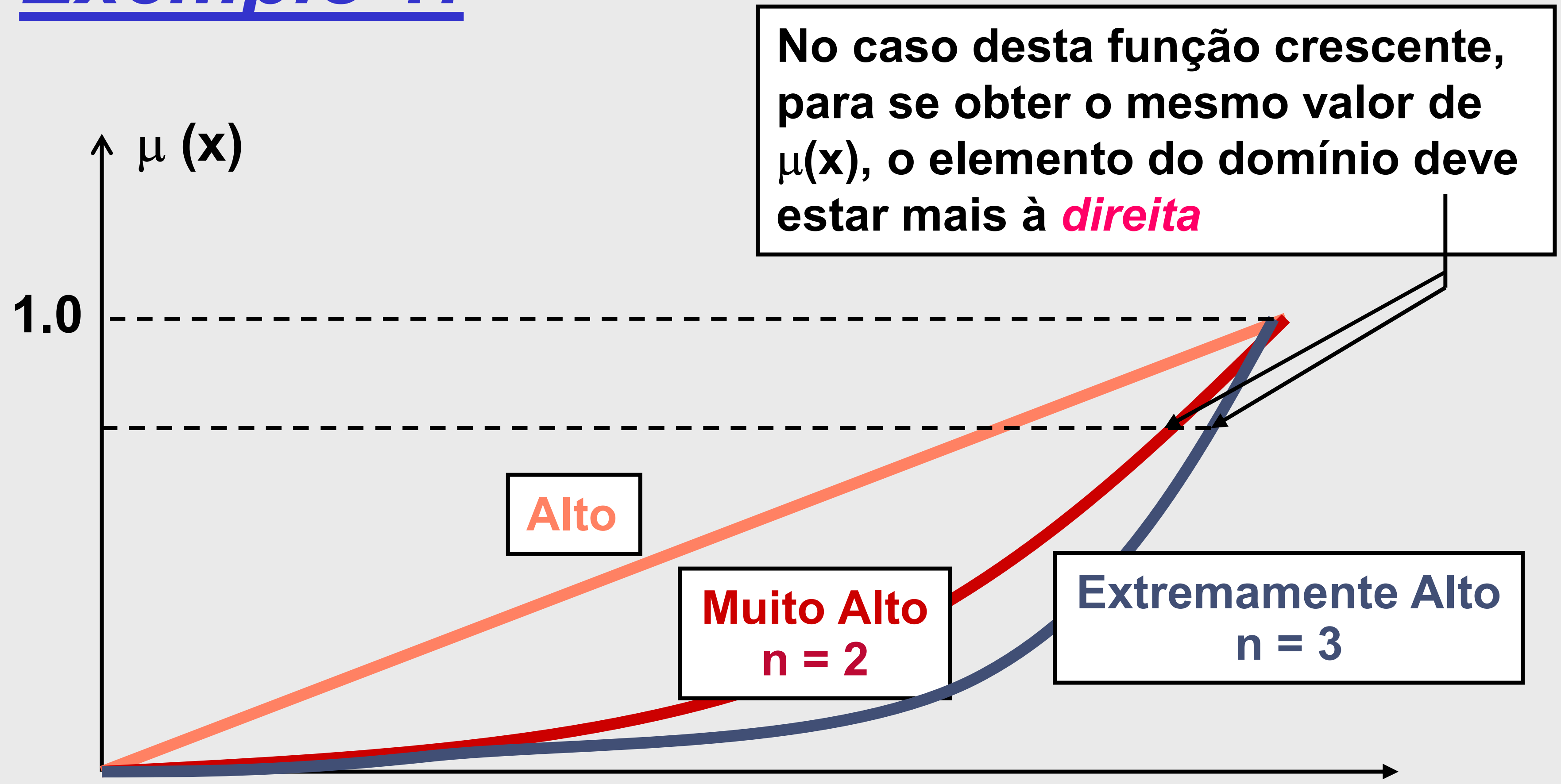
- ***Exemplo 1:***

Para um mesmo valor de x, o grau de pertinência deve ser menor com a aplicação do hedge intensificador



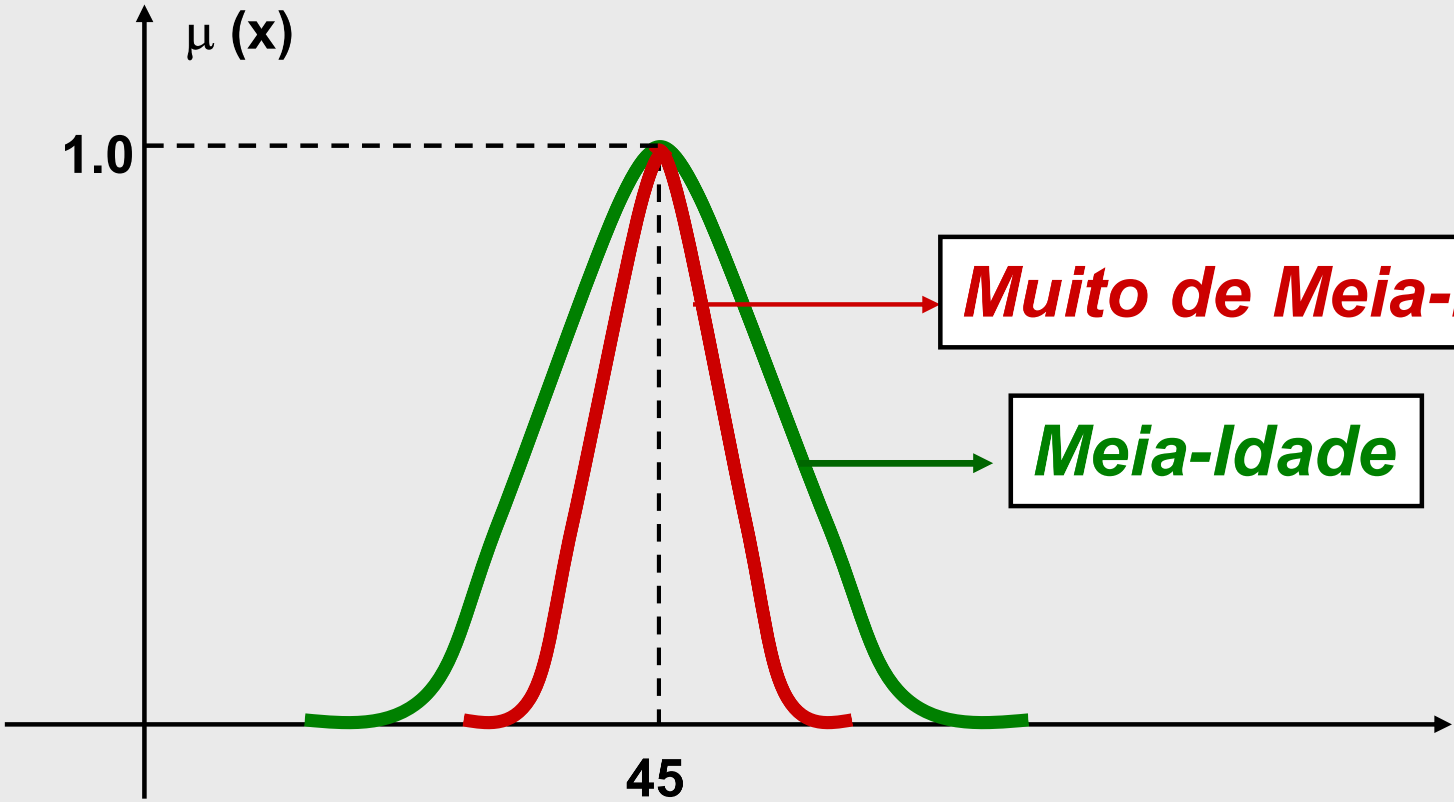
INTENSIFICADORES

- ***Exemplo 1:***



INTENSIFICADORES

- ***Exemplo 2:***



TIPOS DE MODIFICADORES

- Intensificadores (Concentradores):
  - *muito, extremamente*
- Diluidores:
  - *um pouco, levemente, mais ou menos*
- Aproximadores:
  - *em torno, aproximadamente, perto de*
- Restrição de uma região Fuzzy:
  - *abaixo de, acima de*
- Contraste:
  - *positivamente, de uma forma geral*

DILUIDORES

- ***Diluem*** **a função de pertinência para uma certa região fuzzy**

  - **UM POUCO, LEVEMENTE**

↓

contrariamente aos intensificadores, esses hedges devem ter valor de pertinência maior que a função básica

$$\boxed{\mu_A(x) \leq \mu_{\text{UM POUCO A}}(x)}$$

ICA

DILUIDORES

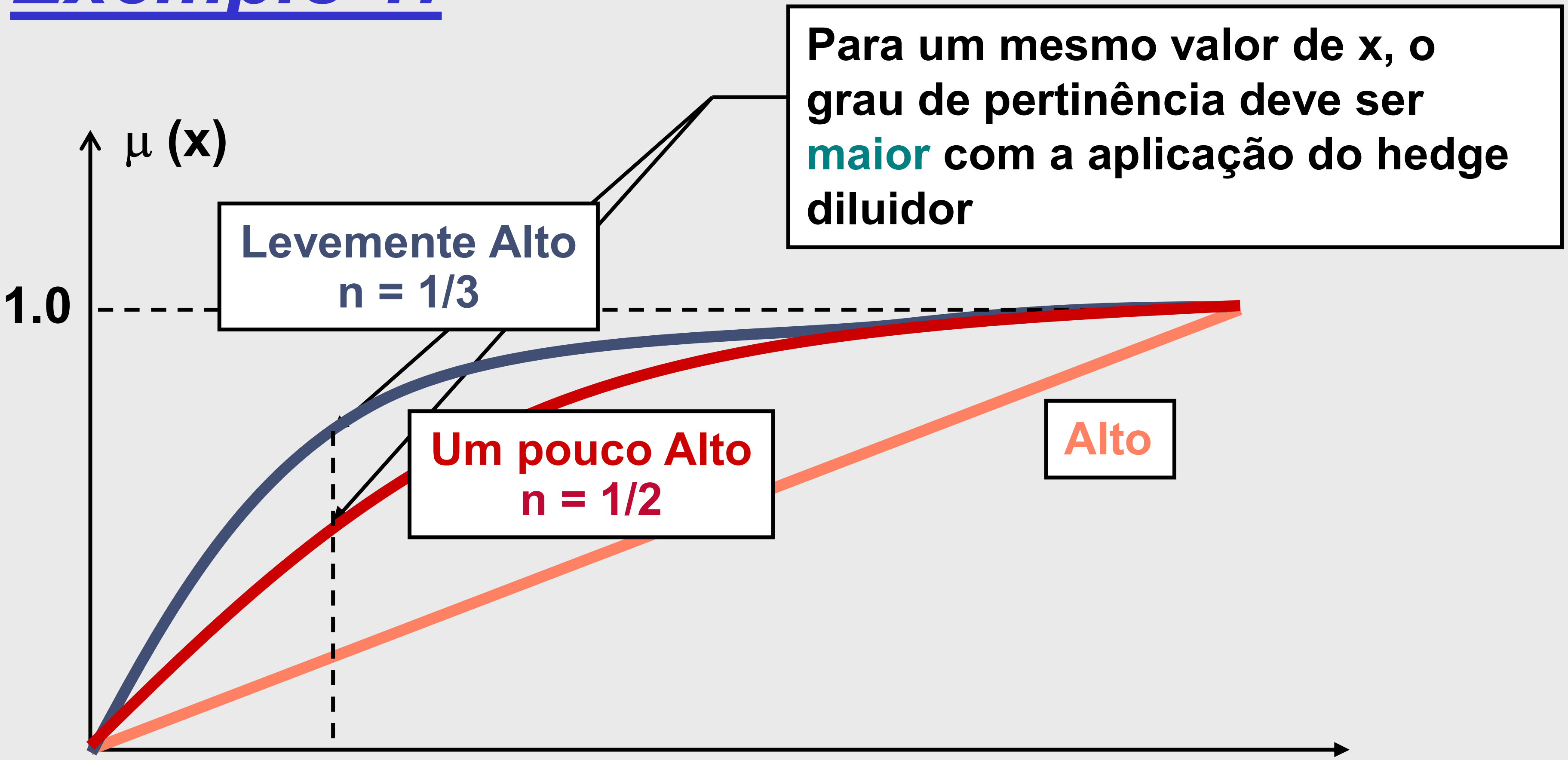
- ***Diluidores de ZADEH:***

$$\mu_{\text{UM POUCO A}}(x) = [\mu_A(x)]^{1/2}$$

$$\mu_{\text{DILUIDOR A}}(x) = [\mu_A(x)]^{1/n} \qquad n \in [1,8]$$

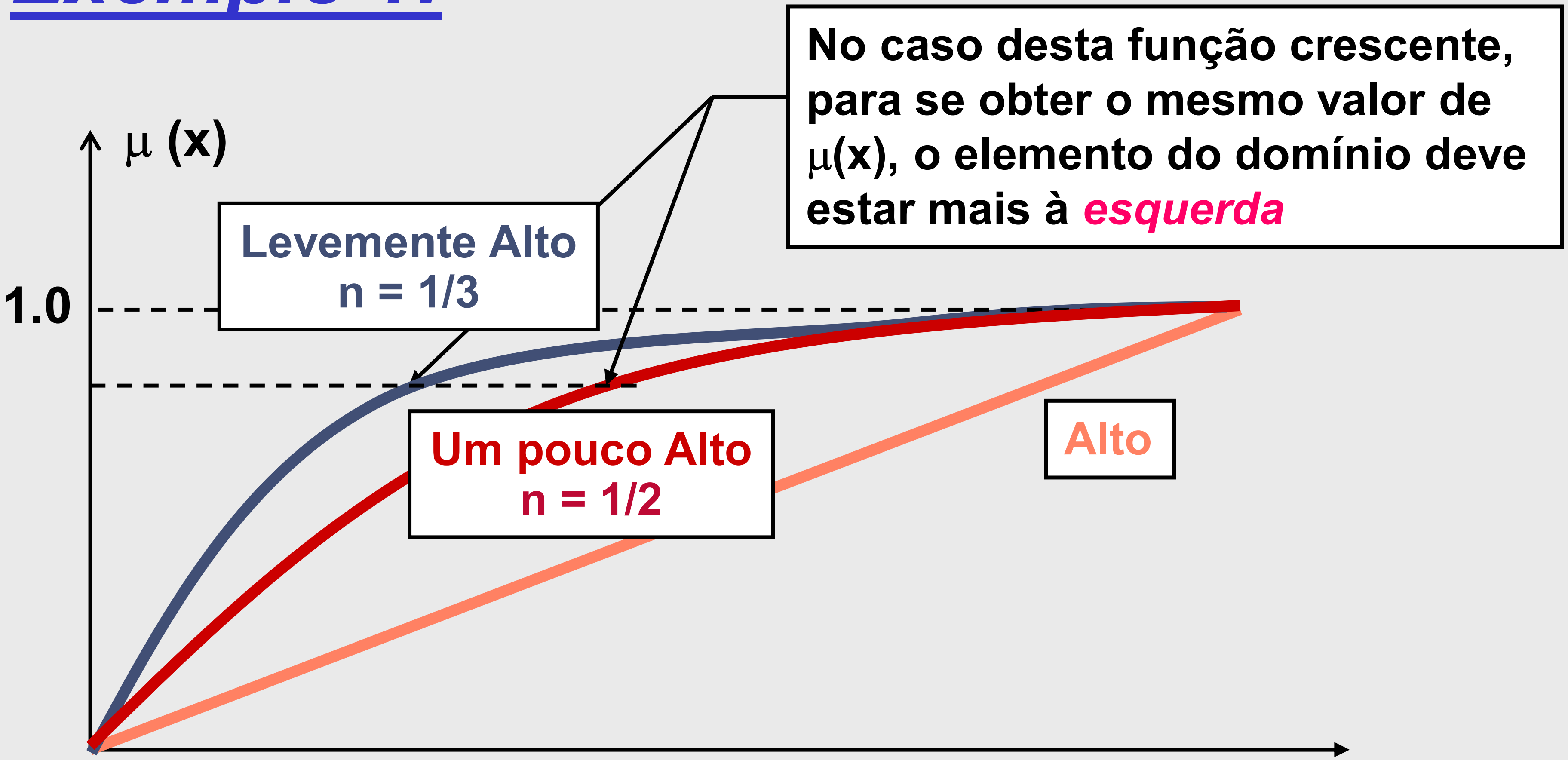
DILUIDORES

- ***Exemplo 1:***



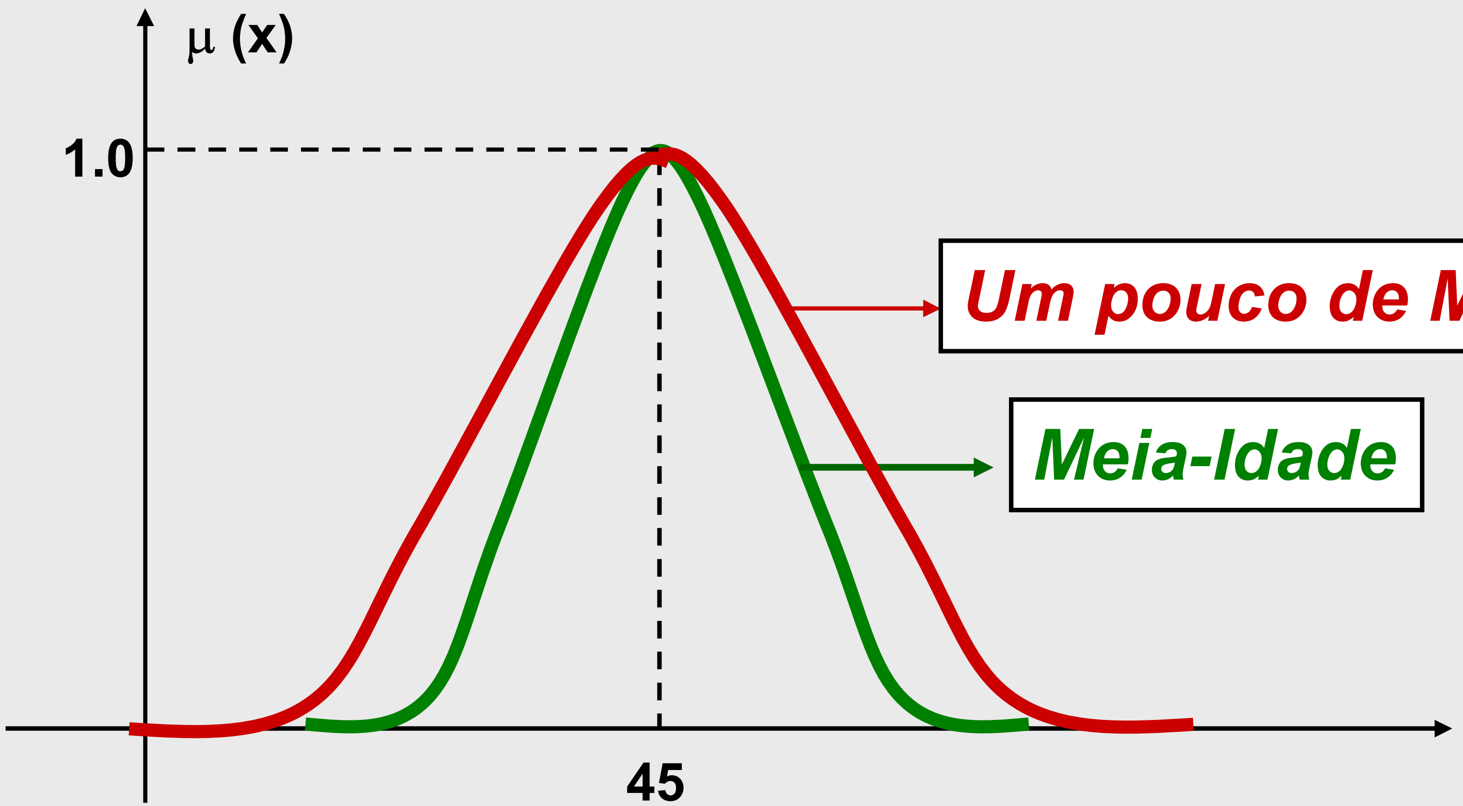
DILUIDORES

- ***Exemplo 1:***



DILUIDORES

- ***Exemplo 2:***



Intensificadores/Diluidores

- Possuem o mesmo *suporte* que o conjunto original;
- Mesmo valor no domínio para $\mu(x) = 0$ e $\mu(x) = 1$;
- ***MUITO*** e ***UM POUCO*** são os únicos ***hedges comutativos***.

Aplicação dos Modificadores

- ***Exemplo:***

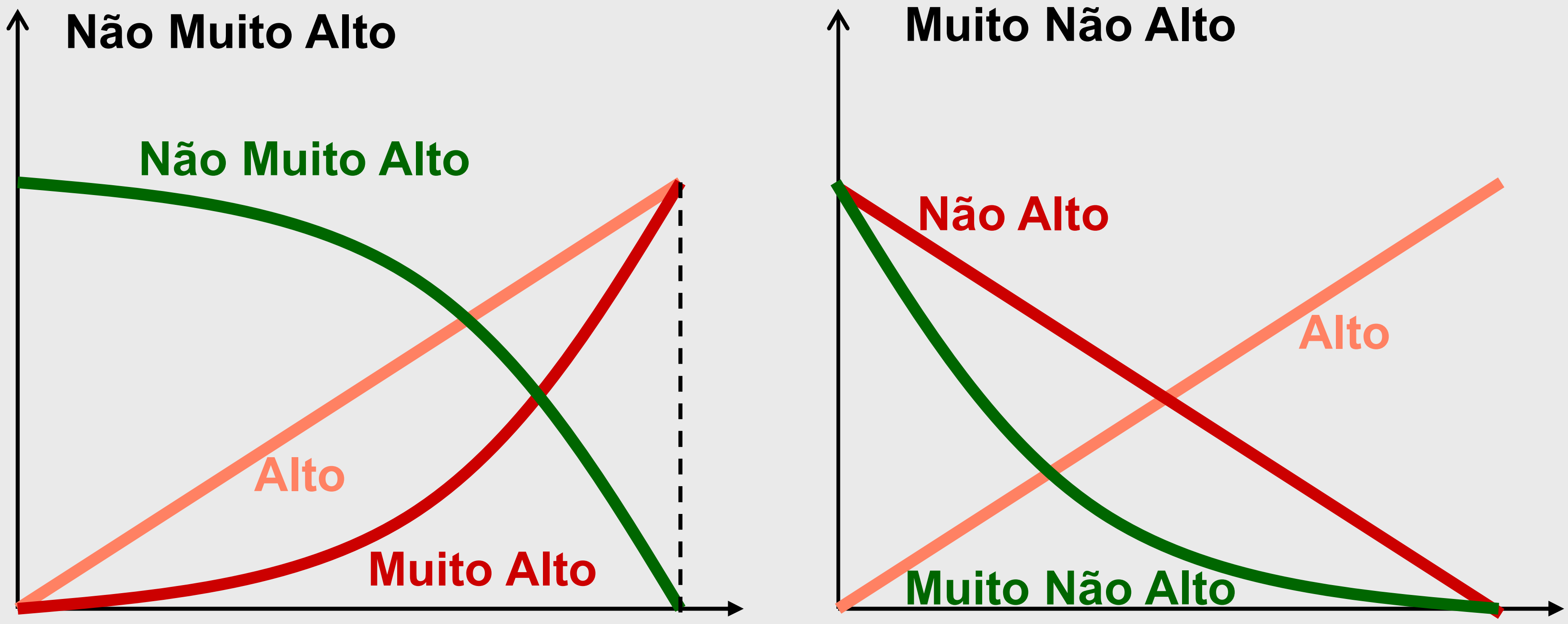
NÃO MUITO ALTO
≠
MUITO NÃO ALTO

Não Muito Alto

Muito Não Alto

Aplicação dos Modificadores

- ***Exemplo:***



TIPOS DE MODIFICADORES

- *Intensificadores (Concentradores):*
  - *muito, extremamente*
- *Diluidores:*
  - *um pouco, levemente, mais ou menos*
- *Aproximadores:*
  - *em torno, aproximadamente, perto de*
- *Restrição de uma região Fuzzy:*
  - *abaixo de, acima de*
- *Contraste:*
  - *positivamente, de uma forma geral*

APROXIMADORES

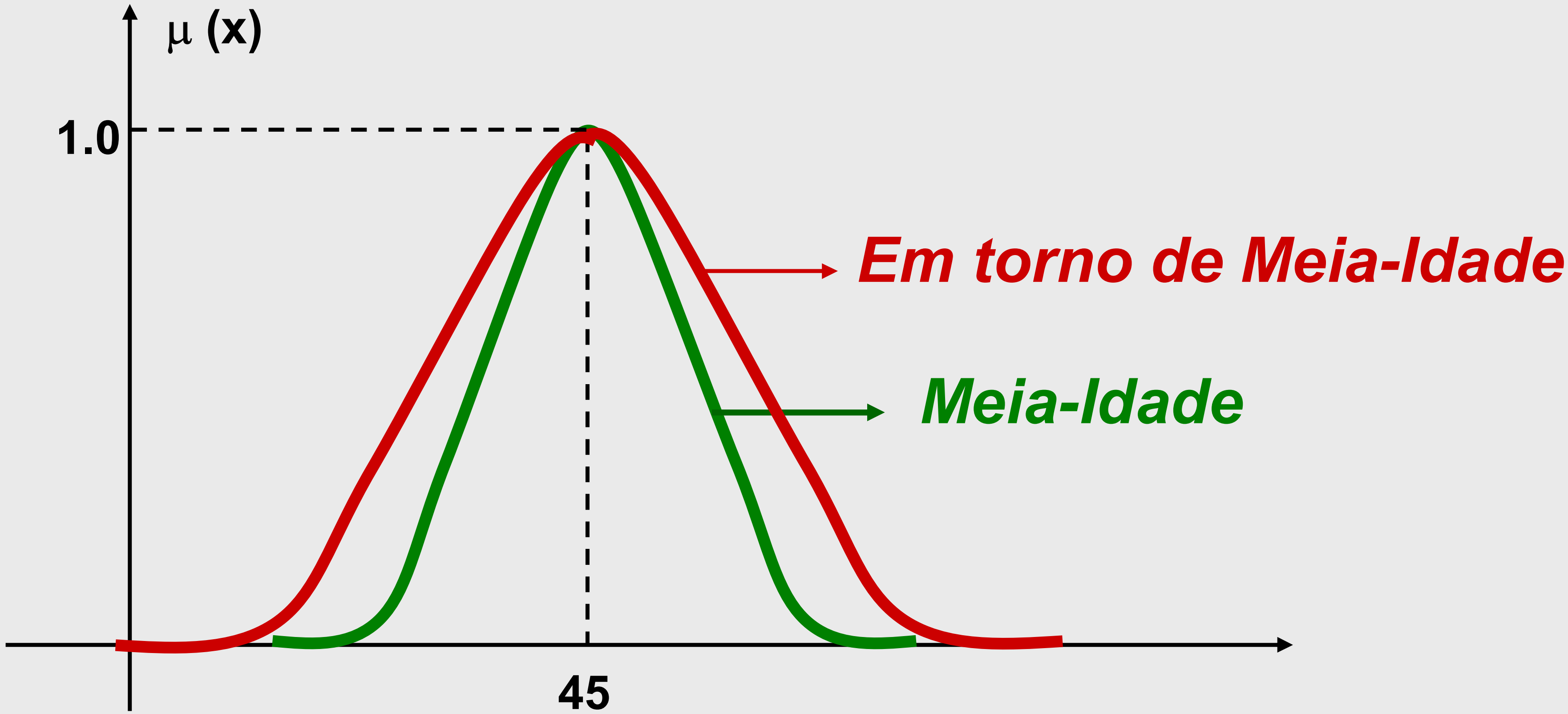
- ✓ Alargam ou estreitam uma região fuzzy (tipo “sino”);

- ✓ Transformam valores escalares em regiões fuzzy ➔ *Número Fuzzy*

- ✓ ***Ex:*** ***aproximadamente, em torno, perto de***

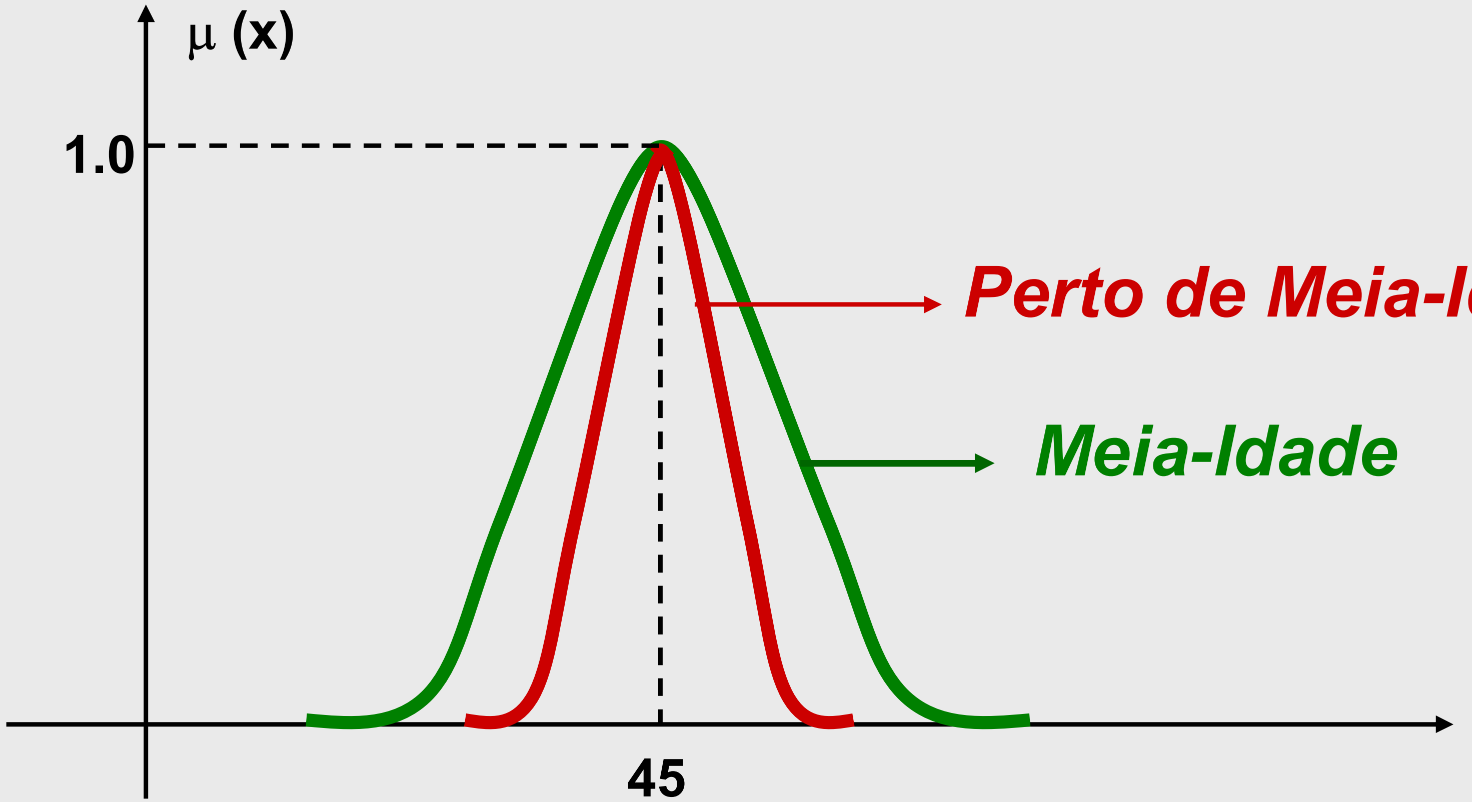
APROXIMADORES

- ***Alargando:***



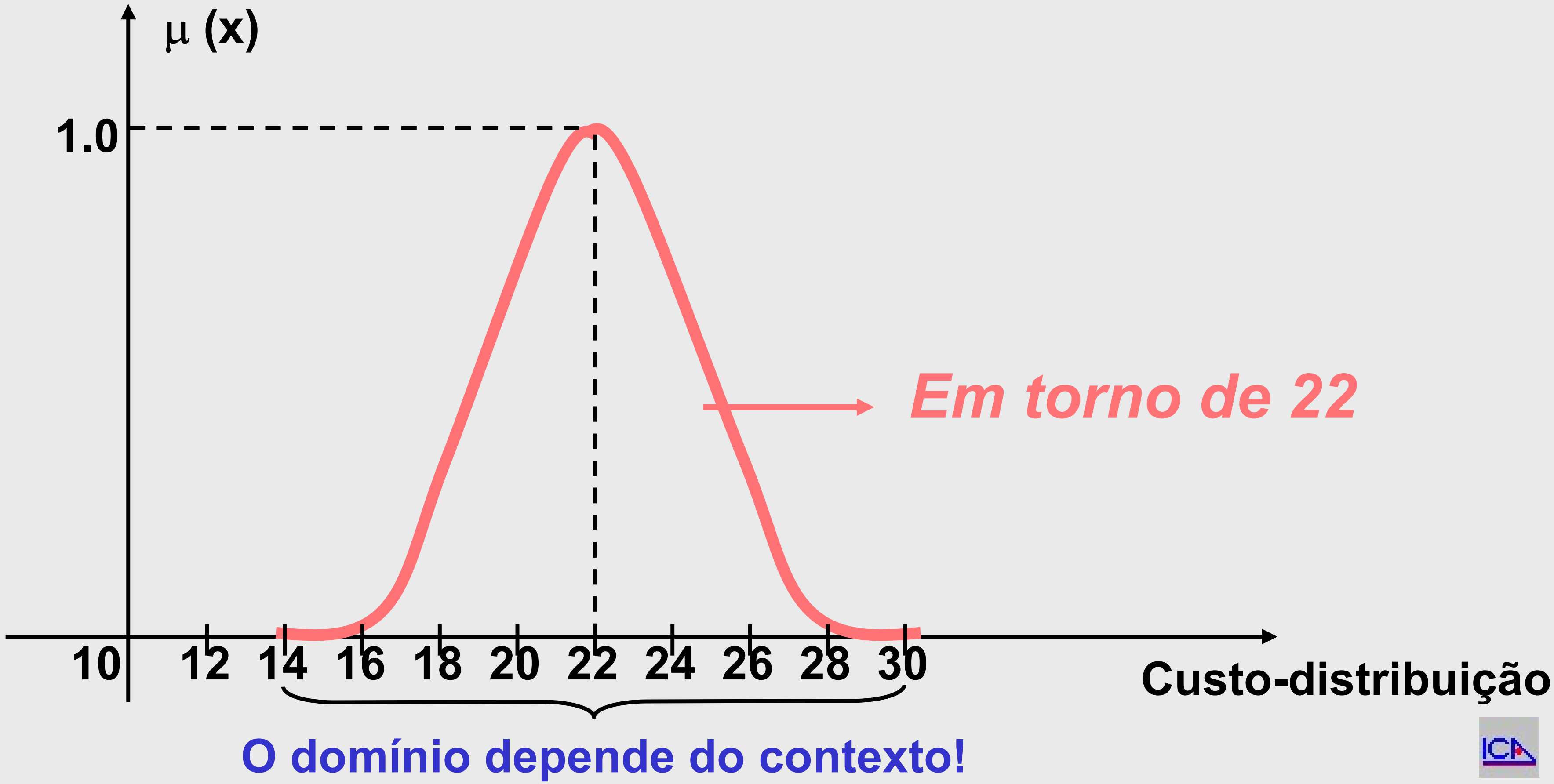
APROXIMADORES

- ***Estreitando:***



APROXIMADORES

- ***Transformando em Número Fuzzy:***



TIPOS DE MODIFICADORES

- ***Intensificadores (Concentradores):***
  - *muito, extremamente*
- ***Diluidores:***
  - *um pouco, levemente, mais ou menos*
- ***Aproximadores:***
  - *em torno, aproximadamente, perto de*
- ***Restrição de uma região Fuzzy:***
  - *acima de, abaixo de*
- ***Contraste:***
  - *positivamente, de uma forma geral*

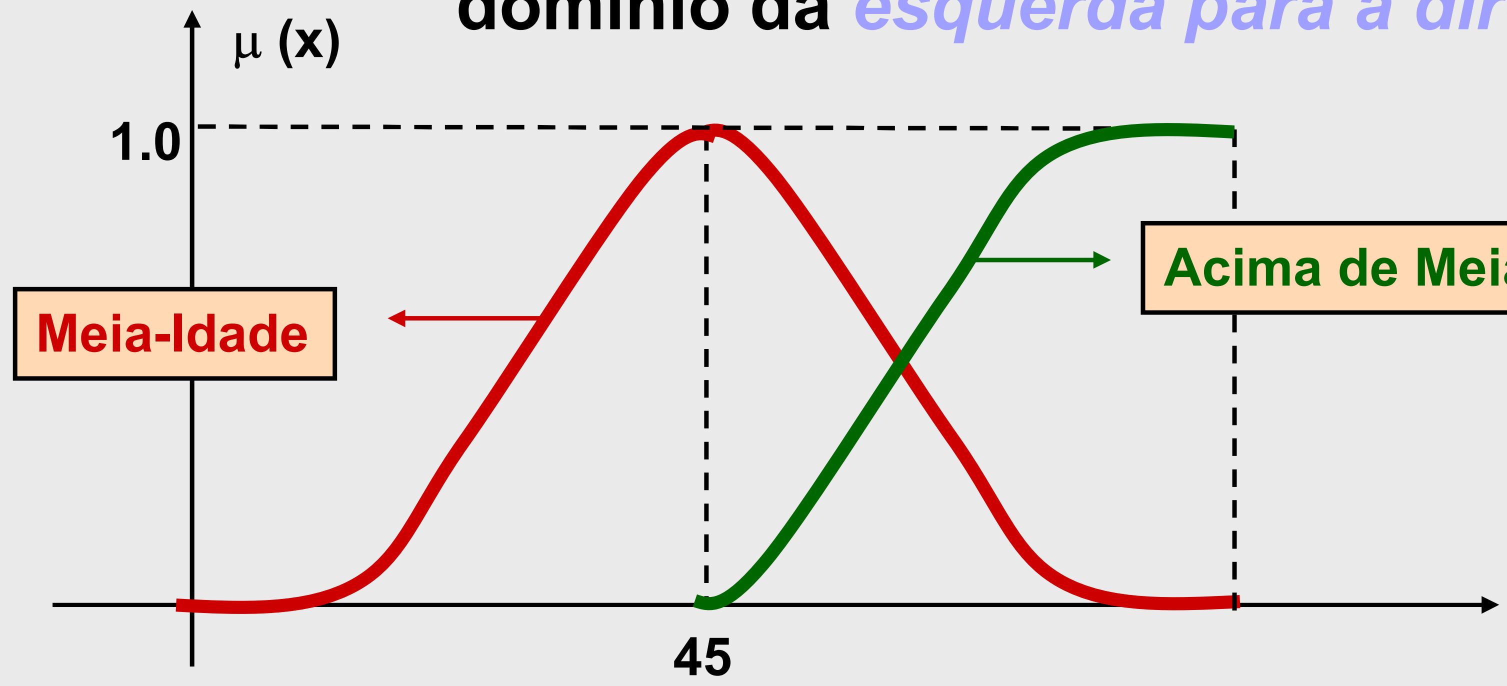
Restrição de uma Região Fuzzy

- *ACIMA*
- *ABAIXO*

Restringem o escopo da função de pertinência

Restrição de uma Região Fuzzy

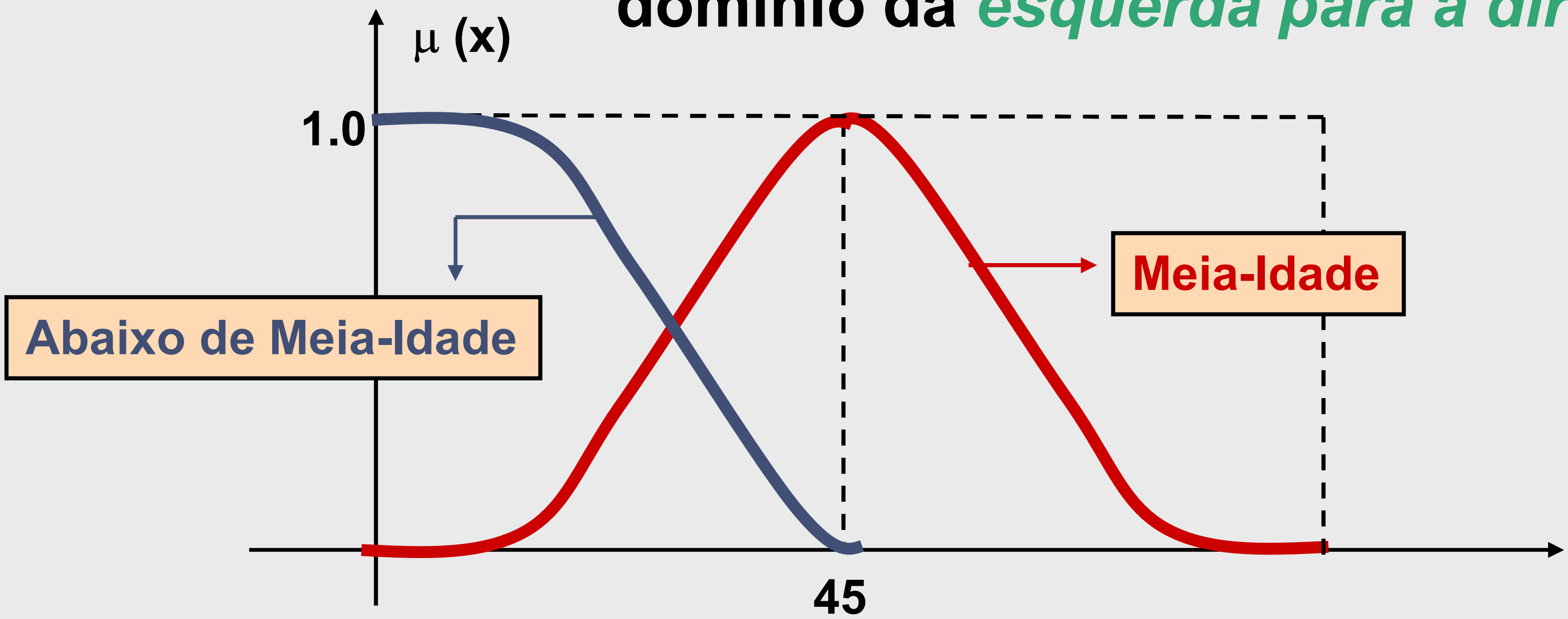
- ***ACIMA:*** Somente aplicável a funções que *diminuam* conforme se mova no domínio da *esquerda para a direita*



Exemplo: SE Idade é acima de Meia-Idade
ENTÃO risco-cardíaco é aumentado

Restrição de uma Região Fuzzy

- ***ABAIXO:*** **Somente aplicável a funções que *aumentem* conforme se mova no domínio da *esquerda para a direita***



Exemplo: SE Idade é abaixo de Meia-Idade
ENTÃO risco-cardíaco é reduzido

TIPOS DE MODIFICADORES

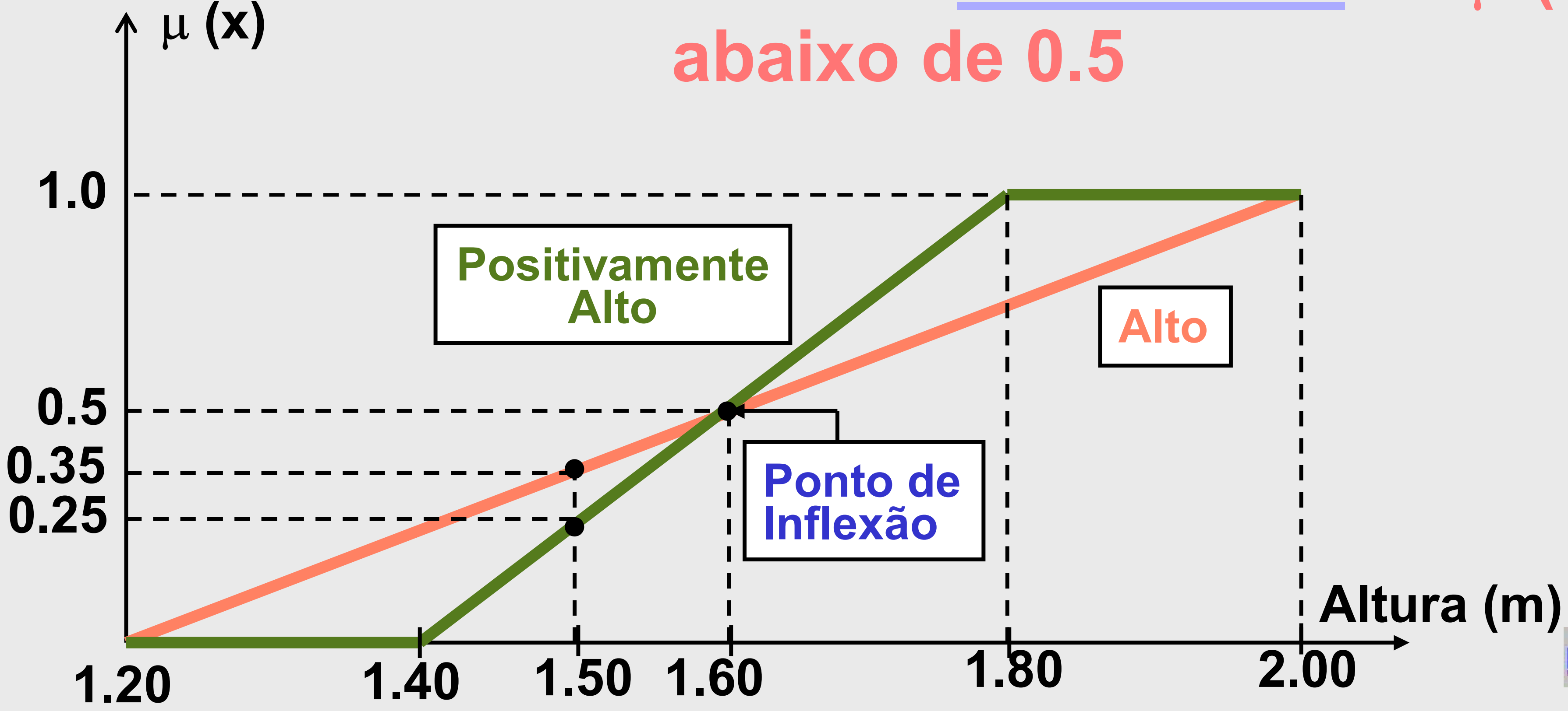
- *Intensificadores (Concentradores):*
  - *muito, extremamente*
- *Diluidores:*
  - *um pouco, levemente, mais ou menos*
- *Aproximadores:*
  - *em torno, aproximadamente, perto de*
- *Restrição de uma região Fuzzy:*
  - *abaixo de, acima de*
- *Contraste:*
  - *positivamente, de uma forma geral*

CONTRASTE

- *Muda a natureza da região fuzzy*
  - *Intensificador* → torna o conjunto menos fuzzy
    - Positivamente, Definitivamente
  - *Difusor* → torna o conjunto mais fuzzy
    - De uma forma geral

CONTRASTE

- ***Intensificador:*** muda a função aumentando os μ (x) acima de 0.5 e diminuindo os μ (x) abaixo de 0.5



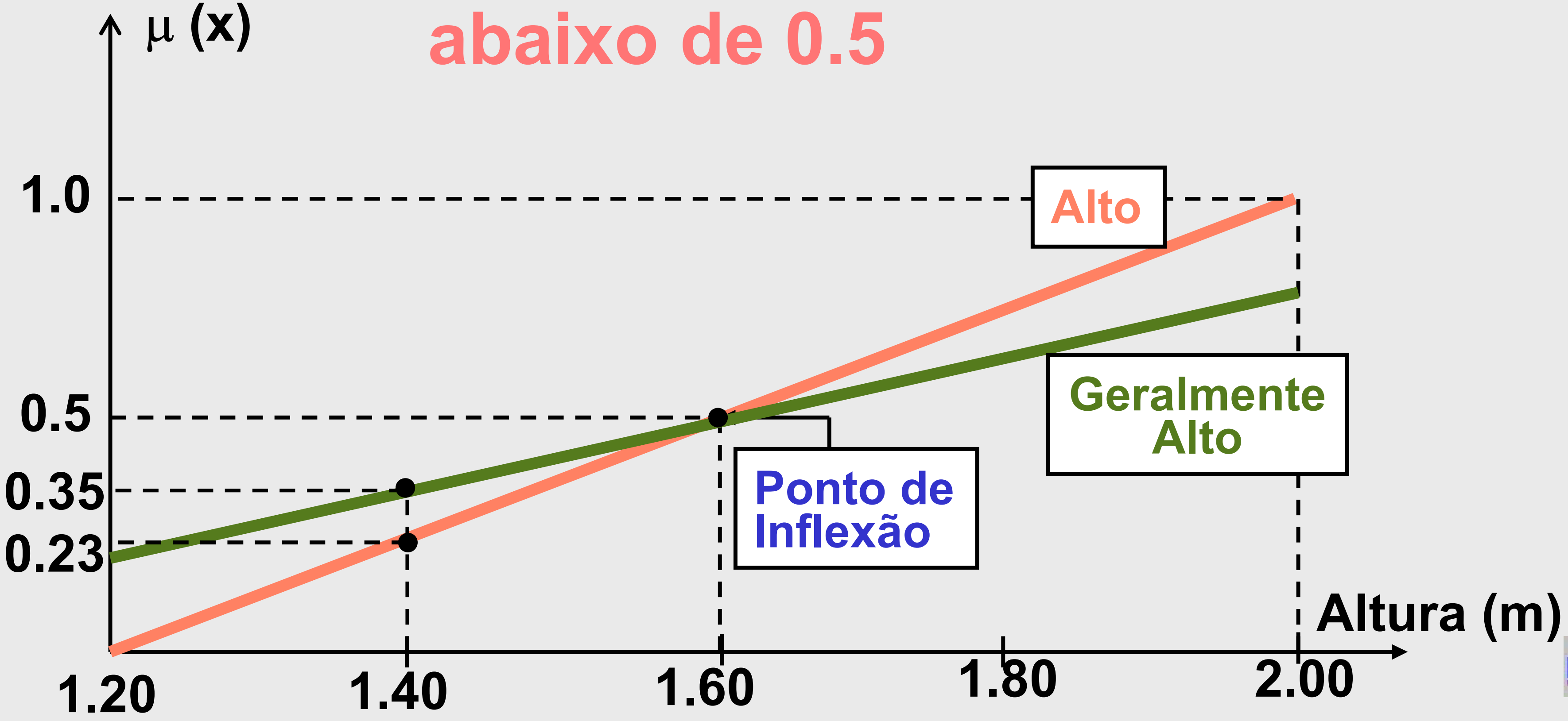
CONTRASTE

- ***Fórmula de Zadeh:***

$$\mu_{INT\ A}(x) = \begin{cases} 2\,[\mu_A(x)]^2 & \text{se } \mu_A(x) \geq 0.5 \\ 1 - 2\{1 - [\mu_A(x)]^2\} & \text{se } \mu_A(x) < 0.5 \end{cases}$$

CONTRASTE

- ***Difusor:*** muda a função reduzindo os μ (x) acima de 0.5 e aumentando os μ (x) abaixo de 0.5



CONTRASTE

- ***Fórmula de Zadeh:***

$$\mu_{\text{INT A}}(x) = \begin{cases} 0.5\,[\mu_A(x)]^{1/2} & \text{se } \mu_A(x) \geq 0.5 \\ 1 - 0.5\{1 - [\mu_A(x)]^{1/2}\} & \text{se } \mu_A(x) < 0.5 \end{cases}$$

CONTEÚDO

- Introdução
  - Introdução, Objetivo e Histórico
- Conceitos Básicos
  - Definição, Características e Formas de Imprecisão
- Conjuntos Fuzzy
  - *Propriedades, Formas de Representação e Operações*
- Lógica Fuzzy
  - Relações, Composições, Modus Ponens Generalizado
- Fuzzy Control

Relações e Composições

Relações e Composições

- ***O que é inferência?***

Premissa 1: ***Temperatura = 75°***

Premissa 2: SE Temperatura é ALTA

ENTÃO Vazão é grande

Conclusão: Vazão = ?

Relações e Composições

Temperatura = 75°

SE Temperatura é ALTA
ENTÃO Vazão é grande

⬇

Vazão = ?

R1 ⇨ Relação simples (um conjunto fuzzy)

R2 ⇨ Relação de Implicação
A → B

⬇

Composição das Relações
R1 o R2

Relações e Composições

- Relações Crisp
- Relações Fuzzy
- Composições de Relações Crisp
- Composições de Relações Fuzzy

Relações e Composições

- Relações Crisp
- Relações Fuzzy
- Composições de Relações Crisp
  Composições de Relações Fuzzy

Relações *Crisp*

- ***Relação Crisp:***
  - Representa a ***presença*** ou ***ausência*** de **associação**, **interação** ou **interconectividade** entre elementos de dois ou mais conjuntos.

↓

- ***Relações Binárias:***
  - aquelas que envolvem dois conjuntos **X** e **Y**
    - **R (X,Y)**

Relações *Crisp*

Dados os universos *X* e *Y*, a ***relação crisp*** *R* definida em *X* x *Y* é um subconjunto do produto cartesiano dos dois universos, tal que *R*: *X* x *Y* $\rightarrow$ {0,1}

função característica

$$f_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se e somente se } (x,y) \in R \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Relações *Crisp*

- ***OBSERVAÇÃO:***
  - Como **R (X,Y)** também é um **conjunto**, ***todas as operações de conjuntos crisp*** podem ser aplicadas sem modificação.

Relações *Crisp*

- ***Exemplo 1:***
  - Seja **X** = {-3, -2, -1,0, 1, 2, 3}
  - Seja **Y** = { 1, 2, 3, 4, 5}
  - Qual a Relação **R(X,Y) = {(x,y) / x $\geq$ y}**

$$\Downarrow$$

  - **R(X,Y) = { (1,1); (2,1); (3,1); (2,2); (3,2); (3,3)}**

Relações *Crisp*

- ***Exemplo 2:***
  - Seja **X** o conjunto de todos os sistemas **contínuos, lineares, de segunda ordem**

    $X = \{ x_1, x_2\} =$ {sistema variante no tempo, sistema invariante no tempo}

    e

  - Seja **Y** o conjunto dos **pólos** de tais sistemas

    $Y = \{y_1, y_2\} =$ {pólos no lado esquerdo do s-plano, pólos no lado direito do s-plano}

Relações *Crisp*

- ***Exemplo 2:***
  - Relação de Estabilidade entre X e Y

↓

Sistemas Estáveis

Sistemas Invariante no Tempo

E

Pólos (no lado esquerdo do s-plano)

Relações *Crisp*

- ***Exemplo 2:***
  - Relação de Estabilidade entre X e Y

↓

R(U,V) = {sistema invariante no tempo, pólos no semi-plano esquerdo}

$$\begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \end{array}$$

MATRIZ RELACIONAL

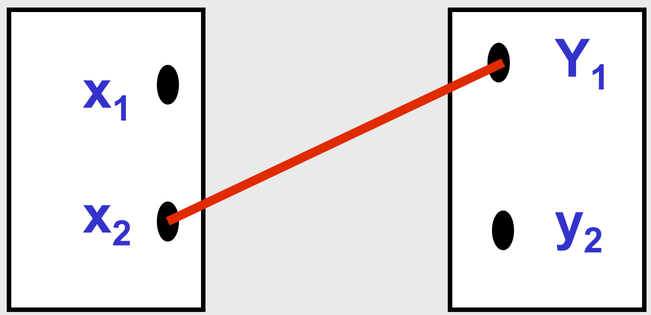


DIAGRAMA SAGITAL

Relações e Composições

- Relações Crisp
- Relações Fuzzy
- Composições de Relações Crisp
- Composições de Relações Fuzzy

Relações Fuzzy

- ***Relação Fuzzy:***
  - Representa **o grau de associação**, **interação** ou **interconectividade** entre elementos de dois ou mais conjuntos fuzzy.
  - ***Exemplos:*** x é **muito maior que** y

    y é **bem próximo de** x

    z é **muito mais alto que** y

    Se x é **grande** Então y é **pequeno**

Relações Fuzzy

A *relação fuzzy* *R* (*X*,*Y*) é um **conjunto fuzzy** caracterizado pela função de pertinência

$$\mu_R(x,y) \qquad x \in X \text{ e } y \in Y$$

$$\Downarrow$$

$$R(X,Y) = \{ [(x,y), \mu_R(x,y)] \,/\, (x,y) \in X \times Y \}$$

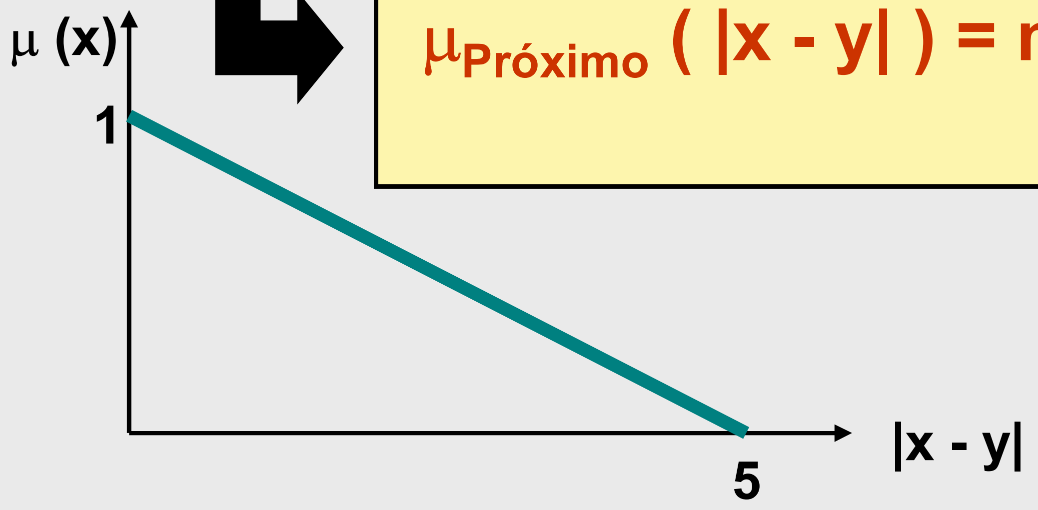
Relações Fuzzy

- ***OBSERVAÇÃO:***
  - Como **as relações fuzzy** são também **conjuntos fuzzy**, ***as operações com essas relações*** podem ser definidas utilizando os operadores de **UNIÃO, INTERSEÇÃO** e **COMPLEMENTO**.

Relações Fuzzy

- ***EXEMPLO 1:***
  - Seja **X** e **Y** conjuntos de números reais
  - **R (X,Y)** = o alvo **x** está ***próximo*** do alvo **y**

$$\mu_{Próximo}(|x - y|) = máx\left[\frac{5 - |x - y|}{5}, 0\right]$$



Relações Fuzzy

- *Exemplo 2:*

$X = \{x_1, x_2, x_3\} = \{8, 2, 10\}$

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{2, 0, 4, 3\}$

$R(X,Y)$ = x é muito maior do que y

$$\mu_{mm}(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0.5 & 0.7 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Relações Fuzzy

Exemplo 3:

$X = \{x_1, x_2\}$ = {Fortaleza, Florianópolis}

$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ = {Porto Alegre, Criciúma, Curitiba}

R: "muito próxima".

Relações Fuzzy

Matriz Relacional para o caso *crisp*

		y_1 Porto Alegre	y_2 Criciúma	y_3 Curitiba
x_1	Fortaleza	0	0	0
x_2	Florianópolis	1	1	1

Relações Fuzzy

Matriz Relacional para o caso *fuzzy*

		y_1	y_2	y_3
		Porto Alegre	Criciúma	Curitiba
x_1	Fortaleza	0,1	0,2	0,3
x_2	Florianópolis	0,8	1	0,8

Relações e Composições

- Relações Crisp
- Relações Fuzzy
- Composições de Relações Crisp
- Composições de Relações Fuzzy

Composição de Relações

- Representa um papel muito importante em sistemas de inferência fuzzy

Composições Crisp

- Seja P (X,Y) e Q (Y, Z) duas relações crisp nos espaços X x Y e Y x Z, respectivamente.

⬇

- Composição R (X,Z) das relações crisp P e Q

$$\boxed{R(X,Z) = P(X,Y) \circ Q(Y,Z)}$$

Composições Crisp

$$R(X, Z) = P(X,Y) \circ Q(Y, Z)$$

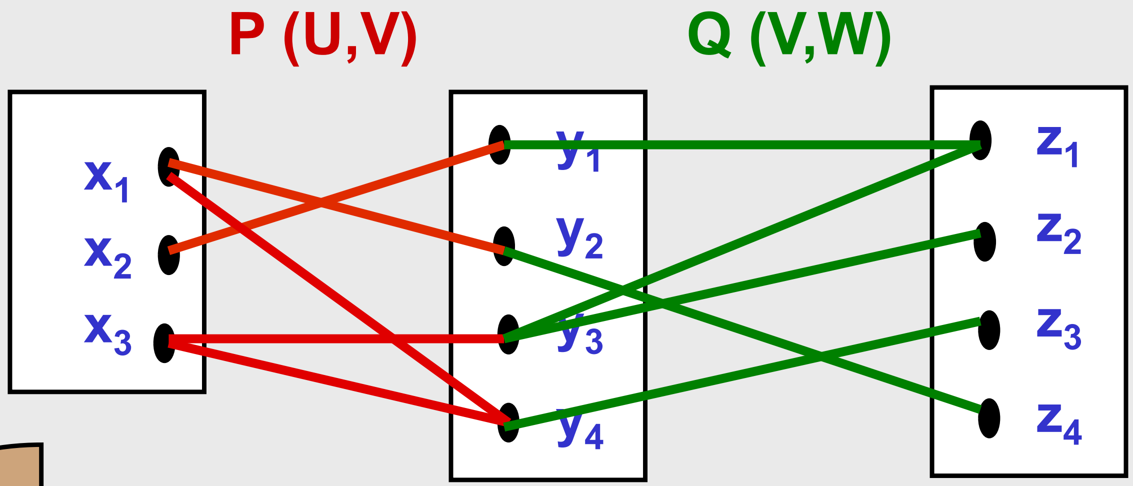
$\Downarrow$

R (X, Z) é um subconjunto de X x Z tal que:

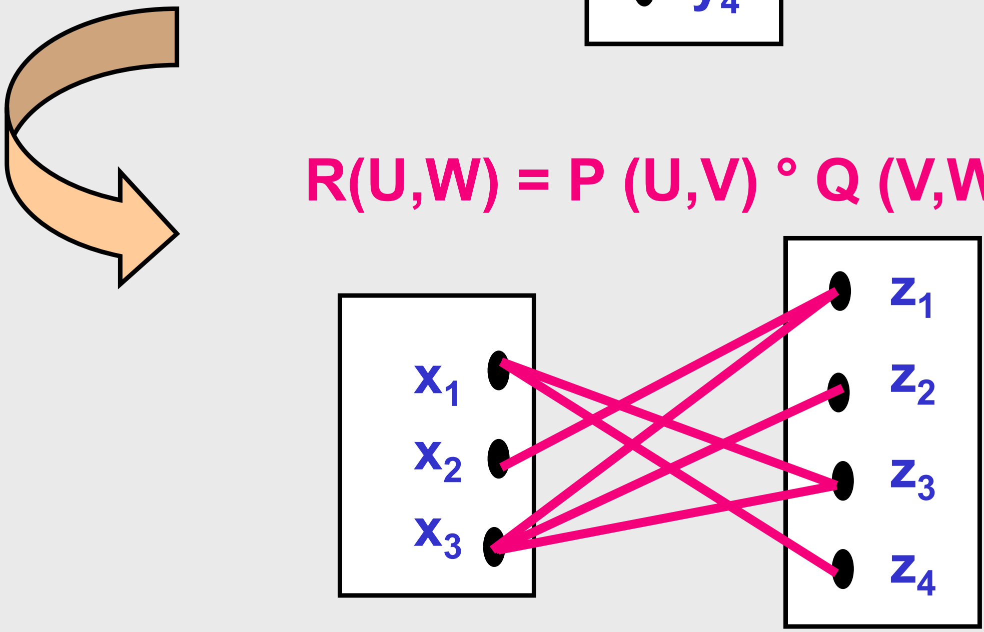
$(x,z) \in R(X, Z)$
se e somente se existir
pelo menos um $y \in Y$ tal que
$(x,y) \in P$ e $(y,z) \in Q$

Composições Crisp

- ***Exemplo:***



R(U,W) = P (U,V) ° Q (V,W)



Composições Crisp

A operação realizada para se obter a *composição das relações* *pode ser* representada por:

- ***Composição MÁX-MÍN:***

$$f_R(x,z) = f_{P \circ Q}(x,z) = \{(x,z), \max_y [\min(f_P(x,y), f_Q(y,z))]\}$$

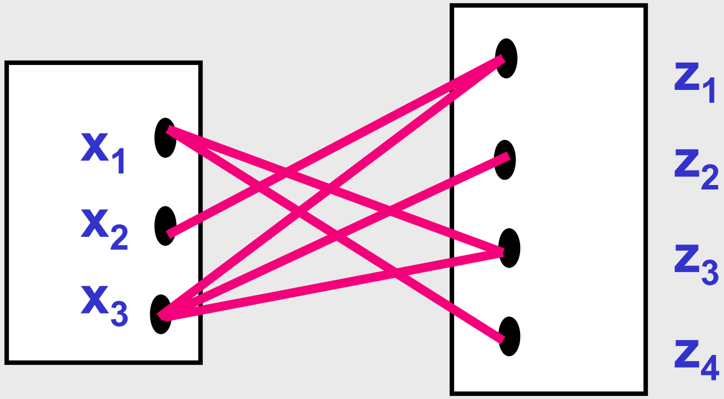
- ***Composição MÁX-PRODUTO:***

$$f_R(x,z) = f_{P \circ Q}(x,z) = \{(x,z), \max_y [(f_P(x,y)\, f_Q(y,z))]\}$$

Composições Crisp

- *Exemplo (caso crisp):*

$R(X,Z) = P(X,Y) \circ Q(Y,Z)$



$$P(X,Y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q(Y,Z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$R(X,Z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Composições Crisp

Exemplificando para o cálculo do elemento (x_1,z_2) de *R* (no exemplo):

$$f_R(x_1,z_2) = f_{P\circ Q}(x,z) = \{(x_1,z_2), \max_y [\min(f_P(x_1,y), f_Q(y,z_2))]\} =$$

$$\{(x_1,z_2), \max[\min(f_P(x_1,y_1), f_Q(y_1,z_2)), \min(f_P(x_1,y_2), f_Q(y_2,z_2)),$$
$$\min(f_P(x_1,y_3), f_Q(y_3,z_2)), \min(f_P(x_1,y_4), f_Q(y_4,z_2))]\}$$

$$f_R(x_1,z_2) = \{(x_1,z_2), \max[\min(0,0), \min(1,0), \min(0,1), \min(1,0)]\}$$

$$f_R(x_1,z_2) = \{(x_1,z_2), \max[0,0,0,0)]\} = 0$$

Composições Crisp

- *Em composições crisp se obtém o mesmo resultado para **MÁX-MÍN** e **MÁX-Produto***
- *Cada elemento de R(X,Y) pode ser obtido por meio da multiplicação das matrizes P(X,Y) e Q(Y,Z) observando-se que:*
  - cada multiplicação deve ser efetuada com o operador adequado: mínimo ou produto
  - cada adição deve ser efetuada com o operador máximo

Relações e Composições

- Relações Crisp
- Relações Fuzzy
- Composições de Relações Crisp
- Composições de Relações Fuzzy

Composições Fuzzy

Composição *fuzzy* → faz-se uma generalização do caso não-fuzzy

$$\mu_R(x,z) = \mu_{P \circ Q}(x,z) = \sup_y \left[\mu_P(x,y) * \mu_Q(y,z)\right]$$

- a norma-t é *usualmente* o *min* ou o *produto*
- para universos finitos, o *sup* é o *max*

Composição de Relações

Interpretação gráfica:

$$\xrightarrow{x \in X} \boxed{\mu_P(x,y)} \xrightarrow{y \in Y} \boxed{\mu_Q(y,z)} \xrightarrow{z \in Z} \mu_{P \circ Q}(x,z)$$

Obs.: o procedimento de "*multiplicação de matrizes*" aplica-se também ao caso *fuzzy*

Composição de Relações

- *Exemplo 1:*
  - **Estudantes:**

    X = {Maria, João, Pedro}

  - **Características de cursos**

    Y = {teoria, aplicação, hardware, programação}

  - **Cursos**

    Z = {lógica fuzzy, controle fuzzy, redes neurais, sistemas especialistas}

Composição de Relações

- *Exemplo 1 (continuação):*
  - Interesse dos estudantes, em termos das características dos cursos:

$$P(X,Y) = \begin{array}{r} \\ Pedro \\ Maria \\ João \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & a & h & p \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Composição de Relações

- *Exemplo 1 (continuação):*
  - Características dos cursos:

$$
Q(Y,Z) = \begin{array}{c} \\ t \\ a \\ h \\ p \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} LF & CF & RN & SE \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Composição de Relações

- *Exemplo 1 (continuação):*
  - A composição (*max-min*) pode servir de auxílio aos estudantes na escolha dos cursos:

$$P(X,Y) = \begin{array}{c} \\ Pedro \\ Maria \\ João \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & a & h & p \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad Q(Y,Z) = \begin{array}{c} \\ t \\ a \\ h \\ p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} LF & CF & RN & SE \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P \circ Q = \begin{array}{c} \\ Pedro \\ Maria \\ João \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} LF & CF & RN & SE \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Obs: *ao contrário deste exemplo*, a composição *max-produto* geralmente não produz o mesmo resultado!

Composição de Relações

- *Exemplo 2:*

$X = \{ x_1, x_2, x_3\}$

$Y = \{ y_1, y_2, y_3, y_4\}$

$Z = \{z_1, z_2, z_3\}$

$\underbrace{\text{x é muito maior do que y}}_{\mu_{mm}(x,y)}$ E $\underbrace{\text{y é muito próximo de z}}_{\mu_{mp}(y,z)}$

$$\boxed{\mu_{mm \circ mp}(x,z) = ?}$$

Composição de Relações

- *Exemplo 2 (continuação):*

Relações dadas:

$$\mu_{mm}(x,y) = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.8 & 1 & 0.1 & 0.7 \\ x_2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{array}$$

$$\mu_{mp}(y,z) = \begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline y_1 & 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ y_2 & 0 & 0.4 & 0 \\ y_3 & 0.9 & 0.5 & 0.8 \\ y_4 & 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{array}$$

$\Rightarrow$

Composição *max-min*

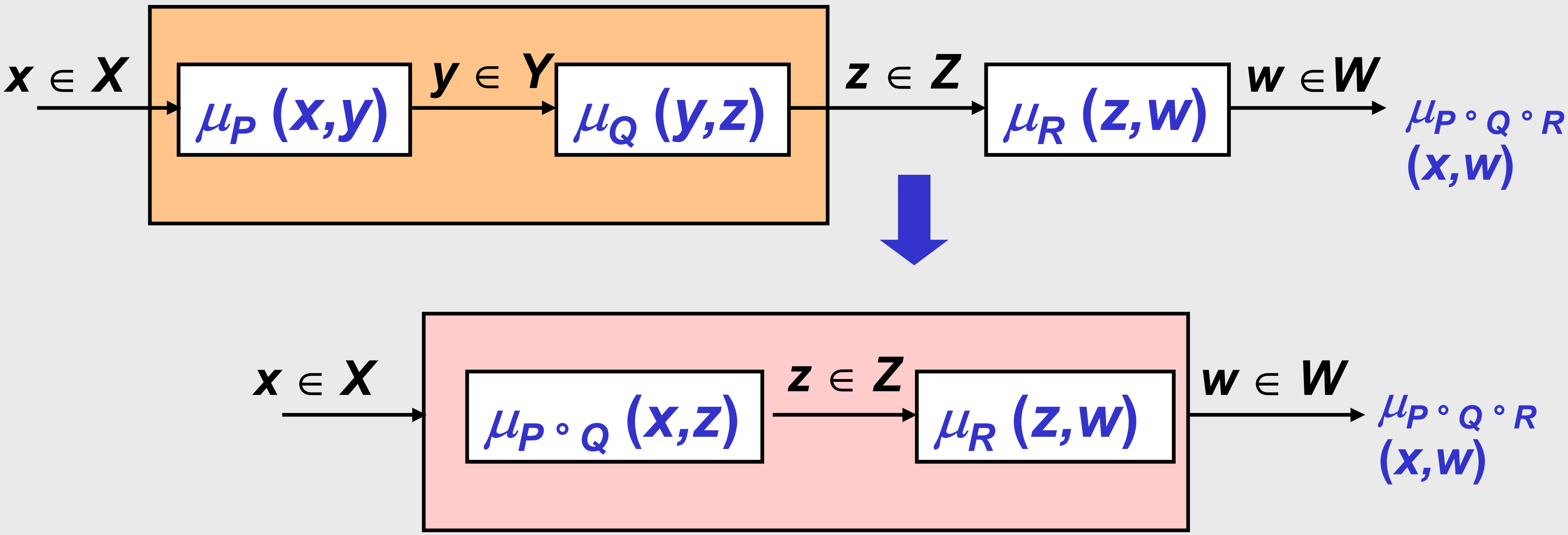
$$\begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline x_1 & 0.6 & 0.8 & 0.5 \\ x_2 & 0 & 0.4 & 0 \\ x_3 & 0.7 & 0.9 & 0.7 \end{array}$$

Composição *max-produto*

$$\begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline x_1 & 0.42 & 0.72 & 0.35 \\ x_2 & 0 & 0.32 & 0 \\ x_3 & 0.63 & 0.81 & 0.56 \end{array}$$

Composição de Relações

- *Três relações:*



Obs.: poder-se-ia compor *Q* e *R*, primeiramente; o resultado seria então composto com *P*

Composição de Relações

Caso especial: P **é *um conjunto fuzzy* apenas**

$\Downarrow$

em vez de $\mu_P(x,y)$ **tem-se** $\mu_P(x)$**, o que é equivalente a se ter** $X = Y$

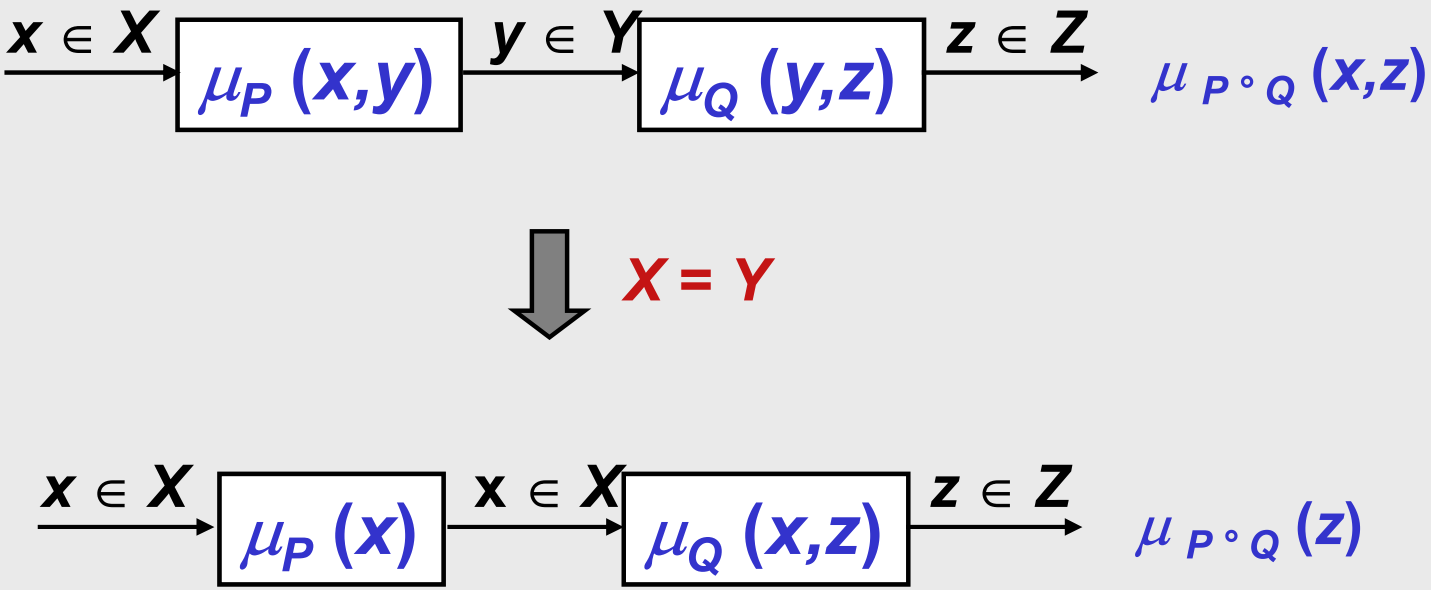
$\Downarrow$

$$\boxed{\mu_R(z) = \sup_x [\mu_P(x) * \mu_Q(x,z)]}$$

Obs.: resultado fundamental para sistemas de inferência fuzzy!

Composição de Relações

Interpretação gráfica:



Composição de Relações

- ***Exemplo:***

x **é mediamente grande E** ***z*** **é muito menor do que** ***x***

$X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{5, 10, 15, 20, 25\}$

$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mu_{mg}(x) = \{0,3; 0,7; 1; 0,7; 0,3\}$

$$\mu_{mm}(x,z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Composição *max-min*

$\mu_R(z) = \{1/1; 0,8/2; 0,7/3; 0,6/4\}$

CONTEÚDO

- Introdução
  - Introdução, Objetivo e Histórico
- Conceitos Básicos
  - Definição, Características e Formas de Imprecisão
- Conjuntos Fuzzy
  - *Propriedades, Formas de Representação e Operações*
- ***Lógica Fuzzy***
  - Relações, Composições, Modus Ponens Generalizado
- Fuzzy Control

LÓGICA FUZZY

LÓGICA FUZZY

- Um dos componentes mais importantes de um sistema fuzzy é o **Módulo de Regras**

⬇

- **Regras** são expressas como ***implicações lógicas*** ou ***Lógica Proposicional***
  - **Se x é A então y é B**

LÓGICA FUZZY

- ***Regra:***

  Se x é A então y é B

  – representa um tipo especial de **Relação** entre **A** e **B** cuja função de pertinência é:

$$\mu_{A \rightarrow B}(x,y) = ?$$

$$\Downarrow$$

LÓGICA

Proposições Fuzzy

- Frases da forma Π é *A*, onde *A* é um conjunto fuzzy definido no universo *X* de Π
- Podem ser combinadas por meio de diferentes operadores:
  - conectivos lógicos *e* e *ou*
  - negação: *não*
  - operador de implicação: *se .... então*
- Podem ser descritas em termos de *relações fuzzy*

Proposições Fuzzy

- Conectivos:
  - *e* → usado com variáveis em universos diferentes

    Ex: *temperatura* é *alta* e *pressão* é *baixa*

  - *ou* → conecta valores linguísticos de uma mesma variável

    Ex: *temperatura* é *alta* ou *baixa*

    → em sentenças do tipo *se .... então*, pode ser usado com variáveis diferentes

    Ex: se a *pressão* é *alta* ou a *temperatura* é *baixa*

Proposições Fuzzy

- **Negação:**

$$A = \{\mu_A(x)/x\} \quad \Rightarrow \quad não\ A = \{(1 - \mu_A(x))/\,x\}$$

  - **Exemplo:** *pressão* **é** *não alta*

Proposições Fuzzy

- **Considerem-se:**
  - ***variáveis linguísticas*** **de nomes** x **e** y **definidas em universos** X **e** Y
  - ***conjuntos fuzzy*** A **e** B **definidas em** X **e** Y
  - ***proposições fuzzy*** $\begin{cases} x \text{ é } A \\ y \text{ é } B \end{cases}$

Proposições Fuzzy

Conexão das proposições por meio de **e** *(interseção):*

$$(x \text{ é } A) \; e \; (y \text{ é } B)$$

relação fuzzy $R_{A\,e\,B}$

$$\boxed{\mu_R(x,y) = \mu_A(x) * \mu_B(y)}$$

norma-t (geralmente o *min* ou o *produto*)

Proposições Fuzzy

Conexão das proposições por meio de *ou (união):*

$$(x \text{ é } A) \; ou \; (y \text{ é } B)$$

relação fuzzy $R_{A\,ou\,B}$

$$\boxed{\mu_R(x,y) = \mu_A(x) \oplus \mu_B(y)}$$

co-norma-t (geralmente o *max*)

Proposições Fuzzy

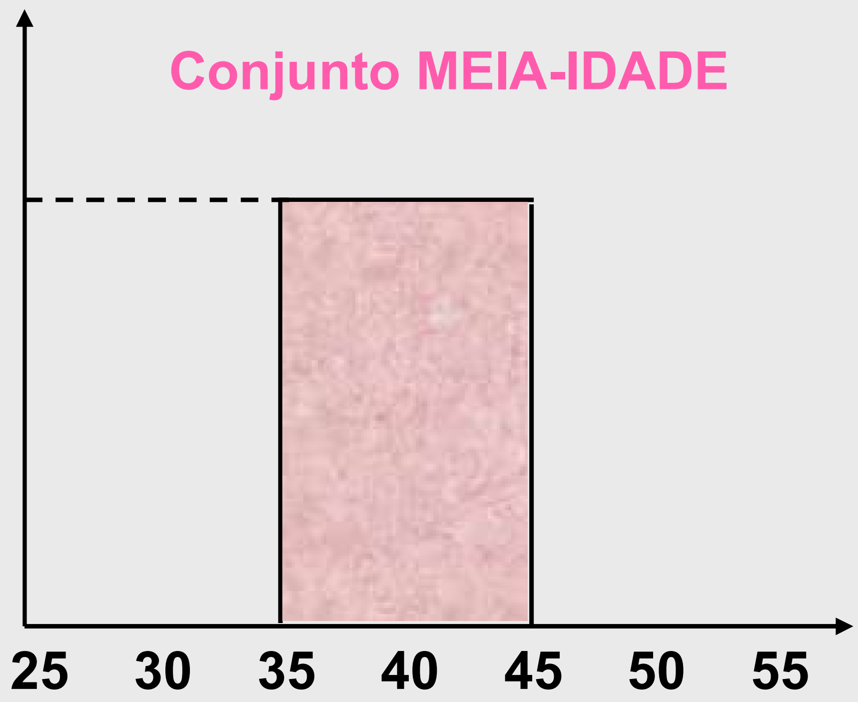
- ***Exemplo:***
  - **Quais os membros do grupo abaixo que são ao mesmo tempo *ALTOS* e de *MEIA-IDADE*?**

NOME	IDADE	ALTURA
Abel	36	1.70
Marcelo	58	1.75
Carlos	64	1.65
João	32	1.78
Pedro	40	1.77
Tiago	22	1.60
Felipe	47	1.73
André	25	1.75

Proposições Fuzzy

- ***Exemplo (continuação):***

→ ***com conjuntos crisp:***



Proposições Fuzzy

- *Exemplo (continuação):*

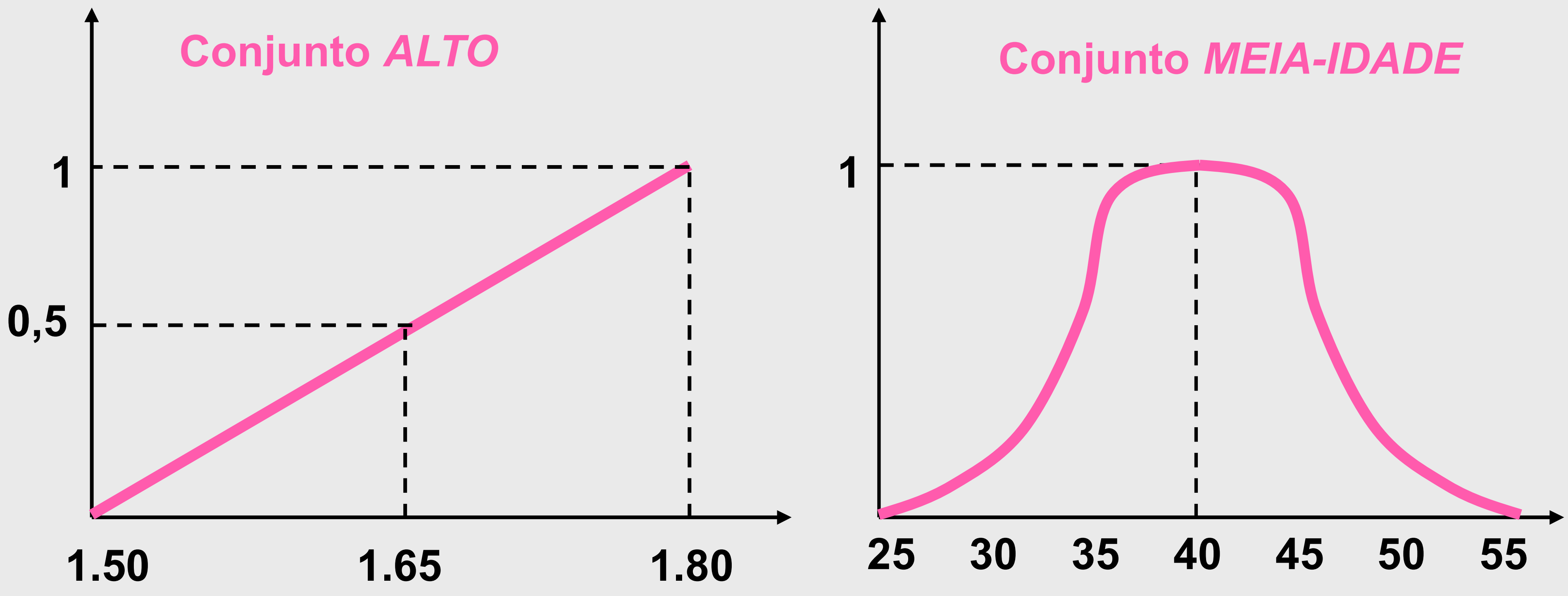
Membros com idade entre 35 e 45 anos e altura maior do que 1.75m (caso crisp):

NOME	IDADE	f_{MI} (x)	ALTURA	f_{ALTO} (y)	$R_{MI\ e\ ALTO}$
Abel	36	1	1.70	0	0
José	58	0	1.75	1	0
Carlos	64	0	1.65	0	0
João	32	0	1.78	1	0
Pedro	40	1	1.77	1	1
Tiago	22	0	1.60	0	0
Felipe	47	0	1.73	0	0
André	25	0	1.75	1	0

Proposições Fuzzy

- ***Exemplo (continuação):***

➡ ***com conjuntos fuzzy:***



Proposições Fuzzy

- *Exemplo (continuação):*

  Graus de pertinência da relação "Meia-Idade e Alto":

NOME	IDADE	$\mu_{MI}(x)$	ALTURA	$\mu_{ALTO}(y)$	$R_{MI\ e\ ALTO}$ (min)
Abel	36	.92	1.70	.67	.67
José	58	0	1.75	.83	0
Carlos	64	0	1.65	.50	0
João	32	.47	1.78	.93	.47
Pedro	40	1	1.77	.90	.90
Tiago	22	0	1.60	.33	0
Felipe	47	.74	1.73	.77	.74
André	25	.10	1.75	.83	.10

Proposições Fuzzy

– Quais os membros do grupo abaixo que são *ALTOS* <u>ou</u> de MEIA-IDADE?

NOME	IDADE	ALTURA
Abel	36	1.70
Marcelo	58	1.75
Carlos	64	1.65
João	32	1.78
Pedro	40	1.77
Tiago	22	1.60
Felipe	47	1.73
André	25	1.75

Proposições Fuzzy

- ***Exemplo (continuação):***
  - **Quais os membros que são *ALTOS* <u>ou</u> de *MEIA-IDADE*?**

Membros com idade entre 35 e 45 anos
ou altura maior que 1.75m (caso crisp):

NOME	IDADE	f_{MI} (x)	ALTURA	f_{ALTO} (y)	$R_{MI \text{ ou } ALTO}$
Abel	36	1	1.70	0	1
José	58	0	1.75	1	1
Carlos	64	0	1.65	0	0
João	32	0	1.78	1	1
Pedro	40	1	1.77	1	1
Tiago	22	0	1.60	0	0
Felipe	47	0	1.73	0	0
André	25	0	1.75	1	1

Proposições Fuzzy

- *Exemplo (continuação):*

Graus de pertinência da relação "Meia-Idade ou Alto":

max

NOME	IDADE	μ_{MI} (x)	ALTURA	μ_{ALTO} (y)	$R_{MI\ ou\ ALTO}$
Abel	36	.92	1.70	.67	.92
José	58	0	1.75	.83	.83
Carlos	64	0	1.65	.50	.50
João	32	.47	1.78	.93	.93
Pedro	40	1	1.77	.90	1
Tiago	22	0	1.60	.33	.33
Felipe	47	.74	1.73	.77	.77
André	25	.10	1.75	.83	.83

Proposições Fuzzy

Outros operadores

- ***Interseção:***

Zadeh (já visto) ➡ $min(\mu_A(x), \mu_B(y))$

média ➡ $(\mu_A(x) + \mu_B(y))/2$

produto[$] ➡ $\mu_A(x) * \mu_B(y)$

Lukasiewicz ➡ $max[0, (\mu_A(x) + \mu_B(y) - 1)]$

[$] também sugerido por Zadeh

Proposições Fuzzy

Outros operadores

- ***União:***

Zadeh (já visto) ⟶ $max\ (\mu_A(x), \mu_B(y))$

média ⟶ $\{2 * min\ [(\mu_A(x), \mu_B(y)] +$

$4 * max\ [(\mu_A(x), \mu_B(y)]\}/6$

soma probabilística (ou algébrica) ⟶ $\mu_A(x) + \mu_B(y) - \mu_A(x) * \mu_B(y)$

soma limitada ⟶ $min\ [1, (\mu_A(x) + \mu_B(y))]$

Proposições Fuzzy

Outros operadores

- ***Funções de Yager:***

  família parametrizada **de operadores**

  – ***Interseção*****:**

$$T(x, y) = 1 - min\left[1, \left((1 - x)^p + (1 - y)^p\right)^{1/p}\right] \qquad p > 0$$

  – ***União*****:**

$$C(x, y) = min\left[1, \left(x^p + y^p\right)^{1/p}\right] \qquad p > 0$$

Proposições Fuzzy

Yager: Interseção

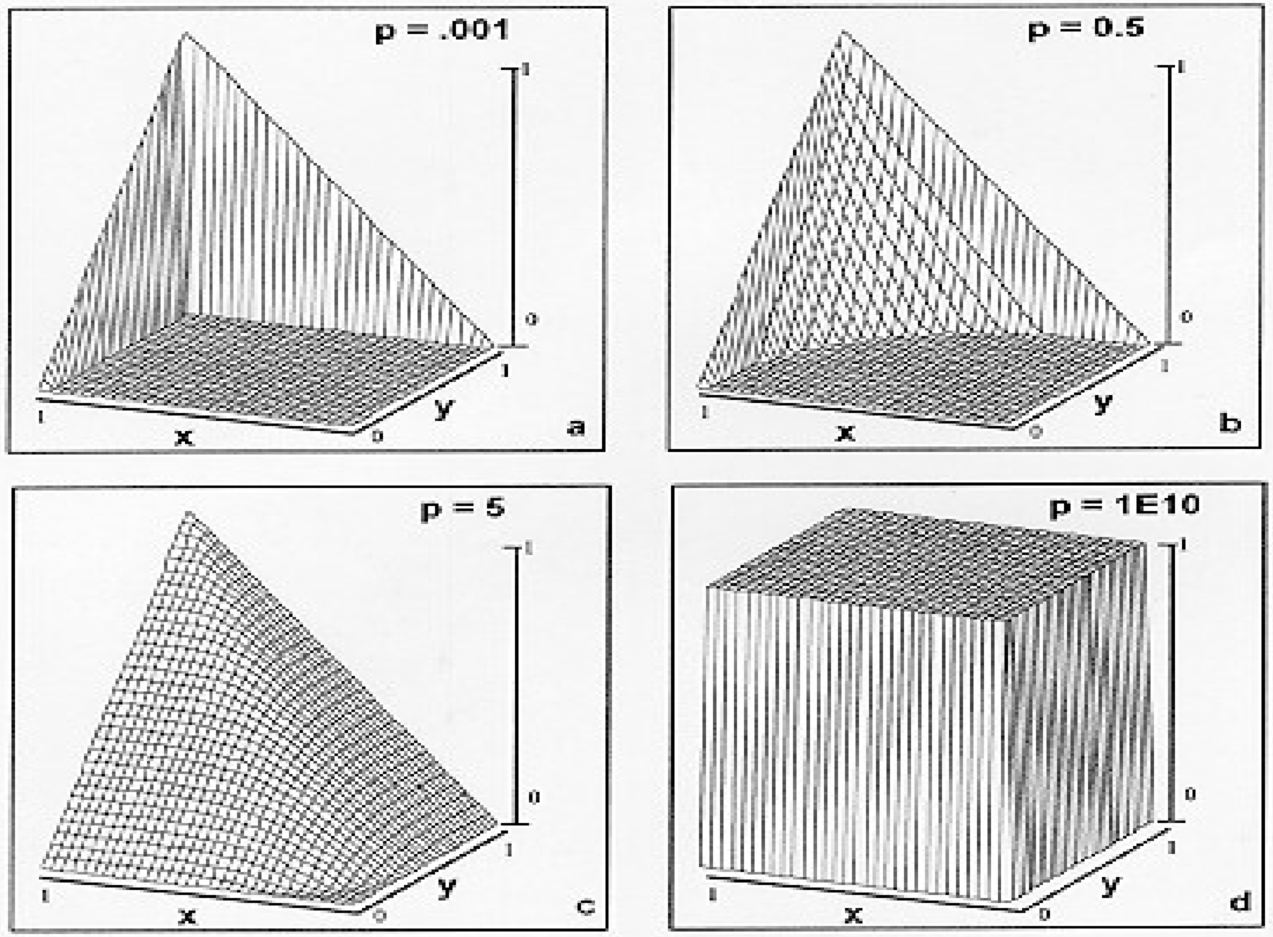


Figure 3.10: (a), (b), (c), and (d) show Yager intersection at various parameter values.

Proposições Fuzzy

Yager: União

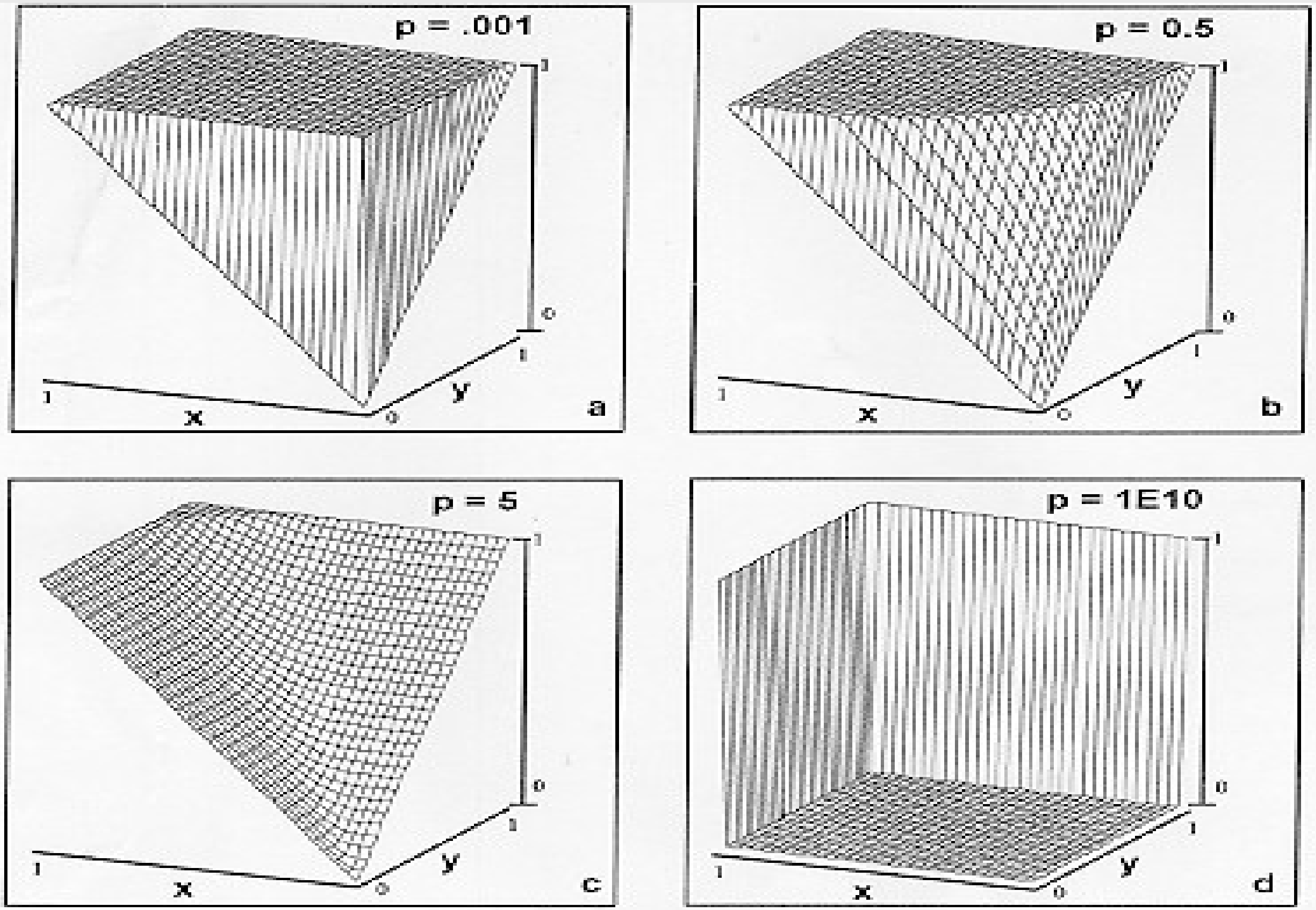


Figure 3.11: (a), (b), (c), and (d) show Yager union operator at various parameter values.

Proposições Fuzzy

Declaração condicional fuzzy (operação **se .... então**)

(descreve a dependência do valor de uma variável linguística em relação ao valor de outra)

$$se\,(x \text{ é } A)\ então\ (y \text{ é } B)$$

relação fuzzy $R_{A \to B}$

$$\boxed{\mu_{A \to B}(x, y) = f_{\to}(\mu_A(x), \mu_B(y))}$$

operador de *implicação*

Proposições Fuzzy

Mais de um *antecedente*:

$$se\ (x_1\ \text{é}\ A_1)\ e\ (x_2\ \text{é}\ A_2)\ e\ ....e\ \ (x_m\ \text{é}\ A_m)\ então\ (y\ \text{é}\ B)$$

relação fuzzy

$$\boxed{\mu_R(x_1, x_2, ..., x_m, y) = f_{\rightarrow}(f_e(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), ..., \mu_{A_m}(x_m)), \mu_B(y))}$$

operador que representa o conectivo e (geralmente *min* ou *produto*)

Proposições Fuzzy

Combinação de várias declarações condicionais por *ou*

$$R^1 : se\ (x\ \text{é}\ A^1)\quad então\ (y\ \text{é}\ B^1)\ \ ou$$
$$R^2 : se\ (x\ \text{é}\ A^2)\quad então\ (y\ \text{é}\ B^2)\ \ ou$$
$$\vdots$$
$$R^n : se\ (x\ \text{é}\ A^n)\quad então\ (y\ \text{é}\ B^n)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mu_{R^N}(x,y) = f_{ou}[\mu_{R^1}(x,y), \mu_{R^2}(x,y), \ldots., \mu_{R^n}(x,y)] = \\ &f_{ou}[f_{\rightarrow}(\mu_{A^1}(x), \mu_{B^1}(y)), f_{\rightarrow}(\mu_{A^2}(x), \mu_{B^2}(y)), \ldots., f_{\rightarrow}(\mu_{A^n}(x), \mu_{B^n}(y))]\end{aligned}}$$

operador que representa o conectivo *ou* (geralmente *max*)

LÓGICA FUZZY

- ***Regras são implicações lógicas***

se *x* é *A* então *y* é *B*

⇓

a função de pertinência desta *relação* é definida por meio do *operador de implicação*

⇓

relacionado à *Lógica Proposicional*

Lógica Proposicional

- Regras são formas de *proposição*

declaração envolvendo termos já definidos

Ex: a *temperatura* é *alta*

se temperatura é *alta então diminui a vazão*

Lógica Proposicional

- Proposições podem ser *verdadeiras* ou *falsas*
- Proposições *p* e *q* podem ser **combinadas** a partir de três operações básicas:
    - *conjunção*
    - *disjunção*
    - *implicação*

Lógica Proposicional

- ***Conjunção*** $p \wedge q$:

  – Estabelece a verdade simultânea de duas proposições p e q

Lógica Proposicional

- ***Disjunção*** **p $\vee$ q:**
  - **Estabelece a verdade de uma ou de ambas as proposições p e q**

Lógica Proposicional

- ***Implicação*** **p → q:**

  – **verifica se a regra abaixo é verdadeira (V)**

SE p ENTÃO q

antecedente **consequente**

Lógica Proposicional

Outras operações:

- ***Equivalência:*** $p \Leftrightarrow q$

  verifica se as duas proposições são *simultaneamente verdadeiras* ou *simultaneamente falsas*

- ***Negação:*** $\sim p$

  para se dizer *é falso que ....*

Lógica Proposicional

- *A implicação é **verdadeira** quando:*
  - **antecedente é V, consequente é V**
  - **antecedente é F, consequente é F**
  - **antecedente é F, consequente é V**
- *A implicação é **falsa** quando:*
  - **antecedente é V, consequente é F**

Lógica Proposicional

- ***TABELA VERDADE:***

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$\sim p$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Lógica Proposicional

- ***Axiomas Fundamentais:***
  ① Cada proposição é V ou F, mas nunca ambos;
  ② A Tabela Verdade para:
    - Conjunção
    - Disjunção
    - Equivalência
    - Implicação
    - Negação

Lógica Proposicional

Exemplo:

Considere-se a declaração condicional

se **eu** ***estiver bem de saúde*** **(*p*)**

então irei à escola **(*q*)**

Lógica Proposicional

Situações possíveis:

$\Rightarrow$ ***p* = *V* (*estou bem de saúde*)**

***q* = *V* (*fui à escola*)**

⬇

promessa <u>cumprida</u> → declaração *verdadeira*

Lógica Proposicional

Situações possíveis:

$\Rightarrow$ ***p* = *V* (*estou bem de saúde*)**

***q* = *F* (*não fui à escola*)**

⇓

promessa <u>violada</u> → declaração *falsa*

ICA

Lógica Proposicional

Situações possíveis:

$\Rightarrow$ ***p* = *F* (*não estou bem de saúde*)**

***q* = *V* (*fui à escola*)**

$\Downarrow$

promessa (de *ir à escola*) <u>cumprida</u> $\rightarrow$ declaração *verdadeira*

Lógica Proposicional

Situações possíveis:

$\Rightarrow$ ***p* = *F* (*não estou bem de saúde*)**

***q* = *F* (*não fui à escola*)**

$\Downarrow$

promessa <u>não violada</u> $\rightarrow$

declaração *verdadeira*

Lógica Proposicional

- *TAUTOLOGIA:*

$\Rightarrow$ É uma proposição **sempre verdadeira** formada a partir da **combinação** de outras proposições

Lógica Proposicional

- ***Tautologias importante:***

$$\boxed{(p \to q) \leftrightarrow \sim [\, p \wedge (\sim q)]}$$

$$\boxed{(p \to q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]}$$

Lógica Proposicional

- ***Tautologias importante:***

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim[\, p \wedge (\sim q)]$$

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$$

⬇

Permite expressar a função de pertinência de $p \rightarrow q$ em termos de p e $\sim q$ ou $\sim p$ e q

Lógica Proposicional

- ***Comprovação:***

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim[p \wedge (\sim q)]$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim[p \wedge (\sim q)]$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V

Lógica Proposicional

- ***Comprovação:*** $(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$(\sim p) \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Lógica Proposicional

- ***Comprovação das tautologias:***

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim[p \wedge (\sim q)]$

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim [p \wedge (\sim q)]$	$\sim p$	$(\sim p) \vee q$
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**

Lógica Proposicional

Isomorfismos:

O isomorfismo entre a álgebra booleana, a teoria dos conjuntos e a lógica proposicional garante que cada teorema em qualquer uma dessas teorias tem um teorema equivalente em cada uma das outras duas teorias

Lógica Proposicional

_Equivalências importantes:

LÓGICA	TEORIA DOS CONJUNTOS	ÁLGEBRA BOOLEANA
$\wedge$	$\cap$	$\times$
$\vee$	$\cup$	$+$
$\sim$	$'$	$'$
V		1
F		0
$\leftrightarrow$		$=$

Lógica Proposicional

- Considerando
  - as tautologias anteriores
  - as equivalências entre lógica, teoria de conjuntos e álgebra booleana
  - que, em conjuntos *crisp*, a função característica pode assumir apenas os valores 0 e 1

⇒ obtêm-se funções características para a *implicação*

Lógica Proposicional

- ***Tautologia 1:***

$$\boxed{(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim[\, p \wedge (\sim q)]}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_{p \rightarrow q}(x,y) = \quad ?$$

Lógica Proposicional

- ***Tautologia 1:***

$$(p \rightarrow q) \;\leftrightarrow\; \sim[\, p \wedge (\sim q)]$$

$$\mu_{p \rightarrow q}(x,y) = 1 - \mu_{p \cap \bar{q}}(x,y)$$

$$= 1 - \text{mín}\,[\mu_p(x),\, 1 - \mu_q(y)]$$

$$= 1 - \mu_p(x).\,[1 - \mu_q(y)]$$

Lógica Proposicional Tradicional

- ***Tautologia 1:***

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim[p \wedge (\sim q)]$$

$$\Downarrow$$

$$f_{p\rightarrow q}(x, y) = 1 - min[f_p(x), 1 - f_q(y)]$$

Lógica Proposicional

- ***Tautologia 2:***

$$\boxed{(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_{p \rightarrow q}(x,y) = ?$$

Lógica Proposicional

- ***Tautologia 2:***

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_{p \rightarrow q}(x,y) = \mu_{\bar{p} \cup q}(x,y)$$

$$= \text{máx}\,[1 - \mu_p(x), \mu_q(y)]$$

$$= \text{mín}\,[1, 1 - \mu_p(x) + \mu_q(y)]$$

Lógica Proposicional

- ***Tautologia 2:***

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$$

$$\Downarrow$$

$$f_{p\rightarrow q}(x,y) = max\,[1 - f_p(x), f_q(y)]$$

Lógica Proposicional

- *Demonstração:*

I $$f_{p \to q}(x, y) = max\,[1 - f_p(x), f_q(y)]$$

II $$f_{p \to q}(x, y) = 1 - min\,[f_p(x), 1 - f_q(y)]$$

$f_p(x)$	$f_q(y)$	$1 - f_p(x)$	$1 - f_q(y)$	I	II
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Lógica Proposicional

- *Observação*: existem inúmeras outras funções características para a implicação, não necessariamente fazendo uso dos operadores ***max*** e ***min***

Lógica Proposicional

⇨ ***Regras de Inferência Clássicas:***

- **MODUS PONENS**
- **MODUS TOLLENS**

Lógica Proposicional

- ***MODUS PONENS:***

Premissa 1: x é A (p)

Premissa 2: SE x é A ($p \rightarrow q$)

ENTÃO y é B

Lógica Proposicional

- ***Implicação é verdadeira quando:***
  - Antecedente é V, Consequente é V
  - Antecedente é F, Consequente é F
  - Antecedente é F, Consequente é V
- ***Implicação é falsa quando:***
  - Antecedente é V, Consequente é F

Lógica Proposicional

- ***Implicação é verdadeira quando:***
  - *Antecedente é* V, Consequente é V
  - Antecedente é F, Consequente é F
  - Antecedente é F, Consequente é V
- ***Implicação é falsa quando:***
  - Antecedente é V, Consequente é F

Lógica Proposicional

- ***Implicação é verdadeira quando:***
  - *Antecedente é* V, *Consequente é* V
  - Antecedente é F, Consequente é F
  - Antecedente é F, Consequente é V
- ***Implicação é falsa quando:***
  - Antecedente é V, Consequente é F

Lógica Proposicional

- ***MODUS PONENS:***

Premissa 1: x é A (p)

Premissa 2: SE x é A (p→q)

ENTÃO y é B

Conclusão: y é B (q)

Lógica Proposicional

- *Modus ponens:*

Premissa 1:	x é A	(p)
Premissa 2:	se x é A então y é B	$(p \rightarrow q)$
Consequência:	y é B	(q)

$$[\, p \wedge (p \rightarrow q) \,] \rightarrow q$$

Lógica Proposicional

- ***MODUS TOLLENS:***

Premissa 1: y é não-B (~q)

Premissa 2: SE x é A ($p \rightarrow q$)

ENTÃO y é B

Lógica Proposicional

- ***Implicação é verdadeira quando:***
  - Antecedente é V, Consequente é V
  - Antecedente é F, Consequente é F
  - Antecedente é F, Consequente é V
- ***Implicação é falsa quando:***
  - Antecedente é V, Consequente é F

Lógica Proposicional

- ***Implicação é verdadeira quando:***
  - Antecedente é V, Consequente é V
  - Antecedente é F, *Consequente é* F
  - Antecedente é F, Consequente é V
- ***Implicação é falsa quando:***
  - Antecedente é V, Consequente é F

Lógica Proposicional

- ***Implicação é verdadeira quando:***
  - Antecedente é V, Consequente é V
  - *Antecedente é* F, *Consequente é* F
  - Antecedente é F, Consequente é V
- ***Implicação é falsa quando:***
  - Antecedente é V, Consequente é F

Lógica Proposicional

- ***MODUS TOLLENS:***

Premissa 1: y é não-B (~q)

Premissa 2: SE x é A (p→q)

ENTÃO y é B

Conclusão: x é não-A (~p)

Lógica Proposicional

- ***MODUS TOLLENS:***

Premissa 1: y é não-B (~q)

Premissa 2: SE x é A $(p \to q)$

ENTÃO y é B

Conclusão: x é não-A (~p)

$$[\sim q \land (p \to q)] \to \sim p$$

ICA

Lógica Fuzzy

- Os conceitos de Lógica Fuzzy nasceram inspirados na lógica proposicional (tradicional)
- A extensão da lógica tradicional para a Lógica Fuzzy foi efetuada através da substituição das funções características (bivalentes) por funções de pertinência fuzzy

Lógica Fuzzy

- A declaração condicional

se *x* é *A* então *y* é *B*

tem uma função de pertinência

$$\boxed{\mu_{A \rightarrow B}(x, y)}$$

⇩

mede o *grau de verdade* da *relação de implicação* entre *x* e *y*

Lógica Fuzzy

- Exemplos de ***funções de implicação***, obtidas por simples extensão da lógica tradicional:

$$\boxed{\mu_{A \to B}(x, y) = 1 - min\,[\mu_A(x), 1 - \mu_B(y)]}$$

$$\boxed{\mu_{A \to B}(x, y) = max\,[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)]}$$

LÓGICA FUZZY

- ***MODUS PONENS GENERALIZADO:***

Premissa 1: x é A*

Premissa 2: SE x é A

ENTÃO y é B

Conclusão: y é B*

> **A* e B* não são necessariamente iguais a A e B, respectivamente**

LÓGICA FUZZY

- ***Exemplo:***

Se *Homem* é *Baixo*

Então *Homem* *não é bom jogador de basquete*

$\Downarrow$

A = BAIXO

B = não é bom jogador de basquete

$\Downarrow$

Premissa: *Homem* é $\underbrace{\textit{abaixo de 1.60m}}_{A^*}$

Conclusão: *Homem* é $\underbrace{\textit{mau jogador de basquete}}_{B^*}$

LÓGICA FUZZY

- ***Conclusão:***

❖ ***Lógica Tradicional (Crisp)*** ⇨

A regra é disparada somente se a premissa 1 for exatamente igual ao antecedente, sendo que o resultado da regra é o próprio consequente.

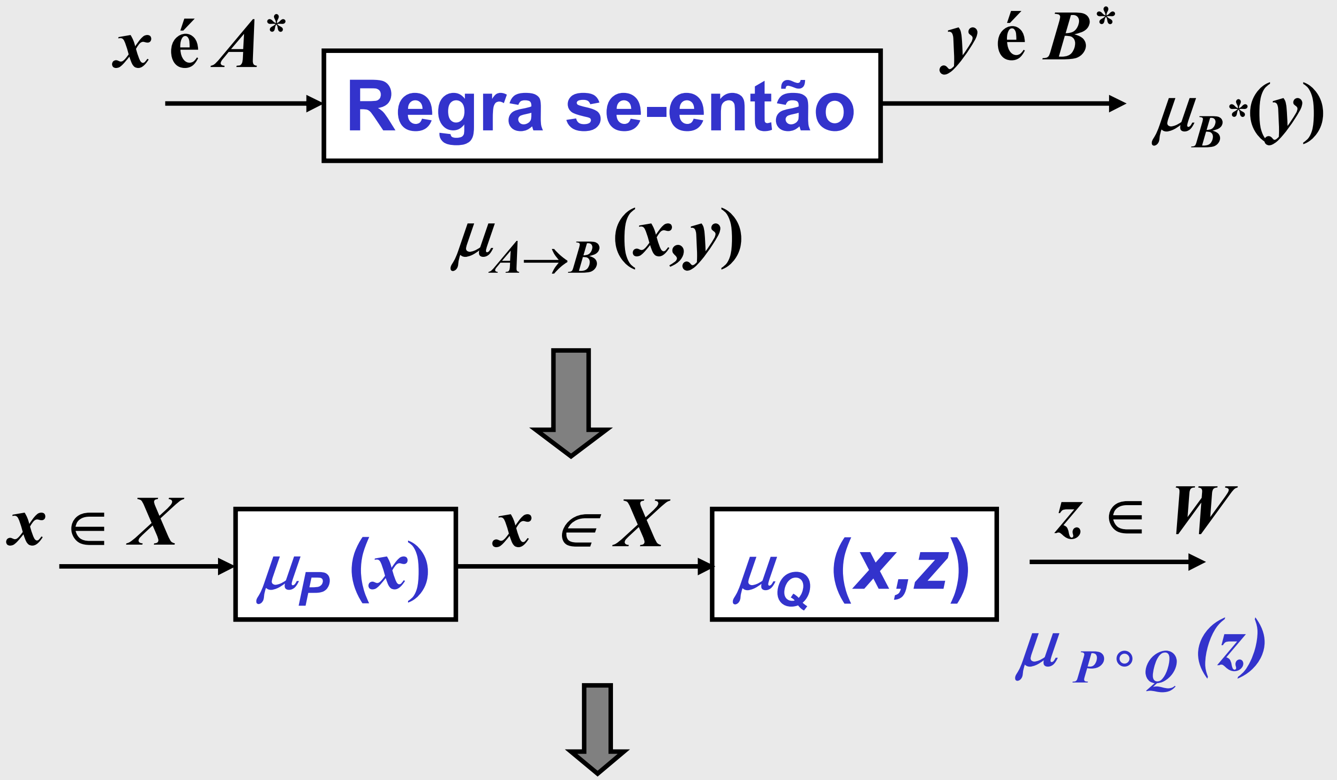
LÓGICA FUZZY

- ***Conclusão:***
- ***Lógica Fuzzy*** ⇨

  A regra é disparada desde que exista um grau de similaridade diferente de zero entre a premissa 1 e o antecedente da regra, sendo que o resultado é um consequente que tem um grau de similaridade diferente de zero com o consequente da regra.

Lógica Fuzzy

Interpretação do Modus Ponens Generalizado:



Composição de um conjunto fuzzy com uma relação fuzzy

LÓGICA FUZZY

Interpretação do Modus Ponens Generalizado:

O Modus Ponens Generalizado é uma composição fuzzy, onde a primeira relação fuzzy é apenas um conjunto fuzzy e a segunda relação é a relação de implicação.

LÓGICA FUZZY

Interpretação do Modus Ponens Generalizado:

Como $\mu_{P \circ Q}(z) = \sup\limits_{x \in U} [\underbrace{\mu_P(x)}_{\mu_{A^*}(x)} * \underbrace{\mu_Q(x,z)}_{\mu_{A \to B}(x,y)}]$

$\Downarrow$

$$\boxed{\mu_{B^*}(y) = \sup_{x \in A^*} [\mu_{A^*}(x) * \mu_{A \to B}(x, y)]}$$

Lógica Fuzzy

Exemplo:

- dada a *relação de implicação*:

$$\mu_{A \to B}(x, y) = max\,[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)]$$

- e dois conjuntos ***A*** e ***B***, em universos discretos e finitos ***X*** e ***Y***, com funções de pertinência:

Lógica Fuzzy

$$\mu_A(x) = \{0;\ 0,2;\ 0,7; 1;\ 0,4;\ 0\}$$

$$\mu_B(y) = \{\ 0,3;\ 0,8;\ 1;\ 0,5;\ 0\}$$

- **obtém-se:**

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0,8 & 1 & 0,8 & 0,8 \\ 0,3 & 0,8 & 1 & 0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 1 & 0,6 & 0,6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lógica Fuzzy

- dado um conjunto A^* definido por:

$$\mu_{A^*}(x) = \{0;\ 0{,}3;\ 0{,}8; 1;\ 0{,}7;\ 0{,}2\}$$

- e utilizando o *min* para a norma-t em:

$$\mu_{B^*}(y) = \max_{x \in A^*} [\mu_{A^*}(x) * \mu_{A \to B}(x, y)]$$

$$\Downarrow$$

(universos discretos e finitos: *sup* $\rightarrow$ *max*)

Lógica Fuzzy

- **tem-se**

$$\mu_{A^*}(x) = \{0;\ 0{,}3;\ 0{,}8; 1;\ 0{,}7;\ 0{,}2\} \quad \mu_{A\rightarrow B}(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}8 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_{B^*}(y) = \left\{ \begin{array}{l} max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 0{,}8;\ 0{,}8 \wedge 0{,}3;\ 1 \wedge 0{,}3;\ 0{,}7 \wedge 0{,}6;\ 0{,}2 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 0{,}8;\ 0{,}8 \wedge 0{,}8;\ 1 \wedge 0{,}8;\ 0{,}7 \wedge 0{,}8;\ 0{,}2 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 1;\ 0{,}8 \wedge 1;\ 1 \wedge 1;\ 0{,}7 \wedge 1;\ 0{,}2 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 0{,}8;\ 0{,}8 \wedge 0{,}5;\ 1 \wedge 0{,}5;\ 0{,}7 \wedge 0{,}6;\ 0{,}2 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 0{,}8;\ 0{,}8 \wedge 0{,}3;\ 1 \wedge 0;\ 0{,}7 \wedge 0{,}6;\ 0{,}2 \wedge 1); \end{array} \right\}$$

$$= \{0{,}6;\ \ 0{,}8;\ \ 1;\ \ \ 0{,}6;\ \ \ 0{,}6\}$$

LÓGICA FUZZY

Interpretação do Modus Ponens Generalizado:

Supondo que a entrada (A^*) do sistema é precisa:

⇓

A^* é um conjunto SINGLETON

⇓

$$\mu_{A^*}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x = x' \\ 0 & \text{para todo outro } x \in X \end{cases}$$

ICA

LÓGICA FUZZY

Usando a fórmula do Modus Ponens Generalizado

$$\mu_{B^*}(y) = \sup_{x \in A^*} [\mu_{A^*}(x) * \mu_{A \to B}(x, y)]$$

Substituindo $\mu_{A^*}(x) \begin{cases} = 1, & x = x' \\ = 0, & x \neq x' \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mu_{B^*}(y) &= [\mu_{A^*}(x') * \mu_{A \to B}(x', y)] \\ &= [1 * \mu_{A \to B}(x', y)] \\ &= \mu_{A \to B}(x', y) \end{aligned}$$

LÓGICA FUZZY

Implicações Fuzzy:

Estendendo a Lógica Crisp:

$$\mu_{p \to q}(x,y) = 1 - \text{mín}\,[\mu_p(x), 1 - \mu_q(y)]$$

$$= 1 - \mu_p(x).\,[1 - \mu_q(y)]$$

$$= \text{máx}\,[1 - \mu_p(x), \mu_q(y)]$$

(ZADEH) $$= \text{mín}\,[1, 1 - \mu_p(x) + \mu_q(y)]$$

- não são adequadas para problemas onde se tem relação de causa e efeito

ICA

LÓGICA FUZZY

- ***Exemplo:*** **considere-se a implicação**

$$\mu_{A \to B}(x, y) = 1 - min\,[\mu_A(x), 1 - \mu_B(y)]$$

e conjuntos *A* e *B* representados por funções de pertinência triangulares, em universos contínuos

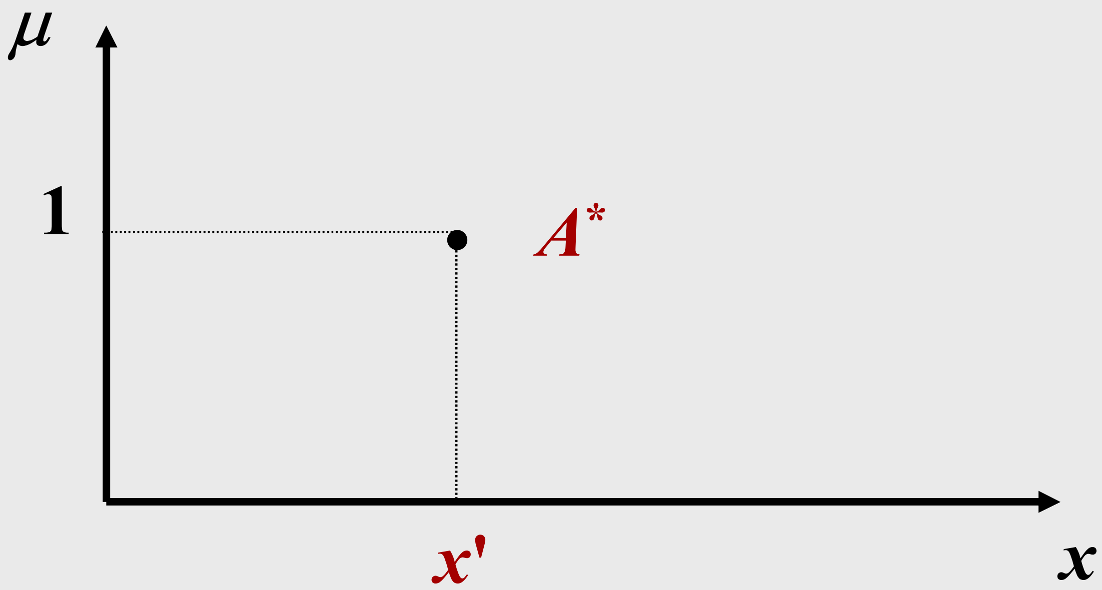
LÓGICA FUZZY

Para uma entrada *singleton* ***x'***, o consequente ***B****** será dado por:

$$\mu_{B^*}(y) = 1 - min[\mu_A(x'), 1 - \mu_B(y)]$$

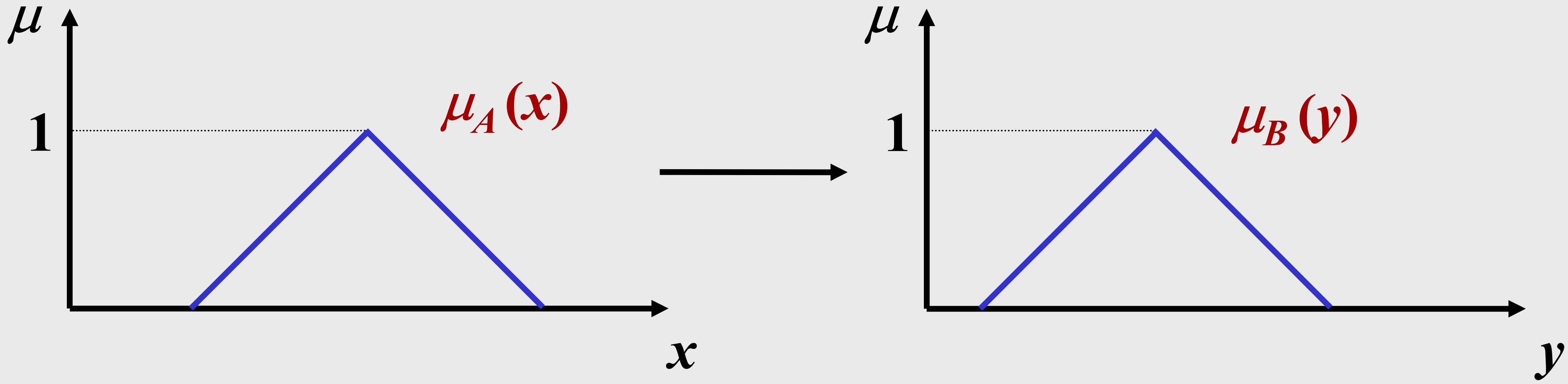
Graficamente, o procedimento consiste em:

Lógica Fuzzy



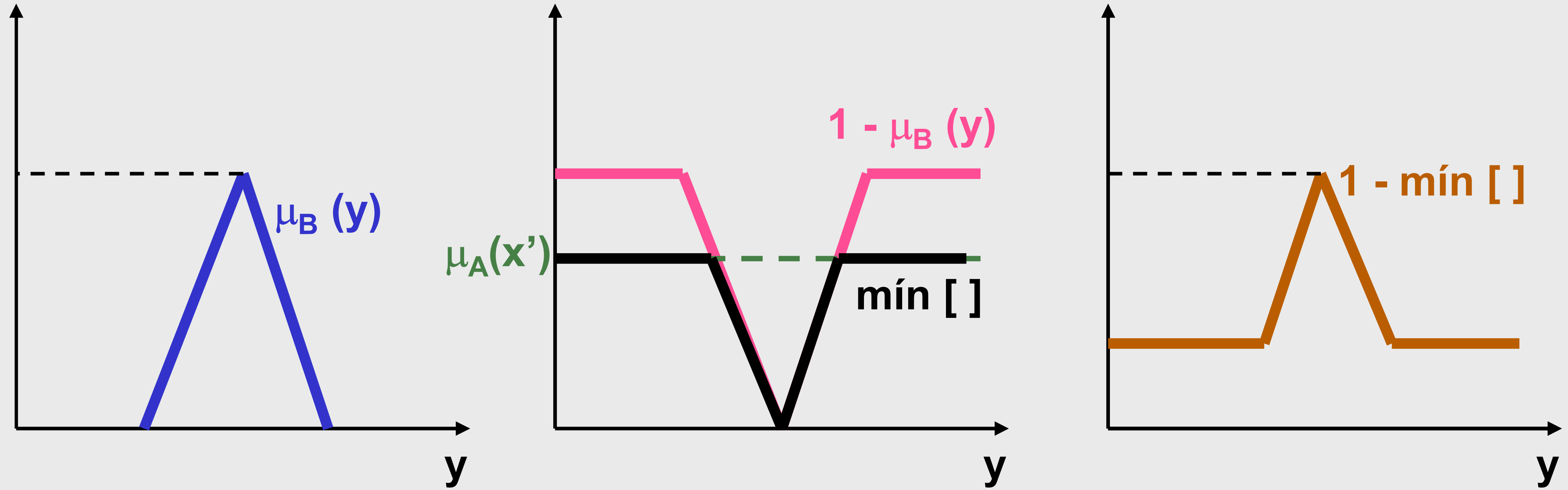
Lógica Fuzzy

Regra (implicação): *se A então B*



LÓGICA FUZZY

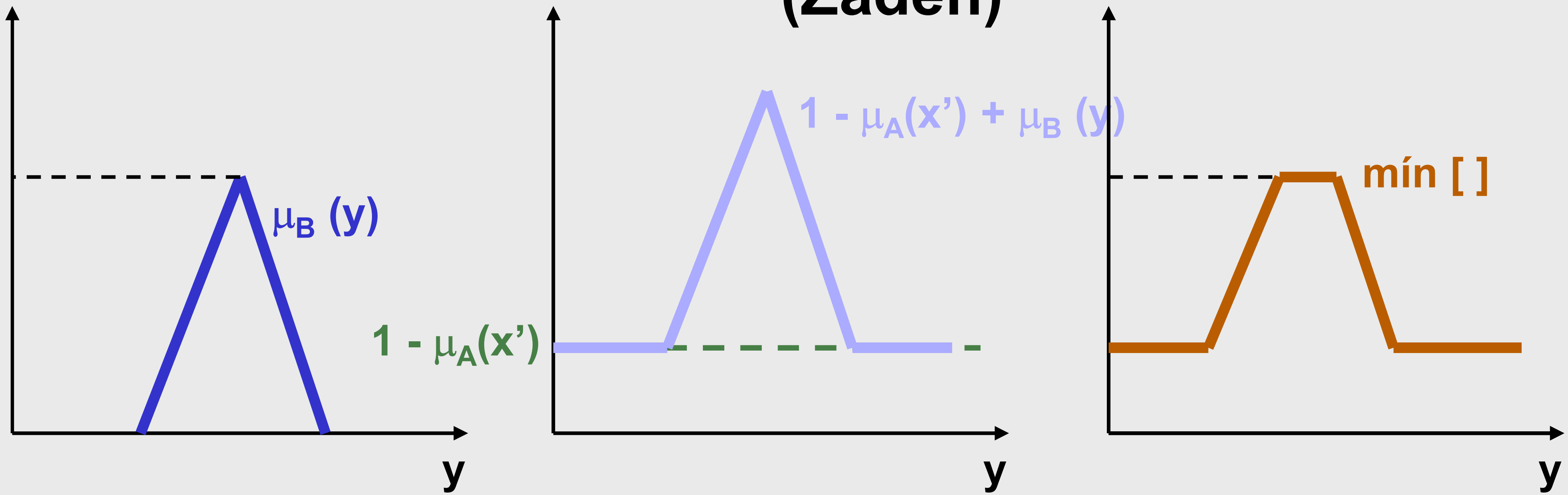
Comprovação: $\mu_{A\rightarrow B}(x',y) = 1 - \text{mín}\,[\mu_A(x'), 1 - \mu_B(y)]$



LÓGICA FUZZY

Comprovação: $\mu_{A\rightarrow B}(x',y) = \text{mín}\,[1, 1 - \mu_A(x') + \mu_B(y)]$

(Zadeh)



Da mesma forma, dada uma certa entrada x=x', o resultado de uma regra específica, cujo consequente é associado com um conjunto fuzzy com suporte finito, é um conjunto fuzzy com suporte infinito

$\Rightarrow$ **NÃO FAZ SENTIDO!!!**

Lógica Fuzzy

- Observa-se que o resultado de uma regra específica, cujo *consequente* é associado a um conjunto fuzzy com *suporte finito*, é um conjunto fuzzy com *suporte infinito*
- Este comportamento, que é observado também para *outras implicações*, *viola o senso comum, de importância em aplicações em engenharia*

↓

foram definidas implicações que não violassem o senso comum : *min* e *produto* [Mamdani e Larsen $\rightarrow$ Controle], mesmo rompendo o vínculo com a lógica proposicional

LÓGICA FUZZY

Implicações Fuzzy: **propostas por MANDANI.**

✧ **Implicação Mínimo**

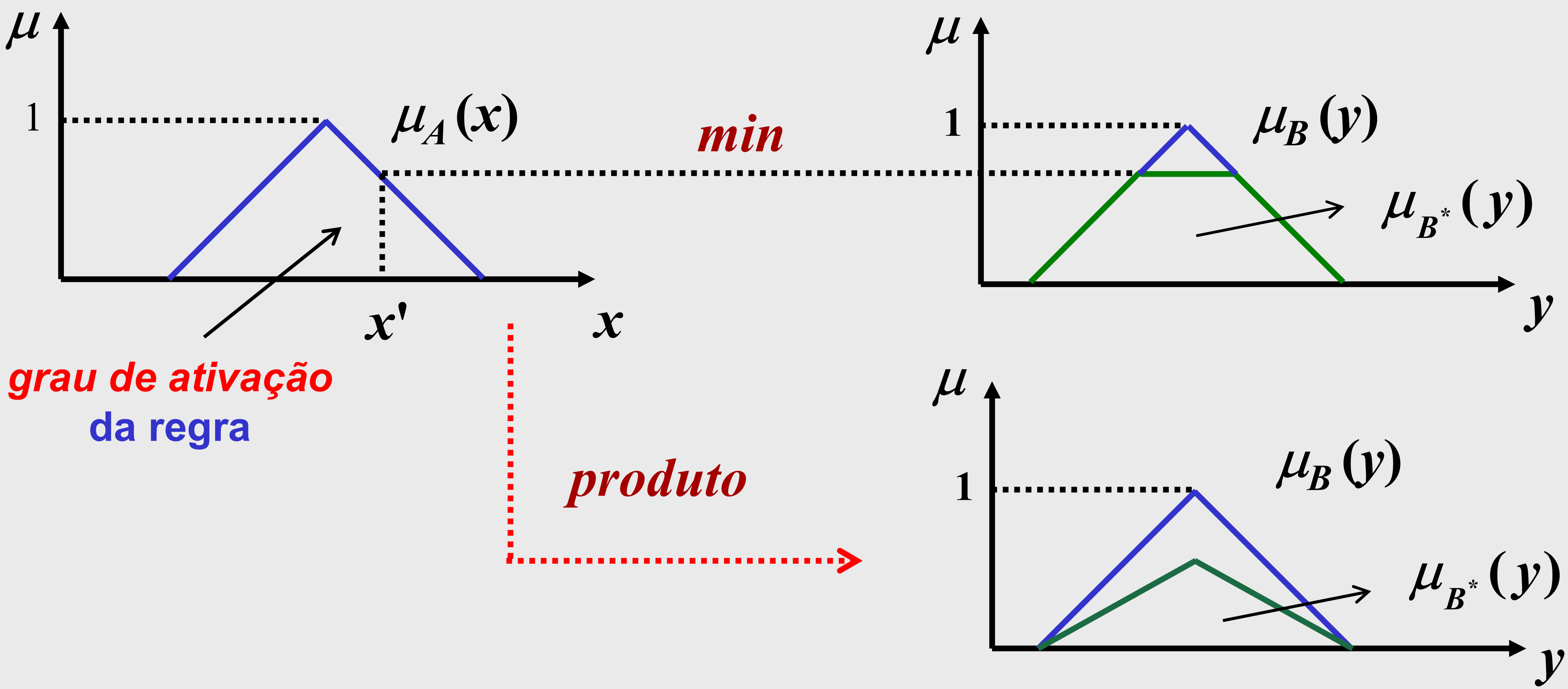
$$\mu_{p \to q}(x,y) = \text{mín}\,[\mu_p(x), \mu_q(y)]$$

✧ **Implicação Produto**

$$\mu_{p \to q}(x,y) = \mu_p(x).\,\mu_q(y)$$

Lógica Fuzzy

Refazendo o *exemplo* com essas implicações:



Lógica Fuzzy

- Com estas implicações, chamadas de ***implicações de engenharia*** [Mendel], observa-se que:
  - o conjunto fuzzy resultante está ***diretamente associado ao consequente da regra***.
  - não existe mais o ***patamar*** (***suporte infinito***)

- Outros operadores também são usados para ***implicação***
  ⇒ geralmente ***normas-t***

Lógica Fuzzy

- Quanto aos demais operadores, utilizam-se, geralmente:
  - conectivo e (f_e) → *normas-t*
  - conectivo *ou* (f_{ou}) → *co-normas-t*
  - *norma-t* no ***modus ponens generalizado*** → *min*

↓

regra de inferência *max-min*

LÓGICA FUZZY

- ***Em resumo:***

1: x é A^* (valor preciso)
2: SE x é A ENTÃO y é B
Conclusão: y é B^*

$$\mu_{B^*}(y) = \mu_{A \to B}(x', y)$$

$$\mu_{A \to B}(x,y) = \begin{cases} \text{mín}\,[\mu_A(x'), \mu_B(y)] \\ \mu_A(x') \cdot \mu_B(y) \end{cases}$$

LÓGICA FUZZY

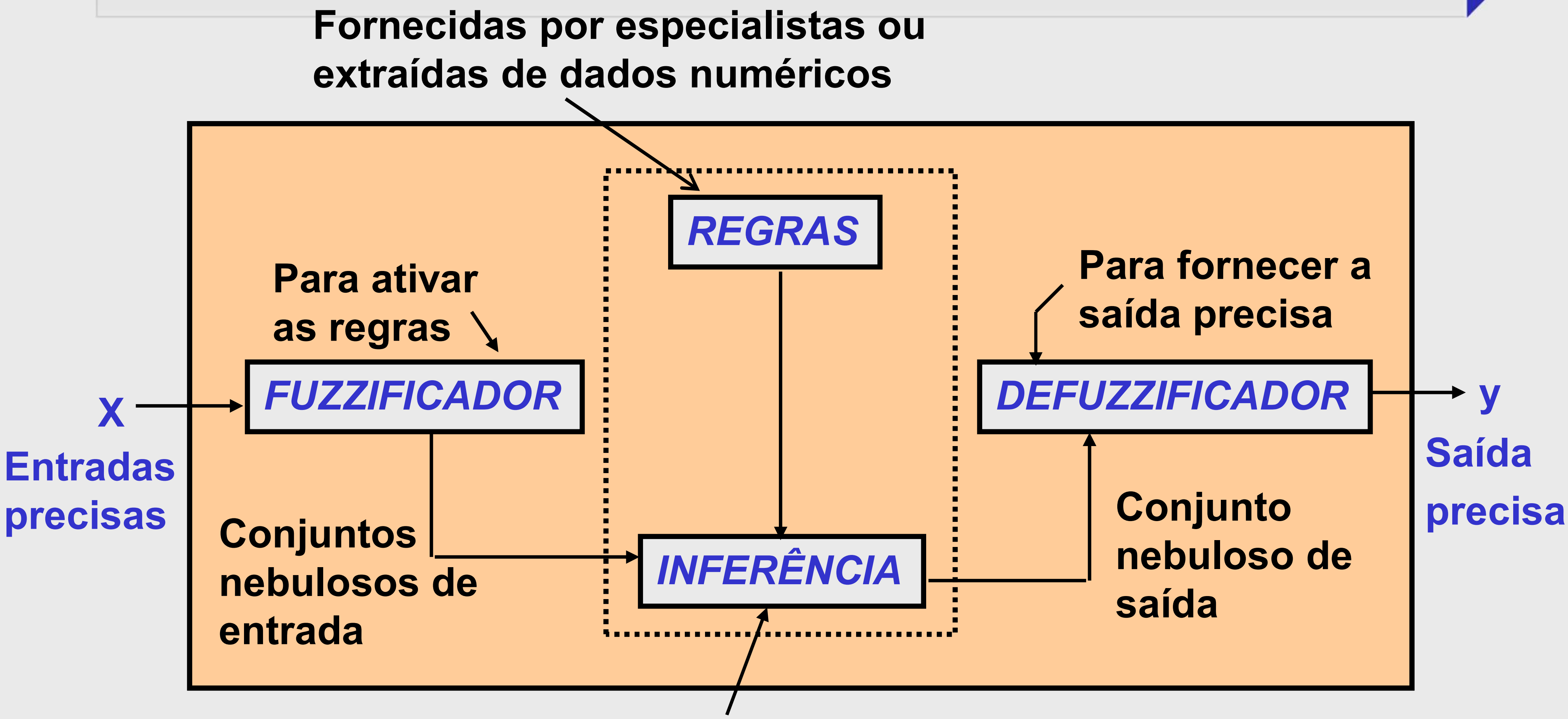
Usando a fórmula do Modus Ponens Generalizado

$$\mu_{B^*}(y) = \sup_{x \in A^*} [\mu_{A^*}(x) * \mu_{A \to B}(x, y)]$$

Substituindo $\mu_{A^*}(x) \begin{cases} = 1, & x = x' \\ = 0, & x \neq x' \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mu_{B^*}(y) &= [\mu_{A^*}(x') * \mu_{A \to B}(x', y)] \\ &= [1 * \mu_{A \to B}(x', y)] \\ &= \mu_{A \to B}(x', y) \end{aligned}$$

SISTEMA FUZZY



- Mapeia fuzzy sets em fuzzy sets
- Determina como as regras são ativadas e combinadas

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

- ***Fuzzificação***: ***mapeamento*** de dados precisos para os conjuntos fuzzy (de entrada)
- ***Defuzzificação***: ***interpretação*** do conjunto fuzzy de saída

↓

o processo de ***defuzzificação*** produz uma ***saída precisa***, a partir do conjunto fuzzy de saída obtido pelo sistema de inferência

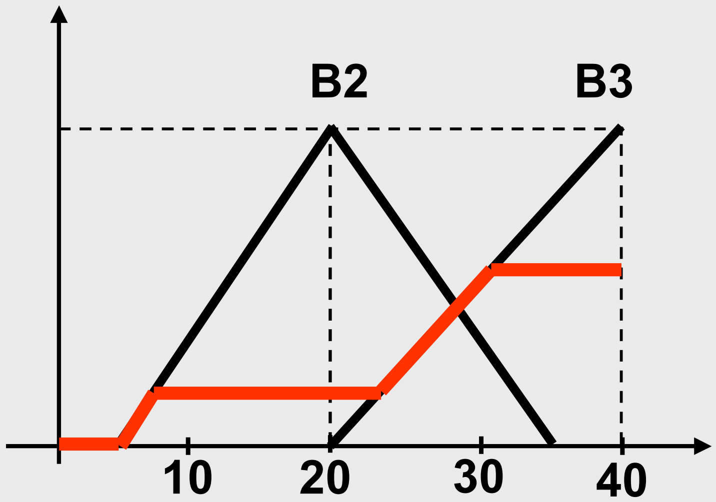
DEFUZZIFICAÇÃO

DEFUZZIFICAÇÃO

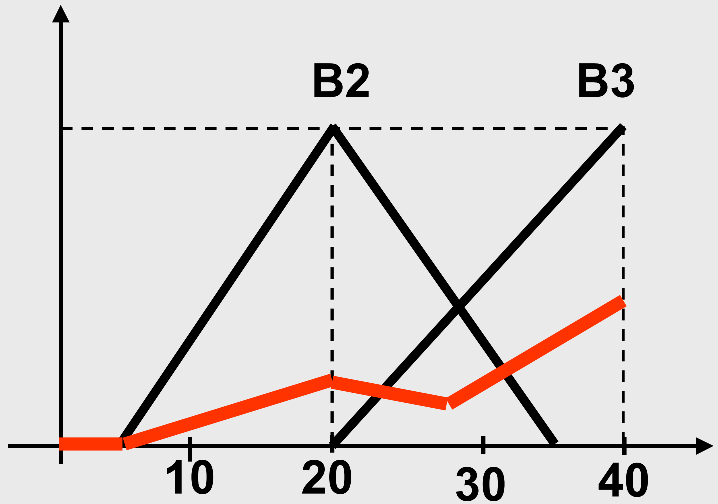
- Existem vários métodos diferentes
- Os mais utilizados são:
  - Máximo
  - Média dos Máximos
  - Centróide (ou Centro de Gravidade)
  - Altura
  - Altura Modificada

DEFUZIFICAÇÃO

- ***MÁXIMO:***
  - Examina-se o conjunto fuzzy de saída e escolhe-se, como valor preciso, o valor no universo de discurso da variável de saída para o qual o grau de pertinência (μ_B (y)) é máximo.



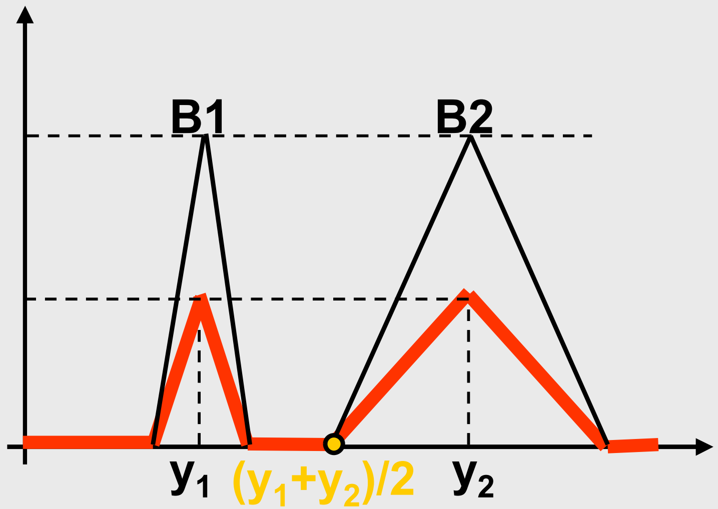
Qual valor escolher se o máximo for uma faixa?



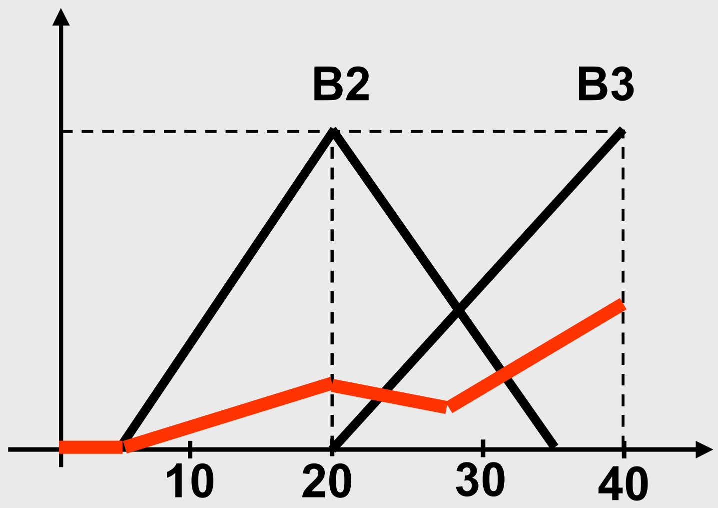
O valor máximo é o limite superior do Universo de Discurso!!

DEFUZIFICAÇÃO

- ***MÉDIA DOS MÁXIMOS:***
  - A saída precisa é obtida tomando-se a média entre os dois elementos extremos no universo de discurso que correspondem aos maiores valores da função de pertinência do conjunto fuzzy de saída.



O valor preciso possui grau de pertinência igual a ZERO!!



O valor preciso é o limite superior do Universo de Discurso!!

DEFUZZIFICAÇÃO

- ***Centróide***: a saída precisa (y_C) é o valor no universo que corresponde ao centro de gravidade do conjunto fuzzy de saída (B)

Contínuo

$$y_C = \frac{\int y\mu_B(y)dy}{\int \mu_B(y)dy}$$

Discreto

$$y_C = \frac{\sum y_i\mu_B(y_i)}{\sum \mu_B(y_i)}$$

Problema: dificuldade no cálculo!

DEFUZZIFICAÇÃO

- ***Altura:*** calcula-se

$$\boxed{y_h = \frac{\sum_l y^l \mu_{B^l}(y^l)}{\sum_l \mu_{B^l}(y^l)}}$$

y^l: valor no universo correspondente ao ***centro de gravidade*** do conjunto fuzzy B^l, associado ao grau de ativação da regra R^l

DEFUZIFICAÇÃO

- ***ALTURA:***
  - Este método é simples porque o Centro de Gravidade das funções de pertinência mais comuns é conhecido a priori:
    - Triangular (simétrica) $\Rightarrow$ ápice do triângulo
    - Guassiana $\Rightarrow$ valor central da função
    - Trapezoidal (simétrica) $\Rightarrow$ ponto médio do suporte

DEFUZIFICAÇÃO

- ***ALTURA:***
  - ***Problema:***

Só utiliza o centro do suporte da função de pertinência do consequente

↓

Qualquer que seja *a largura da função* de pertinência, o método fornece *o mesmo resultado!*

DEFUZZIFICAÇÃO

- ***Altura modificada:*** calcula-se

$$y_{mh} = \frac{\sum_l y^l \mu_{B^l}(y^l)/(\delta^l)^2}{\sum_l \mu_{B^l}(y^l)/(\delta^l)^2}$$

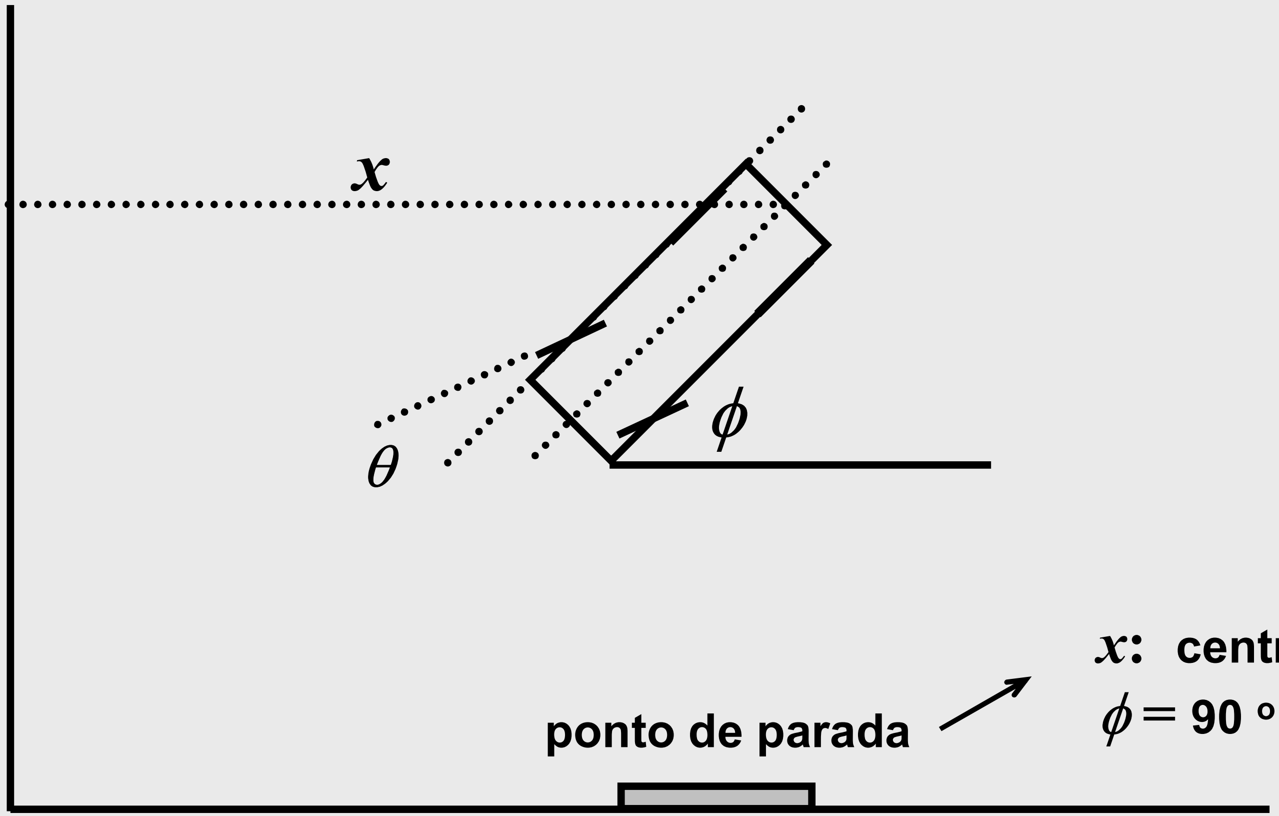
δ^l: medida da **extensão do suporte** do consequente da Regra R^l

funções de pertinência triangulares e trapezoidais ⟶ suporte do conjunto.

funções de pertinência gaussianas ⟶ desvio padrão

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Exemplo: Estacionamento de um veículo



x: central (CE)

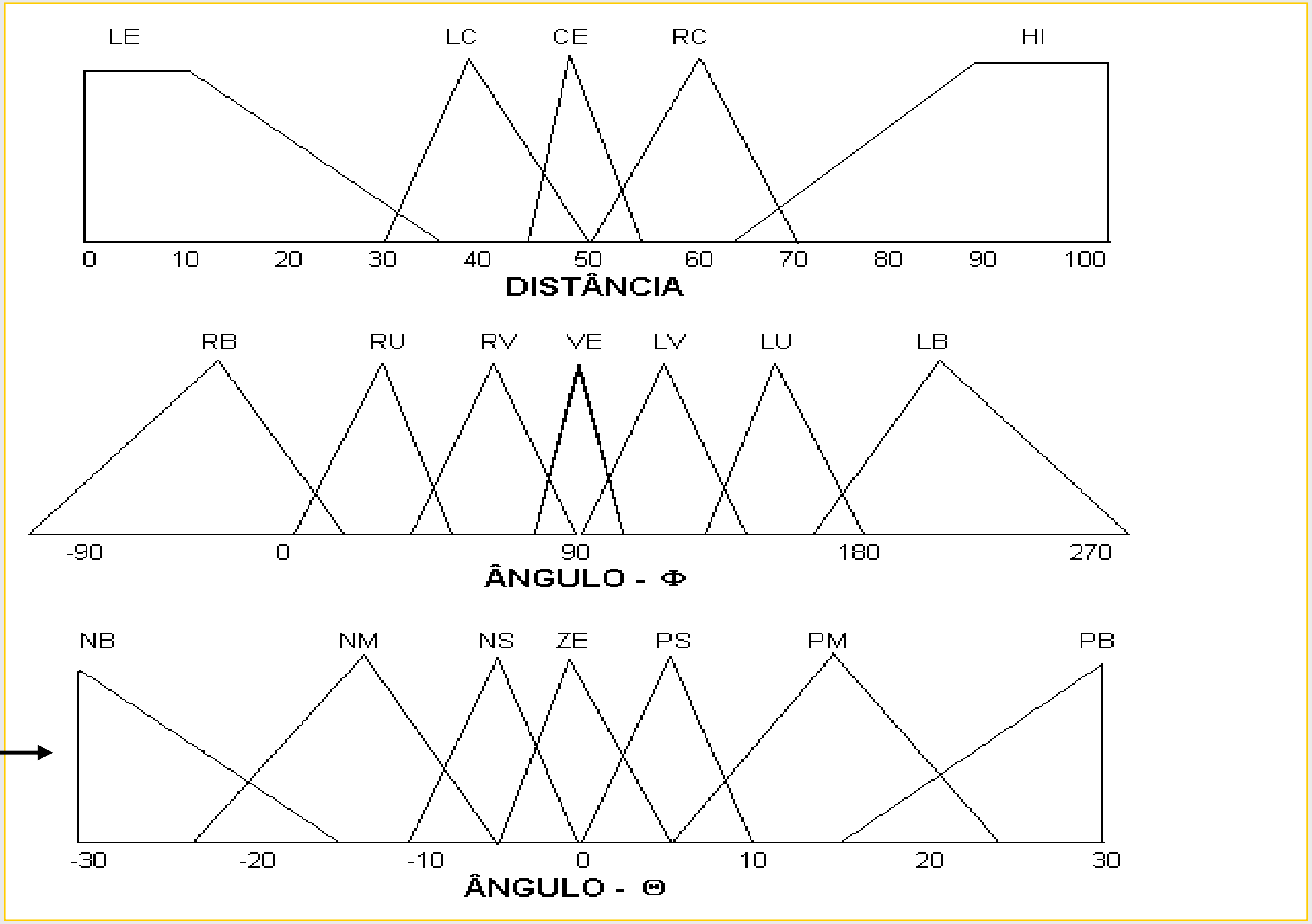
$\phi = 90°$ ou vertical (VE)

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Conjuntos fuzzy:

Variáveis de entrada

Variável de saída



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

BASE DE REGRAS:* *FUZZY ASSOCIATIVE MEMORY

ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

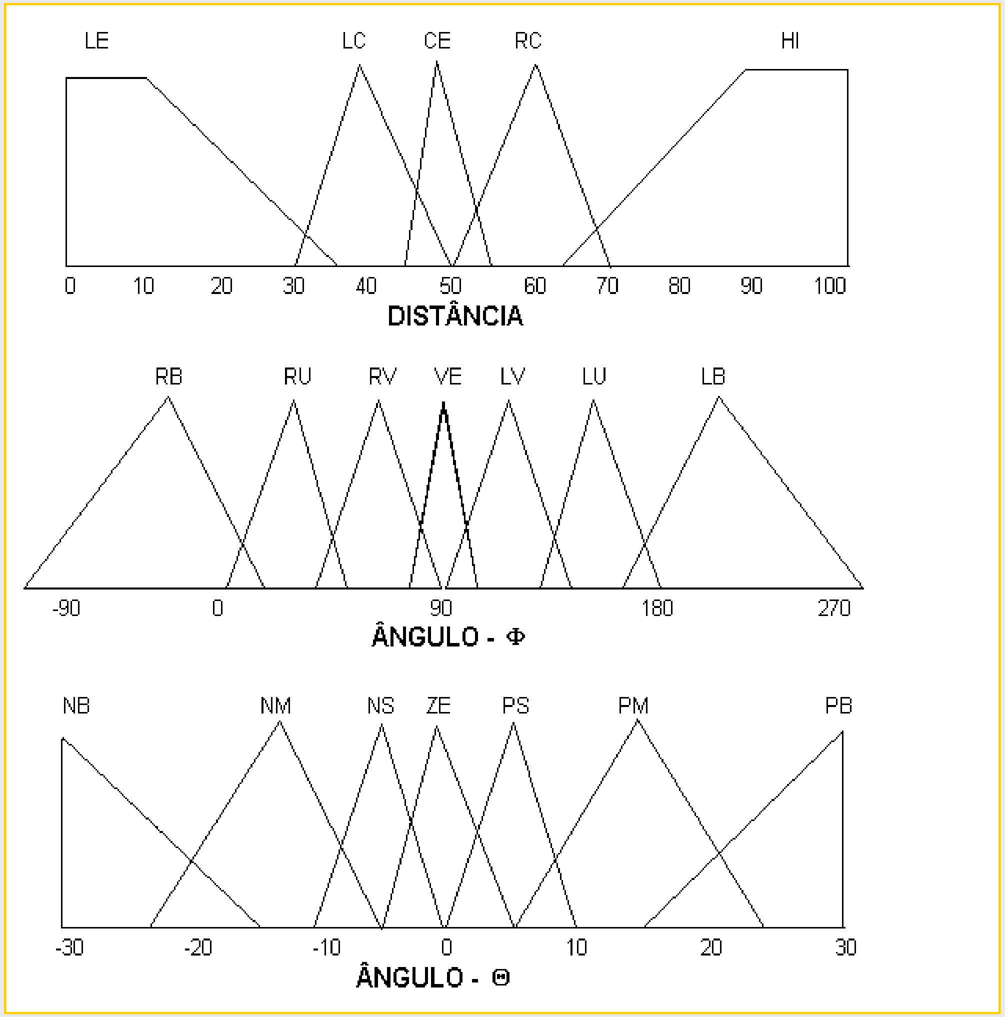
ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS

***Regra:* *se* (x é LE) *e* (ϕ é RB) *então* (θ é PS)**

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Entradas precisas: $x = 47{,}5\text{m} \quad \phi = 99°$

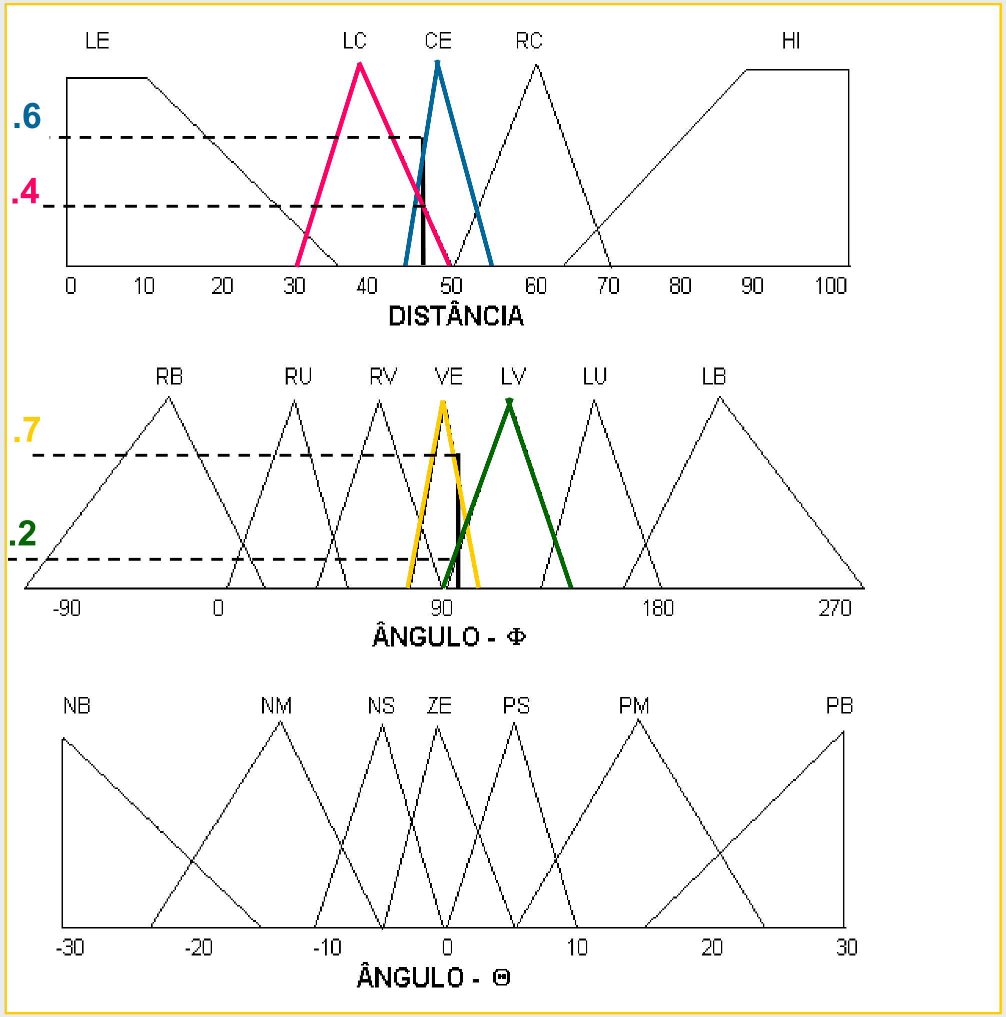
ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Entradas precisas: $x = 47{,}5\text{m}$ $\phi = 99°$

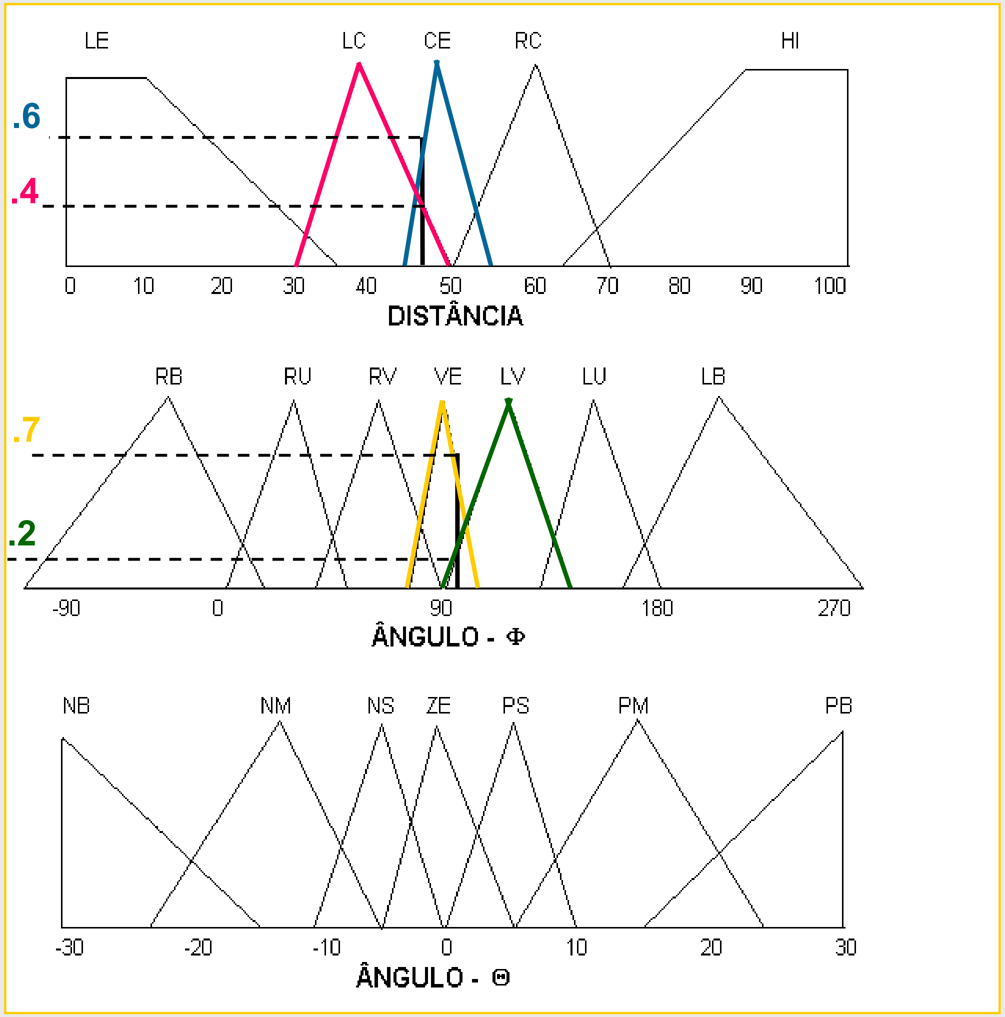
ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Entradas precisas: $x = 47{,}5\text{m}$ $\phi = 99°$

ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Operadores considerados *neste exemplo*:

- conectivo e (f_e) → ***min***
- implicação → ***min***
- ***norma-t*** no ***modus ponens generalizado*** → ***min***

  (regra de inferência – composição de relações)
- conectivo ***ou*** (f_{ou}) → ***max***

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Dois antecedentes: $\mu_{B^*}(\theta) = (\mu_{A_1}(x') \wedge \mu_{A_2}(\phi')) \wedge \mu_B(\theta)$

Para cada uma das regras ativadas, tem-se:

(cf. figuras a seguir)

$$\mu_{NM^*}(\theta) = (\mu_{LC}(x') \wedge \mu_{VE}(\phi')) \wedge \mu_{NM}(\theta) = (0{,}4 \wedge 0{,}7) \wedge \mu_{NM}(\theta) = 0{,}4 \wedge \mu_{NM}(\theta)$$

$$\mu_{NM^*}(\theta) = (\mu_{LC}(x') \wedge \mu_{LV}(\phi')) \wedge \mu_{NM}(\theta) = (0{,}4 \wedge 0{,}2) \wedge \mu_{NM}(\theta) = 0{,}2 \wedge \mu_{NM}(\theta)$$

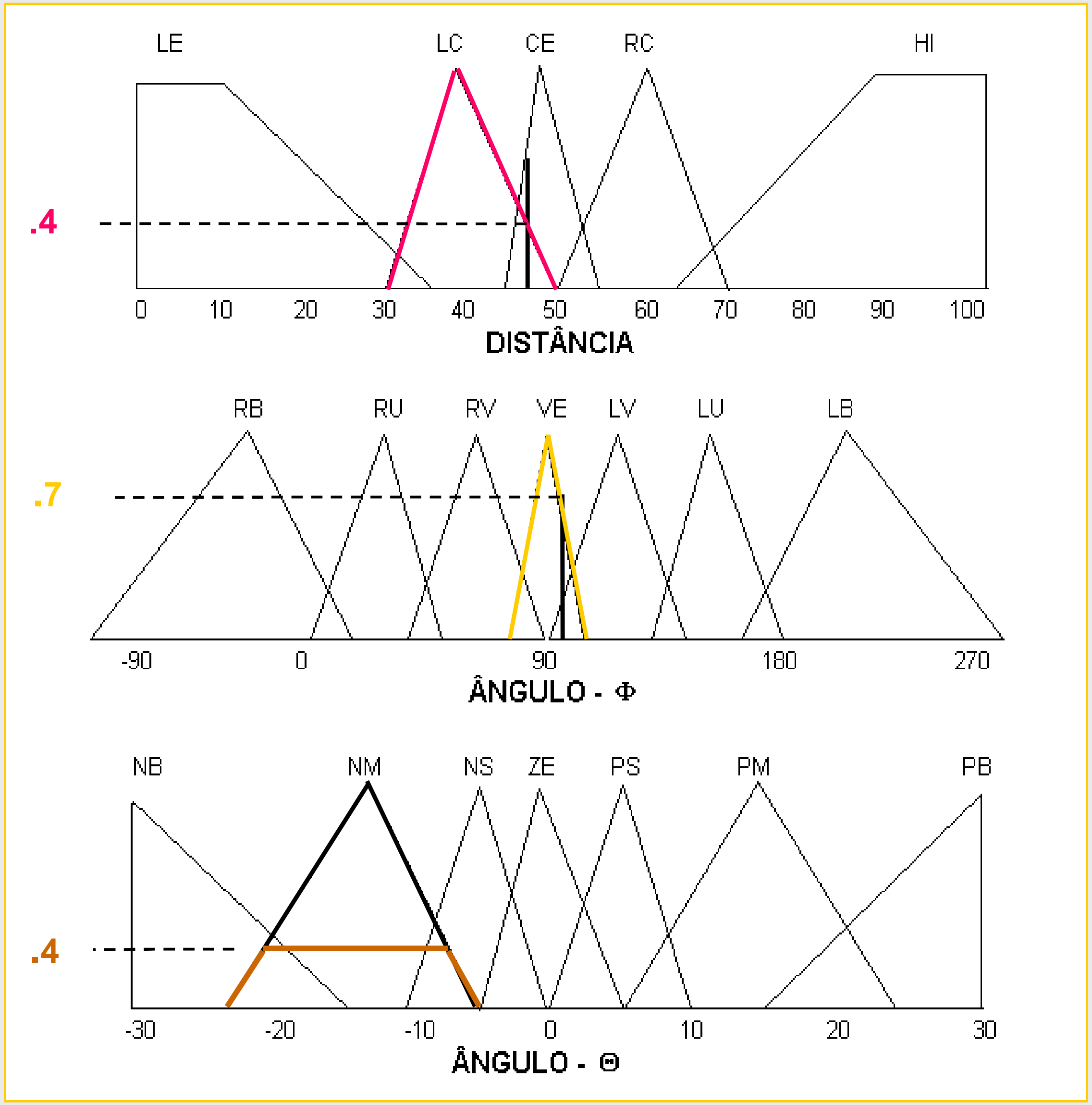
$$\mu_{ZE^*}(\theta) = (\mu_{CE}(x') \wedge \mu_{VE}(\phi')) \wedge \mu_{ZE}(\theta) = (0{,}6 \wedge 0{,}7) \wedge \mu_{ZE}(\theta) = 0{,}6 \wedge \mu_{ZE}(\theta)$$

$$\mu_{NS^*}(\theta) = (\mu_{CE}(x') \wedge \mu_{LV}(\phi')) \wedge \mu_{NS}(\theta) = (0{,}6 \wedge 0{,}2) \wedge \mu_{NS}(\theta) = 0{,}2 \wedge \mu_{NS}(\theta)$$

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

$$\mu_{NM^*}(\theta) = (\mu_{LC}(x') \wedge \mu_{VE}(\phi')) \wedge \mu_{NM}(\theta) = (0{,}4 \wedge 0{,}7) \wedge \mu_{NM}(\theta) = 0{,}4 \wedge \mu_{NM}(\theta)$$

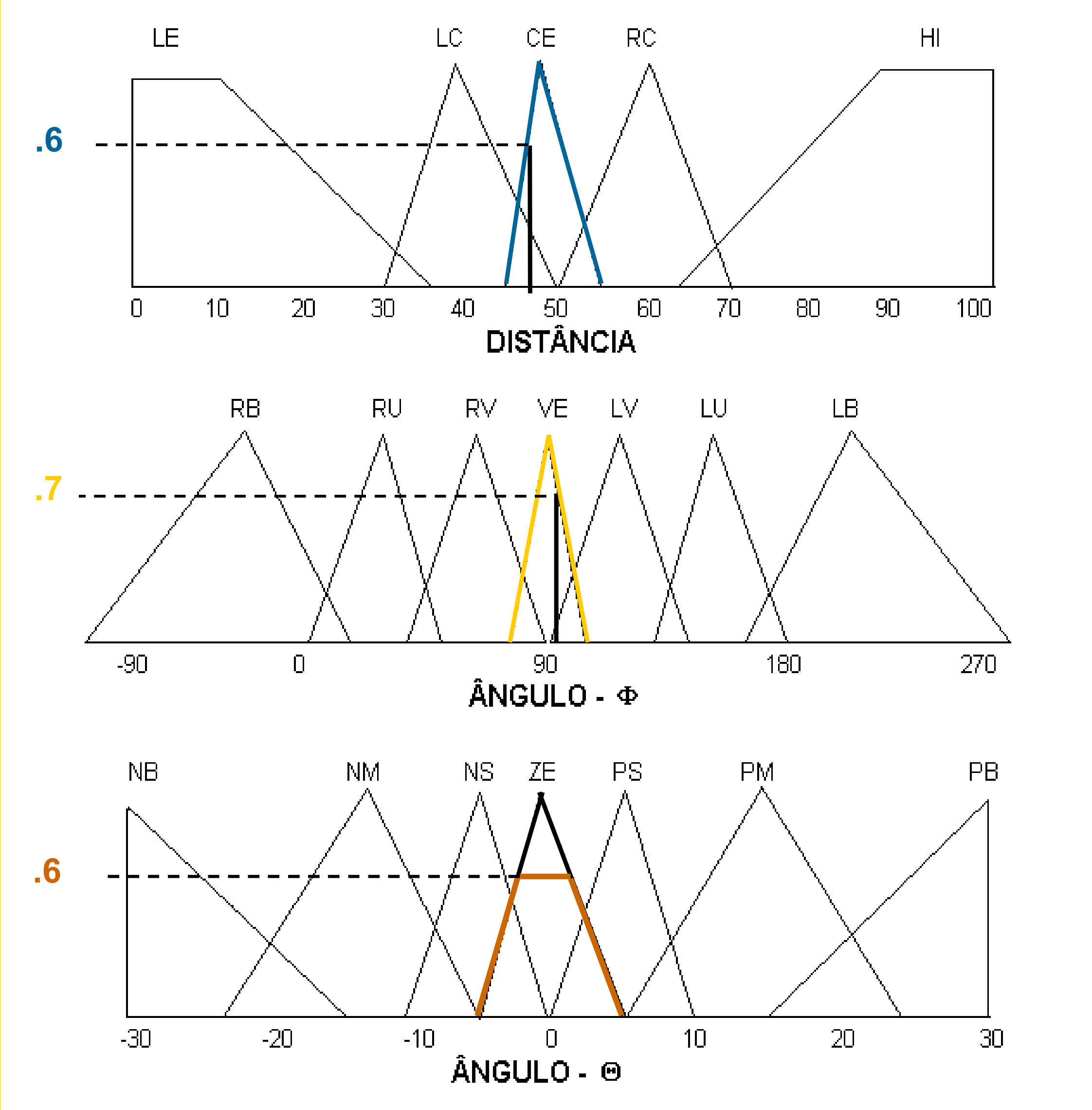
ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

$$\mu_{ZE^*}(\theta) = (\mu_{CE}(x') \wedge \mu_{VE}(\phi')) \wedge \mu_{ZE}(\theta) = (0{,}6 \wedge 0{,}7) \wedge \mu_{ZE}(\theta) = 0{,}6 \wedge \mu_{ZE}(\theta)$$

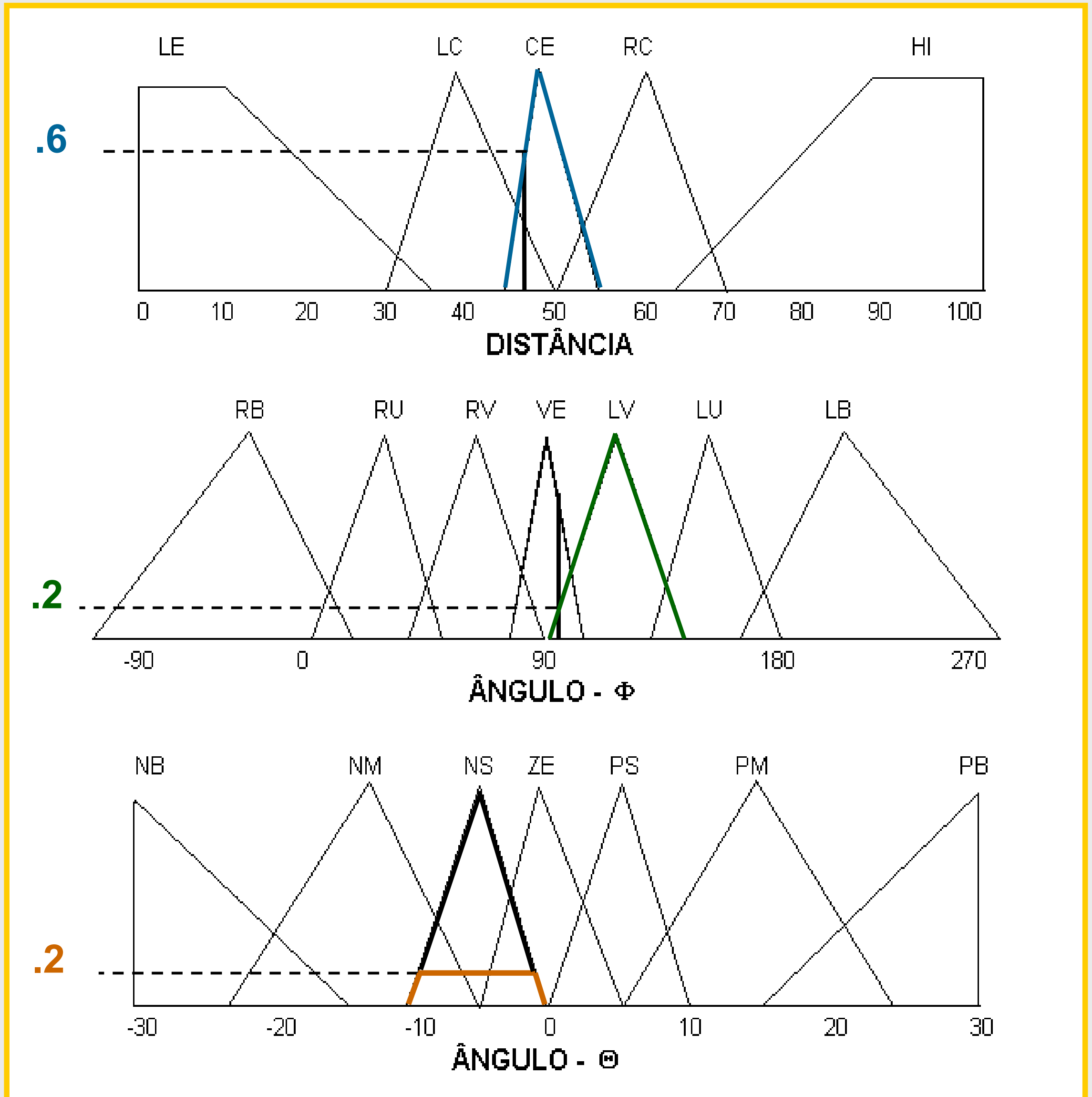
ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

$$\mu_{NS^*}(\theta) = (\mu_{CE}(x') \wedge \mu_{LV}(\phi')) \wedge \mu_{NS}(\theta) = (0{,}6 \wedge 0{,}2) \wedge \mu_{NS}(\theta) = 0{,}2 \wedge \mu_{NS}(\theta)$$

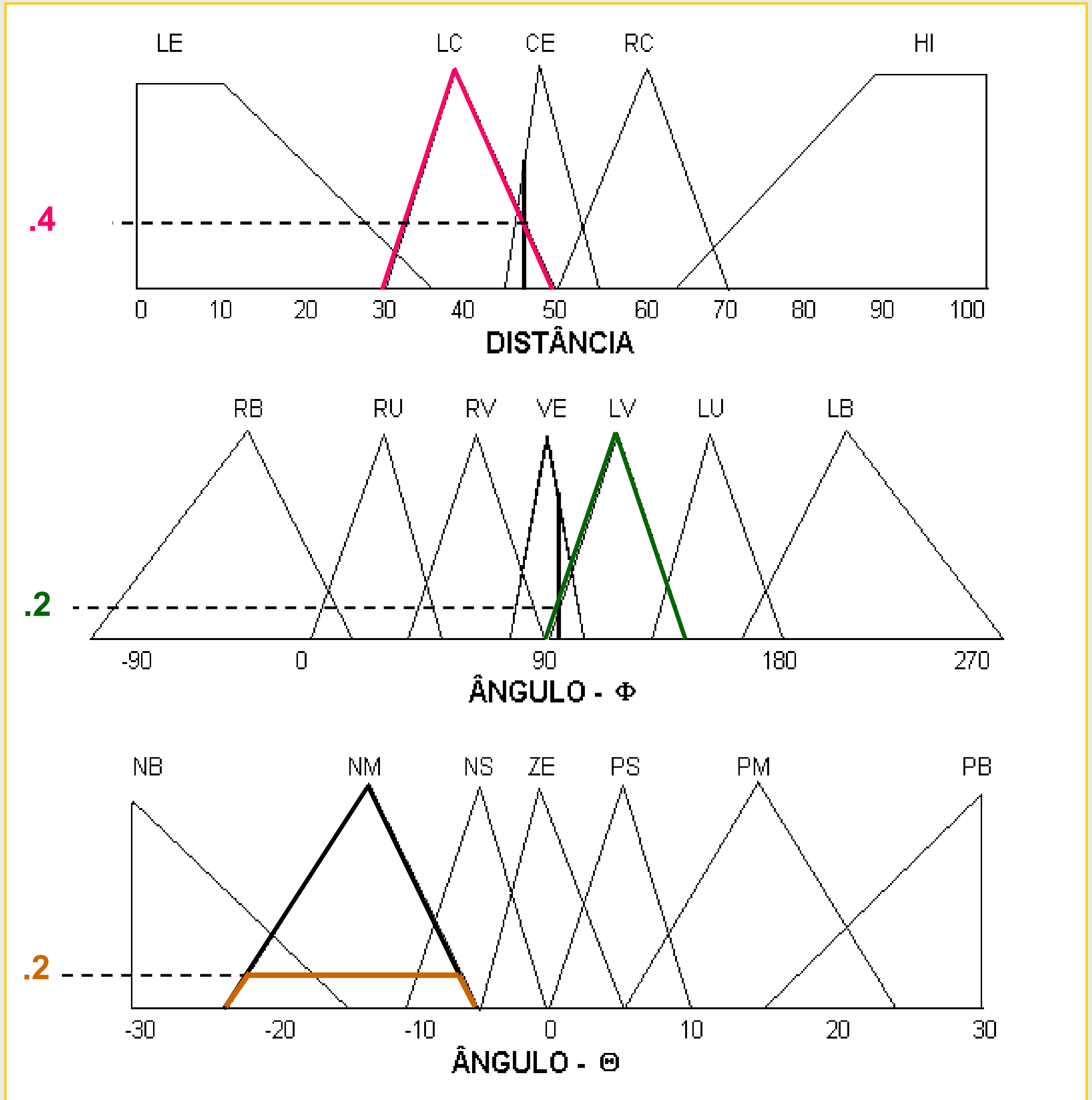
ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

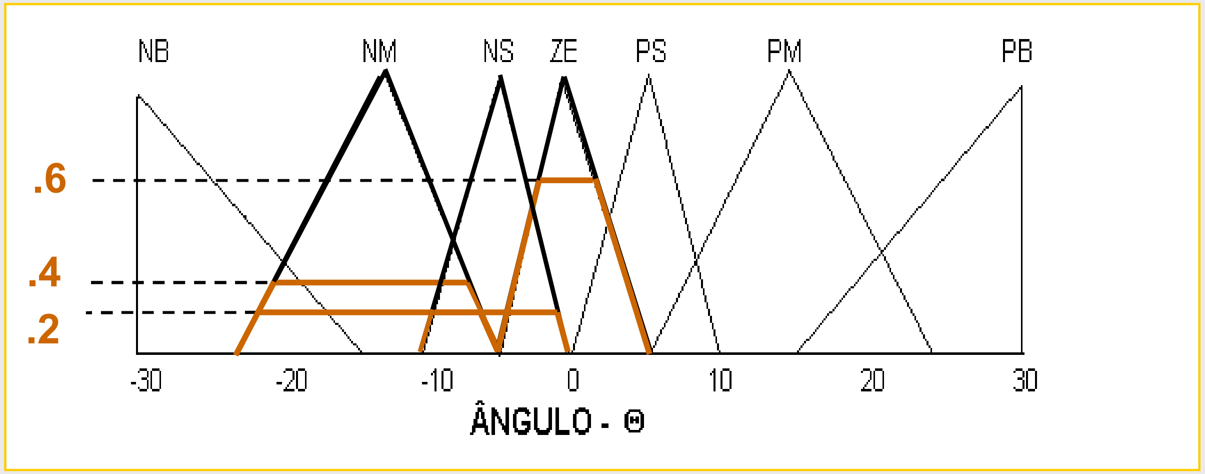
$$\mu_{NM^*}(\theta) = (\mu_{LC}(x') \wedge \mu_{LV}(\phi')) \wedge \mu_{NM}(\theta) = (0{,}4 \wedge 0{,}2) \wedge \mu_{NM}(\theta) = 0{,}2 \wedge \mu_{NM}(\theta)$$

ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



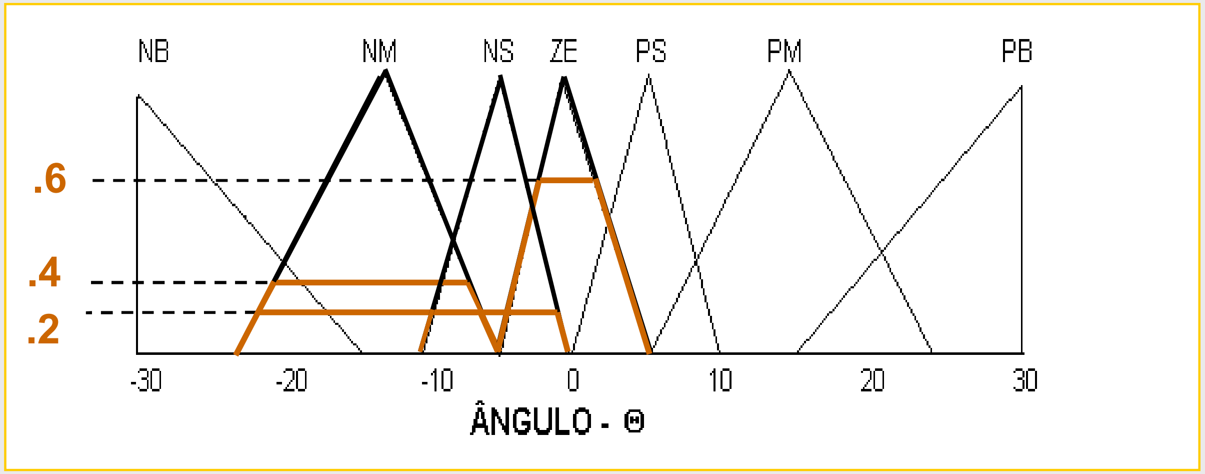
SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

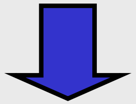
União dos consequentes de cada regra

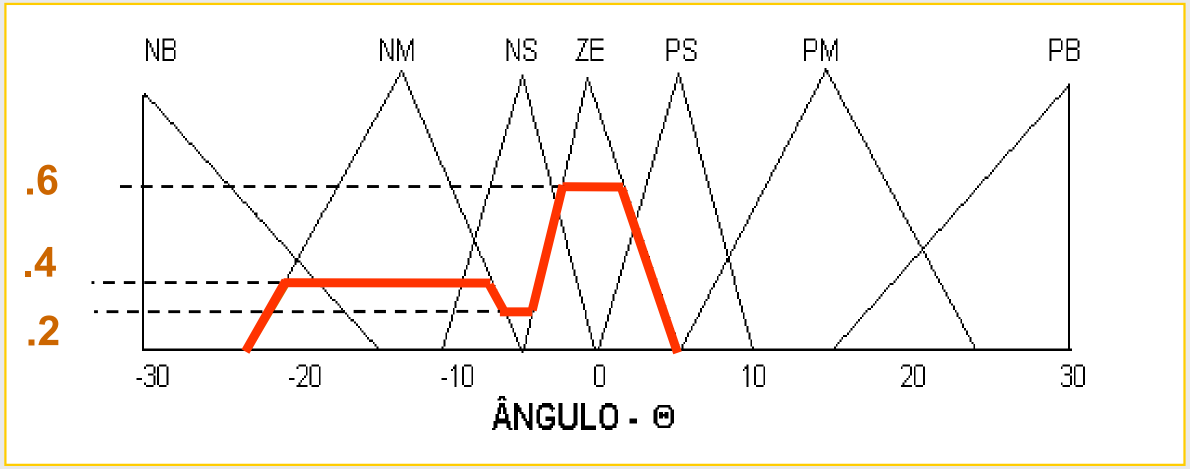


SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

União dos consequentes de cada regra

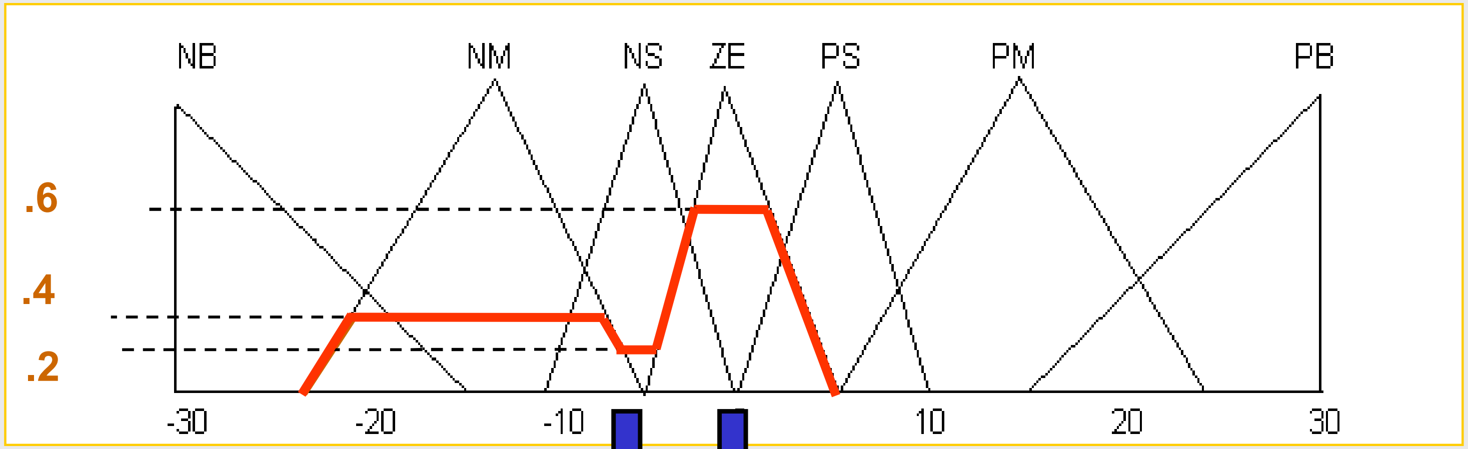






SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Defuzzificação:



COG **MOM**

considera todas as regras

forma dos conjuntos é importante

considera somente as regras com o *maior grau de ativação*

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Número de conjuntos **(ou de funções de pertinência)** *dos antecedentes*

⇓

Número de regras possíveis

(5 x 7 = 35, *no exemplo*)

muitos conjuntos ⇒

- *dificuldade na construção da base de regras*
- *maior custo computacional*
- *menor interpretabilidade (linguística)*

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Formas das funções de pertinência

⇓

- *arbitrárias, de início*
- *ajustadas de acordo com o desempenho*

⇓

sistemas *neuro-fuzzy* e *fuzzy-genéticos*

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Conclusão $\Rightarrow$ **o desempenho de um sistema fuzzy é afetado por:**

- **base de regras**
- **número e forma dos conjuntos fuzzy**
- **operador de implicação**
- **método de defuzzificação**

COMENTÁRIOS

Números Fuzzy: **conjuntos fuzzy definidos no conjunto dos números reais**

Aplicações em:

- ***Programação Linear Fuzzy***
- ***Previsão***
- ***Planejamento***

Aritmética Fuzzy

base do *Raciocínio Aproximado*

COMENTÁRIOS

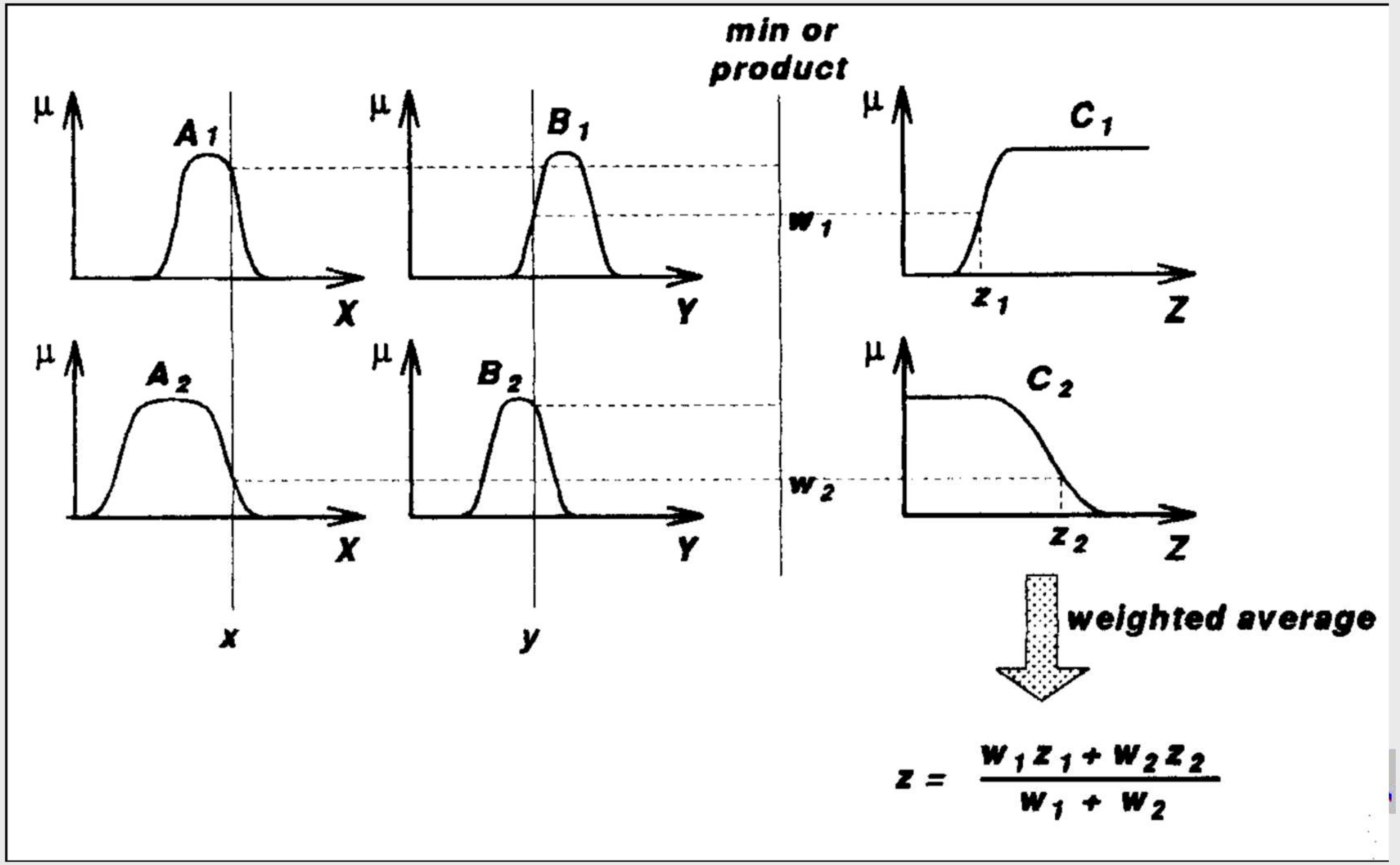
Outros Sistemas de Inferência Fuzzy

Tsukamoto $\Rightarrow$ ***se x é A e y é B então z é C***

monotônica

Regra 1

Regra 2



COMENTÁRIOS

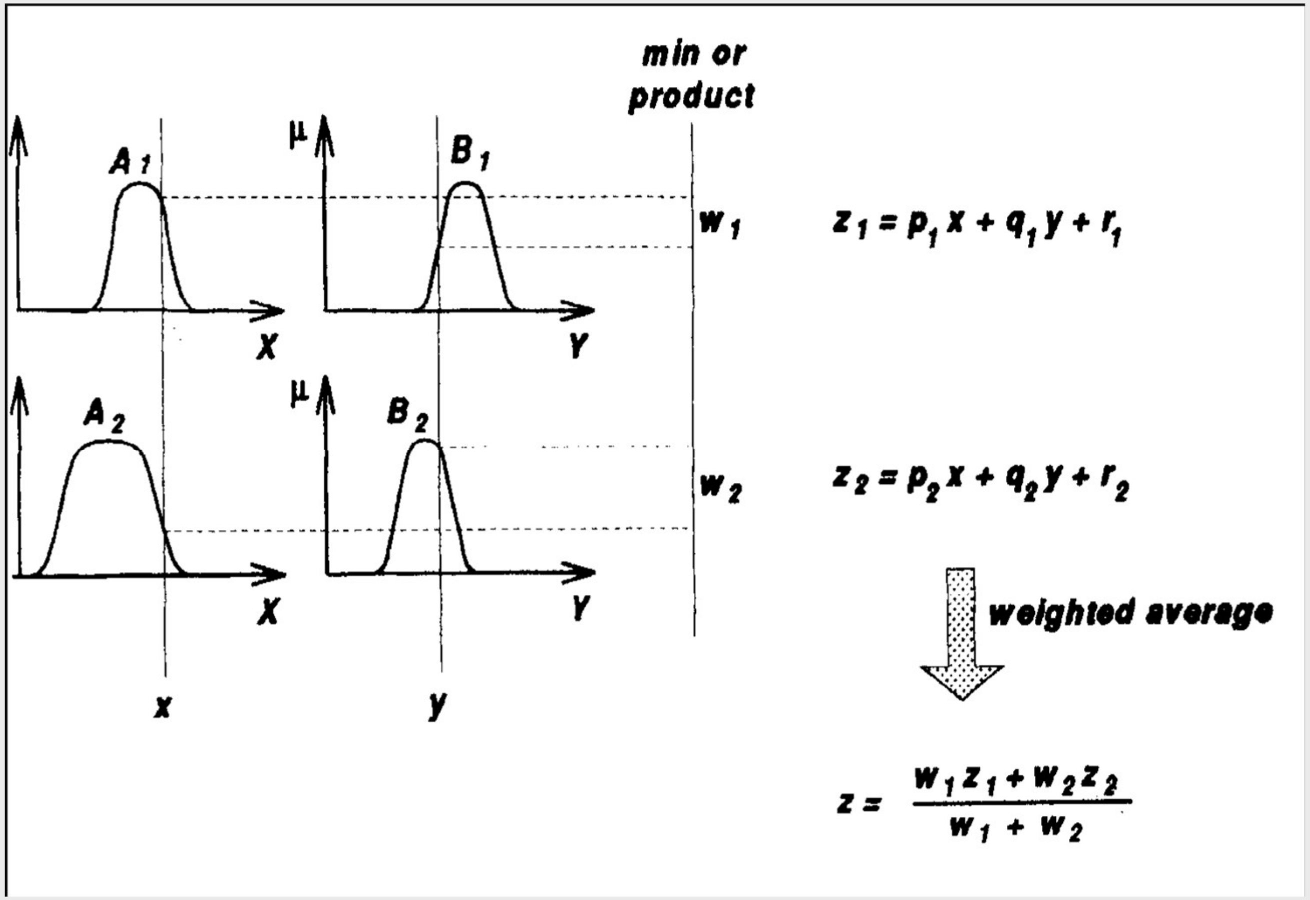
Outros Sistemas de Inferência Fuzzy

Takagi-Sugeno-(Kang) $\Rightarrow$ ***se x é A e y é B***

então z = f(x,y)

Regra 1

Regra 2



COMENTÁRIOS

Áreas de aplicação de Sistemas Fuzzy e Híbridos:

(bibliografia abundante)

- Controle (*NEFCON, RL-NFHP*)
- Classificação (*NEFCLASS, NFHB-Class*)
- Aproximação de Funções (*NEFPROX, NFHB*)
- Previsão de Séries (*extração automática de regras*)
- Fuzzy *clustering*
- *etc.*

LÓGICA FUZZY

Departamento de Engenharia Elétrica
PUC-Rio

ICA

INTRODUÇÃO

- ***Lógica Fuzzy*** $\rightarrow$
  - *inspirada na lógica tradicional*
  - *procura modelar os modos imprecisos do raciocínio que têm um papel fundamental na habilidade humana de tomar decisões*

ICA

INTRODUÇÃO

- *Serve de base para o raciocínio aproximado ("approximate reasoning")*
- *fornece o ferramental matemático para o tratamento de informações de caráter impreciso ou vago*

ICA

INTRODUÇÃO

- *aplicações em diversas áreas do conhecimento:*
  - *Controle*
    - *diretamente sobre o processo*
    - *supervisão*
  - *previsão de séries*
  - *classificação*

ICA

INTRODUÇÃO

- *principais vantagens:*
  - *formulação através de regras linguísticas*
  - *não necessita de modelo matemático formal*
- *regras linguísticas:*
  - *obtidas através de especialistas*
  - *geradas através de dados numéricos*

Evolução da área

- *Aplicações Comerciais e Industriais*.

ANO	# de APLICAÇÕES
1986	8
1987	15
1988	50
1989	100
1990	150
1991	300
1992	800
1993	1500

- *Devido à resistência dos cientistas, a Lógica Fuzzy cresceu no mercado comercial para depois se desenvolver nas universidades*

Aplicações Comerciais

- **Controle**
  - Controle de Aeronave (Rockwell Corp.)
  - Operação do Metrô de Sendai (Hitachi)
  - Transmissão Automática (Nissan, Subaru)
  - Space Shuttle Docking (NASA)
- **Otimização e Planejamento**
  - Elevadores (Hitachi, Fujitech, Mitsubishi)
  - Análise do Mercado de Ações (Yamaichi)
- **Análise de Sinais**
  - Ajuste da Imagem de TV (Sony)
  - Autofocus para Câmera de Vídeo (Canon)
  - Estabilizador de Imagens de Vídeo (Panasonic)

ICA

HISTÓRICO

- *Bivalência* ➔ desde Aristóteles, a Lógica Clássica baseia-se em bivalência: *V,F*
  - (Lei da não-contradição $A \cap \sim A = \phi$)
- *Multivalência* ➔ desenvolvida por Lukasiewicz para lidar com o Princípio da Incerteza na Mecânica Quântica
  - 1920 - 3 valores: *V, F, IN*
  - 1930 - n valores
- *Lógica Fuzzy* ➔ desenvolvida por L. A. Zadeh (1965): os elementos pertencem a um certo conjunto com diferentes *graus de pertinência*

ICA

SISTEMA FUZZY

É um **sistema** ***não-linear*** **de mapeamento de um** ***vetor de entrada*** **em uma** ***saída escalar*****, capaz de incorporar tanto o** ***conhecimento objetivo*** **quanto o** ***conhecimento subjetivo.***

ICA

SISTEMA FUZZY

- ***Conhecimento Objetivo***
  - Usado na formulação de problemas de engenharia ➔ **modelos matemáticos**
- ***Conhecimento Subjetivo***
  - Representa a **informação lingüística** que é geralmente impossível de quantificar via matemática tradicional

ICA

SISTEMA FUZZY

– *Princípio da Incompatibilidade (Zadeh)*

" Conforme a *complexidade* de um sistema *aumenta* , nossa habilidade de fazer *declarações precisas* e *significativas* sobre o seu comportamento *diminui*, até alcançar um limite além do qual *precisão* e *relevância* tornam-se características mutuamente *exclusivas*"

SISTEMA FUZZY

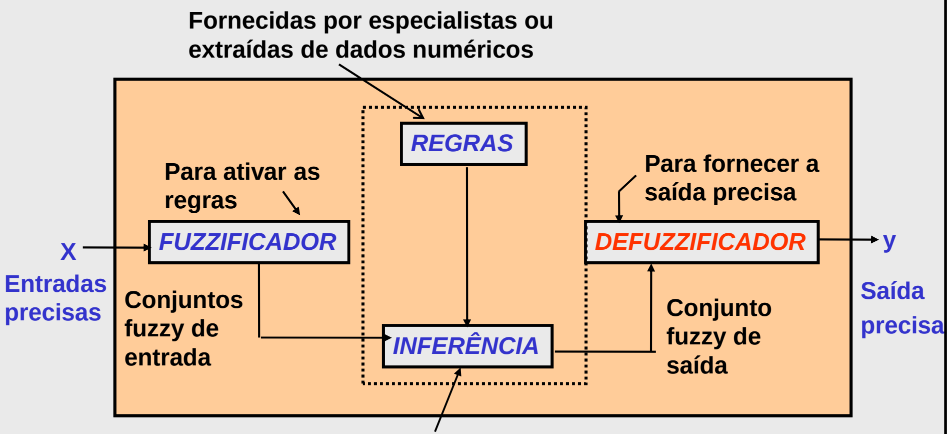
"The closer one looks at a real world problem, the fuzzier becomes its solution" (Zadeh)

↓

A *Lógica Fuzzy* fornece um método para *reduzir* e *explicar* a *complexidade do sistema.*

SISTEMA FUZZY

Visão Geral:



- Mapeia fuzzy sets em fuzzy sets
- Determina como as regras são ativadas e combinadas

REGRAS FUZZY

- ***Exemplo:***

antecedente

SE u_1 É *muito quente* E u_2 É *baixo*

ENTÃO gire v *um pouco para a direita*

consequente

- ***Conceitos Importantes:***
  - Variáveis Linguísticas
  - Quantificadores (muito, um pouco)
  - Conexões Lógicas
  - Implicação

Características de Sistemas Fuzzy

- *Modelagem de Problemas Complexos*
  – capazes de lidar com *problemas complexos*, com propriedades *não-lineares*, por exemplo.
- *Modelagem Cognitiva:*
  – têm a habilidade de codificar o *conhecimento* de forma similar ao modo *como os especialistas* expressam o processo de decisão.

ICA

Características de Sistemas Fuzzy

- *Modelagem de sistemas envolvendo múltiplos especialistas:*
  – capazes de conciliar informações de *especialistas consistentes* (colaboradores) ou *conflitantes* (contraditórios)

Exemplo: Preço deve ser baixo - *Marketing*
Preço deve ser alto - *Financeira*
Preço deve ser 2 x o custo - *Produção*

- *Complexidade Reduzida:*
  – possuem "poucas" regras, similares às expressas por especialistas

ICA

Características de Sistemas Fuzzy

- *Manipulação de Incertezas:*
  - lidam de forma *consistente* e *matemática* com *incertezas*

→Comparação com sistema especialista

① Fuzzy: SE altura É alta ENTÃO peso É pesado

② S. Especialista: SE altura É > 1.78 E < 1.95
ENTÃO peso É 90kg F.C. = 0.85

ICA

Formas de Imprecisão

- *Inexatidão:*
  - Corresponde à precisão da nossa *habilidade de medir* (erros humanos).

    ↓
  - Tenta-se corrigir o erro através de várias medidas.

ICA

Formas de Imprecisão

- *Precisão e Acuidade:*

grau de *exatidão* com o qual se pode *medir* uma grandeza

É o grau com que uma certa medida corresponde ao *valor padrão* de uma grandeza ➔ erros devido a fatores do ambiente, falta de calibração.

Incertezas podem afetar a acuidade, mas a precisão não é afetada, já que esta só depende da granularidade do dispositivo de medida

Formas de Imprecisão

- *Imprecisão Intrínseca*
  - associada à descrição das propriedades de um fenômeno e não com as medidas da propriedade.

➔ *Lógica Fuzzy*

  - trata de questões associadas à *imprecisão intrínseca*, ao invés das relacionadas com falhas na medição

⬇

O tipo de imprecisão dos modelos fuzzy é INDEPENDENTE dos sistemas de medição

Formas de Imprecisão

- *Ambigüidade:*
  - *várias interpretações* plausíveis.

    Exemplo: “The food is HOT”

Antes do estabelecimento do universo de discurso, a sentença é ambígua mas NÃO é fuzzy

Após o estabelecimento do universo de discurso, a sentença pode ser considerada fuzzy

Formas de Imprecisão

- *Probabilidade X Lógica Fuzzy:*

Tenta explicar como certos eventos ocorrem em um certo espaço randômico ➔ explica populações e não instâncias individuais

↓

Antes de selecionar um elemento de uma certa população, conhecem-se as chances do evento ocorrer

↓

Após selecionado o elemento, NÃO existe mais a probabilidade

Descreve propriedades que têm valores contínuos, associando as partições desses valores a um rótulo semântico

↓

Importante: as partições podem coincidir (overlap) ➔ Ambigüidade

Formas de Imprecisão

- **Probabilidade X Lógica Fuzzy:**

Grau de Pertinência ➔ **nível de compatibilidade de um elemento do conjunto com o conceito do conjunto**

Exemplo: ❶ **Pedro é ALTO com μ = 0.85**

Indica que Pedro é bem compatível com o conceito ALTO.
➔ ***Tem-se uma idéia da altura de Pedro.***

❷ **Pedro tem 0.85 de probabilidade de ser ALTO**

Indica que Pedro tem grandes chances de ser ALTO.
➔ ***NÃO se tem a menor idéia da altura de Pedro.***

ICA

Exemplo:

Financiamento Imobiliário

ICA

Financiamento Imobiliário

Objetivo:

Determinar o crédito a ser concedido, em função de características do imóvel e do comprador

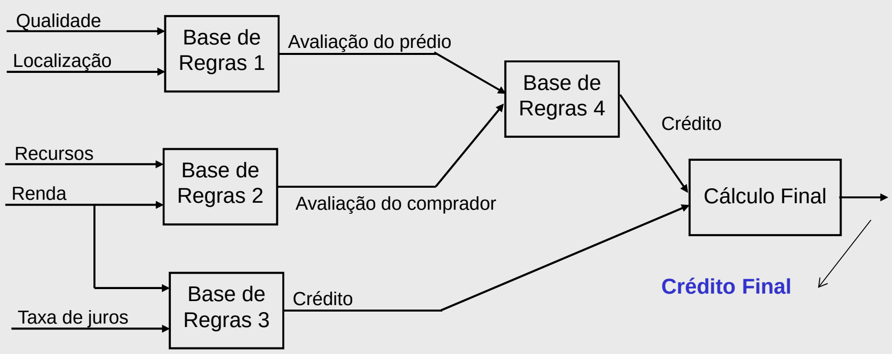
Variáveis de Entrada:

- *Imóvel* – Localização, Qualidade
- *Comprador* – Renda, Recursos
- *Mercado* – taxa de juros

Variável de Saída:

– **Crédito concedido**

Financiamento Imobiliário



Financiamento Imobiliário

Valores lingüísticos:

- Variáveis de entrada
  - *Localização*: ruim, boa, ótima
  - *Qualidade*: baixa, média, muito boa
  - *Recursos*: baixo, médio, alto
  - *Renda*: baixa, média, alta
  - *Taxa de juros*: baixa, média, alta
- Variáveis de saída (inclusive intermediárias):
  - *Avaliação do prédio*: baixa, média, alta
  - *Avaliação do comprador*: baixa, média, alta
  - ***Crédito***: muito baixo, baixo, médio, alto, muito alto
  - **Crédito Final**: crédito reavaliado pelo critério de corte no procedimento de **defuzzificação**

Financiamento Imobiliário

Bases de Regras

1

Localização	Qualidade	Avaliação Prédio
	ruim	baixa
ruim	boa	média
ruim	muito boa	média
boa	boa	média
boa	muito boa	alta
ótima	boa	média
ótima	muito boa	alta

2

Recursos	Renda	Avaliação Comprador
baixo	baixa	baixa
baixo	média	baixa
baixo	alta	média
médio	baixa	baixa
médio	média	média
médio	alta	alta
alto	baixa	média
alto	média	média
alto	alta	alta

Financiamento Imobiliário

Bases de Regras

3

Renda	Tx. juros	Crédito
baixa	média	muito baixo
baixa	alta	muito baixo
média	alta	muito baixo

4

Aval. Prédio	Aval. Comprador	Crédito
	baixa	muito baixo
baixa	média	muito baixo
média	média	médio
alta		alto
alta	alta	muito alto
média	alta	alto

ICA

Exemplo:

Seleção de Cliente para Marketing

ICA

Seleção de Cliente

Objetivo:

Selecionar cliente para estratégia de marketing

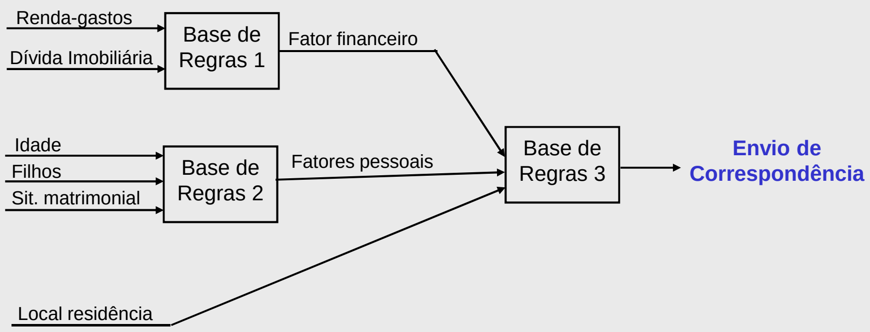
Variáveis de Entrada:

- *Fator financeiro* – Renda-gastos, Dívida Imobiliária
- *Fatores pessoais* – Idade, nº de filhos, situação matrimonial
- Local de Residência

Variável de Saída:

– **Envio de correspondência**

Seleção de Cliente



Seleção de Cliente

Valores lingüísticos:

- Variáveis de entrada
  - *Renda-gastos*: baixo, médio, alto
  - *Dívida Imobiliária*: baixa, média, alta
  - *Idade*: jovem, meia idade, velho, muito velho
  - *Nº de filhos*: nenhum, pouco, muito
  - *Situação matrimonial*: casado, solteiro
  - *Local de Residência*: excelente, bom, médio, ruim
- Variáveis de saída (inclusive intermediárias):
  - *Fator financeiro*: baixo, médio, alto
  - *Fatores pessoais*: baixo, alto
  - ***Envio de correspondência***: muito baixo, baixo, médio, alto, muito alto

Seleção de Cliente

Bases de Regras

1

Renda-gastos	Dívida Imob.	F. financeiros
baixo	baixo	baixo
médio	baixo	baixo
alto	baixo	médio
baixo	médio	médio
médio	médio	médio
alto	médio	médio
baixo	alto	médio
médio	alto	alto
alto	alto	alto

2

Idade	Filhos	Sit. Matr.	F. pessoal
	muitos	solteiro	baixo
	poucos	solteiro	baixo
		casado	alto
	poucos	casado	alto
	muitos	casado	alto
m. velho		casado	baixo
	nenhum		baixo
jovem		solteiro	baixo
	nenhum	solteiro	alto

Seleção de Cliente

Bases de Regras

3

F. financeiros	F. pessoal	Local resid.	Envio corresp.
baixo	baixo	ruim	muito baixo
baixo	baixo	bom	muito baixo
baixo	baixo	médio	baixo
baixo	baixo	excelente	baixo
médio	baixo	ruim	muito baixo
médio	baixo	bom	muito baixo
médio	baixo	médio	baixo
médio	baixo	excelente	médio
alto	baixo	ruim	muito baixo
alto	baixo	bom	baixo
alto	baixo	médio	médio
alto	baixo	excelente	alto

Seleção de Cliente

Bases de Regras

3 (continuação)

F. financeiros	F. pessoal	Local resid.	Envio corresp.
alto	alto	ruim	baixo
alto	alto	bom	médio
alto	alto	médio	alto
alto	alto	excelente	muito alto
médio	alto	ruim	muito baixo
médio	alto	bom	baixo
médio	alto	médio	médio
médio	alto	excelente	alto
baixo	alto	ruim	muito baixo
baixo	alto	bom	baixo
baixo	alto	médio	médio
baixo	alto	excelente	alto

CONJUNTOS FUZZY

- **Conjuntos Ordinários (ou "Crisp")**

  A noção de pertinência é bem definida: elementos **pertencem** ou **não pertencem** a um dado conjunto *A* (em um universo *X*)

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 \ \ \text{se e somente se} \ \ x \in A \\ 0 \ \ \text{se e somente se} \ \ x \notin A \end{cases}$$

f **: função característica**

CONJUNTOS FUZZY

Existem conjuntos cujo limite entre pertinência e não-pertinência é **vago**

Exemplos

- conjunto de ***pessoas altas***
- conjunto de ***carros caros***
- números ***muito maiores do que 1***

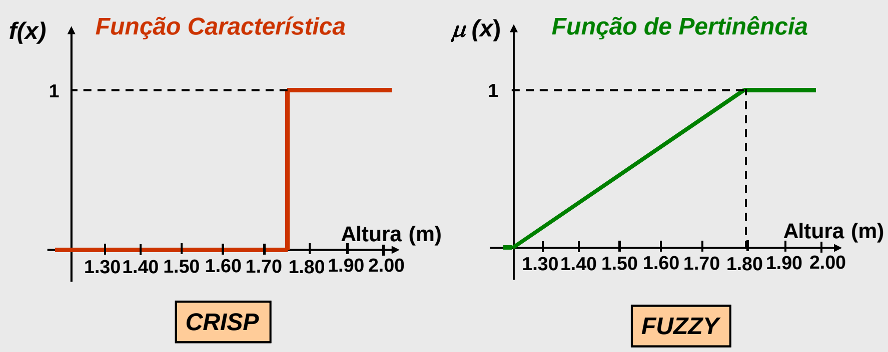
CONJUNTOS FUZZY

- Conjuntos Fuzzy
  - A função característica é generalizada, podendo assumir um número infinito de valores no intervalo [0,1] → ***função de pertinência***
  - Um conjunto fuzzy ***A*** em um universo ***X*** é definido por uma ***função de pertinência***

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$$

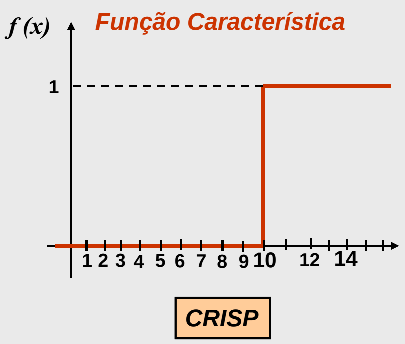
CONJUNTOS FUZZY

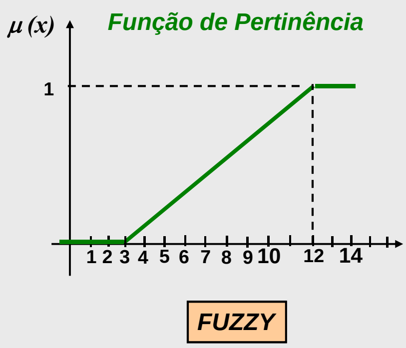
- ***Exemplo:____ Pessoas Altas***



CONJUNTOS FUZZY

- ***Exemplo:*** ***Números muito maiores do que 1***



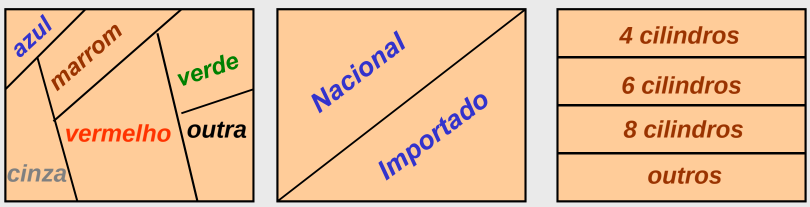


CONJUNTOS FUZZY

- ***Exemplo:***

X = todos os automóveis do Rio de Janeiro

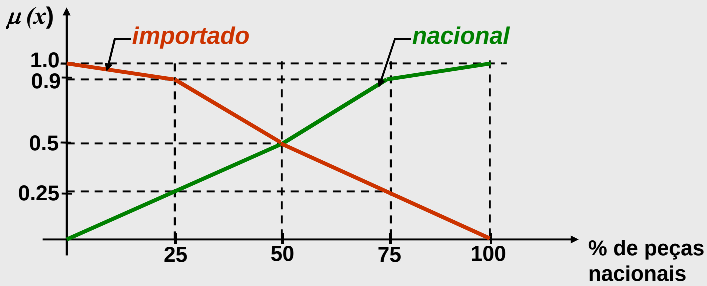
Conjuntos crisp



CONJUNTOS FUZZY

Conjunto *A* no universo *X* com $\mu_A(x) \in [0,1]$

medida do grau de <u>compatibilidade</u> de *x* com *A*



CONJUNTOS FUZZY

- ***Representação:***

Um conjunto fuzzy *A* em *X* pode ser representado por um ***conjunto de pares ordenados***

$$A = \{\mu_A(x)/x\} \quad x \in X$$

CONJUNTOS FUZZY

- *Outra Representação:*

X contínuo: $\int_X \mu_A(x)/x$

denota a coleção de todos os pontos $x \in X$ com função de pertinência $\mu(x)$

X discreto: $\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$

denota a união de todos os pontos $x_i \in X$ com graus de pertinência $\mu(x_i)$

CONJUNTOS FUZZY

Exemplo: seja A = inteiros próximos de 10

X = {n^os^ inteiros de 1 a 20}

A = 0.1/7 + 0.5/8 + 0.8/9 + 1/10 + 0.8/11 + 0.5/12 + 0.1/13

Observações:

- os inteiros não especificados possuem $\mu_A(x) = 0$
- os valores de μ_A (x) são especificados ⇨ exceto para $\mu_A(x)=1$, todos os outros valores podem ser modificados.
- a função de pertinência, neste caso específico, deve ser simétrica.

CONJUNTOS FUZZY

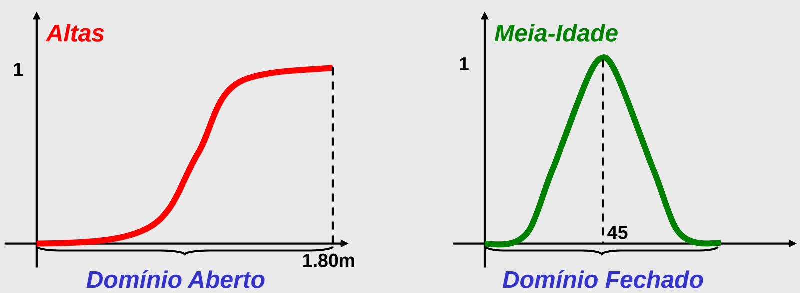
<u>*Nomenclatura:*</u>

- ***Altura:*** **maior grau de pertinência permitido pela função de pertinência**
- ***Normalização:*** **um certo conjunto fuzzy é normal se a sua altura for igual a 1**
  - **Forma normal mínima: pelo menos um elemento tem $\mu(x) = 1$**
  - **Forma normal máxima: pelo menos um elemento tem $\mu(x) = 1$ e outro elemento tem $\mu(x) = 0$**

CONJUNTOS FUZZY

- ***Domínio:***

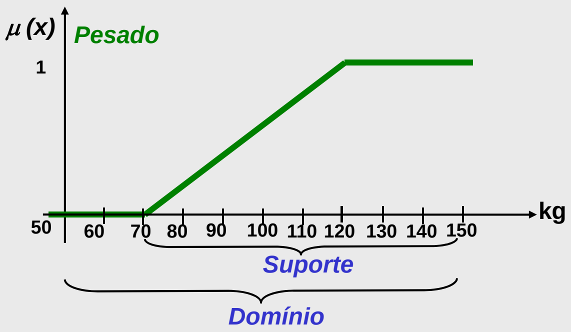
  Universo total de valores possíveis para os elementos de um conjunto ➔ depende do contexto



CONJUNTOS FUZZY

- ***Suporte:***

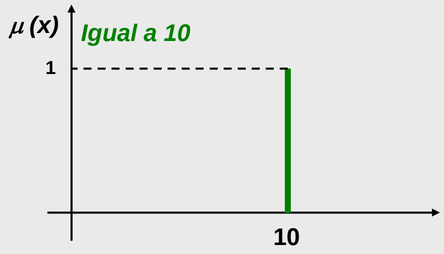
  Área efetiva do *domínio* de um conjunto fuzzy que apresenta valores de $\mu(x) > 0$



CONJUNTOS FUZZY

- ***Observação:***

  O conjunto fuzzy cujo *suporte* é um único ponto em *X*, com valor de $\mu(x) = 1$, é chamado de singleton



CONJUNTOS FUZZY

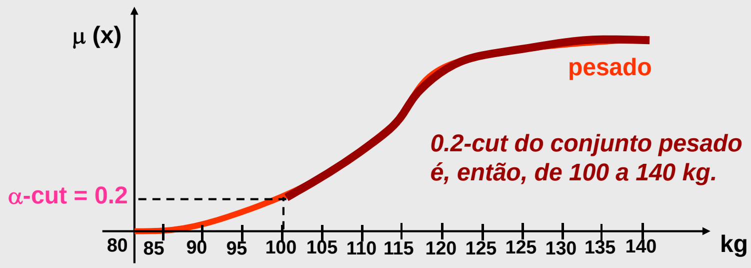
- ***Conjunto α -cut:***
  - **Restrição (limite) imposta ao domínio, baseada no valor de α**
  - **Contém todos os elementos do domínio que possuam *μ (x)* acima de um certo valor de α**

$\mu\,(x) \geq \alpha \Rightarrow$ α-cut fraco

$\mu\,(x) > \alpha \Rightarrow$ α-cut forte

CONJUNTOS FUZZY

- ***Conjunto α -cut:***
  - **útil para as funções com longos "tails", que tendem a possuir valores muito baixos de *μ(x)* por um domínio extenso**



CONJUNTOS FUZZY

- *Conjunto α -cut:*

Idade	Criança	Jovem	Adulto	Velho
5	1	.1	0	0
10	.8	.3	0	0
20	.1	.8	.7	.1
30	0	.5	1	.2
40	0	.2	1	.4
50	0	.1	1	.6
60	0	0	1	.8
70	0	0	1	1
80	0	0	1	1

Conjuntos α-cut do conjunto VELHO:

- $velho_{.2}$ = {30,40,50,60,70,80}
- $velho_{.8}$ = {60,70,80}
- $velho_{1.0}$ = {70,80}

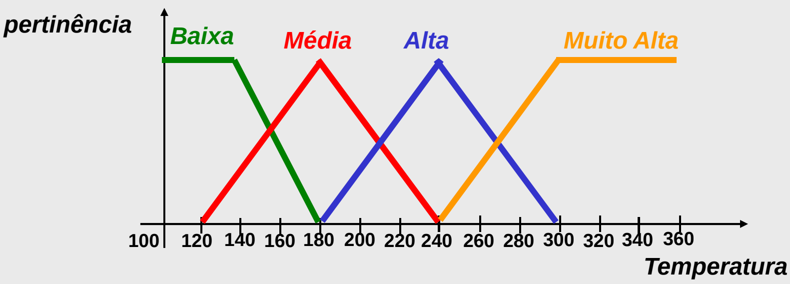
Variáveis Linguísticas

- Têm a função de fornecer uma maneira sistemática para uma caracterização aproximada de fenômenos complexos ou mal definidos

Variáveis Linguísticas

- ***Variável linguística:*** variável cujos ***valores*** são nomes de conjuntos fuzzy

Exemplo: temperatura de um processo



Variáveis Linguísticas

- ***Formalismo:*** **caracterizada por uma quíntupla (*N*, *T*(*N*), *X*, *G*, *M*), onde:**

_N_: nome da variável

temperatura

_T_(_N_): conjunto de termos de N, ou seja, o conjunto de nomes dos valores linguísticos de N

{baixa, média, alta, muito alta}

_X_: universo de discurso (espaço fuzzy completo de variação de uma variável do modelo)

100 a 360 ºC

Variáveis Linguísticas

G: regra sintática para gerar os *valores* de N como uma composição de termos de *T*(*N*), conectivos lógicos, modificadores e delimitadores

temperatura *não baixa*

temperatura *não muito alta*

M: regra semântica, para associar a cada valor gerado por *G* um conjunto fuzzy em *X*

associa os *valores* acima a *conjuntos fuzzy* cujas *funções de pertinência* exprimem seus significados

ICA

Funções de Pertinência

- Aos ***termos*** de uma *variável linguística* (ou aos seus ***valores***) faz-se corresponder conjuntos fuzzy, definidos por suas *funções de pertinência*
- Podem ter formas padrão ou definidas pelo usuário

ICA

Funções de Pertinência

- ***Contínuas***: podem ser definidas por meio de funções analíticas

$$\boxed{\mu_A(x) = (1 + (a(x - c))^b)^{-1}}$$

$$\mu_{pequeno}(x) = (1 + 9x^2)^{-1}$$

$$\mu_{médio}(x) = (1 + 9(x - 0{,}5)^2)^{-1}$$

$$\mu_{grande}(x) = (1 + 9(x - 2)^2)^{-1}$$

ICA

Funções de Pertinência

- ***Discretas***: consistem em valores discretos correspondendo a elementos (discretos) do universo

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mu_{pequeno}(x) = \{0{,}3;\ 0{,}7;\ 1;\ 0{,}7;\ 0{,}3;\ 0;\ 0\}$$
$$\mu_{médio}(x) = \{0;\ 0;\ 0{,}3;\ 0{,}7;\ 1;\ 0{,}7;\ 0{,}3\}$$
$$\mu_{grande}(x) = \{0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}3;\ 0{,}7;\ 1\}$$

ICA

Funções de Pertinência

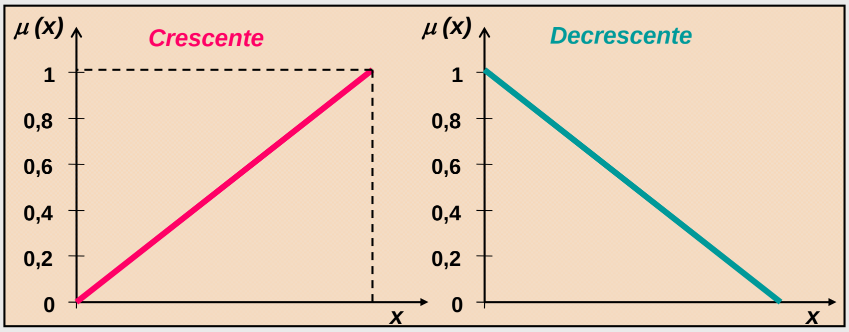
- Diferentes pessoas, ou grupos de pessoas, podem definir funções de pertinência (para um mesmo conjunto) de forma diferente
  - Exemplo: estatura de pessoas

Funções de Pertinência

- ✓ *Linear*
- ✓ *Trapezoidal*
- ✓ *Triangular*
- ✓ *Formato S*
- ✓ *Formato Z*
- ✓ *Formato PI*
- ✓ *Gaussiana*
- ✓ *Singleton*
- ✓ *Irregulares*

Funções de Pertinência

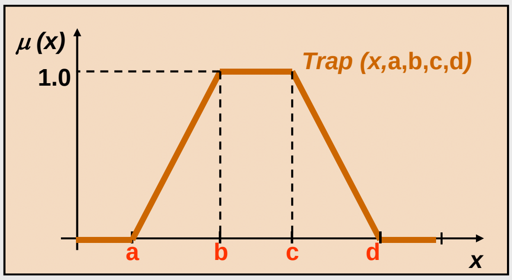
- *Linear:*
  – conjunto mais simples, sendo uma boa escolha na aproximação de conceitos não bem compreendidos



Funções de Pertinência

- *Trapezoidal:* ➲ rápido processamento
  ➲ contém descontinuidades

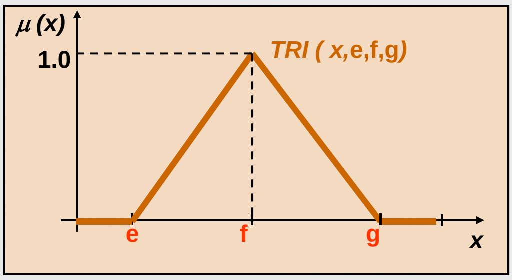
$$Trap\,(x,a,b,c,d)=\begin{cases} 0 & x \le a \\ 1 - (b - x)/(b - a) & a < x \le b \\ 1 & b < x \le c \\ (d - x)/(d - c) & c < x \le d \\ 0 & x > d \end{cases}$$



Funções de Pertinência

- ***Triangular:*** **caso especial de trapezoidal**

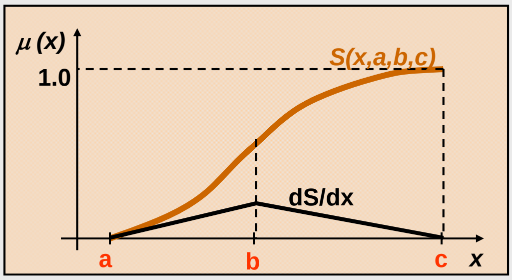
$$
TRI(x,e,f,g) = \begin{cases} 0 & x \le e \\ 1 - (f - x)/(f - e) & e < x \le f \\ (g - x)/(g - f) & f < x \le g \\ 0 & x > g \end{cases}
$$



Funções de Pertinência

- ***Formato S:*** **equação quadrática**

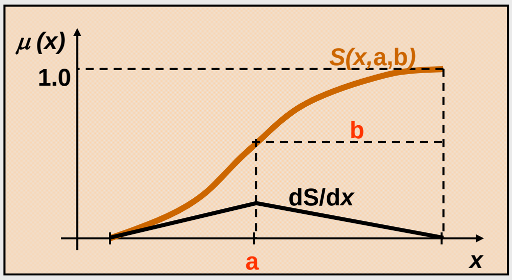
$$
S(x,a,b,c) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ 2\,[(x - a)/(c - a)]^2 & a \le x \le b \\ 1 - 2\,[(x - c)/(c - a)]^2 & b \le x \le c \\ 1 & x \ge c \end{cases}
$$



Funções de Pertinência

- *Formato S com 2 parâmetros:*

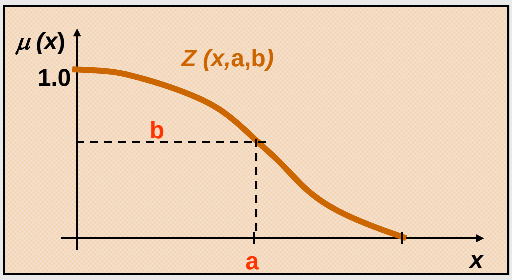
$$S(x,a,b) = \begin{cases} 0 & x \leq a - b \\ [x - (a - b)]^2 / 2b^2 & a - b \leq x \leq a \\ 1 - [(a + b) - x]^2 / 2b^2 & a < x \leq a + b \\ 1 & x > a + b \end{cases}$$



Funções de Pertinência

- *Formato Z:* Z (*x*,a,b) = 1 - S(*x*,a,b)

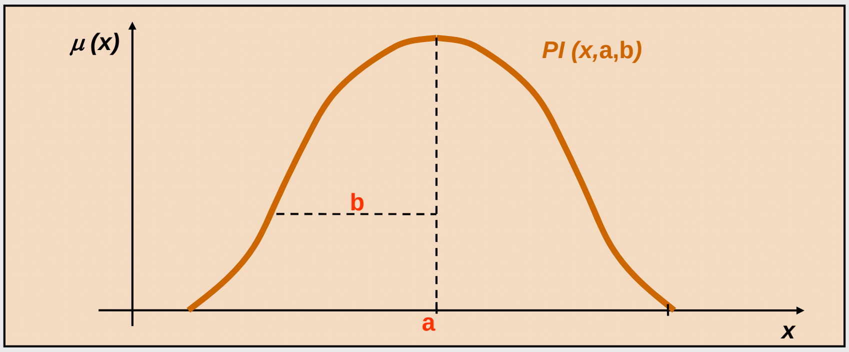
$$Z(x,a,b) = \begin{cases} 1 & x < a - b \\ 1 - [x - (a - b)]^2 / 2b^2 & a - b \leq x \leq a \\ [(a + b) - x]^2 / 2b^2 & a < x \leq a + b \\ 0 & x > a + b \end{cases}$$



Funções de Pertinência

- ***Formato PI:*** **junção das curvas S e Z**

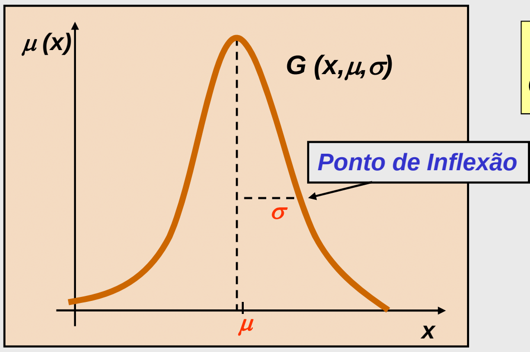
$$PI\,(x,a,b) = \begin{cases} S\,(x,\ a - b/2,\ b/2) & x \le a \\ Z\,(x,\ a + b/2,\ b/2) & x \ge a \end{cases}$$



Funções de Pertinência

- ***Gaussiana:*** **- distribuição normal**

- cai a zero para valores muito maiores ou muito menores do que a média

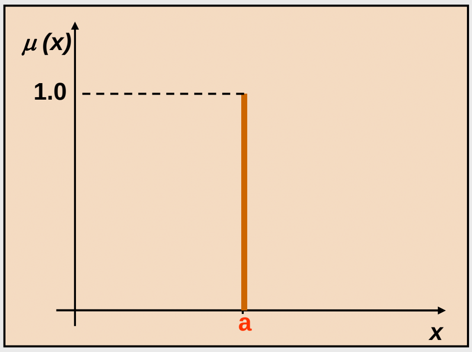


$$G(x,\mu,\sigma) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

μ = média
σ = desvio padrão

Funções de Pertinência

- ***Singleton:*** simplifica os cálculos para produzir saídas fuzzy



$$Sgl\,(x,a) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

Funções de Pertinência

- ***Irregulares:***

  ocasionalmente as formas padrão não conseguem capturar a semântica de uma variável ➔ representações arbitrárias

Definições e operações

- *Conjunto Vazio*

$$A = \varnothing \quad \text{se e somente se} \quad \mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X$$

- *Complemento*

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X$$

Definições e operações

- *Conjuntos iguais*

$$A = B \quad \text{se e somente se} \quad \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

- *A subconjunto de B*

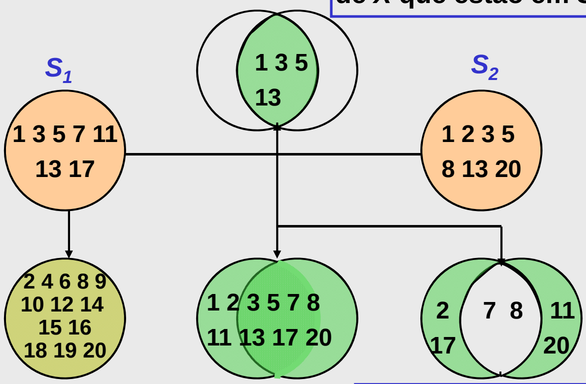
$$A \subset B \quad \text{se} \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

Definições e Operações

- *Conjuntos ordinários (crisp)* → *exemplo:*

$X = \{1,2,...20\}$

Interseção: todos os elementos de *X* que estão em S_1 e em S_2



Complemento
todos os elementos de *X* que $\notin$ a S_1

União
todos os elementos de *X* que $\in$ a S_1 ou a S_2

União Exclusiva
$S_1 \oplus S_2 = S_1 \cup S_2 - S_1 \cap S_2$

Definições e operações

- *Interseção* - *Conjuntos ordinários*

Contém todos os elementos que pertencem a *A* e a *B*

$$f_{A\cap B}(x) = 1 \qquad \text{se } x \in A \text{ e } x \in B$$

$$f_{A\cap B}(x) = 0 \qquad \text{se } x \notin A \text{ ou } x \notin B$$

⇓

$$\boxed{f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \wedge f_B(x) \qquad \forall x \in X}$$

Definições e operações

- *União* - *Conjuntos ordinários*

  Contém todos os elementos que pertencem a ***A ou*** a ***B***

$$f_{A \cup B}(x) = f_A(x) \vee f_B(x) \qquad \forall x \in X$$

Definições e Operações

- a exemplo dos conjuntos *crisp,* existem operações para combinar e modificar os conjuntos fuzzy

As operações são aplicadas às funções de pertinência

- um certo elemento é membro de um conjunto fuzzy
  - se está dentro do domínio do conjunto
  - se o grau de pertinência é $>$ 0
  - (se está acima do limite α-cut)

Definições e Operações

Interseção e União - Conjuntos fuzzy

Zadeh estendeu as operações de conjuntos ordinários para conjuntos fuzzy:

⬇

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

Propriedades

Utilizando os operadores (de Zadeh) *max* e *min* para a união e interseção fuzzy, verificam-se as seguintes propriedades:

➡ $(A')' = A$

➡ $\begin{cases} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{cases}$

Propriedades

$$\begin{cases} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{cases}$$

Propriedades

$$\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$$

Observando que as funções de pertinência dos conjuntos vazio e universo (X) são 0 e 1:

$$\begin{cases} A \cap \varnothing = \varnothing \\ A \cup \varnothing = A \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} A \cap X = A \\ A \cup X = X \end{cases}$$

Propriedades

Conjuntos ordinários:

$$A \cap A' = \varnothing \quad \mathbf{e} \quad A \cup A' = X$$

Conjuntos fuzzy:

$$\mu_{A \cap A'}(x) = \mu_A(x) \wedge (1 - \mu_A(x)) \neq 0 \Rightarrow A \cap A' \neq \varnothing$$

$$\mu_{A \cup A'}(x) = \mu_A(x) \vee (1 - \mu_A(x)) \neq 1 \Rightarrow A \cup A' \neq X$$

ICA

Propriedades

Observa-se, portanto, que

a lei da Não-Contradição ($A \cap A' = \phi$) e

a lei da Exclusão Mútua ($A \cup A' = X$)

são inválidas no caso fuzzy

ICA

Lei da Não-Contradição

– Quais os membros que são de *MEIA-IDADE* e *não MEIA-IDADE* ao mesmo tempo?

NOME	IDADE	$\mu_{MI}(x)$	$\mu_{MI'}(x)$	Interseção
Abel	36	.92	.08	.08
José	58	0	1	0
Carlos	64	0	1	0
João	32	.47	53	.47
Pedro	40	1	0	0
Tiago	22	0	1	0
Felipe	47	.74	.26	.26
André	25	.10	.90	.10

4 membros têm grau de pertinência diferente de zero para ambos os conjuntos Meia-Idade e não-Meia-Idade

Lei da Não-Contradição

– Quais os membros que são *ALTOS* e *não-ALTOS* ao mesmo tempo?

NOME	ALTURA	$\mu_{ALTO}(y)$	$\mu_{ALTO'}(y)$	Interseção
Abel	1.70	.84	.16	.16
José	1.75	.92	.08	.08
Carlos	1.65	.68	.32	.32
João	1.78	.96	.04	.04
Pedro	1.77	.94	.06	.06
Tiago	1.60	.39	.61	.39
Felipe	1.73	.90	.10	.10
André	1.75	.92	.08	.08

TODOS os membros têm grau de pertinência diferente de zero para ambos os conjuntos ALTO e não-ALTO

Lei da Exclusão Mútua

– Quais os membros que são de *MEIA-IDADE* ou *não-MEIA-IDADE* ao mesmo tempo?

NOME	IDADE	μ_{M-I} *(x)*	$\mu_{MI'}$ *(x)*	União
Abel	36	.92	.08	.92
José	58	0	1	1
Carlos	64	0	1	1
João	32	.47	53	.53
Pedro	40	1	0	1
Tiago	22	0	1	1
Felipe	47	.74	.26	.74
André	25	.10	.90	.90

Nem TODOS os membros têm grau de pertinência igual a um para a união dos conjuntos *MI* e *MI'*

Lei da Exclusão Mútua

– Quais os membros que são *ALTOS* ou *não-ALTOS* ao mesmo tempo?

NOME	ALTURA	μ_{ALTO} *(y)*	$\mu_{ALTO'}$ *(y)*	União
Abel	1.70	.84	.16	.84
José	1.75	.92	.08	.92
Carlos	1.65	.68	.32	.68
João	1.78	.96	.04	.96
Pedro	1.77	.94	.06	.94
Tiago	1.60	.39	.61	.61
Felipe	1.73	.90	.10	.90
André	1.75	.92	.08	.92

NENHUM dos membros têm grau de pertinência igual a um para a união dos conjuntos *ALTO* e *ALTO'*

Operadores

- *Generalização*

⇓

operadores *norma-t* e *co-norma-t* (*norma-s*)

- Operações binárias de [0,1] x [0,1] → [0,1], tal que, $\forall x, y, z, w \in [0,1]$, determinadas propriedades são satisfeitas.

Norma-t

As seguintes propriedades são satisfeitas:

$$x * y = y * x$$

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

$$\text{se } x \leq y,\ w \leq z, \text{ então } x * w \leq y * z$$

$$x * 0 = 0 \qquad \text{e} \qquad x * 1 = x$$

Exemplos:

- *Mínimo:* *min(x,y)*
- *Produto:* *x • y*

Co-norma-t

As seguintes propriedades são satisfeitas:

$$x \oplus y = y \oplus x$$

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

$$\text{se } x \leq y,\ w \leq z, \text{ então } x \oplus w \leq y \oplus z$$

$$x \oplus 0 = x \quad \text{e} \quad x \oplus 1 = 1$$

Co-norma-t

- ***Exemplos:***
  - *máximo*
  - *soma probabilística*
  - *soma limitada*
  - *norma-t degenerada*

$$Z(x,y) = \begin{cases} x, & \text{se } y = 0 \\ y, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

MODIFICADORES

- são operadores semânticos
- atuam na modelagem de um sistema fuzzy da mesma forma que advérbios e adjetivos atuam em uma sentença
- modificam a natureza de um conjunto fuzzy

⬇

atuam sobre a função de pertinência de um conjunto fuzzy com o objetivo de modificá-la

MODIFICADORES

- Da mesma forma que com os advérbios e adjetivos, a *ordem* dos modificadores é importante

⬇

NÃO MUITO ALTO
≠
MUITO NÃO ALTO

MODIFICADORES

- De forma análoga à construção de sentenças, múltiplos modificadores podem ser aplicados a um único conjunto fuzzy

- Exemplo: positivamente não muito ALTO

Múltiplos modificadores

Conjunto fuzzy básico

MODIFICADORES

- o processamento é feito de forma análoga à linguagem:

positivamente não muito ALTO

⬇

(positivamente (não (muito ALTO)))

MODIFICADORES

- podem ser usados tanto no *antecedente* quanto no *consequente*:

SE custo é muito ALTO
ENTÃO a margem de lucro é BAIXA

SE inflação é muito GRANDE
ENTÃO vendas são positivamente PEQUENAS

MODIFICADORES

- *concentradores:*
  - *muito, extremamente*
- *diluidores:*
  - *um pouco, levemente, mais ou menos*
- *aproximadores:*
  - *em torno, aproximadamente, perto de*
- *restrição de uma região fuzzy:*
  - *abaixo de, acima de*
- *contraste:*
  - *positivamente, de uma forma geral*

Concentradores

- ***Reduzem*** **os graus de pertinência dos elementos que pertencem ao conjunto fuzzy**

⬇

$$\mu_A(x) \geq \mu_{MUITO\ A}(x)$$

Concentradores

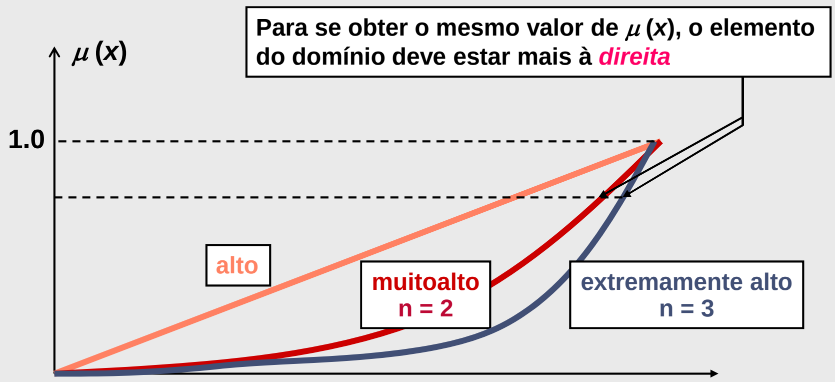
- ***Concentradores de ZADEH:***

$$\mu_{MUITO\ A}(x) = [\mu_A(x)]^2$$

$$\mu_{CONC\ A}(x) = [\mu_A(x)]^n \qquad n \in [1,4]$$

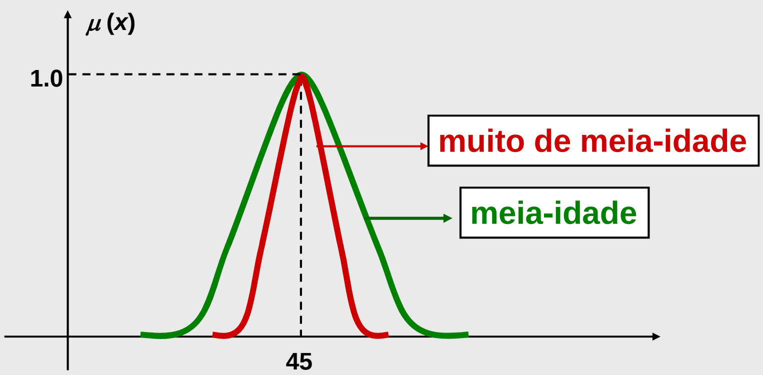
Concentradores

- *Exemplo 1:*



Concentradores

- *Exemplo 2:*



Diluidores

- ***Diluem*** **a função de pertinência para uma certa região fuzzy**

⬇

$$\mu_A(x) \le \mu_{UM\ POUCO\ A}(x)$$

Diluidores

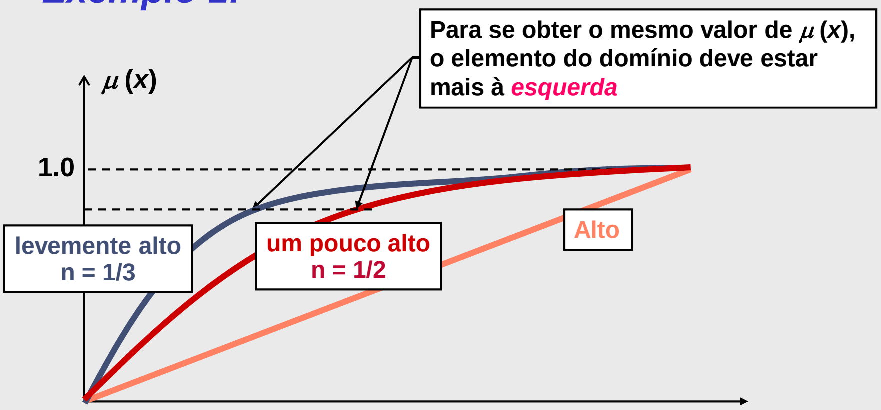
- ***Diluidores de ZADEH:***

$$\mu_{UM\ POUCO\ A}(x) = [\mu_A(x)]^{1/2}$$

$$\mu_{DILUIDOR\ A}(x) = [\mu_A(x)]^{1/n} \qquad n \in [1,8]$$

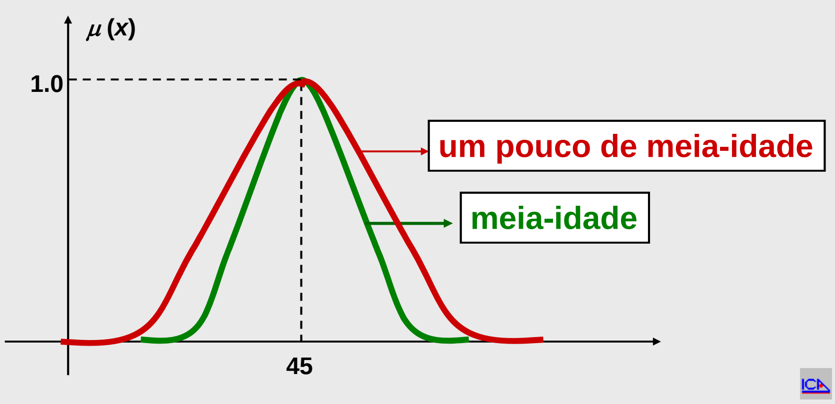
Diluidores

- *Exemplo 1:*



Diluidores

- *Exemplo 2:*

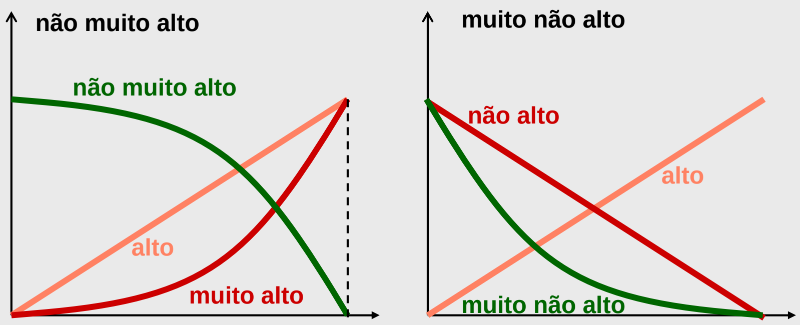


Concentradores/Diluidores

- possuem o mesmo *suporte* que o conjunto original;
- possuem o mesmo valor no domínio para $\mu(x) = 0$ e $\mu(x) = 1$;
- *muito* e *um pouco* são os únicos *modificadores comutativos*

Modificadores

- *Exemplo:* **não muito alto ≠ muito não alto**

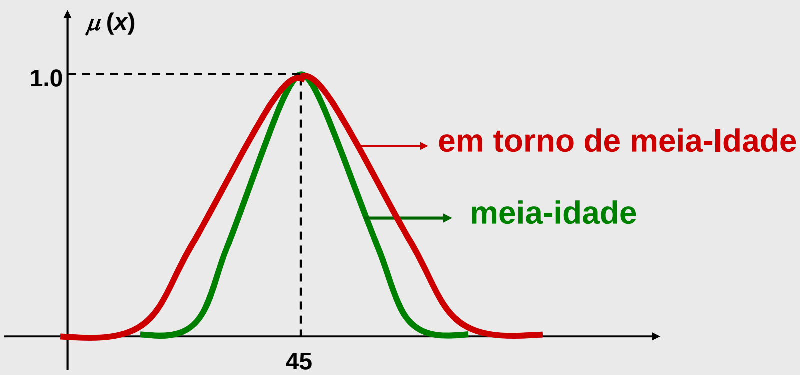


Aproximadores

- alargam ou estreitam uma região fuzzy (do tipo “sino”);
- transformam valores escalares em regiões fuzzy ➔ *número fuzzy*

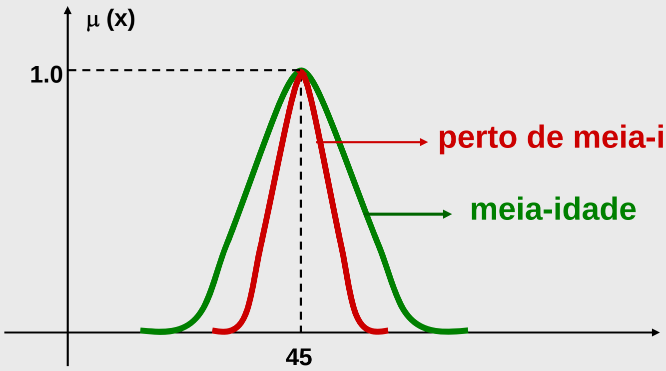
Aproximadores

- *Alargando:*



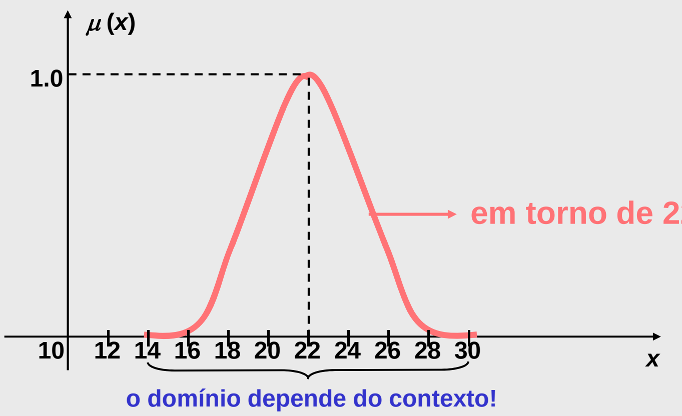
Aproximadores

- *Estreitando:*



Aproximadores

- *Transformando em um número fuzzy:*



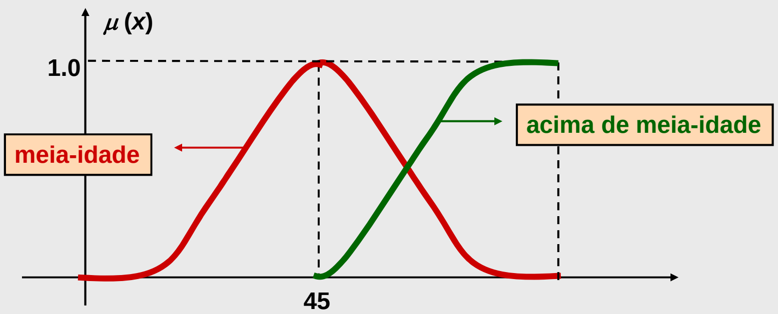
Restrição de uma Região Fuzzy

ACIMA DE
ABAIXO DE

➡ restringem o escopo da função de pertinência

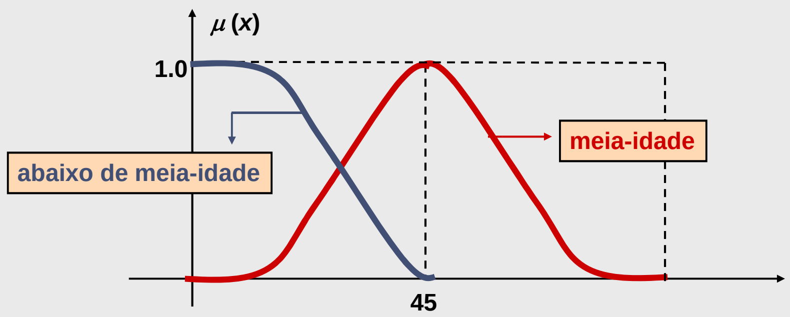
Restrição de uma Região Fuzzy

- *ACIMA:*



Restrição de uma Região Fuzzy

- *ABAIXO:*

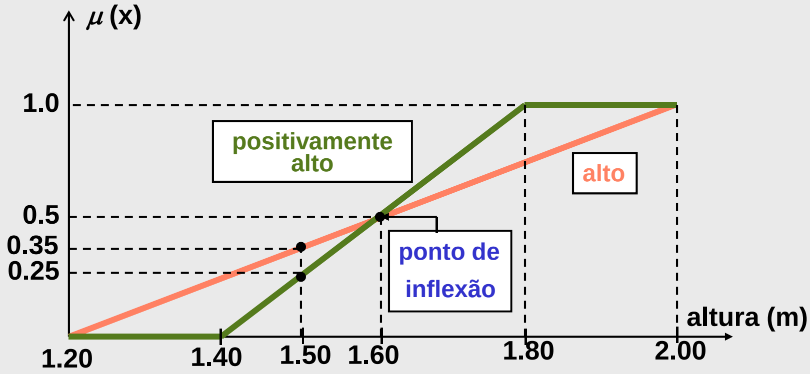


Contraste

- *Mudam a natureza da região fuzzy*
  - *Intensificador* ➔ torna o conjunto *menos* fuzzy
    - positivamente, definitivamente
  - *Difusor* ➔ torna o conjunto *mais* fuzzy
    - de uma forma geral

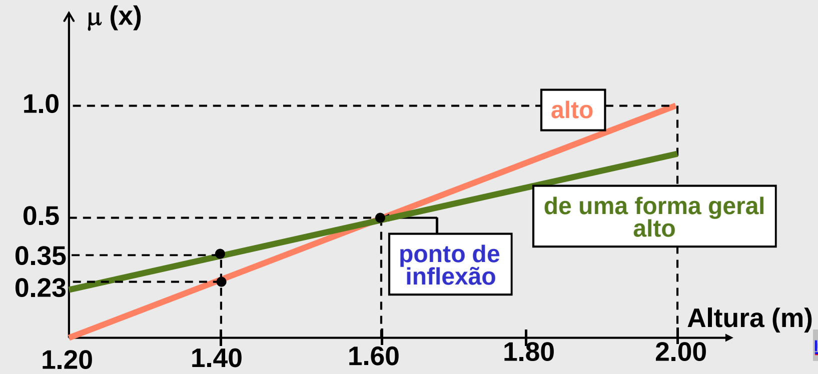
Contraste

- ***Intensificador:*** muda a função aumentando os $\mu(x)$ acima de 0.5 e diminuindo os $\mu(x)$ abaixo de 0.5



Contraste

- ***Difusor:*** muda a função reduzindo os $\mu(x)$ acima de 0.5 e aumentando os $\mu(x)$ abaixo de 0.5



Relações e Composições

O que é inferência?

Premissa 1: *temperatura = 75°*

Premissa 2: SE temperatura é alta ENTÃO vazão é grande

Conclusão: vazão = ?

Relações e Composições

temperatura = 75°

SE temperatura é alta
ENTÃO vazão é grande

⬇

vazão = ?

R1 ⇨ Relação simples
(um conjunto fuzzy)

R2 ⇨ Relação de Implicação
A → B

⬇

Composição das Relações
R1 o R2

Relações

- Relação ***Crisp**:*
  - representa a ***presença*** ou ***ausência*** de associação, interação ou interconectividade entre elementos de dois ou mais conjuntos.

- **Relação Binária:**
  - envolve dois conjuntos X e Y $\Longrightarrow$ $R\ (X,Y)$

Relações *Crisp*

Dados os universos *X* e *Y*, a *relação crisp* *R* definida em *X* x *Y* é um subconjunto do produto cartesiano dos dois universos, tal que *R*: *X* x *Y* → {0,1}

$\Downarrow$ **função característica**

$$f_R(x,y) = \begin{cases} 1 \ \text{ se e somente se } (x,y) \in R \\ 0 \ \text{ em caso contrário} \end{cases}$$

Relações Crisp

- *OBSERVAÇÃO:* como *R* também é um conjunto, *todas as operações de conjuntos crisp* podem ser aplicadas sem modificação.

Relações Crisp

- *Exemplo 1:*

  X = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}

  Y = { 1, 2, 3, 4, 5}

  $R(X,Y) = \{(x,y) / x \geq y\}$ =?

  ⬇

  $R(X,Y)$ = {(1,1); (2,1); (3,1); (2,2); (3,2); (3,3)}

Relações Crisp

- *Exemplo 2:*

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

MATRIZ RELACIONAL

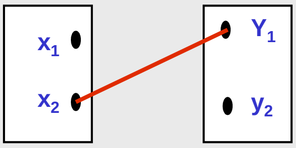


DIAGRAMA SAGITAL

Relações Fuzzy

- *Relação Fuzzy:*
  - representa o grau de associação, interação ou interconectividade entre elementos de dois ou mais conjuntos fuzzy
  - *Exemplos:* *x* é muito maior do que *y*
    y é bem próximo de *x*
    z é muito mais alto do que *y*
    se *x* é grande então *y* é pequeno

Relações Fuzzy

A ***relação fuzzy*** **R (X,Y)** é um **conjunto fuzzy** caracterizado pela função de pertinência

$\mu_R(x,y)$ $\qquad x \in X$ e $y \in Y$

$$R(X,Y) = \{\, [(x,y),\ \mu_R(x,y)] \,/\, (x,y) \in X \times Y \}$$

Relações Fuzzy

- ***OBSERVAÇÃO:*** **como as relações fuzzy são também conjuntos fuzzy, as operações com essas relações podem ser definidas utilizando-se os operadores de *união*, *interseção* e *complemento***

Relações Fuzzy

- *Exemplo 1:*

$X = \{x_1, x_2, x_3\} = \{8, 2, 10\}$

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{2, 0, 4, 3\}$

$R(X,Y)$ = x é muito maior do que y

$$\mu_{mm}(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0.5 & 0.7 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Relações Fuzzy

Exemplo 2:

$X = \{x_1, x_2\}$ = {Fortaleza, Florianópolis}

$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ = {Porto Alegre, Criciúma, Curitiba}

R: "muito próxima".

Relações Fuzzy

Matriz Relacional para o caso *crisp*

		y_1	y_2	y_3
		Porto Alegre	Criciúma	Curitiba
x_1	Fortaleza	0	0	0
x_2	Florianópolis	1	1	1

ICA

Relações Fuzzy

Matriz Relacional para o caso *fuzzy*

		y_1	y_2	y_3
		Porto Alegre	Criciúma	Curitiba
x_1	Fortaleza	0,1	0,2	0,3
x_2	Florianópolis	0,8	1	0,8

ICA

Composição de Relações

- Representa um papel muito importante em sistemas de inferência fuzzy
- Caso *crisp*: dadas as relações $P(X,Y)$ e $Q(Y,Z)$, a composição é definida por

$$\boxed{R(X,Z) = P(X,Y) \circ Q(Y,Z)}$$

subconjunto de X x Z tal que $(x,z) \in R$ *se e somente se existir pelo menos um* $y \in Y$ tal que $(x,y) \in P$ e $(y,z) \in Q$

Composição de Relações

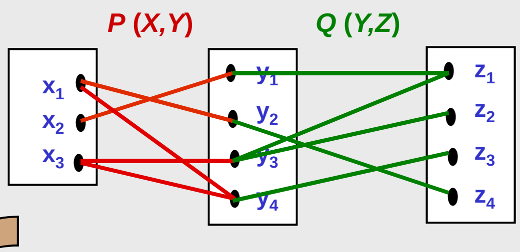
- *Exemplo (caso crisp):*

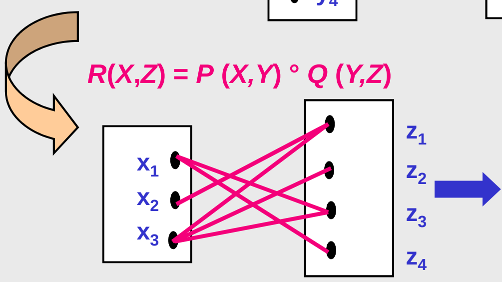
$$P(X,Y) = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$Q(Y,Z) = \begin{array}{c|cccc} & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \hline y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ y_3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ y_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Composição de Relações

Diagrama sagital:





$$R(X,Z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Composição de Relações

A operação realizada para se obter a *composição das relações* ***pode ser*** representada por:

- *composição max-min:*

$$f_R(x,z) = f_{P \circ Q}(x,z) = \{(x,z), \max_y [\min(f_P(x,y), f_Q(y,z))]\}$$

- *composição max-produto:*

$$f_R(x,z) = f_{P \circ Q}(x,z) = \{(x,z), \max_y [(f_P(x,y) f_Q(y,z))]\}$$

Composição de Relações

Exemplificando para o cálculo do elemento (x_1,z_2) de *R* (no exemplo):

$$f_R(x_1,z_2) = f_{P\circ Q}(x,z) = \{(x_1,z_2), \max_y [\min(f_P(x_1,y), f_Q(y,z_2))]\} =$$

$$\{(x_1,z_2), \max[\min(f_P(x_1,y_1), f_Q(y_1,z_2)), \min(f_P(x_1,y_2), f_Q(y_2,z_2)),$$
$$\min(f_P(x_1,y_3), f_Q(y_3,z_2)), \min(f_P(x_1,y_4), f_Q(y_4,z_2))]\}$$

$$f_R(x_1,z_2) = \{(x_1,z_2), \max[\min(0,0), \min(1,0), \min(0,1), \min(1,0)]\}$$

$$f_R(x_1,z_2) = \{(x_1,z_2), \max[0,0,0,0)]\} = 0$$

Composição de Relações

- ***Observação (caso crisp):***

Cada elemento de R(X,Z) pode ser obtido por meio da "multiplicação de matrizes" observando-se que:

– cada "*multiplicação*" deve ser efetuada com o operador adequado: *min* ou *produto*

– cada "*adição*"deve ser efetuada com o operador *max*

Composição de Relações

Composição *fuzzy* → faz-se uma generalização do caso não-fuzzy

$$\mu_R(x,z) = \mu_{P \circ Q}(x,z) = \sup_y \left[\mu_P(x,y) * \mu_Q(y,z)\right]$$

- a norma-t é ***usualmente*** o *min* ou o *produto*
- para universos finitos, o *sup* é o *max*

Composição de Relações

Interpretação gráfica:

$$x \in X \longrightarrow \boxed{\mu_P\,(x,y)} \xrightarrow{\; y \in Y \;} \boxed{\mu_Q\,(y,z)} \xrightarrow{\; z \in Z \;} \mu_{P \circ Q}\,(x,z)$$

Obs.: o procedimento de "*multiplicação de matrizes*" aplica-se também ao caso *fuzzy*

Composição de Relações

- *Exemplo 1:*
  - Estudantes:

    X = {Maria, João, Pedro}
  - Características de cursos

    Y = {teoria, aplicação, hardware, programação}
  - Cursos

    Z = {lógica fuzzy, controle fuzzy, redes neurais, sistemas especialistas}

Composição de Relações

- *Exemplo 1 (continuação):*
  - Interesse dos estudantes, em termos das características dos cursos:

$$P(X,Y) = \begin{array}{r} \\ Pedro \\ Maria \\ João \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & a & h & p \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Composição de Relações

- *Exemplo 1 (continuação):*
  - Características dos cursos:

$$Q(Y,Z)=\begin{array}{c} \\ t \\ a \\ h \\ p \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} LF & CF & RN & SE \end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

Composição de Relações

- *Exemplo 1 (continuação):*
  - A composição (*max-min*) pode servir de auxílio aos estudantes na escolha dos cursos:

$$P\circ Q=\begin{array}{c} \\ Pedro \\ Maria \\ João \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} LF & CF & RN & SE \end{array}\\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

Obs: *ao contrário deste exemplo*, a composição *max-produto* geralmente não produz o mesmo resultado!

Composição de Relações

- *Exemplo 2:*

$X = \{ x_1, x_2, x_3 \}$

$Y = \{ y_1, y_2, y_3, y_4 \}$

$Z = \{ z_1, z_2, z_3 \}$

$$\underbrace{x \text{ é muito maior do que } y}_{\mu_{mm}(x,y)} \text{ E } \underbrace{y \text{ é muito próximo de } z}_{\mu_{mp}(y,z)}$$

$$\boxed{\mu_{mm \circ mp}(x,z) = ?}$$

Composição de Relações

- *Exemplo 2 (continuação):*

Relações dadas:

$$\mu_{mm}(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mu_{mp}(y,z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Composição *max-min*

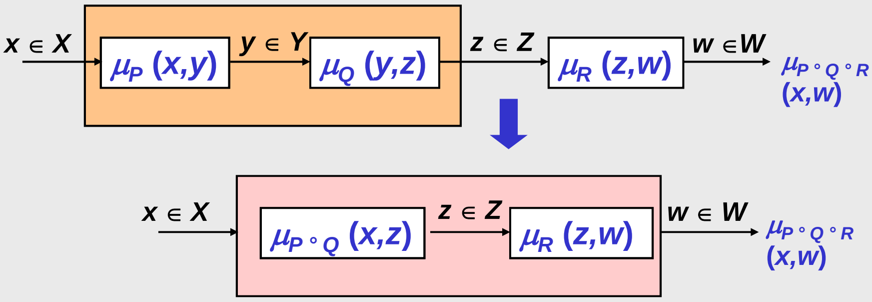
$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.7 & 0.9 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Composição *max-produto*

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.42 & 0.72 & 0.35 \\ 0 & 0.32 & 0 \\ 0.63 & 0.81 & 0.56 \end{pmatrix} \end{array}$$

Composição de Relações

- *Três relações:*



Obs.: poder-se-ia compor *Q* e *R*, primeiramente; o resultado seria então composto com *P*

Composição de Relações

Caso especial: P é *um conjunto fuzzy* apenas

⇩

em vez de $\mu_P(x,y)$ tem-se $\mu_P(x)$, o que é equivalente a se ter $X = Y$

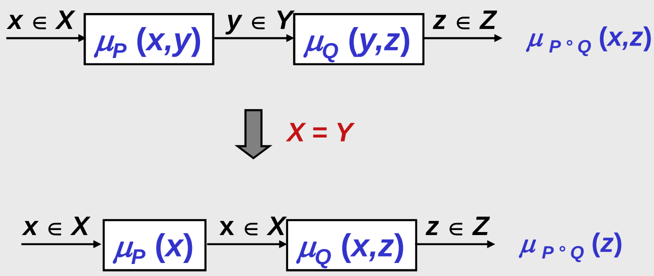
⇩

$$\boxed{\mu_R(z) = \sup_x \, [\mu_P(x) * \mu_Q(x,z)]}$$

Obs.: resultado fundamental para sistemas de inferência fuzzy!

Composição de Relações

Interpretação gráfica:



Composição de Relações

- ***Exemplo:***

x **é mediamente grande E *z* é muito menor do que *x***

$X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{5, 10, 15, 20, 25\}$

$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mu_{mg}(x) = \{0{,}3;\ 0{,}7;\ 1;\ 0{,}.7;\ 0{,}3\}$

$$\mu_{mm}(x,z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Composição *max-min*

$\mu_R(z) = \{1/1;\ 0{,}8/2;\ 0{,}7/3;\ 0{,}6/4\}$

Proposições Fuzzy

- Frases da forma Π é *A*, onde *A* é um conjunto fuzzy definido no universo *X* de Π
- Podem ser combinadas por meio de diferentes operadores:
  - conectivos lógicos *e* e *ou*
  - negação: *não*
  - operador de implicação: *se .... então*
- Podem ser descritas em termos de *relações fuzzy*

ICA

Proposições Fuzzy

- Conectivos:
  - *e* → usado com variáveis em universos diferentes

    Ex: *temperatura* é *alta* *e* *pressão* é *baixa*
  - *ou* → conecta valores linguísticos de uma mesma variável

    Ex: *temperatura* é *alta* *ou* *baixa*

    → em sentenças do tipo *se .... então*, pode ser usado com variáveis diferentes

    Ex: se a *pressão* é *alta* *ou* a *temperatura* é *baixa*

ICA

Proposições Fuzzy

- **Negação:**

$$A = \{\mu_A(x)/x\} \quad \Rightarrow \quad não \;\; A = \{(1 - \mu_A(x))/\,x\}$$

  - **Exemplo:** ***pressão*** **é** ***não alta***

Proposições Fuzzy

- **Considerem-se:**
  - ***variáveis linguísticas*** **de nomes** x **e** y **definidas em universos** X **e** Y
  - ***conjuntos fuzzy*** A **e** B **definidas em** X **e** Y
  - ***proposições fuzzy*** $\begin{cases} x \text{ é } A \\ y \text{ é } B \end{cases}$

Proposições Fuzzy

Conexão das proposições por meio de *e (interseção):*

$$(x \text{ é } A) \; e \; (y \text{ é } B)$$

relação fuzzy $R_{A\,e\,B}$

$$\boxed{\mu_R(x,y) = \mu_A(x) * \mu_B(y)}$$

norma-t (geralmente o *min* ou o *produto*)

Proposições Fuzzy

Conexão das proposições por meio de *ou (união):*

$$(x \text{ é } A) \; ou \; (y \text{ é } B)$$

relação fuzzy $R_{A\,ou\,B}$

$$\boxed{\mu_R(x,y) = \mu_A(x) \oplus \mu_B(y)}$$

co-norma-t (geralmente o *max*)

Proposições Fuzzy

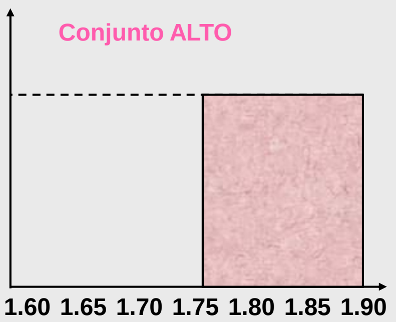
- ***Exemplo:***
  - Quais os membros do grupo abaixo que são ao mesmo tempo *ALTOS* **e** de *MEIA-IDADE*?

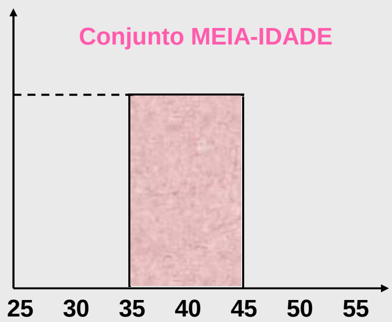
NOME	IDADE	ALTURA
Abel	36	1.70
Marcelo	58	1.75
Carlos	64	1.65
João	32	1.78
Pedro	40	1.77
Tiago	22	1.60
Felipe	47	1.73
André	25	1.75

Proposições Fuzzy

- ***Exemplo (continuação):***

➡ ***com conjuntos crisp:***





Proposições Fuzzy

- *Exemplo (continuação):*

Membros com idade entre 35 e 45 anos e altura maior do que 1.75m (caso crisp):

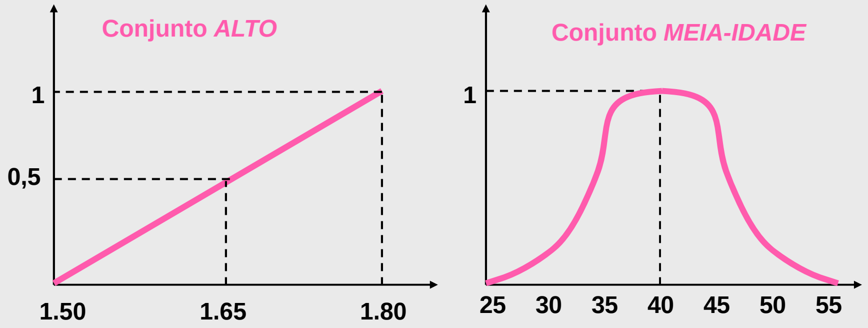
NOME	IDADE	$f_{MI}(x)$	ALTURA	$f_{ALTO}(y)$	$R_{MI\ e\ ALTO}$
Abel	36	1	1.70	0	0
José	58	0	1.75	1	0
Carlos	64	0	1.65	0	0
João	32	0	1.78	1	0
Pedro	40	1	1.77	1	1
Tiago	22	0	1.60	0	0
Felipe	47	0	1.73	0	0
André	25	0	1.75	1	0

ICA

Proposições Fuzzy

- *Exemplo (continuação):*

com conjuntos fuzzy:



ICA

Proposições Fuzzy

- *Exemplo (continuação):*

Graus de pertinência da relação "Meia-Idade e Alto":

min

NOME	IDADE	$\mu_{MI}(x)$	ALTURA	$\mu_{ALTO}(y)$	$R_{MI\ e\ ALTO}$
Abel	36	.92	1.70	.67	.67
José	58	0	1.75	.83	0
Carlos	64	0	1.65	.50	0
João	32	.47	1.78	.93	.47
Pedro	40	1	1.77	.90	.90
Tiago	22	0	1.60	.33	0
Felipe	47	.74	1.73	.77	.74
André	25	.10	1.75	.83	.10

Proposições Fuzzy

- *Exemplo (continuação):*
  - Quais os membros que são *ALTOS* ou de *MEIA-IDADE*?

Membros com idade entre 35 e 45 anos
ou altura maior que 1.75m (caso crisp):

NOME	IDADE	$f_{MI}(x)$	ALTURA	$f_{ALTO}(y)$	$R_{MI\ ou\ ALTO}$
Abel	36	1	1.70	0	1
José	58	0	1.75	1	1
Carlos	64	0	1.65	0	0
João	32	0	1.78	1	1
Pedro	40	1	1.77	1	1
Tiago	22	0	1.60	0	0
Felipe	47	0	1.73	0	0
André	25	0	1.75	1	1

Proposições Fuzzy

- *Exemplo (continuação):*

Graus de pertinência da relação "Meia-Idade ou Alto":

max

NOME	IDADE	μ_{MI} (x)	ALTURA	μ_{ALTO} (y)	$R_{MI\ ou\ ALTO}$
Abel	36	.92	1.70	.67	.92
José	58	0	1.75	.83	.83
Carlos	64	0	1.65	.50	.50
João	32	.47	1.78	.93	.93
Pedro	40	1	1.77	.90	1
Tiago	22	0	1.60	.33	.33
Felipe	47	.74	1.73	.77	.77
André	25	.10	1.75	.83	.83

Proposições Fuzzy

Outros operadores

- *Interseção:*

Zadeh (já visto) ➡ $min(\mu_A(x), \mu_B(y))$

média ➡ $(\mu_A(x) + \mu_B(y))/2$

produto[$] ➡ $\mu_A(x) * \mu_B(y)$

Lukasiewicz ➡ $max[0, (\mu_A(x) + \mu_B(y) - 1)]$

[$] também sugerido por Zadeh

Proposições Fuzzy

Interseção

- ***Exemplo:***

Zadeh → *min*

	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
0.00					
0.25		0.25	0.25	0.25	0.25
0.50		0.25	0.50	0.50	0.50
0.75		0.25	0.50	0.75	0.75
1.00		0.25	0.50	0.75	1.00

Lukasiewicz → *max* [0, (μ_A(x) + μ_B(y) - 1)]

	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
0.00					
0.25					0.25
0.50				0.25	0.50
0.75			0.25	0.50	0.75
1.00		0.25	0.50	0.75	1.00

Proposições Fuzzy

Outros operadores

- ***União:***

Zadeh (já visto) → $max\ (\mu_A(x), \mu_B(y))$

média → $\{2 * min\ [(\mu_A(x), \mu_B(y)] + 4 * max\ [(\mu_A(x), \mu_B(y)]\}/6$

soma probabilística (ou algébrica) → $\mu_A(x) + \mu_B(y) - \mu_A(x) * \mu_B(y)$

soma limitada → $min\ [1, (\mu_A(x) + \mu_B(y))]$

Proposições Fuzzy

União

- ***Exemplo:***

Zadeh →

max

	0.00	**0.25**	**0.50**	**0.75**	**1.00**
0.00		0.25	0.50	0.75	1.00
0.25	0.25	0.25	0.50	0.75	1.00
0.50	0.50	0.50	0.50	0.75	1.00
0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Soma limitada →

min [1, (μ_A(x) + μ_B(y))]

	0.00	**0.25**	**0.50**	**0.75**	**1.00**
0.00		0.25	0.50	0.75	1.00
0.25	0.25	0.50	0.75	1.00	1.00
0.50	0.50	0.75	1.00	1.00	1.00
0.75	0.75	1.00	1.00	1.00	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Proposições Fuzzy

Outros operadores

- ***Funções de Yager:***

família parametrizada **de operadores**

– ***Interseção*:**

$$T(x,y) = 1 - min\left[1, \left((1-x)^p + (1-y)^p\right)^{1/p}\right] \qquad p > 0$$

– ***União*:**

$$C(x,y) = min\left[1, \left(x^p + y^p\right)^{1/p}\right] \qquad p > 0$$

Proposições Fuzzy

Yager: Interseção

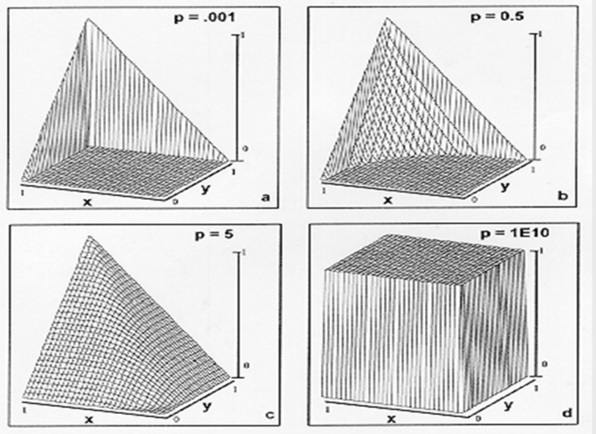


Figure 3.10: (a), (b), (c), and (d) show Yager intersection at various parameter values.

Proposições Fuzzy

Yager: União

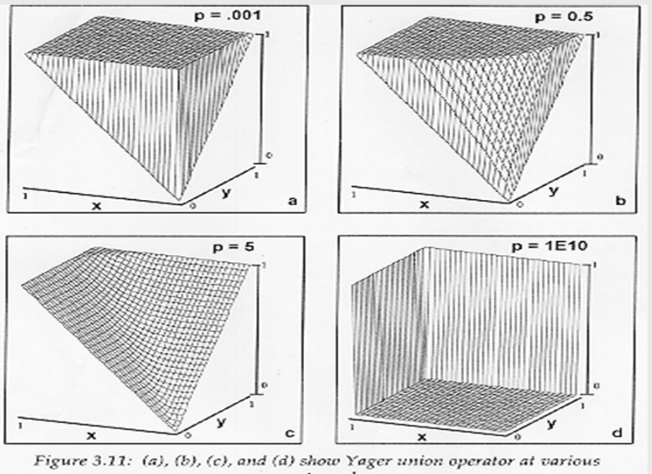


Figure 3.11: (a), (b), (c), and (d) show Yager union operator at various parameter values.

Proposições Fuzzy

Declaração condicional fuzzy **(operação *se .... então*)**

(descreve a dependência do valor de uma variável linguística em relação ao valor de outra)

$$se\,(x \text{ é } A)\ então\ (y \text{ é } B)$$

relação fuzzy $R_{A \to B}$

$$\boxed{\mu_{A\to B}(x,y) = f_{\to}(\mu_A(x), \mu_B(y))}$$

operador de *implicação*

Proposições Fuzzy

Mais de um *antecedente*:

$$se\ (x_1 \text{ é } A_1)\ e\ (x_2 \text{ é } A_2)\ e \ldots e\ (x_m \text{ é } A_m)\ então\ (y \text{ é } B)$$

relação fuzzy

$$\boxed{\mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = f_{\to}(f_e(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \ldots, \mu_{A_m}(x_m)), \mu_B(y))}$$

operador que representa o conectivo *e*
(geralmente *min* ou *produto*)

Proposições Fuzzy

Combinação de várias declarações condicionais por *ou*

⇓

$$
\begin{aligned}
&R^1: se\ (x \text{ é } A^1)\ \ então\ (y \text{ é } B^1)\ \ ou \\
&R^2: se\ (x \text{ é } A^2)\ \ então\ (y \text{ é } B^2)\ \ ou \\
&\vdots \\
&R^n: se\ (x \text{ é } A^n)\ \ então\ (y \text{ é } B^n)
\end{aligned}
$$

⇓

$$
\begin{aligned}
&\mu_{R^N}(x,y) = f_{ou}[\mu_{R^1}(x,y), \mu_{R^2}(x,y), \ldots, \mu_{R^n}(x,y)] = \\
&f_{ou}[f_{\rightarrow}(\mu_{A^1}(x), \mu_{B^1}(y)), f_{\rightarrow}(\mu_{A^2}(x), \mu_{B^2}(y)), \ldots, f_{\rightarrow}(\mu_{A^n}(x), \mu_{B^n}(y))]
\end{aligned}
$$

operador que representa o conectivo *ou* (geralmente *max)*

LÓGICA FUZZY

- ***Regras são implicações lógicas***

se *x é A* então *y é B*

⇓

a função de pertinência desta *relação* é definida por meio do *operador de implicação*

⇓

relacionado à *Lógica Proposicional*

Lógica Proposicional

- Regras são formas de *proposição*

↓

declaração envolvendo termos já definidos

Ex: a *temperatura* é *alta*

se temperatura é *alta então diminui a vazão*

Lógica Proposicional

- Proposições podem ser *verdadeiras* ou *falsas*
- Proposições *p* e *q* podem ser combinadas a partir de três operações básicas:
  - *conjunção*
  - *disjunção*
  - *implicação*

Lógica Proposicional

- *Conjunção:* $p \wedge q$

  estabelece a verdade simultânea de duas proposições *p* e *q*

- *Disjunção:* $p \vee q$

  estabelece a verdade de uma ou de ambas as proposições *p* e *q*

Lógica Proposicional

- *Implicação:* $p \rightarrow q$

  verifica se a regra abaixo é *verdadeira* (V)

se *p* então *q*

antecedente consequente

Lógica Proposicional

Outras operações:

- *Equivalência: p ⇔ q*

  verifica se as duas proposições são *simultaneamente verdadeiras* ou *simultaneamente falsas*

- *Negação: ~ p*

  para se dizer *é falso que ....*

Lógica Proposicional

- Proposições não relacionadas entre si podem ser combinadas para formar uma *implicação*
- Não se considera nenhuma relação de *causalidade*

Lógica Proposicional

- *A implicação é verdadeira quando:*
  - antecedente é V, consequente é V
  - antecedente é F, consequente é F
  - antecedente é F, consequente é V
- *A implicação é falsa quando:*
  - antecedente é V, consequente é F

Lógica Proposicional

- *Tabelas Verdade:*

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$\sim p$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Lógica Proposicional

- *Axiomas Fundamentais:*
  - cada proposição é V ou F, mas nunca ambos
  - as tabelas verdade de:
    - Conjunção
    - Disjunção
    - Equivalência
    - Implicação
    - Negação

Lógica Proposicional

Exemplo:

Considere-se a declaração condicional

se eu *estiver bem de saúde* (*p*)

então irei à escola (*q*)

Lógica Proposicional

Situações possíveis:

⇒ ***p* = *V* (*estou bem de saúde*)**

***q* = *V* (*fui à escola*)**

⇓

promessa <u>cumprida</u> → declaração *verdadeira*

Lógica Proposicional

Situações possíveis:

⇒ ***p* = *V* (*estou bem de saúde*)**

***q* = *F* (*não fui à escola*)**

⇓

promessa <u>violada</u> → declaração *falsa*

Lógica Proposicional

Situações possíveis:

⇒ ***p* = *F* (*não estou bem de saúde*)**

***q* = *V* (*fui à escola*)**

⇓

promessa (de *ir à escola*) cumprida →
declaração *verdadeira*

Lógica Proposicional

Situações possíveis:

⇒ ***p* = *F* (*não estou bem de saúde*)**

***q* = *F* (*não fui à escola*)**

⇓

promessa não violada →
declaração *verdadeira*

Lógica Proposicional

- *TAUTOLOGIA:*

  ⇒ **É uma proposição sempre verdadeira formada a partir da combinação de outras proposições**

Lógica Proposicional

- *Tautologias importantes:*

$$(p \to q) \leftrightarrow \sim [\, p \wedge (\sim q)]$$

$$(p \to q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$$

Lógica Proposicional

- *Comprovação das tautologias:*

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim[p \wedge (\sim q)]$

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim [p \wedge (\sim q)]$	$\sim p$	$(\sim p) \vee q$
V	V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

Lógica Proposicional

Isomorfismos:

O **isomorfismo** entre a **álgebra booleana**, a **teoria dos conjuntos** e a **lógica proposicional** garante que cada **teorema** em qualquer uma dessas teorias tem um **teorema equivalente** em cada uma das outras duas teorias

Lógica Proposicional

Equivalências importantes:

LÓGICA	TEORIA DOS CONJUNTOS	ÁLGEBRA BOOLEANA
$\wedge$	$\cap$	$\times$
$\vee$	$\cup$	$+$
$\sim$	$'$	$'$
V		1
F		0
$\leftrightarrow$		$=$

Lógica Proposicional

- Considerando
  - as tautologias anteriores
  - as equivalências entre lógica, teoria de conjuntos e álgebra booleana
  - que, em conjuntos *crisp*, a função característica pode assumir apenas os valores 0 e 1

➡ obtêm-se funções características para a *implicação*

Lógica Proposicional Tradicional

- *Tautologia 1:*

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim[p \wedge (\sim q)]$$

$$f_{p \rightarrow q}(x, y) = 1 - min\,[f_p(x), 1 - f_q(y)]$$

Lógica Proposicional

- *Tautologia 2:*

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$$

$$f_{p \rightarrow q}(x, y) = max\,[1 - f_p(x), f_q(y)]$$

Lógica Proposicional

- *Demonstração:*

I $$f_{p\rightarrow q}(x,y) = max\,[1 - f_p(x), f_q(y)]$$

II $$f_{p\rightarrow q}(x,y) = 1 - min\,[f_p(x), 1 - f_q(y)]$$

$f_p(x)$	$f_q(y)$	$1 - f_p(x)$	$1 - f_q(y)$	I	II
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Lógica Proposicional

- *Observação*: existem inúmeras outras funções características para a implicação, não necessariamente fazendo uso dos operadores *max* e *min*

Lógica Proposicional

⇨*Regras de Inferência Clássicas:*

- **Modus Ponens**
- **Modus Tollens**

ICA

Lógica Proposicional

- ***Modus ponens:***

Premissa 1:	***x* é *A***	**(*p*)**
Premissa 2:	**se *x* é *A* então *y* é *B***	**($p \rightarrow q$)**
Consequência:	***y* é *B***	**(*q*)**

$$\boxed{[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q}$$

ICA

Lógica Fuzzy

- Os conceitos de Lógica Fuzzy nasceram inspirados na lógica proposicional (tradicional)
- A extensão da lógica tradicional para a Lógica Fuzzy foi efetuada através da substituição das funções características (bivalentes) por funções de pertinência fuzzy

Lógica Fuzzy

- A declaração condicional

  se *x é A* então *y é B*

  tem uma função de pertinência

$$\boxed{\mu_{A \to B}(x, y)}$$

$$\Downarrow$$

mede o *grau de verdade* da *relação de implicação* entre *x* e *y*

Lógica Fuzzy

- Exemplos de ***funções de implicação***, obtidas por simples extensão da lógica tradicional:

$$\mu_{A\rightarrow B}(x,y)=1-min[\mu_A(x),1-\mu_B(y)]$$

$$\mu_{A\rightarrow B}(x,y)=max[1-\mu_A(x),\mu_B(y)]$$

Lógica Fuzzy

- *Modus ponens generalizado:*

Premissa 1: ***x é A****

Premissa 2: **se *x* é *A* então *y* é *B***

Conclusão: ***y é B****

A^* e B^* não são necessariamente iguais a *A* e *B*, respectivamente

Lógica Fuzzy

- *Exemplo:*

se *homem* é *baixo*
então *homem não é bom jogador de basquete*

$\Downarrow$

A = *baixo*
B = *não é bom jogador de basquete*

$\Downarrow$

Premissa: *homem* é $\underbrace{\textit{abaixo de 1.60m}}_{A^*}$

Conclusão: *homem* é $\underbrace{\textit{mau jogador de basquete}}_{B^*}$

Lógica Fuzzy

Conclusão:

- *Lógica Tradicional (Crisp)* ⇨

A regra é disparada somente se a premissa 1 for exatamente igual ao antecedente, sendo que o resultado da regra é o próprio consequente.

Lógica Fuzzy

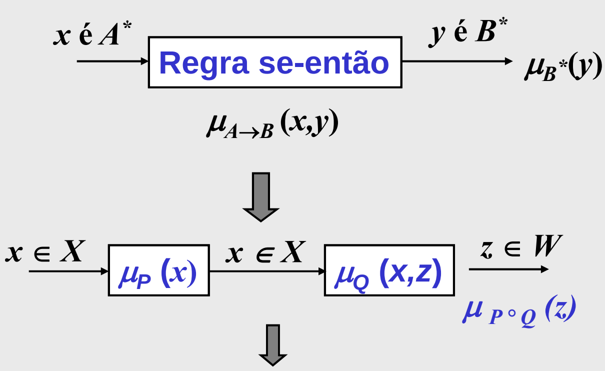
Conclusão:

- ***Lógica Fuzzy* ➾**

A regra é disparada desde que exista um grau de similaridade diferente de zero entre a premissa 1 e o antecedente da regra, sendo que o resultado é um consequente que tem um grau de similaridade diferente de zero com o consequente da regra.

Lógica Fuzzy

Interpretação do Modus Ponens Generalizado:



Composição de um conjunto fuzzy com uma relação fuzzy

Lógica Fuzzy

*O Modus Ponens Generalizado é uma **composição de relações fuzzy**, onde a **primeira relação** é apenas um **conjunto fuzzy** e a **segunda** é a **relação de implicação**.*

⇓

$$\mu_{B^*}(y) = \sup_{x \in A^*} [\mu_{A^*}(x) * \mu_{A \to B}(x, y)]$$

Lógica Fuzzy

Exemplo:

- dada a *relação de implicação*:

$$\mu_{A \to B}(x, y) = max\,[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)]$$

- e dois conjuntos *A* e *B*, em universos discretos e finitos *X* e *Y*, com funções de pertinência:

Lógica Fuzzy

$$\mu_A(x) = \{0;\ 0,2;\ 0,7;1;\ 0,4;\ 0\}$$

$$\mu_B(y) = \{0,3;\ 0,8;\ 1;\ 0,5;\ 0\}$$

- obtém-se*:*

$$\mu_{A\to B}(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0,8 & 1 & 0,8 & 0,8 \\ 0,3 & 0,8 & 1 & 0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 1 & 0,6 & 0,6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lógica Fuzzy

- dado um conjunto A^* definido por:

$$\mu_{A^*}(x) = \{0;\ 0,3;\ 0,8;1;\ 0,7;\ 0,2\}$$

- e utilizando o *min* para a norma-t em:

$$\mu_{B^*}(y) = \max_{x\in A^*} [\mu_{A^*}(x) * \mu_{A\to B}(x,y)]$$

(universos discretos e finitos: *sup* → *max*)

Lógica Fuzzy

- tem-se

$$\mu_{A^*}(x)=\{0;\ 0{,}3;\ 0{,}8;1;\ 0{,}7;\ 0{,}2\}\qquad \mu_{A\to B}(x,y)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0{,}8&0{,}8&1&0{,}8&0{,}8\\0{,}3&0{,}8&1&0{,}5&0{,}3\\0{,}3&0{,}8&1&0{,}5&0\\0{,}6&0{,}8&1&0{,}6&0{,}6\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_{B^*}(y)=\begin{Bmatrix}max(0\wedge 1;\ 0{,}3\wedge 0{,}8;\ 0{,}8\wedge 0{,}3;\ 1\wedge 0{,}3;\ 0{,}7\wedge 0{,}6;\ 0{,}2\wedge 1);\\ max(0\wedge 1;\ 0{,}3\wedge 0{,}8;\ 0{,}8\wedge 0{,}8;\ 1\wedge 0{,}8;\ 0{,}7\wedge 0{,}8;\ 0{,}2\wedge 1);\\ max(0\wedge 1;\ 0{,}3\wedge 1;\ 0{,}8\wedge 1;\ 1\wedge 1;\ 0{,}7\wedge 1;\ 0{,}2\wedge 1);\\ max(0\wedge 1;\ 0{,}3\wedge 0{,}8;\ 0{,}8\wedge 0{,}5;\ 1\wedge 0{,}5;\ 0{,}7\wedge 0{,}6;\ 0{,}2\wedge 1);\\ max(0\wedge 1;\ 0{,}3\wedge 0{,}8;\ 0{,}8\wedge 0{,}3;\ 1\wedge 0;\ 0{,}7\wedge 0{,}6;\ 0{,}2\wedge 1);\end{Bmatrix}$$

$$=\{0{,}6;\ \ 0{,}8;\ \ 1;\ \ \ 0{,}6;\ \ \ 0{,}6\}$$

Lógica Fuzzy

Supondo que a entrada ***A****** do sistema seja **precisa** (não-fuzzy):

A*** **é um singleton**

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mu_{A^*}(x)=\begin{cases}1 & \text{para } x=x'\\ 0 & \text{para todo outro } x\in X\end{cases}}$$

Lógica Fuzzy

Como $x \neq 0$ apenas no ponto x', o ***sup*** torna-se desnecessário

$$\begin{aligned}\mu_{B^*}(y) &= [\mu_{A^*}(x') * \mu_{A\to B}(x',y)] \\ &= [1 * \mu_{A\to B}(x',y)] \\ &= \mu_{A\to B}(x',y)\end{aligned}$$

LÓGICA FUZZY

- ***Exemplo:*** considere-se a implicação

$$\mu_{A\to B}(x,y) = 1 - min[\mu_A(x), 1 - \mu_B(y)]$$

e conjuntos ***A*** e ***B*** representados por funções de pertinência triangulares, em universos contínuos

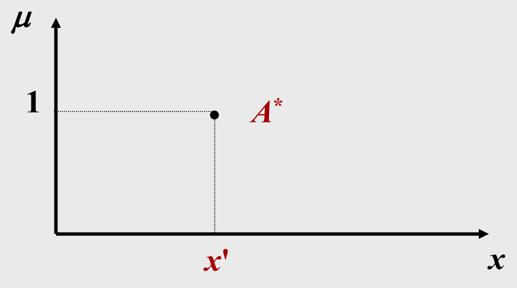
LÓGICA FUZZY

Para uma entrada *singleton* ***x'***, o consequente ***B****** será dado por:

$$\mu_{B^*}(y) = 1 - min[\mu_A(x'), 1 - \mu_B(y)]$$

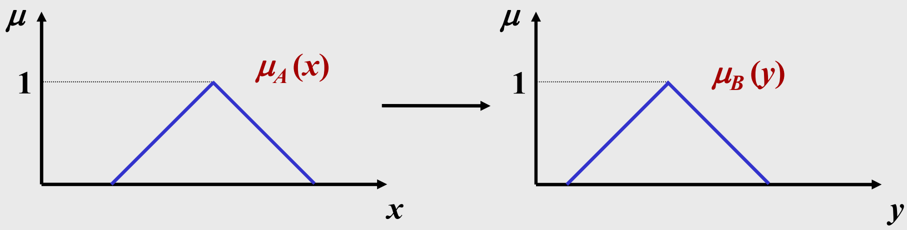
Graficamente, o procedimento consiste em:

Lógica Fuzzy



Lógica Fuzzy

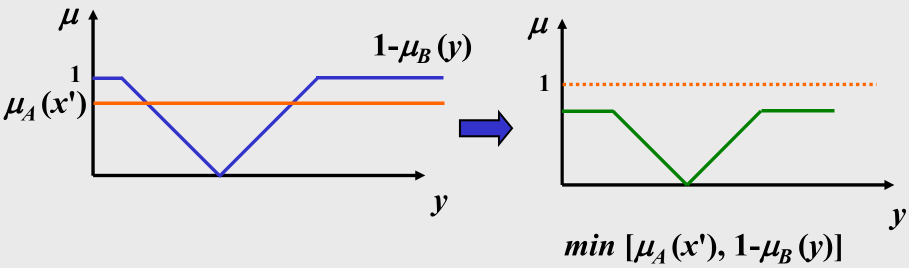
Regra (implicação): *se* ***A*** *então* ***B***



Lógica Fuzzy

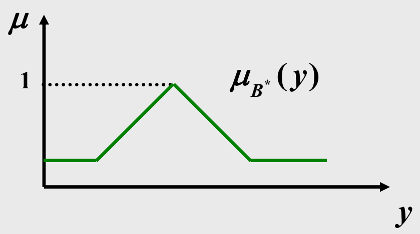
Operações (passo a passo):

observando que $\mu_A(x') < 1$



Lógica Fuzzy

Resultado final (consequente):



Lógica Fuzzy

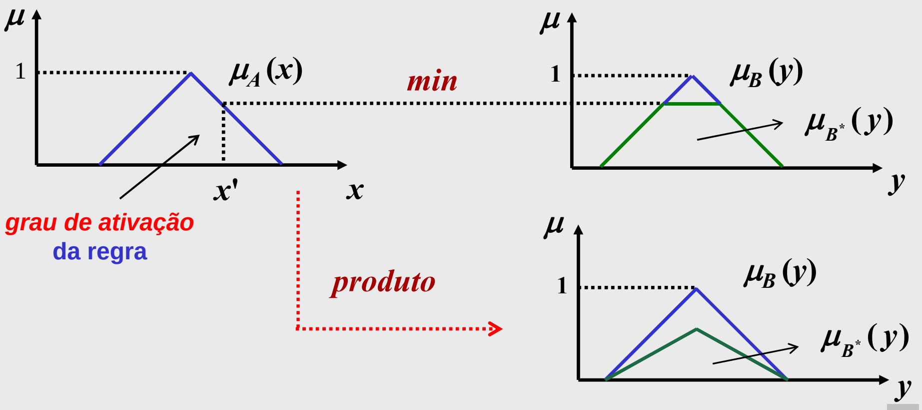
- Observa-se que o resultado de uma regra específica, cujo *consequente* é associado a um conjunto fuzzy com *suporte finito*, é um conjunto fuzzy com *suporte infinito*
- Este comportamento, que é observado também para *outras implicações*, *viola o senso comum, de importância em aplicações em engenharia*

⬇

foram definidas implicações que não violassem o senso comum : *min* e *produto* [Mamdani e Larsen $\rightarrow$ Controle], mesmo rompendo o vínculo com a lógica proposicional

Lógica Fuzzy

Refazendo o *exemplo* com essas implicações:



Lógica Fuzzy

- Com estas implicações, chamadas de ***implicações de engenharia*** [Mendel], observa-se que:
  - o conjunto fuzzy resultante está ***diretamente associado ao consequente da regra***.
  - não existe mais o ***patamar*** (***suporte infinito***)

- Outros operadores também são usados para ***implicação***
  ⇒ geralmente ***normas-t***

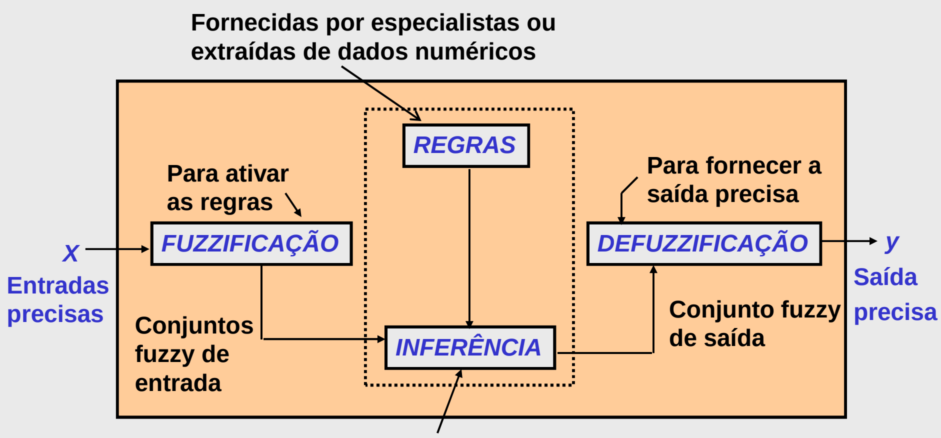
Lógica Fuzzy

- Quanto aos demais operadores, utilizam-se, geralmente:
  - conectivo *e* (f_e) → *normas-t*
  - conectivo *ou* (f_{ou}) → *co-normas-t*
  - *norma-t* no *modus ponens generalizado* → *min*

↓

regra de inferência *max-min*

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY



- Mapeia conjuntos fuzzy em conjuntos fuzzy
- Determina como as regras são ativadas e combinadas

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

- ***Fuzzificação***: ***mapeamento*** **de dados precisos para os conjuntos fuzzy (de entrada)**
- ***Defuzzificação***: ***interpretação*** **do conjunto fuzzy de saída**

↓

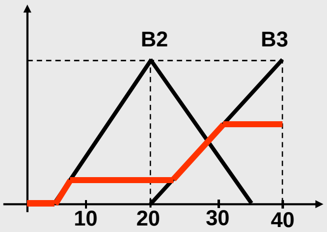
o processo de *defuzzificação* produz uma *saída precisa*, a partir do conjunto fuzzy de saída obtido pelo sistema de inferência

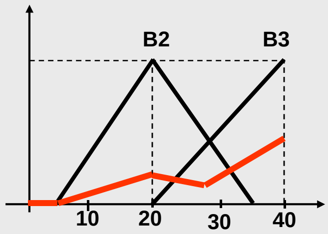
DEFUZZIFICAÇÃO

- **Existem vários métodos diferentes**
- **Os mais utilizados são:**
  - **Máximo**
  - **Média dos Máximos**
  - **Centróide (ou Centro de Gravidade)**
  - **Altura**
  - **Altura Modificada**

DEFUZZIFICAÇÃO

- ***Máximo:*** examina-se o conjunto fuzzy de saída e escolhe-se, como valor preciso, o valor no universo da variável de saída para o qual o grau de pertinência é o máximo



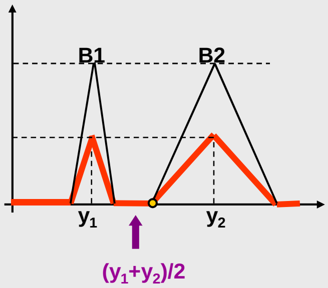


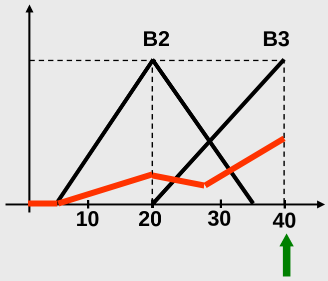
Qual valor escolher se o máximo for uma faixa?

O valor máximo é o limite superior do Universo de Discurso!!

DEFUZZIFICAÇÃO

- ***Média dos máximos:*** a saída precisa é obtida tomando-se a média entre os dois elementos extremos no universo que correspondem aos maiores valores da função de pertinência do conjunto fuzzy de saída





O valor preciso possui grau de pertinência igual a ZERO!!

O valor preciso é o limite superior do Universo de Discurso!!

DEFUZZIFICAÇÃO

- ***Centróide***: a saída precisa (y_C) é o valor no universo que corresponde ao centro de gravidade do conjunto fuzzy (B)

Contínuo

$$y_C = \frac{\int y\mu_B(y)dy}{\int \mu_B(y)dy}$$

Discreto

$$y_C = \frac{\sum y_i \mu_B(y_i)}{\sum \mu_B(y_i)}$$

Problema: dificuldade no cálculo!

ICA

DEFUZZIFICAÇÃO

- ***Altura:*** calcula-se

$$y_h = \frac{\sum_l y^l \mu_{B^l}(y^l)}{\sum_l \mu_{B^l}(y^l)}$$

y^l: valor no universo correspondente ao *centro de gravidade* do conjunto fuzzy B^l, associado ao grau de ativação da regra R^l

ICA

DEFUZZIFICAÇÃO

- *Altura (continuação)*
  - Método simples ⟶ o valor no universo que corresponde ao centro de gravidade das funções de pertinência mais comuns é conhecido a priori:
    - Triangular (simétrica) ⇒ corresponde ao ápice do triângulo
    - Gaussiana ⇒ corresponde ao centro da função
    - Trapezoidal (simétrica) ⇒ corresponde ao ponto médio do suporte
  - *Problemas:*
    - só utiliza o centro do suporte da função de pertinência do consequente
    - qualquer que seja *a largura da função* de pertinência, fornece *o mesmo resultado!*

ICA

DEFUZZIFICAÇÃO

- ***Altura modificada:*** calcula-se

$$\boxed{y_{mh} = \frac{\sum_l y^l \mu_{B^l}(y^l)/(\delta^l)^2}{\sum_l \mu_{B^l}(y^l)/(\delta^l)^2}}$$

δ^l: medida da extensão do suporte do consequente da Regra R^l

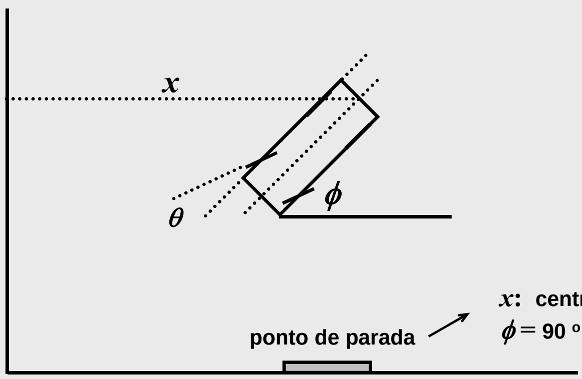
funções de pertinência triangulares e trapezoidais ⟶ suporte do conjunto.

funções de pertinência gaussianas ⟶ desvio padrão

ICA

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Exemplo: Estacionamento de um veículo



x: central (CE)
ϕ = 90 º ou vertical (VE)

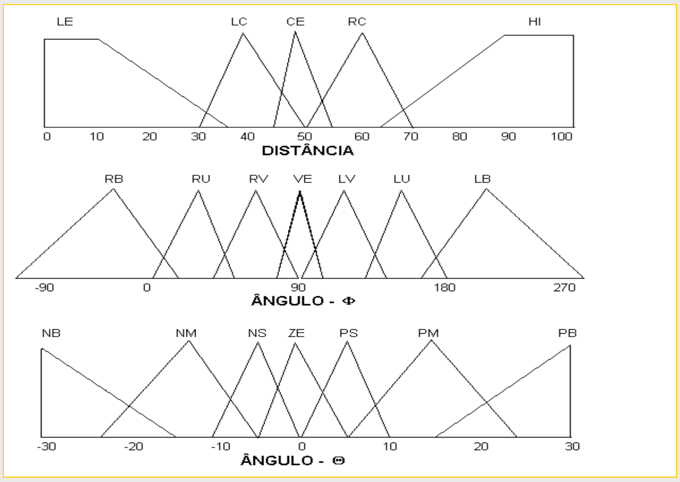
SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS

Regra: se (x *é* LE) *e* (ϕ *é* RB) *então* (θ *é* **PS**)

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

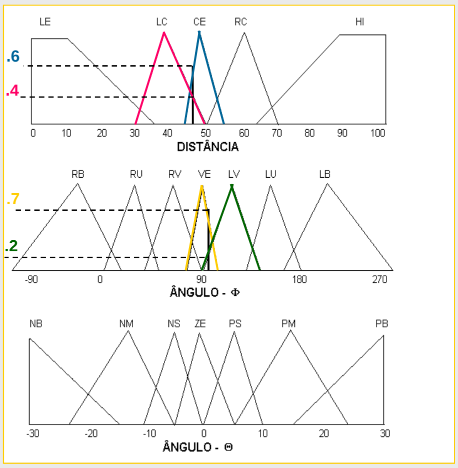
Conjuntos fuzzy:



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Entradas precisas: x = 47,5m ϕ = 99°

ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Operadores considerados *neste exemplo*:

- **conectivo *e* (f_e) ⟹ *min***
- **implicação ⟹ *min***
- ***norma-t* no *modus ponens generalizado* ⟹ *min***
- **conectivo *ou* (f_{ou}) ⟹ *max***

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Dois antecedentes: $\mu_{B^*}(\theta) = (\mu_{A_1}(x') \wedge \mu_{A_2}(\phi')) \wedge \mu_B(\theta)$

Para cada uma das regras ativadas, tem-se:

(cf. figuras a seguir)

$$\mu_{NM^*}(\theta) = (\mu_{LC}(x') \wedge \mu_{VE}(\phi')) \wedge \mu_{NM}(\theta) = (0{,}4 \wedge 0{,}7) \wedge \mu_{NM}(\theta) = 0{,}4 \wedge \mu_{NM}(\theta)$$

$$\mu_{NM^*}(\theta) = (\mu_{LC}(x') \wedge \mu_{LV}(\phi')) \wedge \mu_{NM}(\theta) = (0{,}4 \wedge 0{,}2) \wedge \mu_{NM}(\theta) = 0{,}2 \wedge \mu_{NM}(\theta)$$

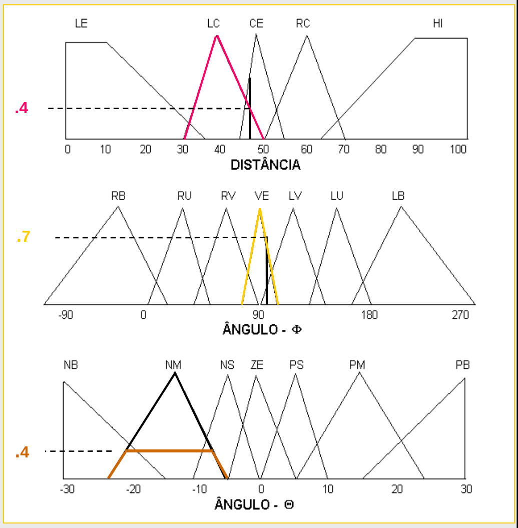
$$\mu_{ZE^*}(\theta) = (\mu_{CE}(x') \wedge \mu_{VE}(\phi')) \wedge \mu_{ZE}(\theta) = (0{,}6 \wedge 0{,}7) \wedge \mu_{ZE}(\theta) = 0{,}6 \wedge \mu_{ZE}(\theta)$$

$$\mu_{NS^*}(\theta) = (\mu_{CE}(x') \wedge \mu_{LV}(\phi')) \wedge \mu_{NS}(\theta) = (0{,}6 \wedge 0{,}2) \wedge \mu_{NS}(\theta) = 0{,}2 \wedge \mu_{NS}(\theta)$$

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

$$\mu_{NM^*}(\theta) = (\mu_{LC}(x') \wedge \mu_{VE}(\phi')) \wedge \mu_{NM}(\theta) = (0{,}4 \wedge 0{,}7) \wedge \mu_{NM}(\theta) = 0{,}4 \wedge \mu_{NM}(\theta)$$

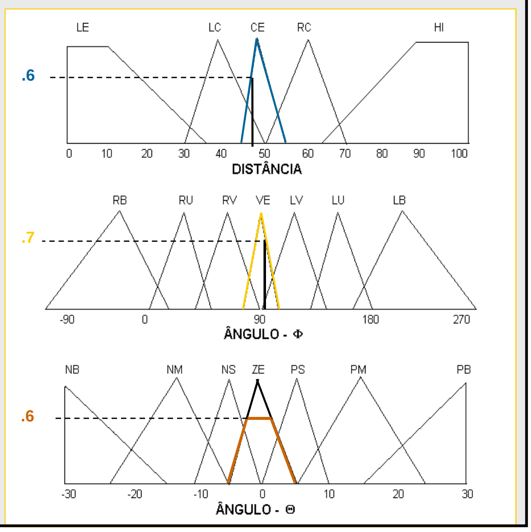
ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

$$\mu_{ZE^*}(\theta) = (\mu_{CE}(x') \wedge \mu_{VE}(\phi')) \wedge \mu_{ZE}(\theta) = (0{,}6 \wedge 0{,}7) \wedge \mu_{ZE}(\theta) = 0{,}6 \wedge \mu_{ZE}(\theta)$$

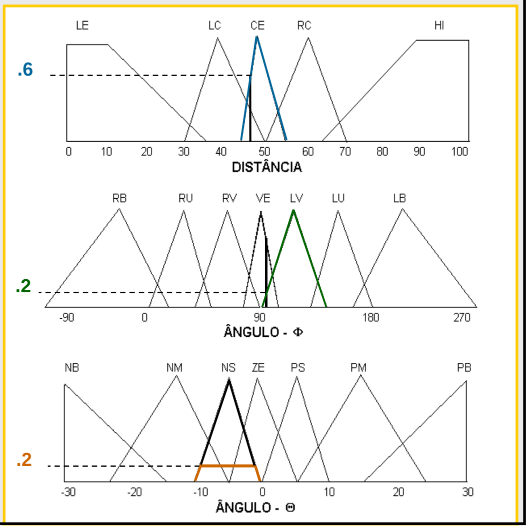
ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

$$\mu_{NS^*}(\theta) = (\mu_{CE}(x') \wedge \mu_{LV}(\phi')) \wedge \mu_{NS}(\theta) = (0{,}6 \wedge 0{,}2) \wedge \mu_{NS}(\theta) = 0{,}2 \wedge \mu_{NS}(\theta)$$

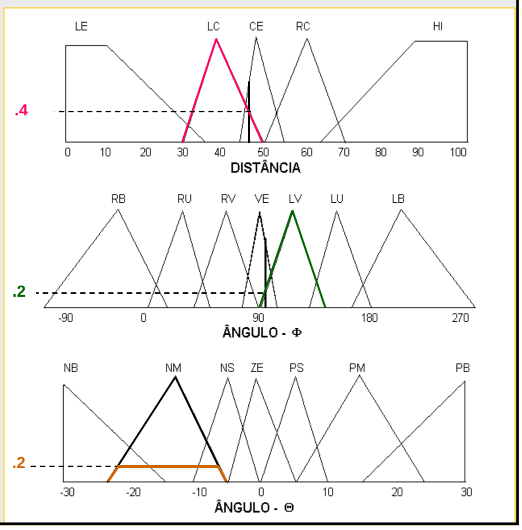
ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

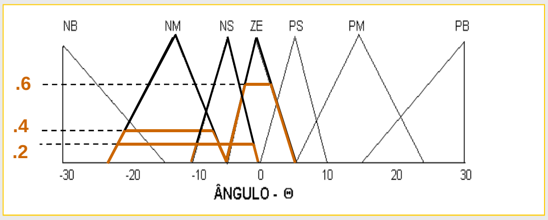
$$\mu_{NM^*}(\theta) = (\mu_{LC}(x') \wedge \mu_{LV}(\phi')) \wedge \mu_{NM}(\theta) = (0{,}4 \wedge 0{,}2) \wedge \mu_{NM}(\theta) = 0{,}2 \wedge \mu_{NM}(\theta)$$

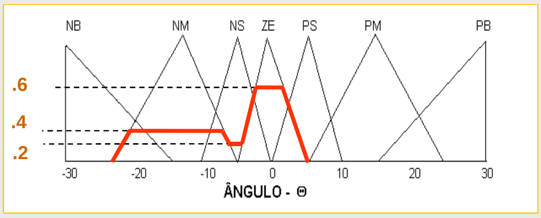
ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

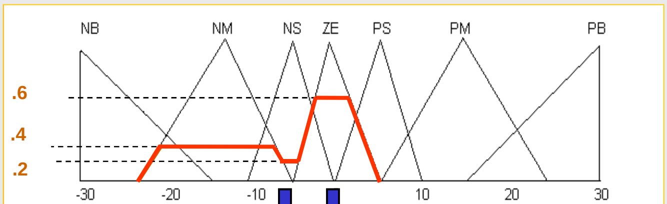
União dos consequentes de cada regra





SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Defuzzificação:



COG MOM

considera todas as regras

forma dos conjuntos é importante

considera somente as regras com o *maior* ***grau de ativação***

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Número de conjuntos (ou de funções de pertinência) *dos antecedentes*

⇓

Número de regras possíveis
(5 x 7 = 35, *no exemplo*)

muitos conjuntos ⇒

- *dificuldade na construção da base de regras*
- *maior custo computacional*
- *menor interpretabilidade (linguística)*

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Formas das funções de pertinência

⇓

- *arbitrárias, de início*
- *ajustadas de acordo com o desempenho*

⇓

sistemas *neuro-fuzzy* e *fuzzy-genéticos*

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Conclusão $\Rightarrow$ o desempenho de um sistema fuzzy é afetado por:

- base de regras
- número e forma dos conjuntos fuzzy
- operador de implicação
- método de defuzzificação

COMENTÁRIOS

Números Fuzzy: conjuntos fuzzy definidos no conjunto dos números reais

Aplicações em:
- *Programação Linear Fuzzy*
- *Previsão*
- *Planejamento*

Aritmética Fuzzy

base do *Raciocínio Aproximado*

COMENTÁRIOS

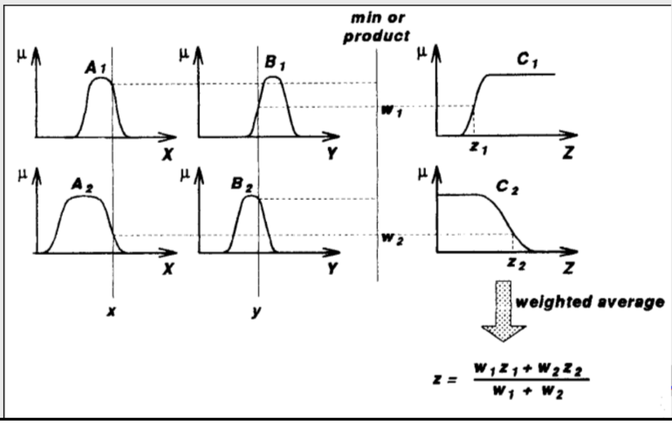
Outros Sistemas de Inferência Fuzzy

Tsukamoto ⇒ *se x é A e y é B então z é C*

monotônica

Regra 1

Regra 2



COMENTÁRIOS

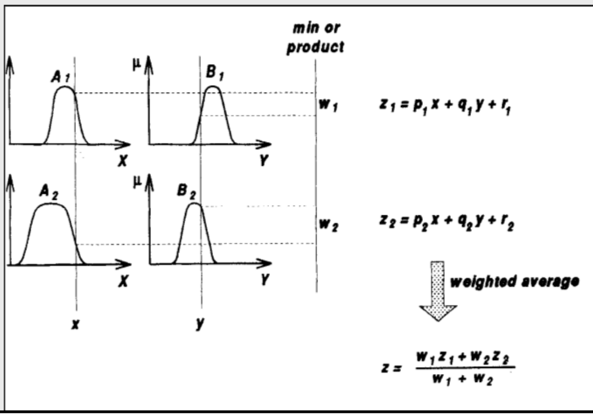
Outros Sistemas de Inferência Fuzzy

Takagi-Sugeno-(Kang) ⇒ *se x é A e y é B*

então z = f(x,y)

Regra 1

Regra 2



COMENTÁRIOS

Áreas de aplicação de Sistemas Fuzzy e Híbridos:

(bibliografia abundante)

- **Controle (*NEFCON*)**
- **Classificação (*NEFCLASS*)**
- **Aproximação de Funções (*NEFPROX*)**
- **Previsão de Séries (*extração automática de regras*)**
- **Fuzzy *clustering***
- ***etc.***

LÓGICA NEBULOSA

Marley Maria B.R. Vellasco

Ricardo Tanscheit

LIRA: Laboratório de Inteligência Computacional e Robótica Aplicadas

PUC-Rio

CONTEÚDO

- Introdução
  - Introdução, Objetivo e Histórico
- Conceitos Básicos
  - Definição, Características e Formas de Imprecisão
- Conjuntos Fuzzy
  - *Propriedades, Formas de Representação e Operações*
- Lógica Fuzzy
  - Relações, Composições, Modus Ponens Generalizado
- Fuzzy Control

CONTEÚDO

- ***Introdução***
  - Introdução, Objetivo e Histórico
- Conceitos Básicos
  - Definição, Características e Formas de Imprecisão
- Conjuntos Fuzzy
  - *Propriedades, Formas de Representação e Operações*
- Lógica Fuzzy
  - Relações, Composições, Modus Ponens Generalizado
- Fuzzy Control

INTRODUÇÃO

- *Lógica* → Procura modelar o *raciocínio.*

- *Lógica Fuzzy* →
  - *inspirada na lógica tradicional*
  - *procura modelar os modos imprecisos do raciocínio que têm um papel fundamental na habilidade humana de tomar decisões*

INTRODUÇÃO

Lógica Fuzzy **fornece o ferramental matemático para tratar** ***informações de caráter impreciso ou vago.***

Serve de base para o ***raciocínio aproximado*** **(“approximate reasoning”)**

INTRODUÇÃO

- *aplicações em diversas áreas do conhecimento:*
  - *Controle*
    - *diretamente sobre o processo*
    - *supervisão*
  - *Previsão de séries*
  - *Classificação*

INTRODUÇÃO

- *principais vantagens:*
  - *formulação através de regras lingüísticas*
  - *não necessita de modelo matemático formal*
- *regras linguísticas:*
  - *obtidas através de especialistas*
  - *geradas através de dados numéricos*

HISTÓRICO

- ***Bivalência*** ➔ Desde Aristóteles, a Lógica Clássica se baseia em bivalência ***V,F***
  - (Lei da Não-Contradição $A \cap \sim A = \phi$)
- ***Multivalência*** ➔ Desenvolvida por Lukasiewicz para lidar com o Princípio da Incerteza na Mecânica Quântica
  - 1920 - 3 valores (V,F,IN)
  - 1930 - n valores
- ***Lógica Fuzzy*** ➔ Desenvolvida por Lofti Zadeh (**1965 - Fuzzy Sets**) onde os elementos pertencem a um certo conjunto com diferentes graus ***(grau de pertinência).***

⬇

Devido à resistência dos cientistas, a Lógica Nebulosa cresceu no mercado comercial para depois se desenvolver nas universidades

Evolução da área

- *Aplicações Comerciais e Industriais*.

ANO	# de APLICAÇÕES
1986	8
1987	15
1988	50
1989	100
1990	150
1991	300
1992	800
1993	1500

- *Devido à resistência dos cientistas, a Lógica Fuzzy cresceu no mercado comercial para depois se desenvolver nas universidades*

Aplicações Comerciais

- Controle
  - Controle de Aeronave (Rockwell Corp.)
  - Operação do Metrô de Sendai (Hitachi)
  - Transmissão Automática (Nissan, Subaru)
  - Space Shuttle Docking (NASA)
- Otimização e Planejamento
  - Elevadores (Hitachi, Fujitech, Mitsubishi)
  - Análise do Mercado de Ações (Yamaichi)
- Análise de Sinais
  - Ajuste da Imagem de TV (Sony)
  - Autofocus para Câmera de Vídeo (Canon)
  - Estabilizador de Imagens de Vídeo (Panasonic)

CONTEÚDO

- Introdução
  - Introdução, Objetivo e Histórico
- ***Conceitos Básicos***
  - **Definição**, Características e Formas de Imprecisão
- Conjuntos Fuzzy
  - *Propriedades, Formas de Representação e Operações*
- Lógica Fuzzy
  - Relações, Composições, Modus Ponens Generalizado
- Fuzzy Control

DEFINIÇÃO

Sistema ***não-linear*** **de mapeamento de um** ***vetor de entrada*** **em uma** ***saída escalar*****, capaz de incorporar tanto o** ***<u>conhecimento objetivo</u>*** **quanto o** ***<u>conhecimento subjetivo</u>.***

DEFINIÇÃO

- ***Conhecimento Objetivo***
  – Usado na formulação de problemas de engenharia ➔ **modelos matemáticos**
- ***Conhecimento Subjetivo***
  – Representa a **informação lingüística** que é geralmente impossível de quantificar usando matemática tradicional

SISTEMAS FUZZY

Estudado por Lofti Zadeh:

– ***Princípio da Incompatibilidade***

“ Conforme a *complexidade* de um sistema *aumenta*, a nossa habilidade de fazer *declarações precisas* e *significativas* sobre o seu comportamento *diminui*, até alcançar um limite além do qual *precisão* e *relevância* tornam-se *características* mutuamente *exclusivas*”

SISTEMA FUZZY

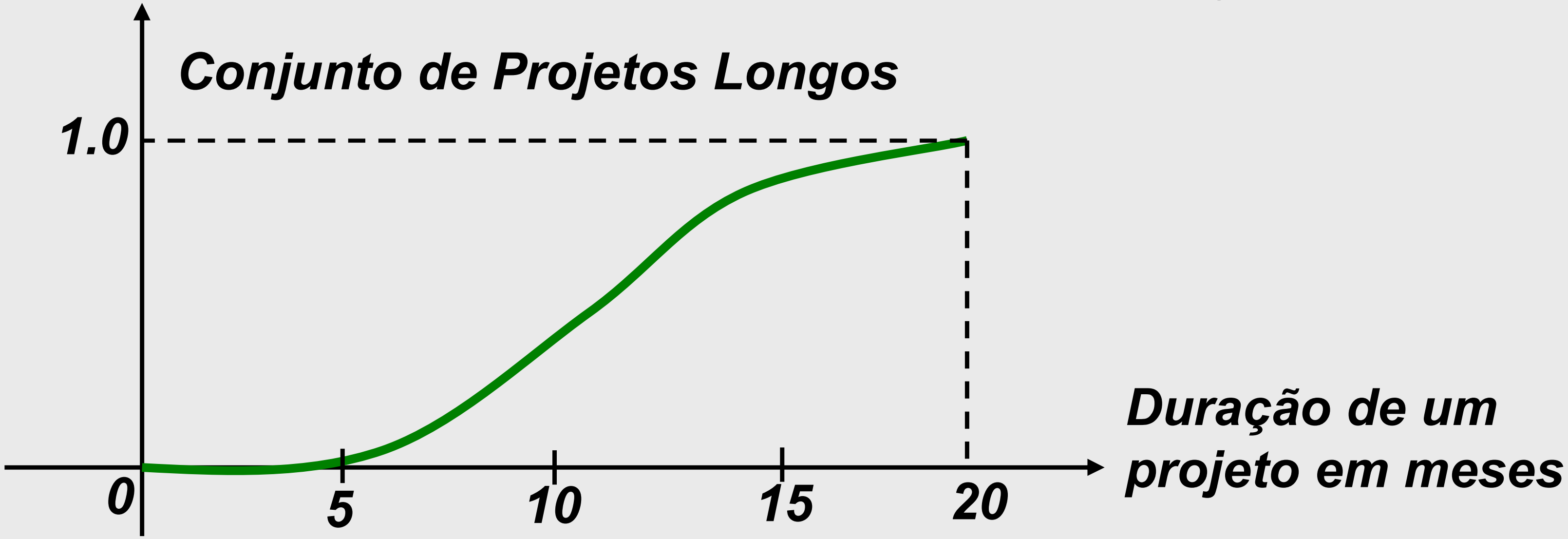
"The closer one looks at a real world problem, the fuzzier becomes its solution" (Zadeh)

↓

A *Lógica Fuzzy* fornece um método para *reduzir* e *explicar* a *complexidade do sistema.*

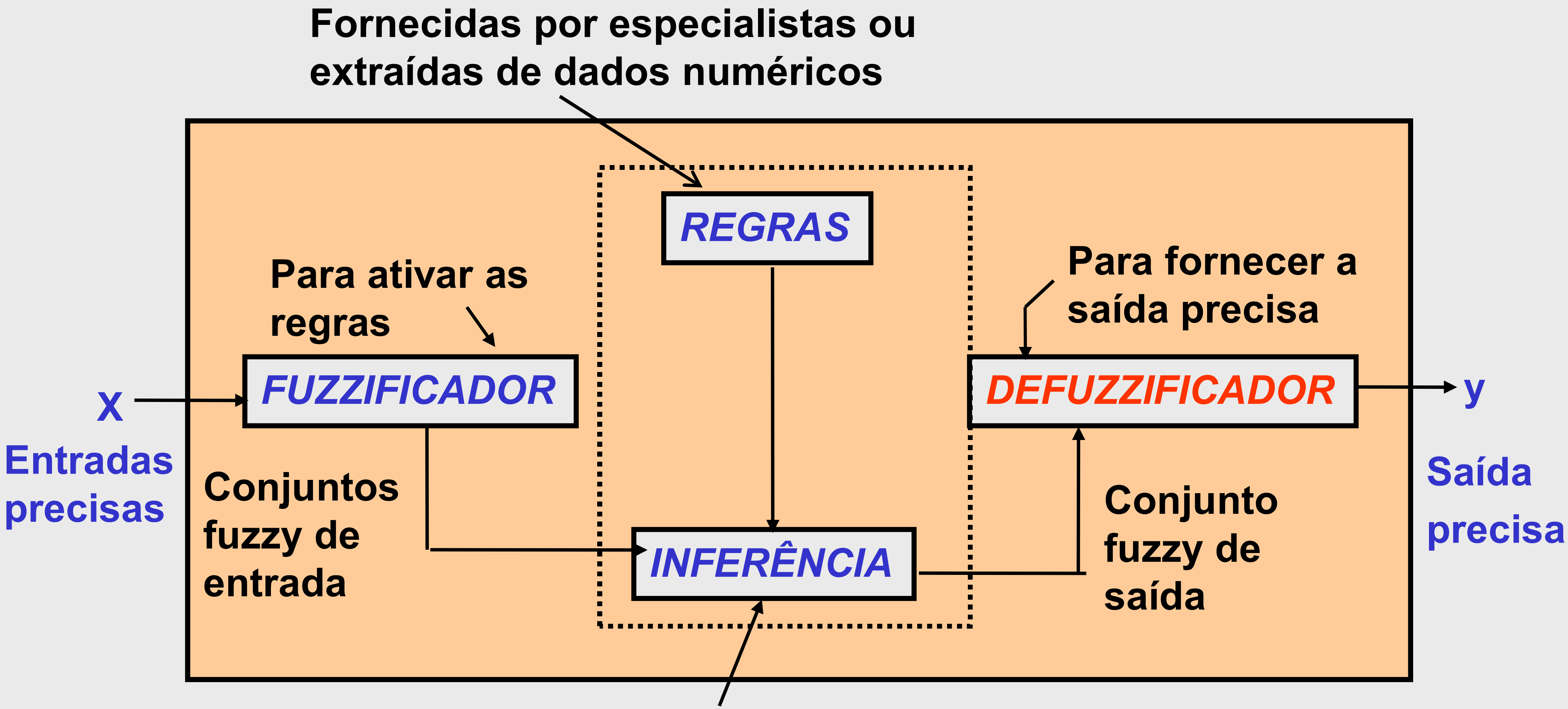
SISTEMA FUZZY

- ***Idéia Básica*** ⇨ **Conjuntos Fuzzy**
  - ***Conjuntos Fuzzy*** são funções que ***mapeiam*** um ***valor escalar*** em um número entre ***0*** e ***1***, o qual indica o seu ***Grau de Pertinência*** a esse conjunto.



SISTEMA FUZZY

Visão Geral:



- Mapeia fuzzy sets em fuzzy sets
- Determina como as regras são ativadas e combinadas

REGRAS FUZZY

- ***Exemplo:***

  antecedente

  SE u_1 É *muito quente* E u_2 É *baixo*

  ENTÃO gire v *um pouco para a direita*

  conseqüente

- ***Conceitos Importantes:***
  - Variáveis Lingüísticas (quente x 36°)
  - Quantificadores (muito, um pouco)
  - Conexões Lógicas (E/OU)
  - Implicações (SE A ENTÃO B)

CONTEÚDO

- Introdução
  - Introdução, Objetivo e Histórico
- ***Conceitos Básicos***
  - Definição, **Características** e Formas de Imprecisão
- Conjuntos Fuzzy
  - *Propriedades, Formas de Representação e Operações*
- Lógica Fuzzy
  - Relações, Composições, Modus Ponens Generalizado
- Fuzzy Engineering
  - Quando e Como utilizar Lógica Nebulosa

Características Básicas

Características Básicas

- ***Modelagem de Problemas Complexos***

Capazes de lidar com *problemas complexos*, com propriedades *não-lineares*.

Características Básicas

- ***Modelagem Cognitiva:***

Têm habilidade de codificar o *conhecimento* de forma similar ao modo *como os especialistas* expressam o processo de decisão.

Aquisição do Conhecimento:

- **Mais Fácil**
- **Mais Confiável**
- **Menos sujeito a erros**

Características Básicas

- ***Complexidade Reduzida:***

Os Sistemas Fuzzy possuem *menos regras*, similares às expressas por especialistas

Características Básicas

- ***Manipulação de Incertezas:***

- lidam de forma *consistente* e *matemática* com *incertezas*.

Conjuntos Fuzzy

① Fuzzy: **SE altura É alta**

Gera uma resposta diferente para cada valor

ENTÃO peso É pesado

② S. Especialistas: SE altura É > 1.78 E < 1.95

Fator de Certeza aplicado a uma resposta já conhecida

ENTÃO peso É 90kg F.C. = .85

Características Básicas

- ***Modelagem de sistemas envolvendo Múltiplos Especialistas:***

Capazes de conciliar informações de *especialistas consistentes* (colaboradores) ou *conflitantes* (contraditórios)

Exemplo: Preço deve ser baixo - *Marketing*
Preço deve ser alto - *Financeira*
Preço deve ser ~2*custo - *Produção*

CONTEÚDO

- Introdução
  - Introdução, Objetivo e Histórico
- ***Conceitos Básicos***
  - Definição, Características e **Formas de Imprecisão**
- Conjuntos Fuzzy
  - *Propriedades, Formas de Representação e Operações*
- Lógica Fuzzy
  - Relações, Composições, Modus Ponens Generalizado
- Fuzzy Control

Formas de Imprecisão

Qual o significado de "FUZZINESS"?

Formas de Imprecisão

- ***Inexatidão:***

  – **Corresponde à precisão da nossa *habilidade de medir* (erros humanos).**

  $\Downarrow$

  – **Tenta-se corrigir o erro através de várias medidas.**

Formas de Imprecisão

- ***Precisão e Acuidade:***

É o grau de *exatidão* com o qual se pode *medir* uma grandeza

É o grau com que uma certa medida corresponde ao *valor padrão* de uma grandeza → erros devido a fatores do ambiente, falta de calibração.

Incertezas podem afetar a acuidade, mas a precisão não é afetada, já que esta só depende da granularidade do dispositivo de medida

Formas de Imprecisão

- ***Imprecisão Intrínseca:***

  associada à descrição das propriedades de um fenômeno e não com as medidas da propriedade.

- ***Lógica Fuzzy:***
  - **Trata de questões associadas à *imprecisão intrínseca*, ao invés das relacionadas com falhas na medição**

O Tipo de Imprecisão dos Modelos Fuzzy é INDEPENDENTE dos sistemas de medição

Formas de Imprecisão

- *Ambigüidade:*
  - *várias interpretações* plausíveis.

    Exemplo: “The food is HOT”

Antes do estabelecimento do universo de discurso, a sentença é ambígua mas NÃO é fuzzy

Após o estabelecimento do universo de discurso, a sentença pode ser considerada fuzzy

Formas de Imprecisão

- ***Probabilidade X Lógica Fuzzy:***

Tenta explicar como certos eventos ocorrem em um certo espaço randômico → explica populações e não instâncias individuais

↓

Antes de selecionar um elemento de uma certa população sabe-se as chances do evento ocorrer

↓

Após selecionar o elemento, NÃO existe mais probabilidade

Descreve propriedades que têm valores contínuos, associando as partições desses valores com um label semântico

↓

Importante: as partições podem coincidir (overlap) → Ambigüidade

Formas de Imprecisão

- ***Probabilidade X Lógica Fuzzy:***

Grau de Pertinência ➔ **É o nível de compatibilidade de um elemento do conjunto com o conceito do conjunto**

Ex: ❶ Pedro é ALTO com μ=0.85

Indica que Pedro é bem compatível com o conceito ALTO.

➔ ***Tem-se uma idéia da altura de Pedro.***

❷ Pedro tem 0.85 de probabilidade de ser ALTO

Indica que Pedro tem grandes chances de ser ALTO.

➔ ***NÃO se tem a menor idéia da altura de Pedro.***

Exemplo:

Financiamento Imobiliário

Financiamento Imobiliário

Objetivo:

Determinar o crédito a ser concedido, em função de características do imóvel e do comprador

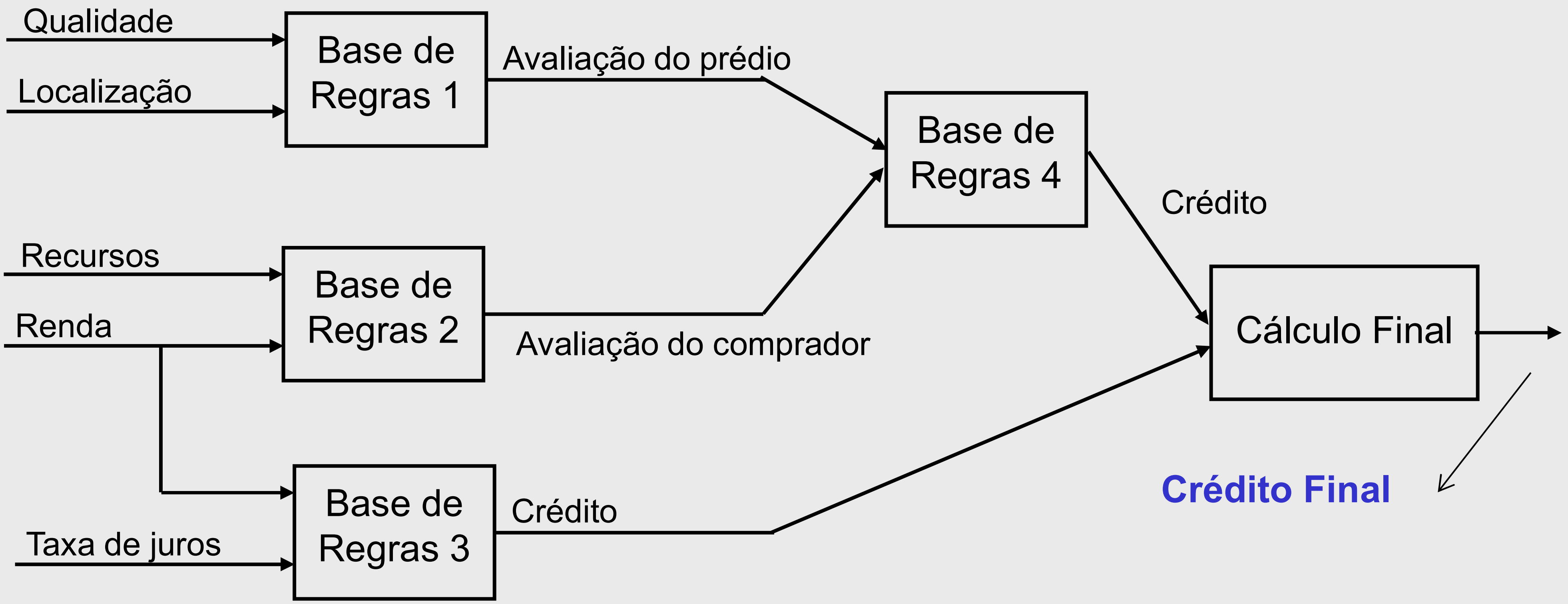
Variáveis de Entrada:

- *Imóvel* – Localização, Qualidade
- *Comprador* – Renda, Recursos
- *Mercado* – taxa de juros

Variável de Saída:

- **Crédito concedido**

Financiamento Imobiliário



Financiamento Imobiliário

Valores lingüísticos:

- Variáveis de entrada

  Localização: ruim, boa, ótima

  Qualidade: baixa, média, muito boa

  Recursos: baixo, médio, alto

  Renda: baixa, média, alta

  Taxa de juros: baixa, média, alta

- Variáveis de saída (inclusive intermediárias):

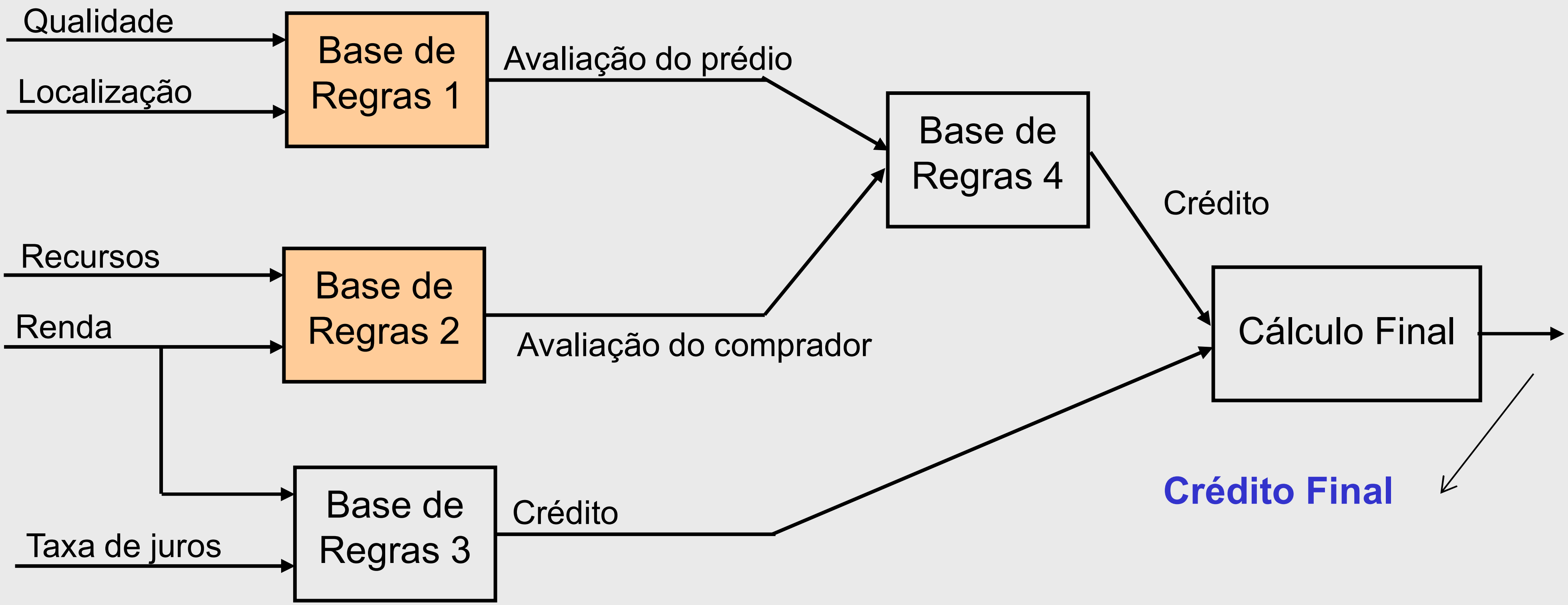
  Avaliação do prédio: baixa, média, alta

  Avaliação do comprador: baixa, média, alta

  Crédito: muito baixo, baixo, médio, alto, muito alto

  Crédito Final: crédito reavaliado pelo critério de corte no procedimento de **defuzzificação**

Financiamento Imobiliário



Financiamento Imobiliário

Bases de Regras

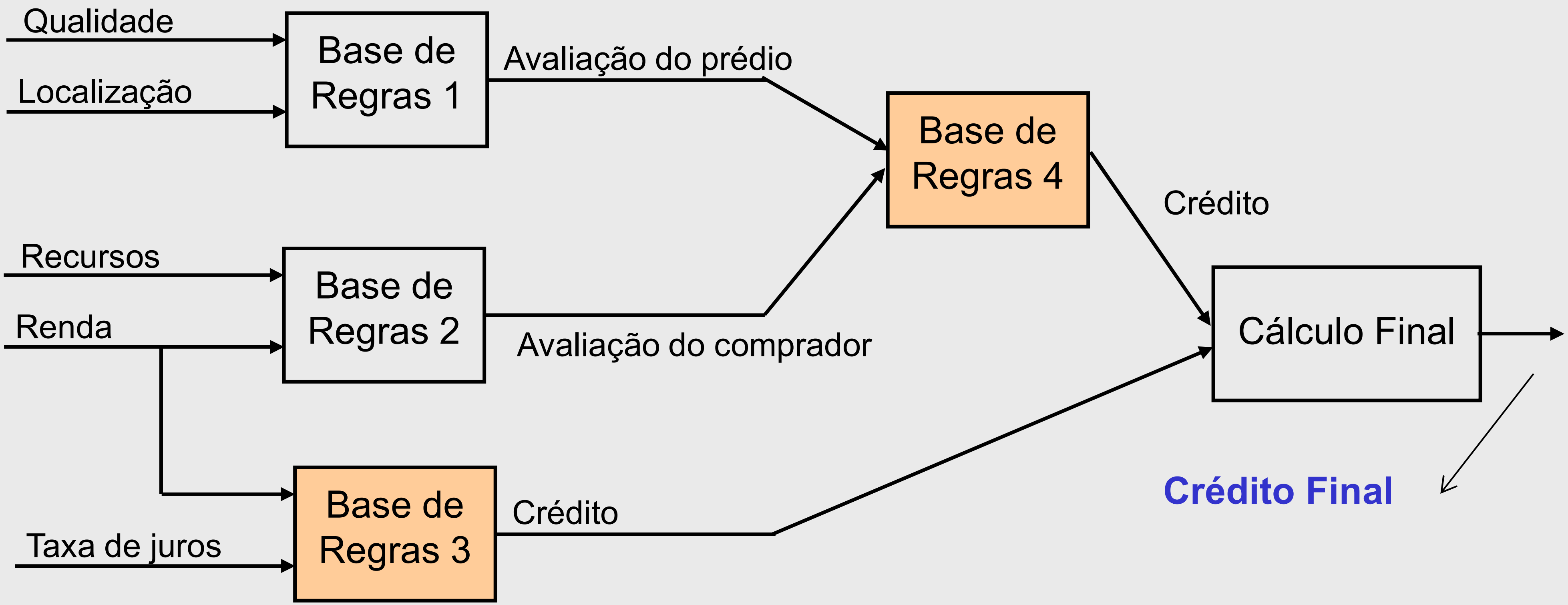
1

Localização	Qualidade	Avaliação Prédio
	ruim	baixa
ruim	boa	média
ruim	muito boa	média
boa	boa	média
boa	muito boa	alta
ótima	boa	média
ótima	muito boa	alta

2

Recursos	Renda	Avaliação Comprador
baixo	baixa	baixa
baixo	média	baixa
baixo	alta	média
médio	baixa	baixa
médio	média	média
médio	alta	alta
alto	baixa	média
alto	média	média
alto	alta	alta

Financiamento Imobiliário



Financiamento Imobiliário

Bases de Regras

3

Renda	**Tx. juros**	**Crédito**
baixa	média	muito baixo
baixa	alta	muito baixo
média	alta	muito baixo

4

Aval. Prédio	**Aval. Comprador**	**Crédito**
	baixa	muito baixo
baixa	média	muito baixo
média	média	médio
alta		alto
alta	alta	muito alto
média	alta	alto

Exemplo:

Seleção de Cliente para Marketing

Seleção de Cliente

Objetivo:

Selecionar cliente para estratégia de marketing

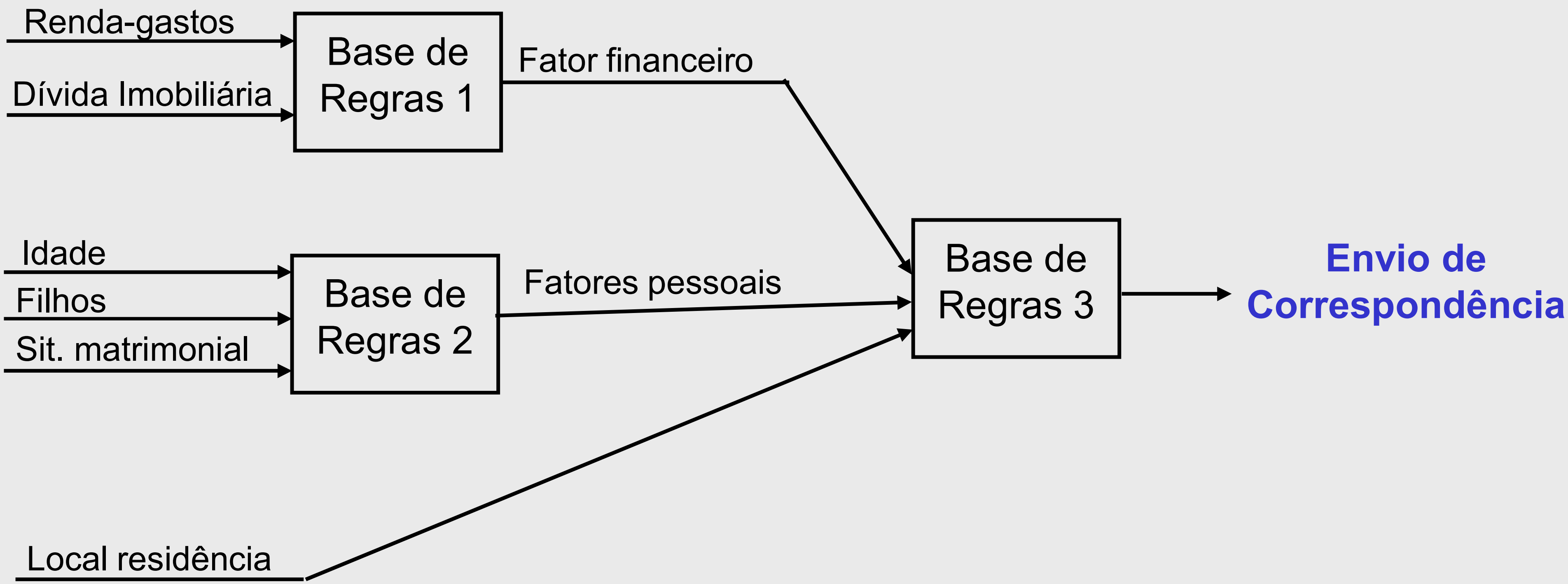
Variáveis de Entrada:

- *Fator financeiro* – Renda-gastos, Dívida Imobiliária
- *Fatores pessoais* – Idade, nº de filhos, situação matrimonial
- Local de Residência

Variável de Saída:

– **Envio de correspondência**

Seleção de Cliente



Seleção de Cliente

Valores lingüísticos:

- Variáveis de entrada

  Renda-gastos: baixo, médio, alto

  Dívida Imobiliária: baixa, média, alta

  Idade: jovem, meia idade, velho, muito velho

  Nº de filhos: nenhum, pouco, muito

  Situação matrimonial: casado, solteiro

  Local de Residência: excelente, bom, médio, ruim

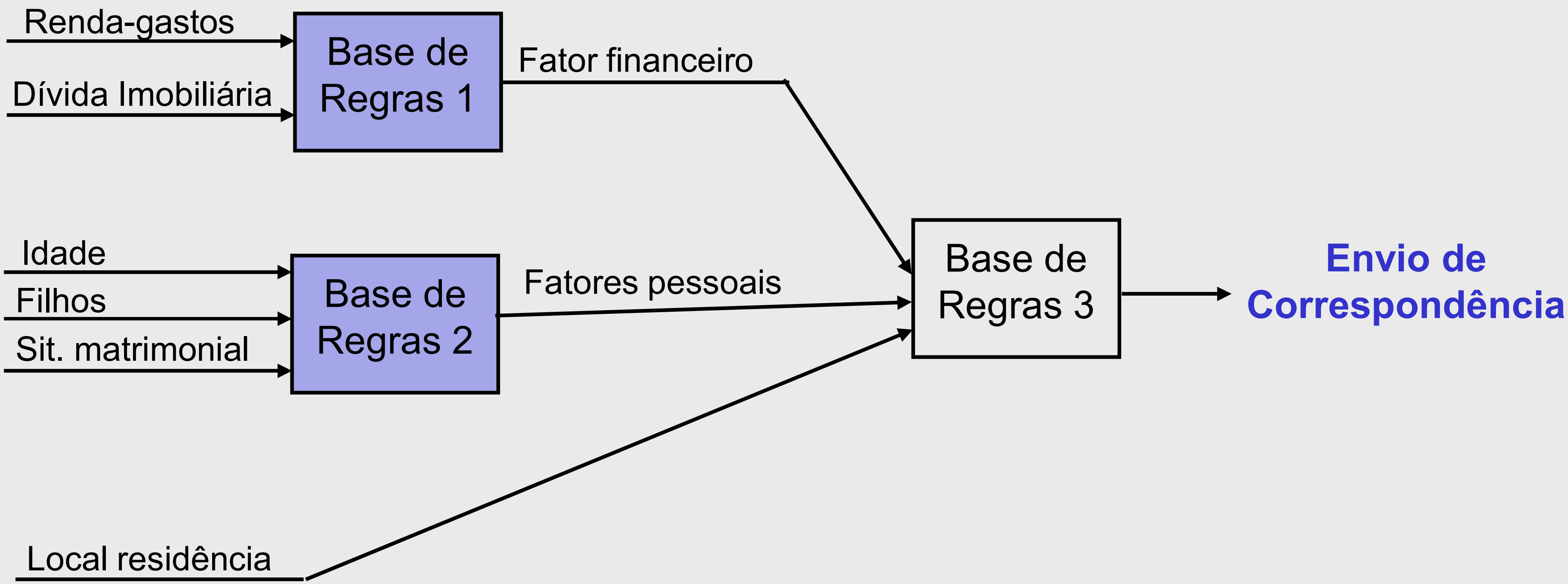
- Variáveis de saída (inclusive intermediárias):

  Fator financeiro: baixo, médio, alto

  Fatores pessoais: baixo, alto

  Envio de correspondência: muito baixo, baixo, médio, alto, muito alto

Seleção de Cliente



Seleção de Cliente

Bases de Regras

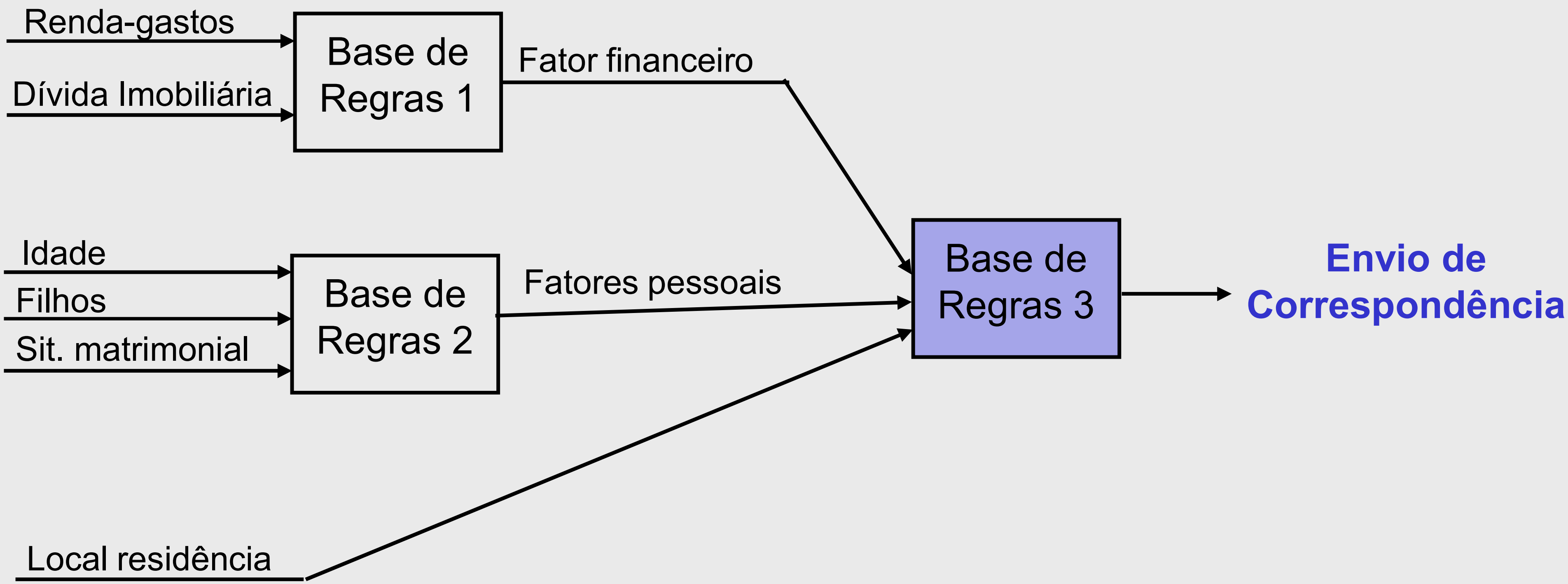
1

Renda-gastos	Dívida Imob.	F. financeiros
baixo	baixo	baixo
médio	baixo	baixo
alto	baixo	médio
baixo	médio	médio
médio	médio	médio
alto	médio	médio
baixo	alto	médio
médio	alto	alto
alto	alto	alto

2

Idade	Filhos	Sit. Matr.	F. pessoal
	muitos	solteiro	baixo
	poucos	solteiro	baixo
		casado	alto
	poucos	casado	alto
	muitos	casado	alto
m. velho		casado	baixo
	nenhum		baixo
jovem		solteiro	baixo
	nenhum	solteiro	alto

Seleção de Cliente



Seleção de Cliente

Bases de Regras

3

F. financeiros	F. pessoal	Local resid.	Envio corresp.
baixo	baixo	ruim	muito baixo
baixo	baixo	bom	muito baixo
baixo	baixo	médio	baixo
baixo	baixo	excelente	baixo
médio	baixo	ruim	muito baixo
médio	baixo	bom	muito baixo
médio	baixo	médio	baixo
médio	baixo	excelente	médio
alto	baixo	ruim	muito baixo
alto	baixo	bom	baixo
alto	baixo	médio	médio
alto	baixo	excelente	alto

Seleção de Cliente

Bases de Regras

3 (continuação)

F. financeiros	F. pessoal	Local resid.	Envio corresp.
alto	alto	ruim	baixo
alto	alto	bom	médio
alto	alto	médio	alto
alto	alto	excelente	muito alto
médio	alto	ruim	muito baixo
médio	alto	bom	baixo
médio	alto	médio	médio
médio	alto	excelente	alto
baixo	alto	ruim	muito baixo
baixo	alto	bom	baixo
baixo	alto	médio	médio
baixo	alto	excelente	alto

SISTEMAS FUZZY

- A maioria dos fenômenos com os quais nos deparamos são ***imprecisos***

Exemplo: dia *QUENTE* (40°, 35°, 30°, 29,5°?)

⇩

- ***Imprecisão Intrínseca* ajuda na compreensão do problema.**
- **"*Fuzziness*" é *independente* da capacidade de medição.**

CONTEÚDO

- Introdução
  - Introdução, Objetivo e Histórico
- Conceitos Básicos
  - Definição, Características e Formas de Imprecisão
- ***Conjuntos Fuzzy***
  - Propriedades, Formas de Representação e Operações
- Lógica Fuzzy
  - Relações, Composições, Modus Ponens Generalizado
- Fuzzy Control

CONJUNTOS FUZZY

- ***Conjuntos Crisp x Fuzzy***
- Definição
- Representação
- Propriedades
- Formatos
- Operações
- Hedges

CONJUNTOS CRISP x FUZZY

- **Conjuntos Ordinários (ou “Crisp”)**

  A noção de pertinência é bem definida: elementos **pertencem** ou **não pertencem** a um dado conjunto *A* (em um universo *X*)

$$f_A(x) = \begin{cases} \mathbf{1} \ \ \textbf{se e somente se} \ \ x \in A \\ \\ \mathbf{0} \ \ \textbf{se e somente se} \ \ x \notin A \end{cases}$$

f **: função característica**

Conjuntos Crisp x Fuzzy

- ***Entretanto:*** **Existem conjuntos cujo *limite* entre pertinência e não-pertinência *é vago*, com *transição gradual* entre esses dois grupos**

Exemplos:

- conjunto de ***pessoas altas***
- conjunto de ***carros caros***
- números ***muito maiores que 1***

CONJUNTOS FUZZY

- Conjuntos Crisp x Fuzzy
- ***Definição***
- Representação
- Propriedades
- Formatos
- Operações
- Hedges

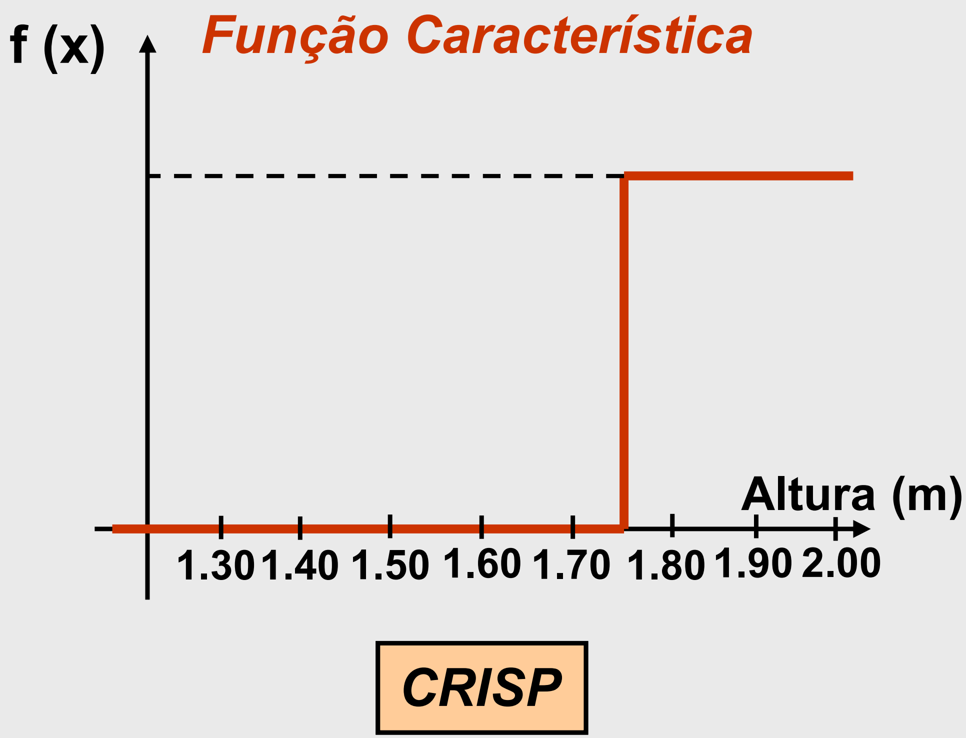
CONJUNTOS FUZZY

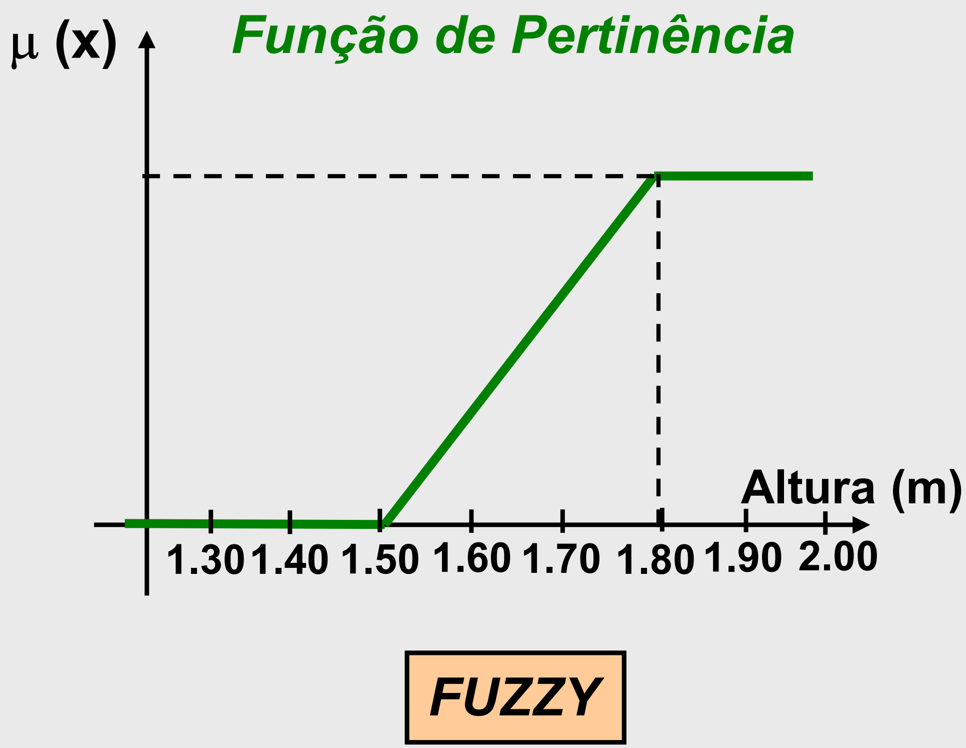
- Conjuntos Fuzzy
  - A função característica é generalizada, podendo assumir um número infinito de valores no intervalo [0,1] → *função de pertinência*
  - Um conjunto fuzzy *A* em um universo *X* é definido por uma *função de pertinência*

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$$

Conjuntos Crisp x Fuzzy

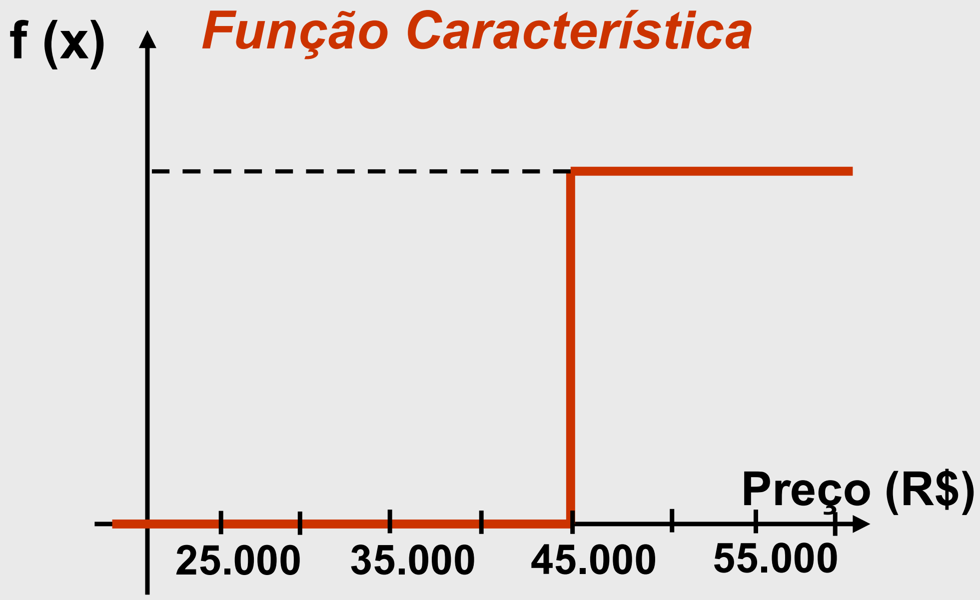
- ***Exemplos:*** ① ***Pessoas Altas***



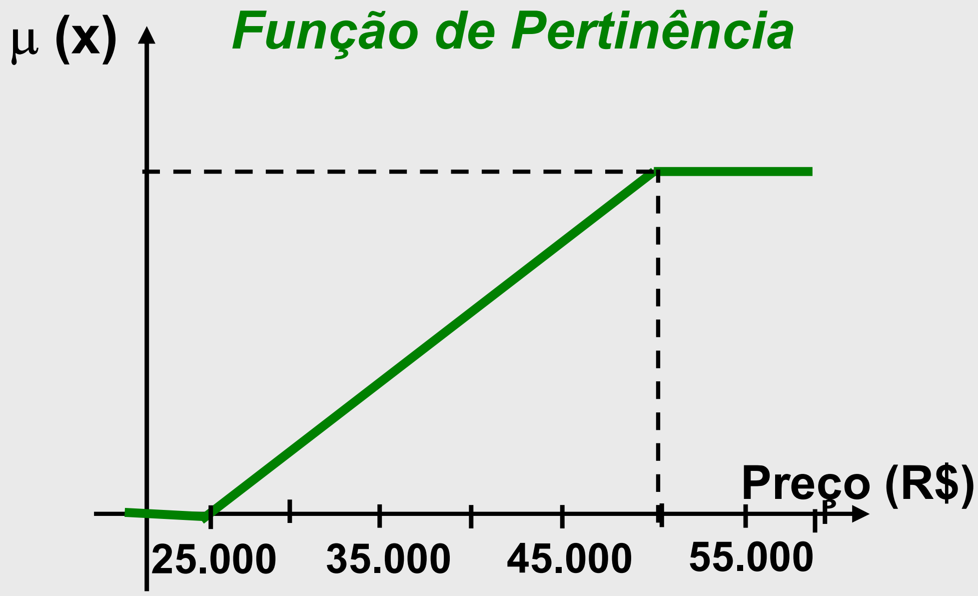


Conjuntos Crisp x Fuzzy

- ***Exemplos:*** ② ***Carros Caros***



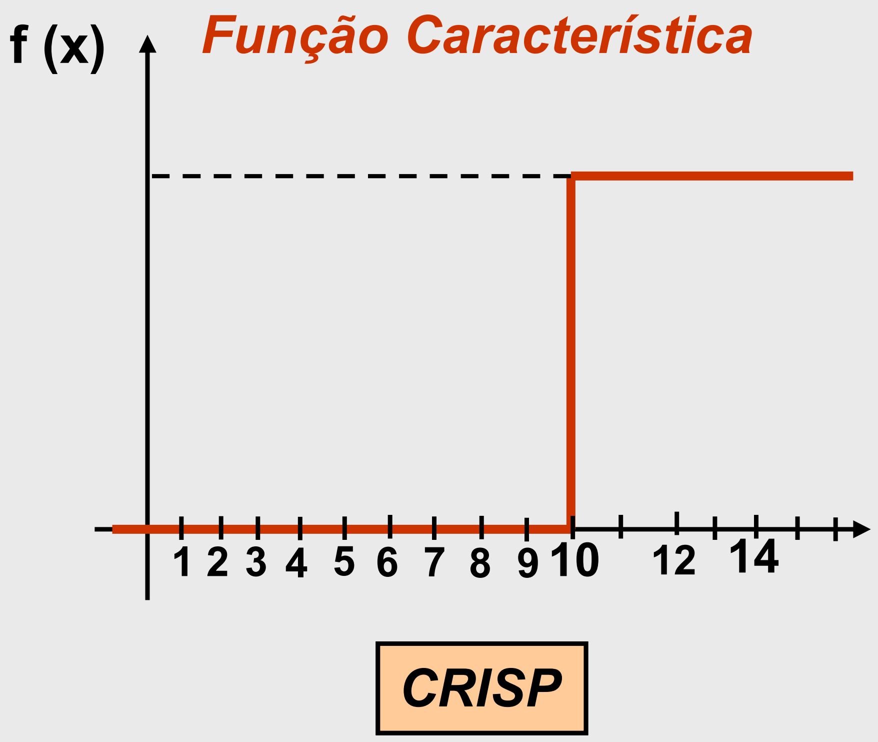
CRISP

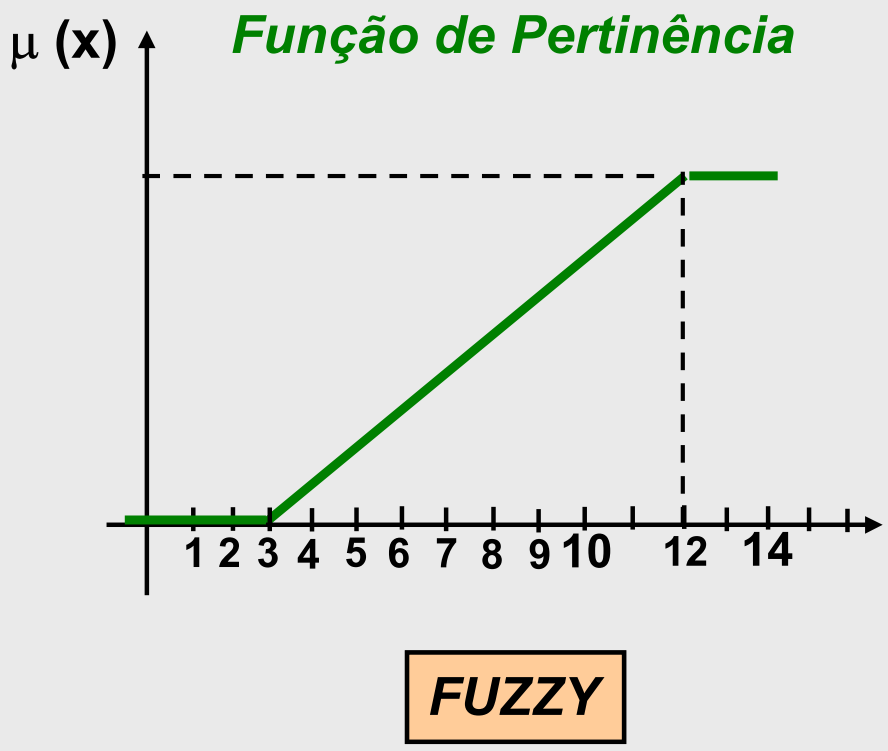


FUZZY

Conjuntos Crisp x Fuzzy

- ***Exemplos:*** ③ ***Números muito maiores que 1***



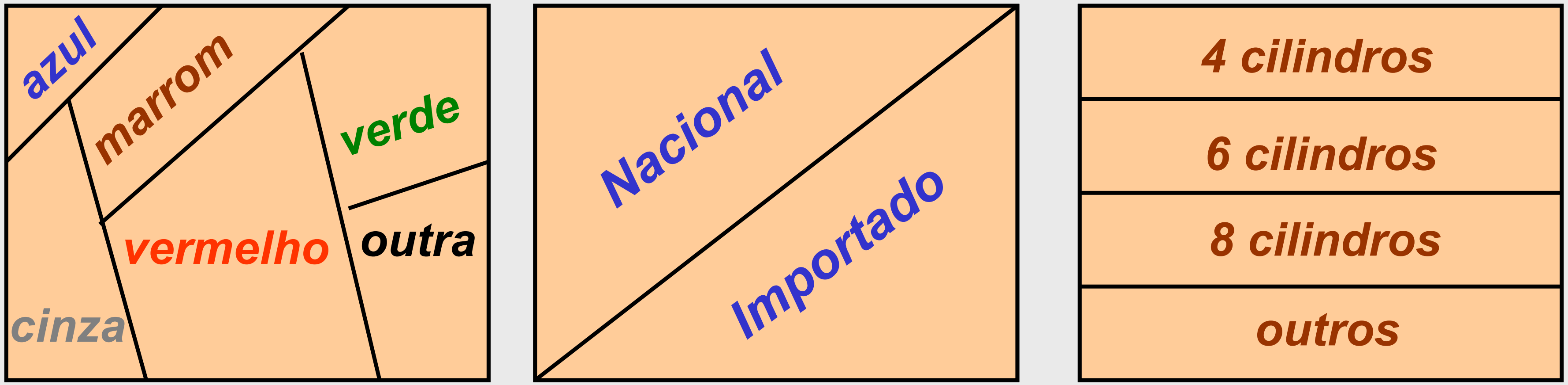


Conjuntos Crisp

- ***Exemplos:***

U = todos os automóveis do Rio de Janeiro

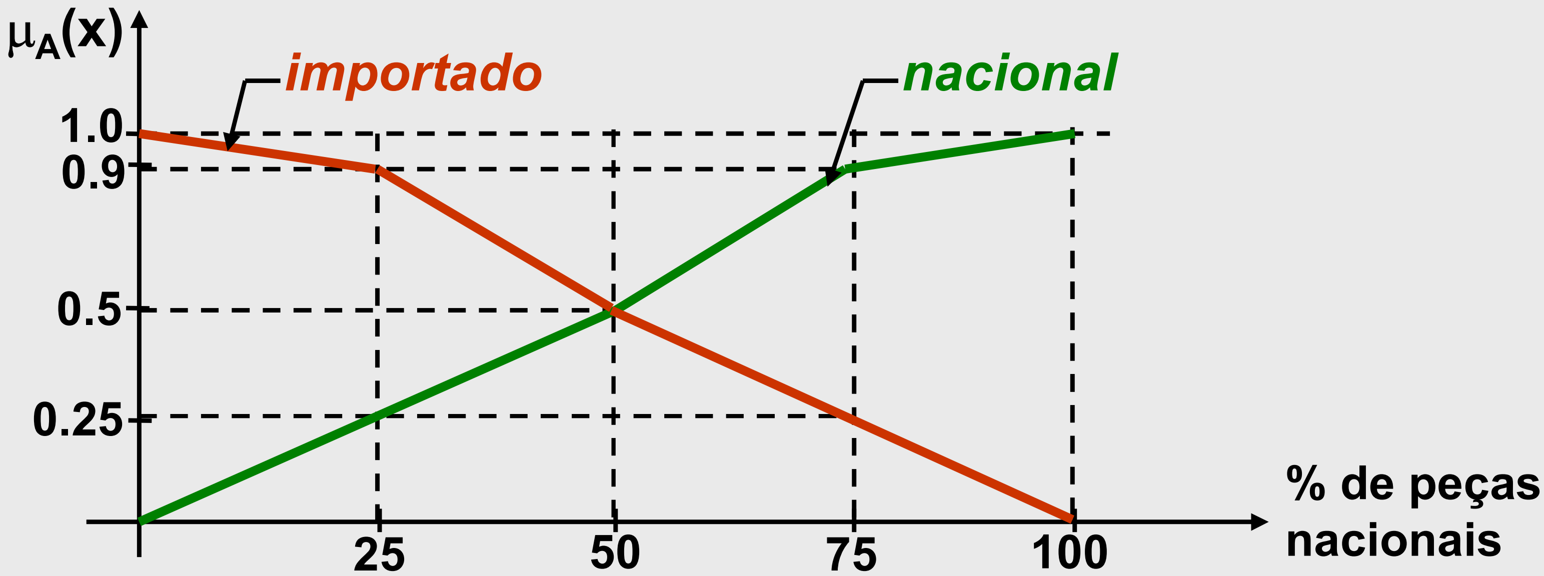
Sub-Conjuntos de U:



Conjuntos Fuzzy

- Conjunto ***A*** no Universo de Discurso ***U*** com $\underbrace{\mu_A(x) \in [0,1]}$

medida do grau de compatibilidade de um ***elemento x em U*** com o ***subconjunto A***



CONJUNTOS FUZZY

- Conjuntos Crisp x Fuzzy
- Definição
- ***Representação***
- Propriedades
- Formatos
- Operações
- Hedges

Conjuntos Fuzzy

- ***Representação:***
  - Um conjunto fuzzy ***A*** em ***X*** pode ser representado como um ***conjunto de pares ordenados*** de um elemento genérico ***x*** e seu ***grau de pertinência***

$$\boxed{A = \{\mu_A(x)/x\} \quad x \in X}$$

CONJUNTOS FUZZY

- *Outra Representação:*

X contínuo:

$$\boxed{\int_X \mu_A(x)/x}$$

denota a coleção de todos os pontos $x \in X$ com função de pertinência $\mu(x)$

X discreto:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i}$$

denota a união de todos os pontos $x_i \in X$ com graus de pertinência $\mu(x_i)$

Conjuntos Fuzzy

Exemplo: seja A = inteiros próximos de 10

X = {n° inteiros de 1 a 20}

$A = 0.1/7 + 0.5/8 + 0.8/9 + 1/10 + 0.8/11 + 0.5/12 + 0.1/13$

Observações:

❶ Os inteiros não especificados possuem $\mu_A(x) = 0$

❷ Os valores de $\mu_A(x)$ são escolhidos ⇨ exceto para $\mu_A(x)=1.0$, todos os outros valores podem ser modificados.

❸ A Função de Pertinência, neste caso específico, deve ser simétrica.

CONJUNTOS FUZZY

- Conjuntos Crisp x Fuzzy
- Definição
- Representação
- ***Propriedades***
- Formatos
- Operações
- Hedges

PROPRIEDADES

- ***Altura:***

É o maior grau de pertinência permitido pela função de pertinência

PROPRIEDADES

- ***Normalização:***

Um certo conjunto fuzzy é normal se a sua altura for igual a 1

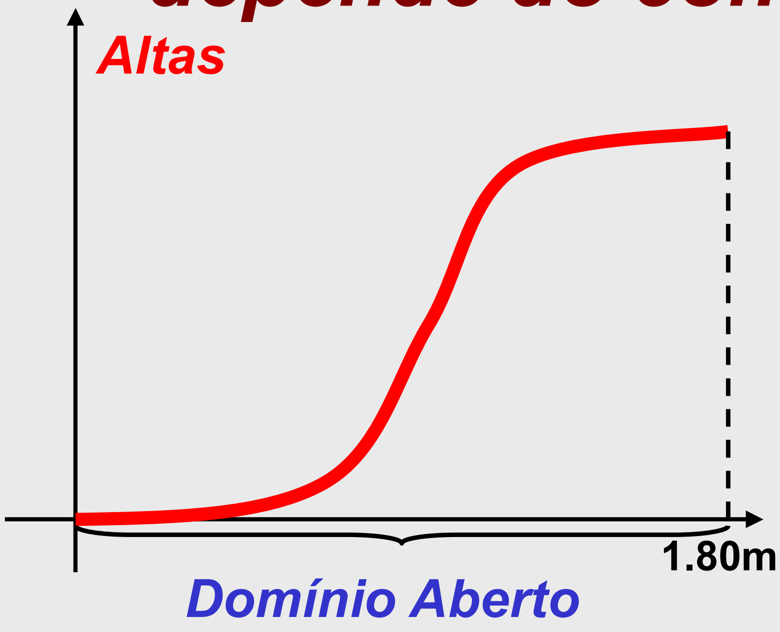
Forma normal mínima
pelo menos um elemento tem μ **(x) =1**

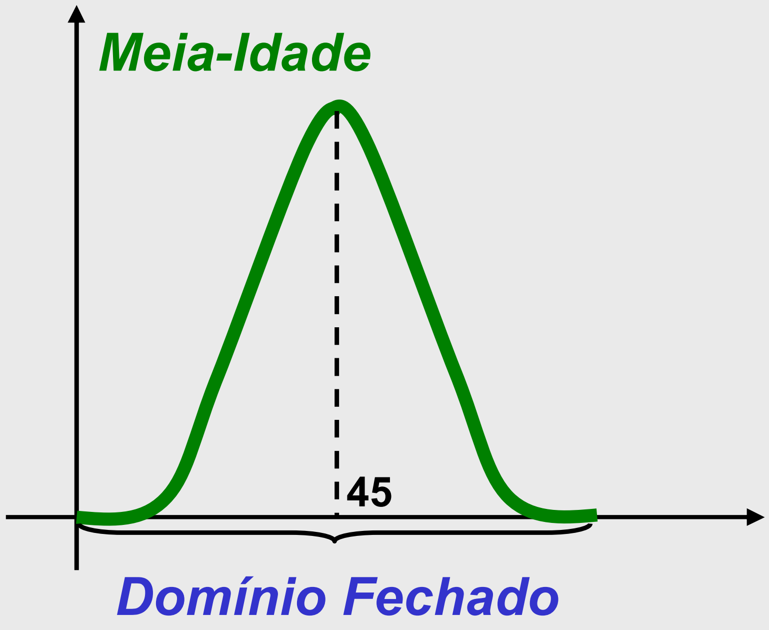
Forma normal máxima
pelo menos um elemento tem μ**(x) = 1** ***e outro elemento tem*** μ**(x) = 0**

•***Para um bom desempenho, os conjunto fuzzy devem ser normalizados***

PROPRIEDADES

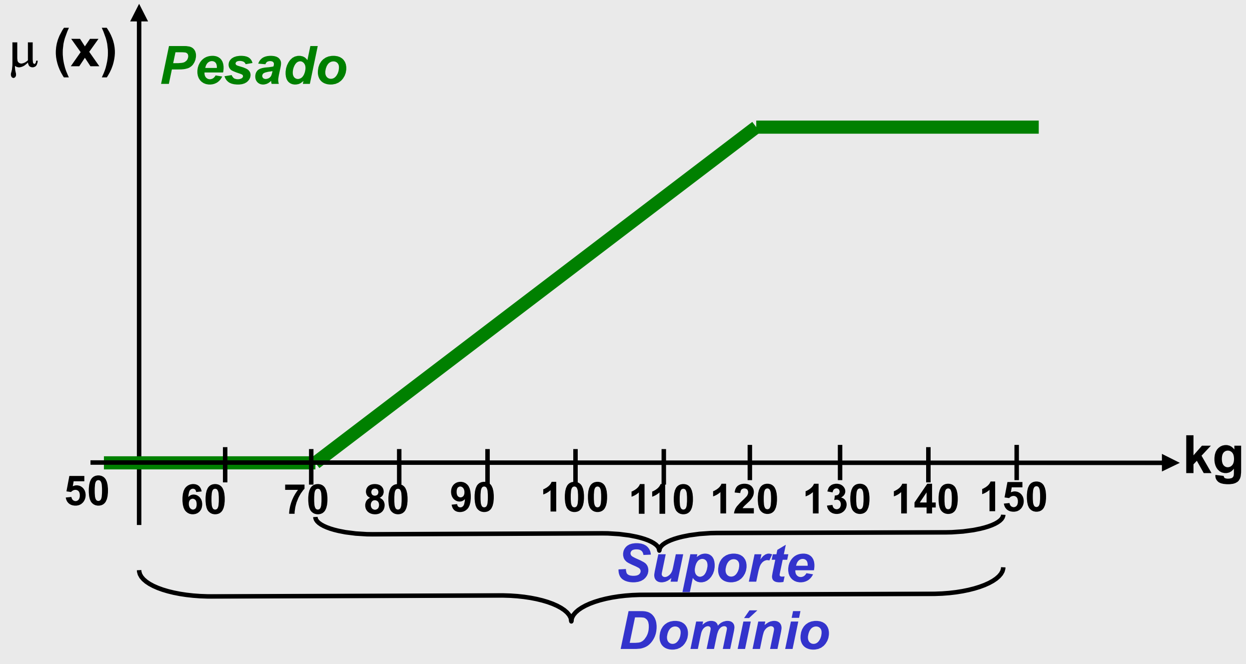
- ***Domínio do Conjunto Fuzzy:***
  - ***É o universo total de valores possíveis para os elementos de um conjunto ➔ depende do contexto***





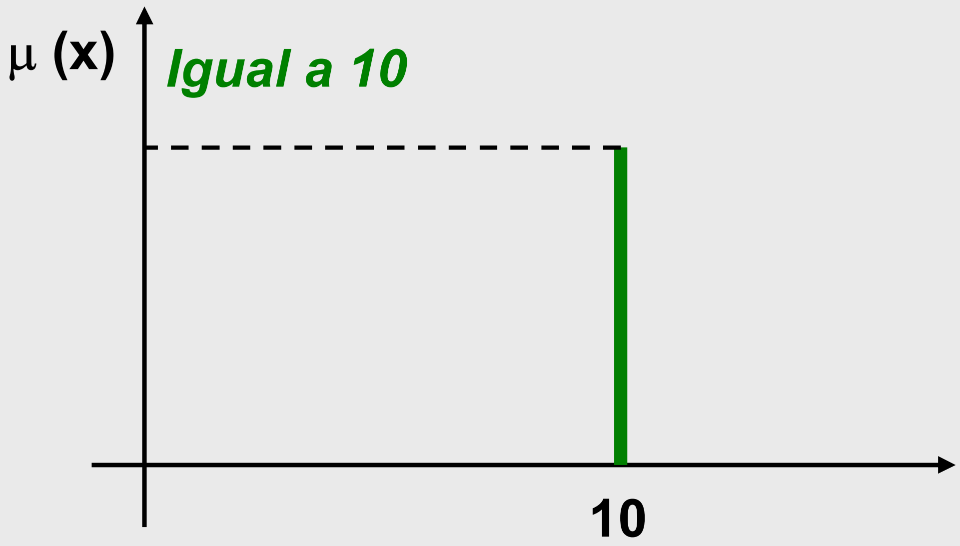
PROPRIEDADES

- ***Suporte do Conjunto:***
  - *É a área efetiva do domínio de um conjunto fuzzy que apresenta valores de μ (x) $>$ 0*



PROPRIEDADES

- ***Observação:***
  - *O conjunto Fuzzy cujo **suporte** é um **único ponto em X**, com valor de μ (x) = 1, é chamado de **Conjunto Singleton***



PROPRIEDADES

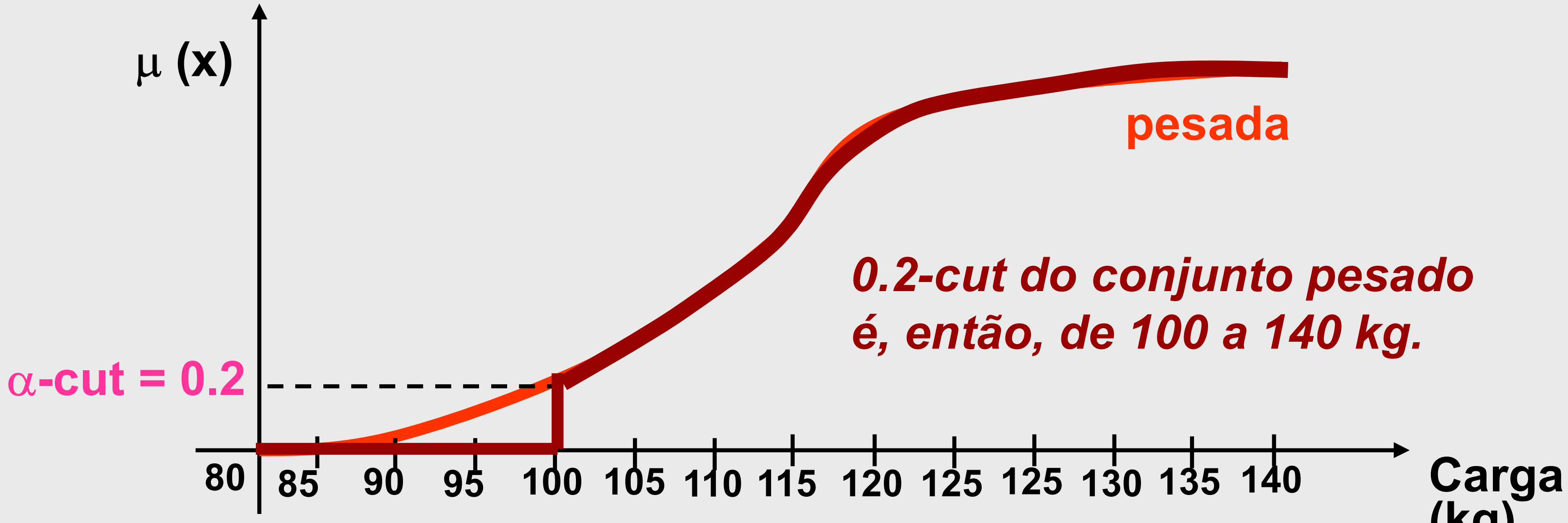
- ***Conjunto α-cut:***
  - *É uma restrição (limite) imposta ao domínio, baseada no valor de α*
  - *Contém todos os elementos do domínio que possuam $\mu(x)$ acima de um certo valor de α*

$\mu(x) \geq \alpha$ → α-cut fraco

$\mu(x) > \alpha$ → α-cut forte

PROPRIEDADES

- ***Conjunto α-cut:***
  - *útil para as funções com longos "tails", que tendem a possuir valores **muito baixos de μ(x) por um domínio extenso***
    ➔ ***ajuda a reduzir ruído***



PROPRIEDADES

- ***Conjunto α-cut:***

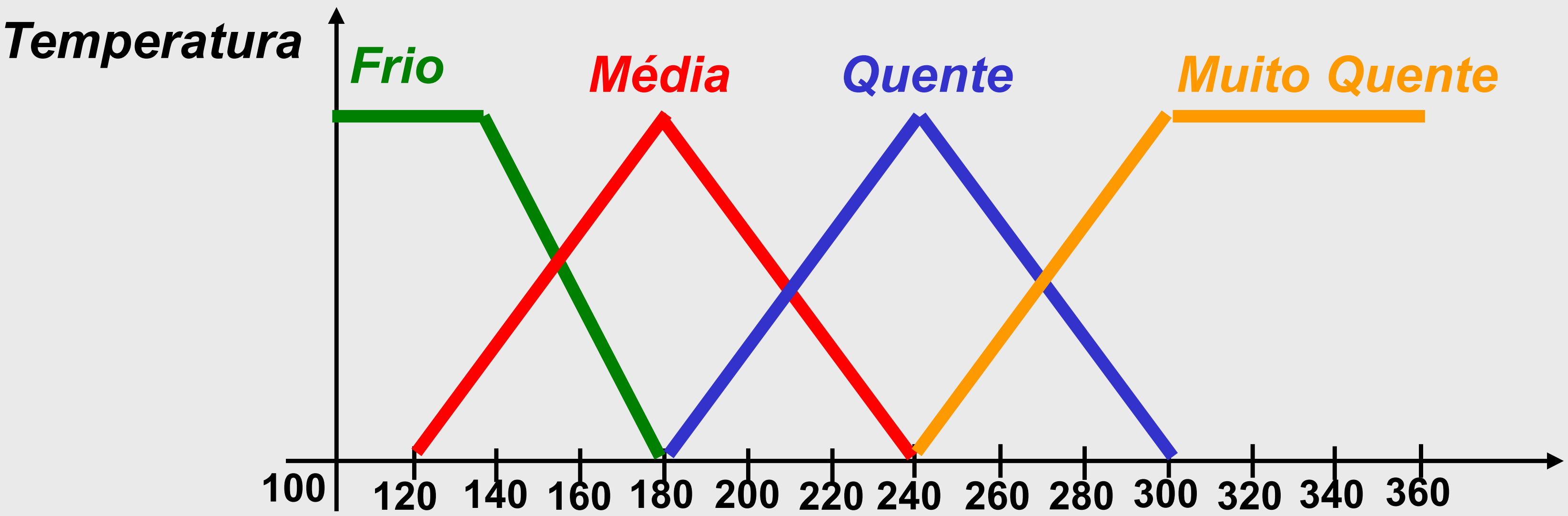
Idade	*Criança*	*Jovem*	*Adulto*	*Velho*
5	1	.1	0	0
10	.8	.3	0	0
20	.1	.8	.7	.1
30	0	.5	1	.2
40	0	.2	1	.4
50	0	.1	1	.6
60	0	0	1	.8
70	0	0	1	1
80	0	0	1	1

Conjuntos α-cut do conjunto VELHO:

- ***velho*** $_{.2}$ **= {30,40,50,60,70,80}**
- ***velho*** $_{.8}$ **= {60,70,80}**
- ***velho*** $_{1.0}$ **= {70,80}**

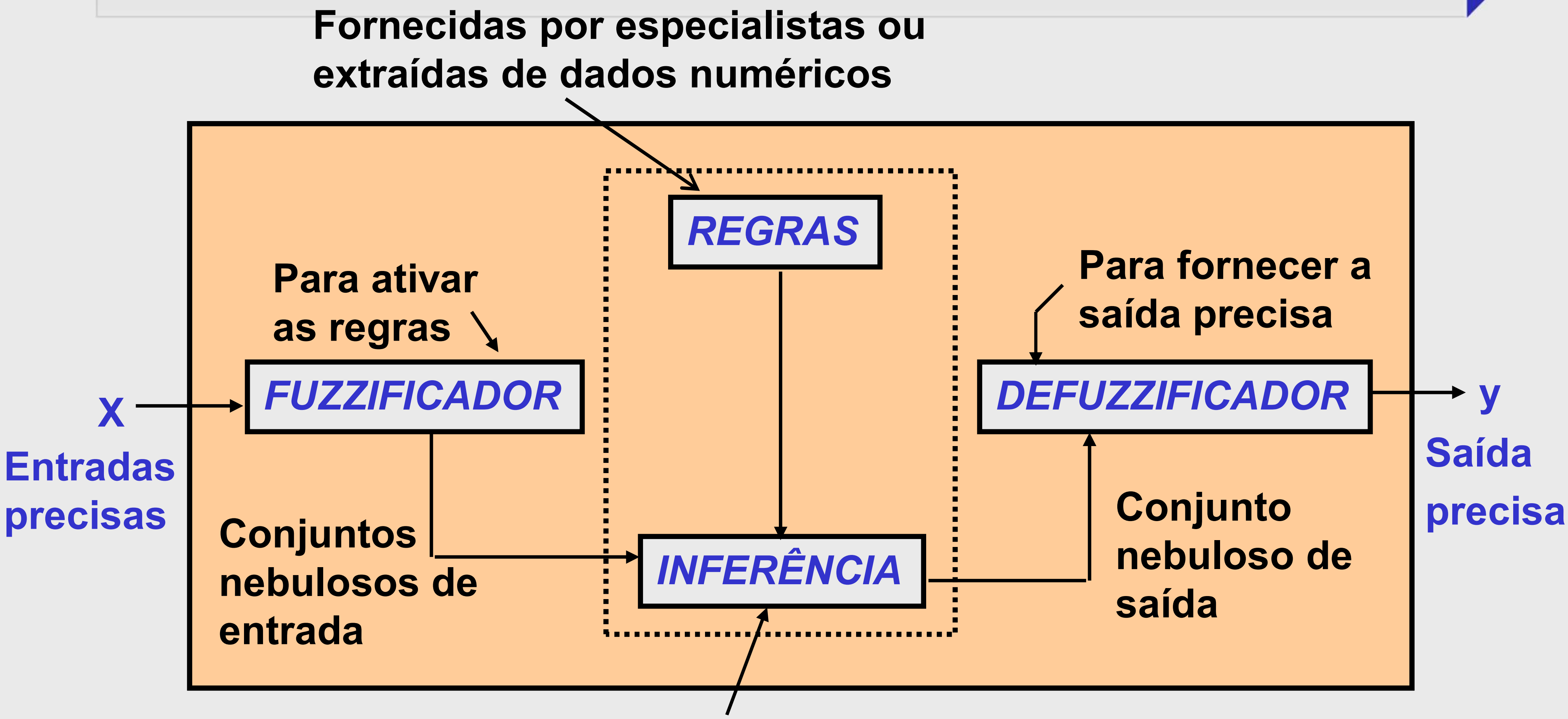
PROPRIEDADES

- ***Universo de Discurso:***
  - ***É o espaço fuzzy completo de variação de uma variável do modelo.***



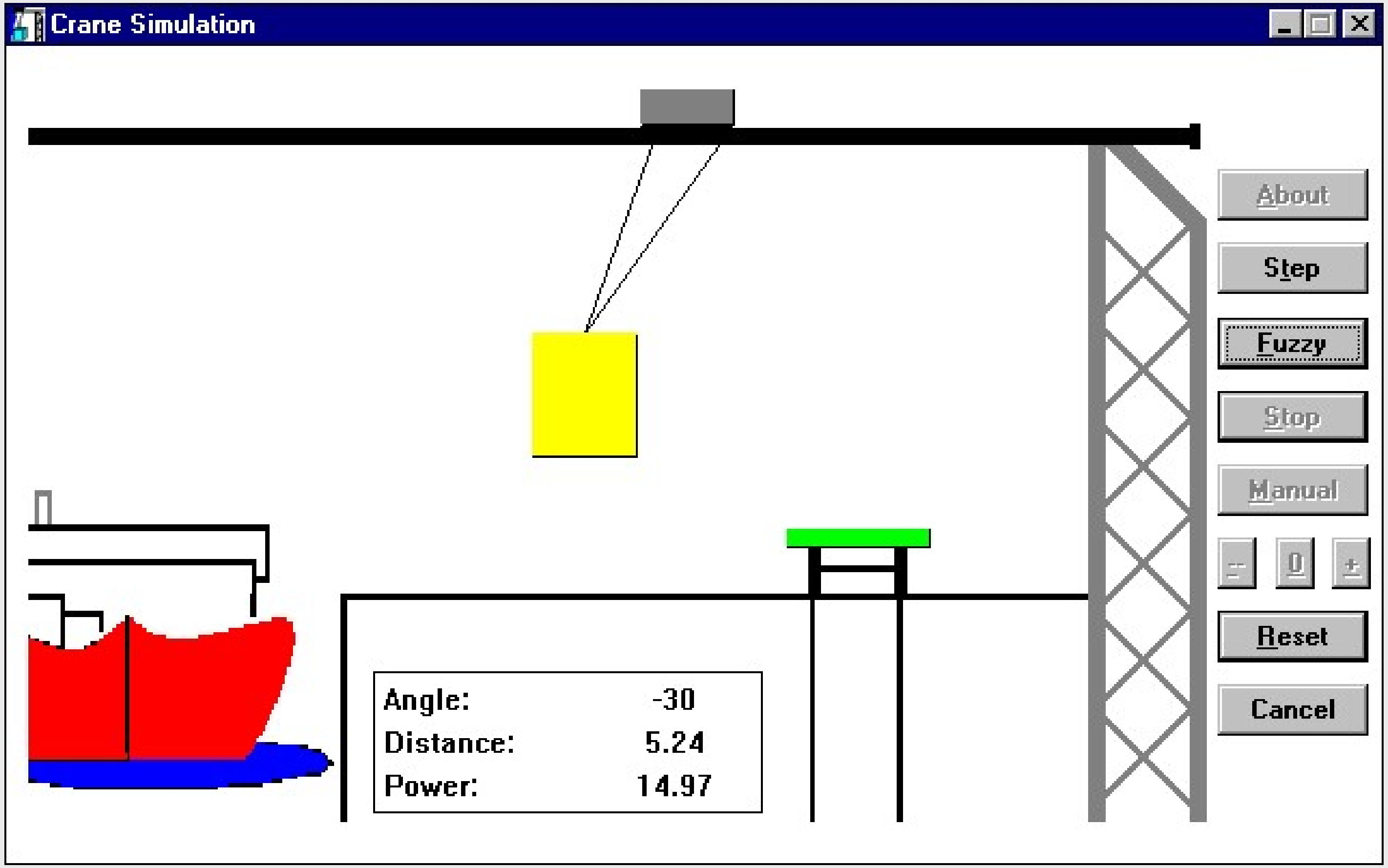
Universo de Discurso para a variável do modelo TEMPERATURA é de 100° a 360°

SISTEMA FUZZY



- Mapeia fuzzy sets em fuzzy sets
- Determina como as regras são ativadas e combinadas

Exemplo do Guindaste



Definição das Variáveis

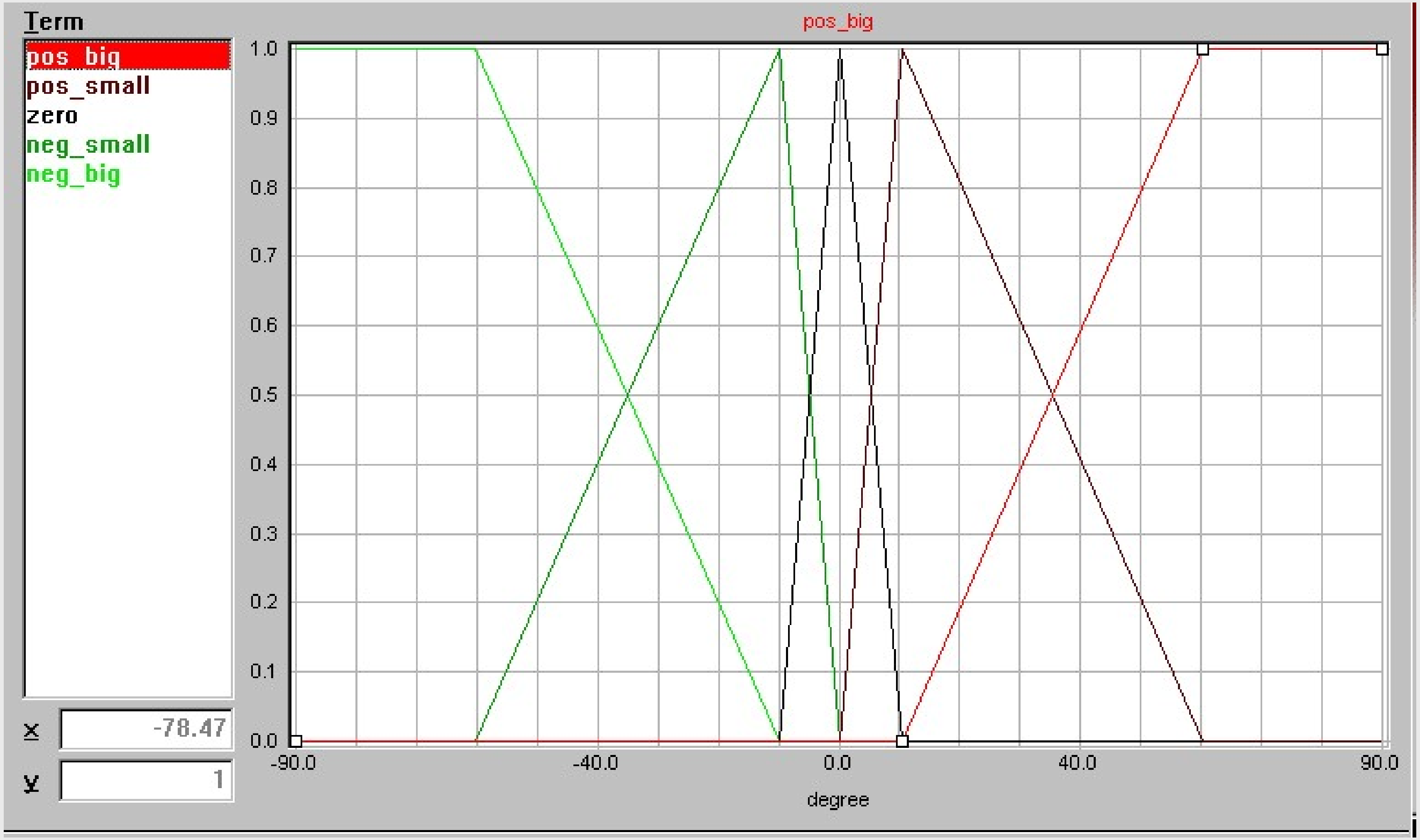
- ***Variáveis de Entrada:***
  - **distância**
  - **ângulo**

- ***Variável de Saída:***
  - **Potência**

FUZZIFICADOR

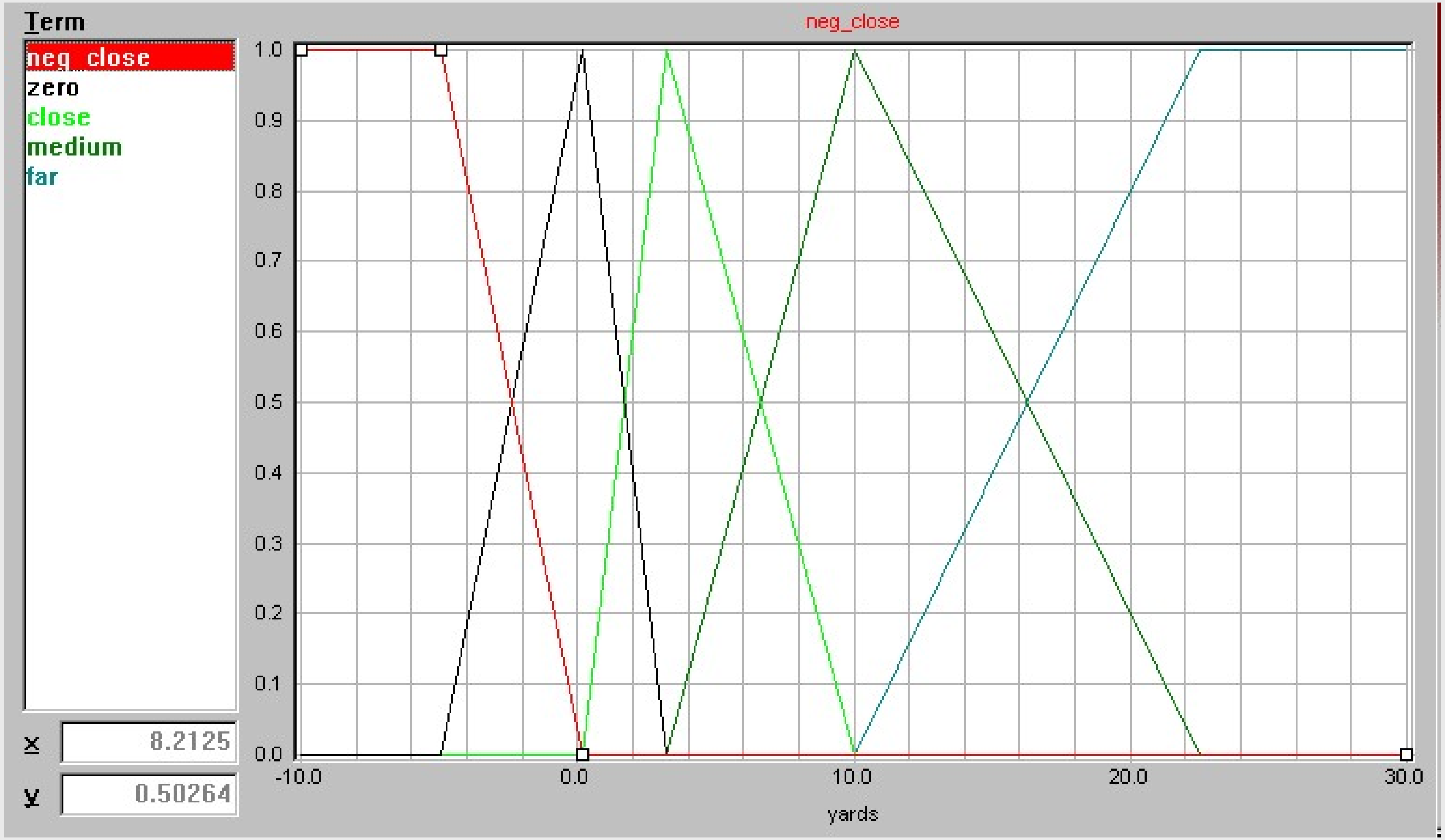
Conjuntos Fuzzy: Variáveis de Entrada

Ângulo



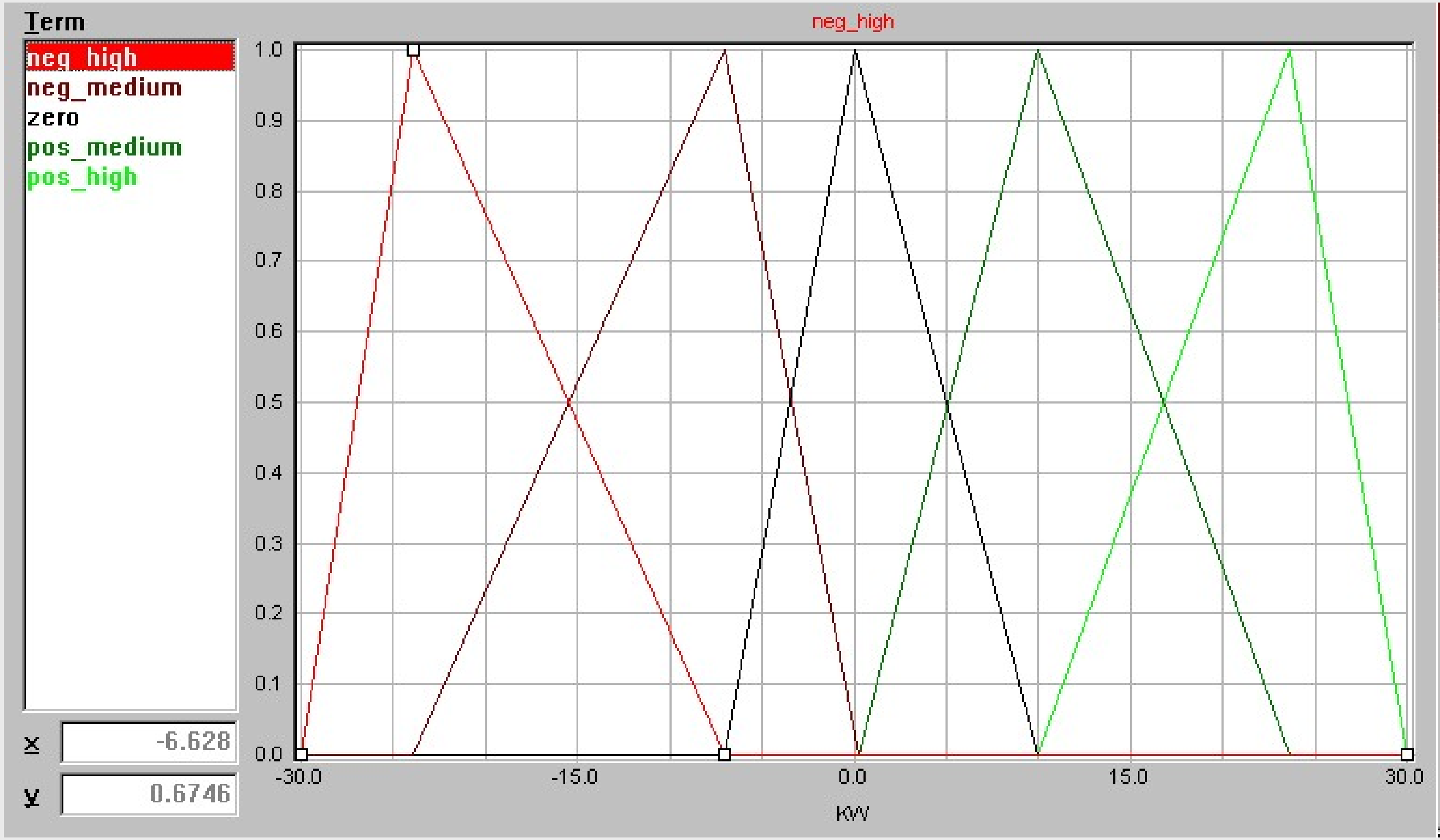
Conjuntos Fuzzy: Variáveis de Entrada

Distância



Conjuntos Fuzzy: Variável de Saída

Potência



MÓDULO DE REGRAS

REGRAS FUZZY

- ***Exemplos:***

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Zero**
Então **POTÊNCIA** = **Pos_Medium**

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**
Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**

Se **DISTÂNCIA** = **Medium** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**
Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**

INFERÊNCIA

INFERÊNCIA

Dados de Entrada:

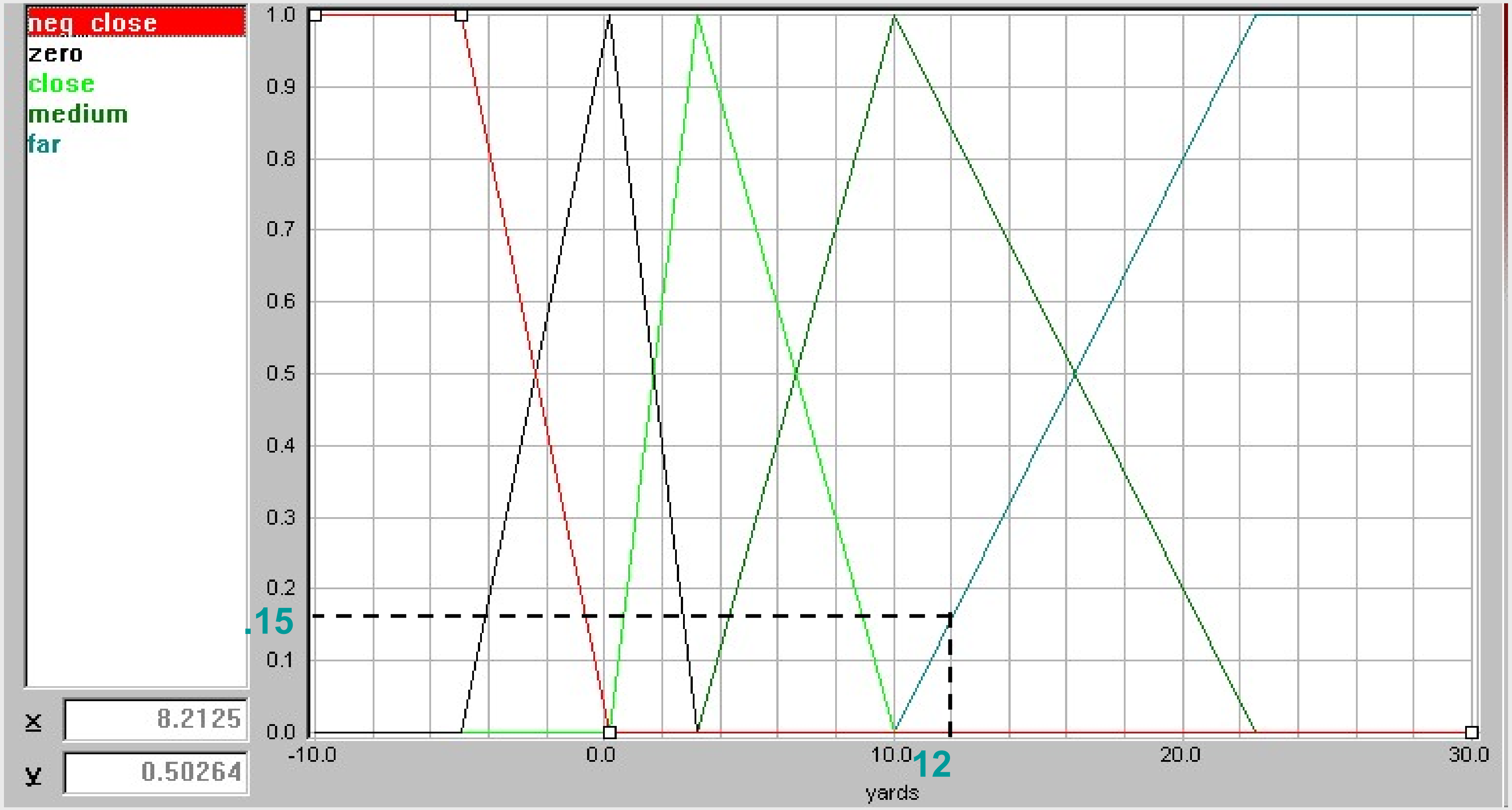
distância ⇨ 12 jardas

ângulo ⇨ -4°

REGRA NÚMERO 1

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Zero**

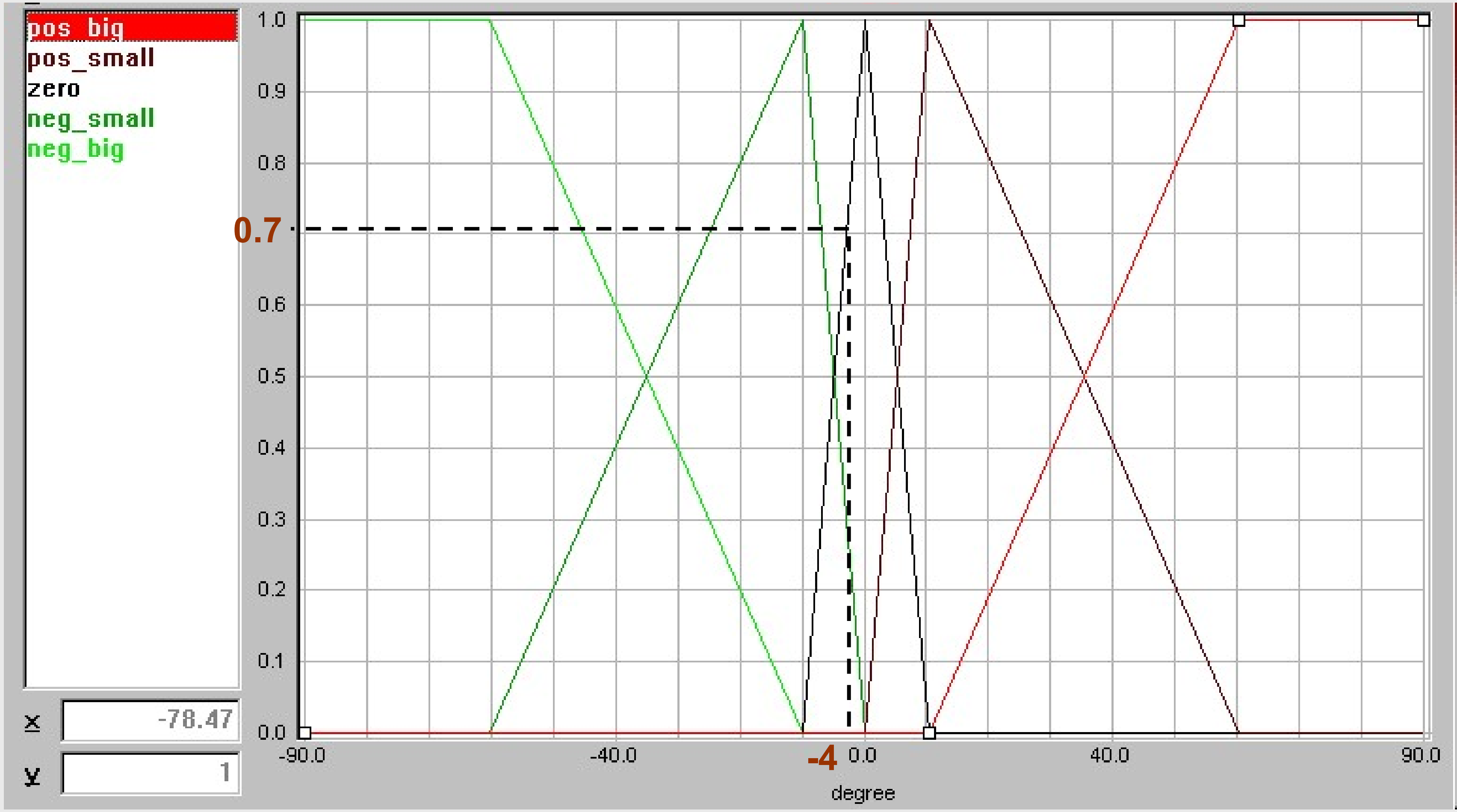
Então **POTÊNCIA** = **Pos_Medium**



REGRA NÚMERO 1

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Zero**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_Medium**



INFERÊNCIA - Antecedente

- ***Portanto:***
  - Cálculo do antecedente da regra 1:

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Zero**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_Medium**

INFERÊNCIA - Antecedente

- ***Portanto:***
  - Cálculo do antecedente da regra 1:

Se $\boxed{\textbf{DISTÂNCIA} = \textbf{Far}}$ e $\boxed{\textbf{ÂNGULO} = \textbf{Zero}}$

Então **POTÊNCIA** = **Pos_Medium**

$\mu_{LONGE}(x) = 0.15$

INFERÊNCIA - Antecedente

- ***Portanto:***
  - Cálculo do antecedente da regra 1:

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Zero**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_Medium**

$\mu_{FAR}(x) = 0.15 \quad \cap \quad \mu_{ZERO}(x) = 0.7$

INFERÊNCIA - Antecedente

- ***Portanto:***
  - Cálculo do antecedente da regra 1:

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Zero**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_Medium**

μ_{FAR} **(x) = 0.15** $\cap$ μ_{ZERO} **(x) = 0.7**

$$\mu_{Far \cap zero} = 0.15$$

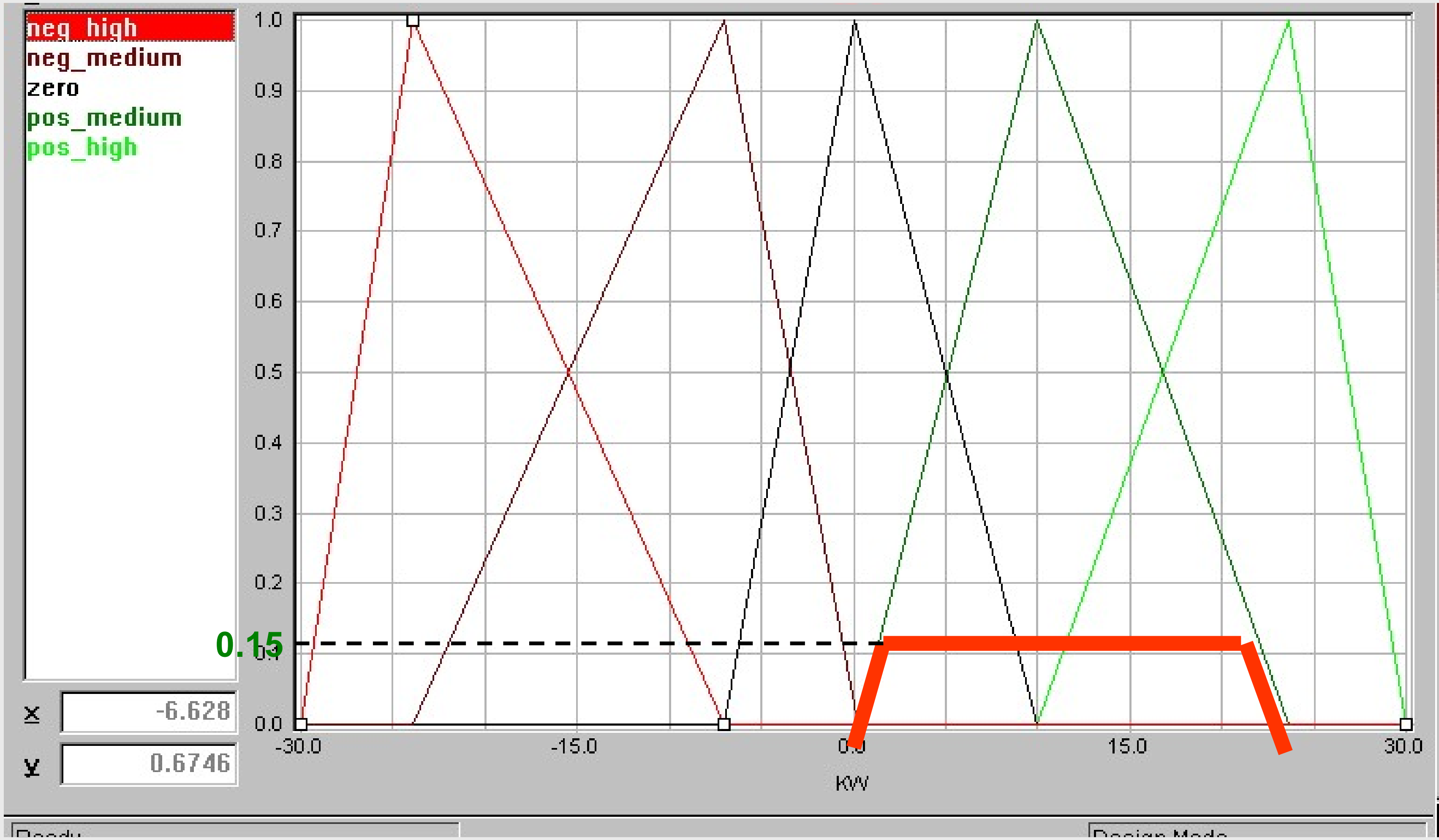
INFERÊNCIA - Conseqüente

- Como o ***antecedente*** é ***verdadeiro*** com grau de pertinência ***0.15***, o ***conseqüente*** deve ter ***no máximo*** um grau de veracidade de ***0.15***.

INFERÊNCIA - Conseqüente

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Zero**

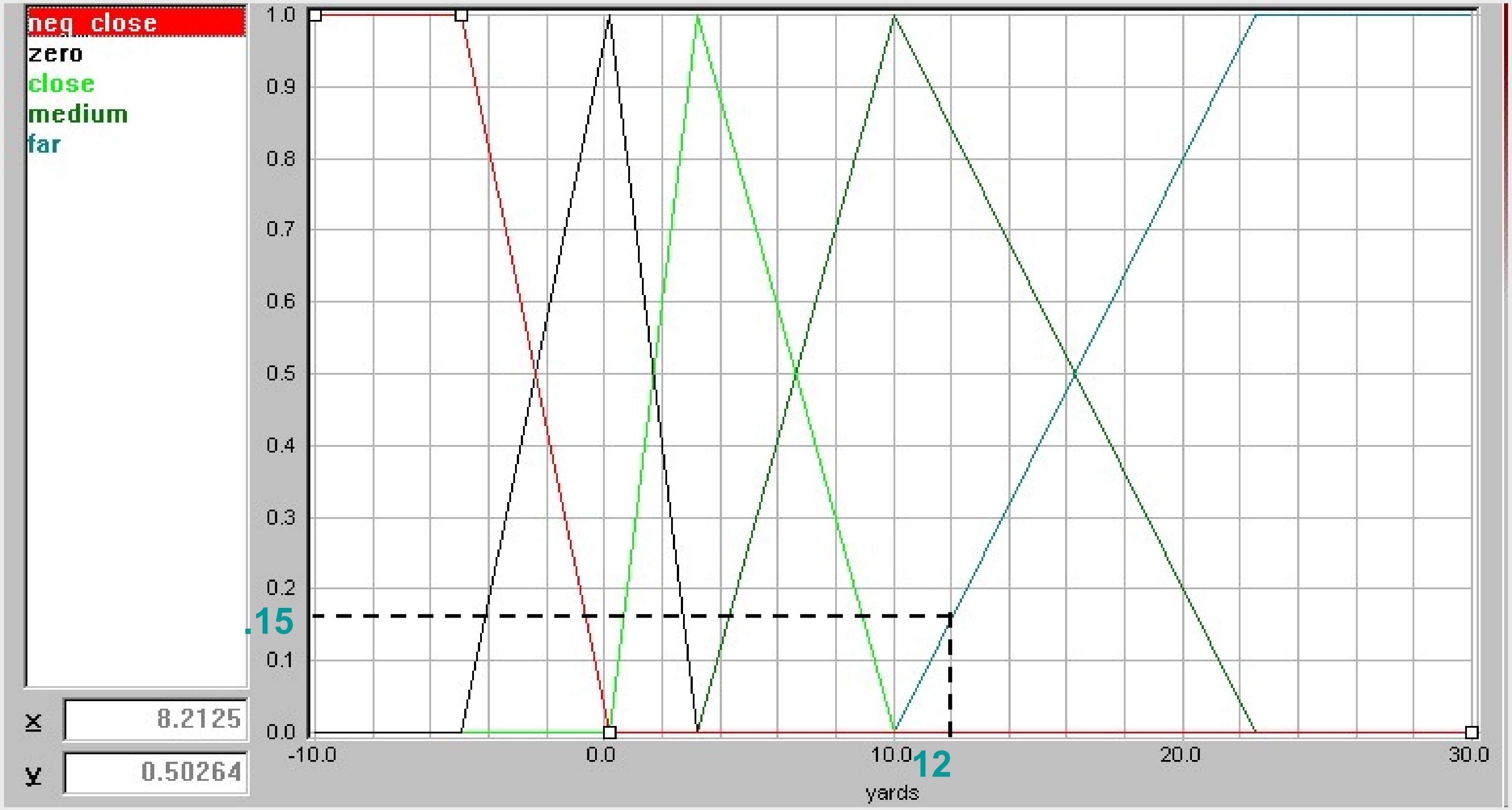
Então **POTÊNCIA** = **Pos_Medium**



REGRA NÚMERO 2

Se **DISTÂNCIA** = Far e **ÂNGULO** = Neg_Small

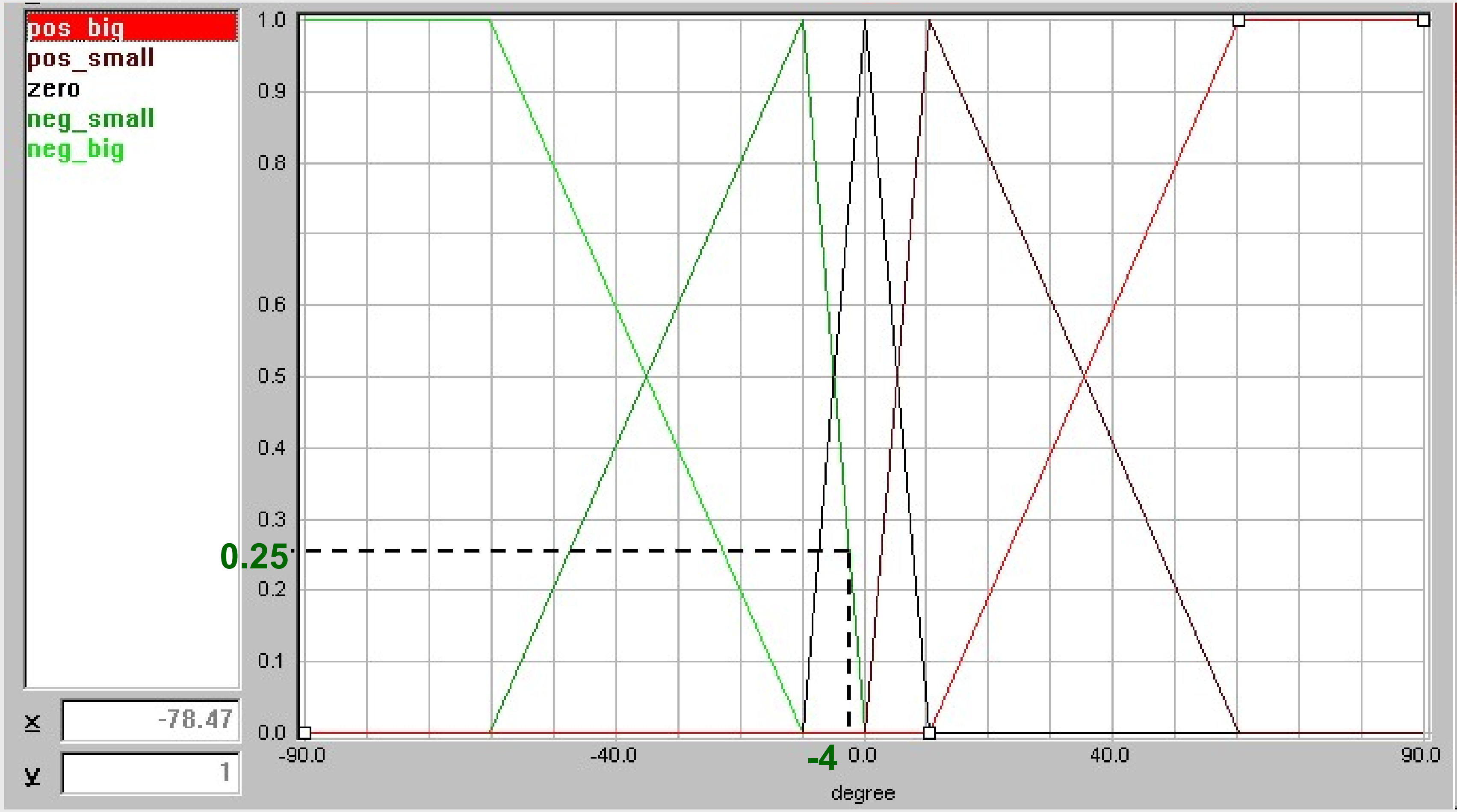
Então **POTÊNCIA** = Pos_High



REGRA NÚMERO 2

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**



INFERÊNCIA - Antecedente

- ***Portanto:***
  – Cálculo do antecedente da regra 2:

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**

$\mu_{FAR}(x) = 0.15 \quad \cap \quad \mu_{NEG\_SMALL}(x) = 0.25$

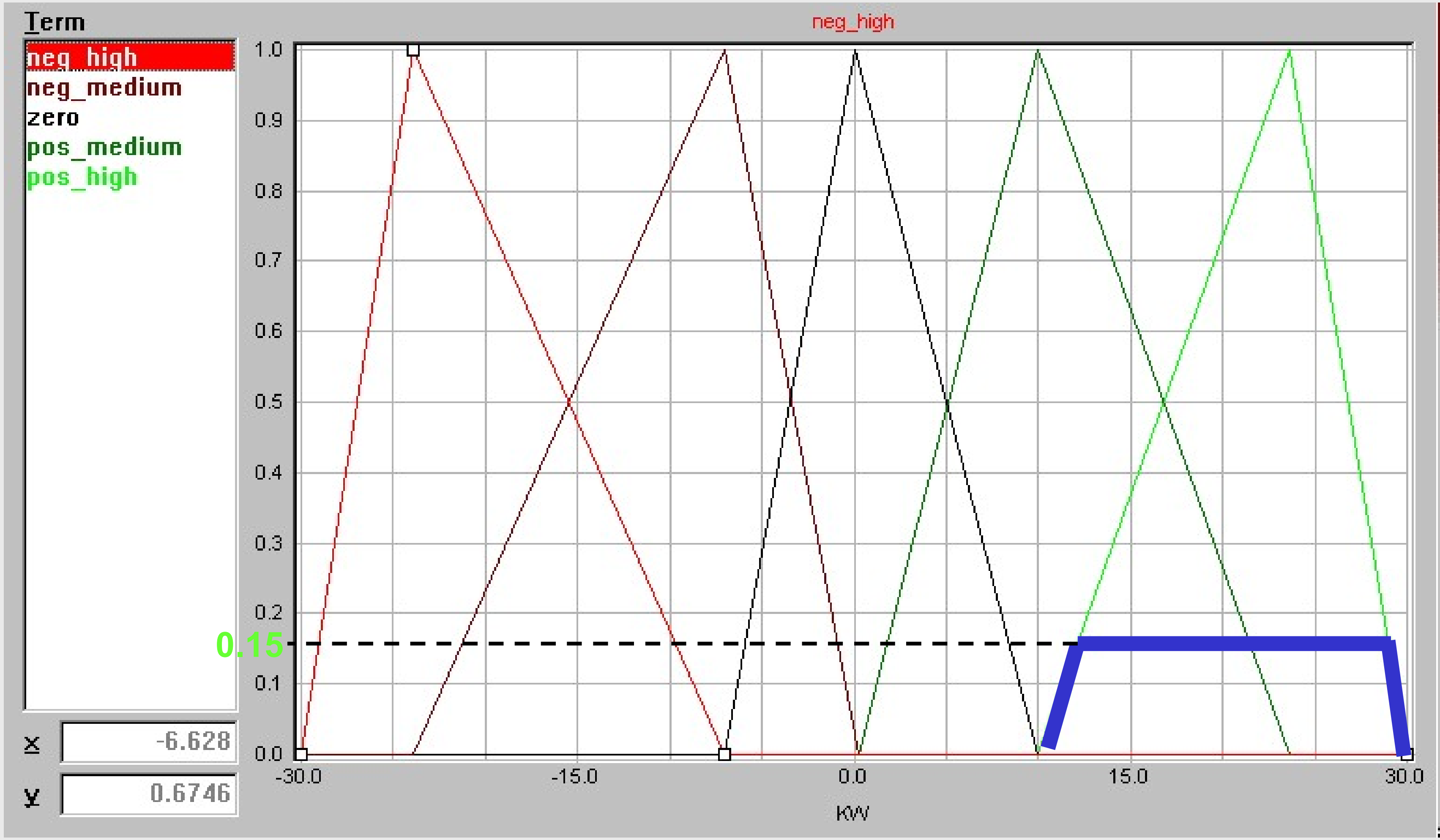
$\Downarrow$

$\mu_{FAR \cap NEG\_small} = 0.15$

INFERÊNCIA - Conseqüente

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

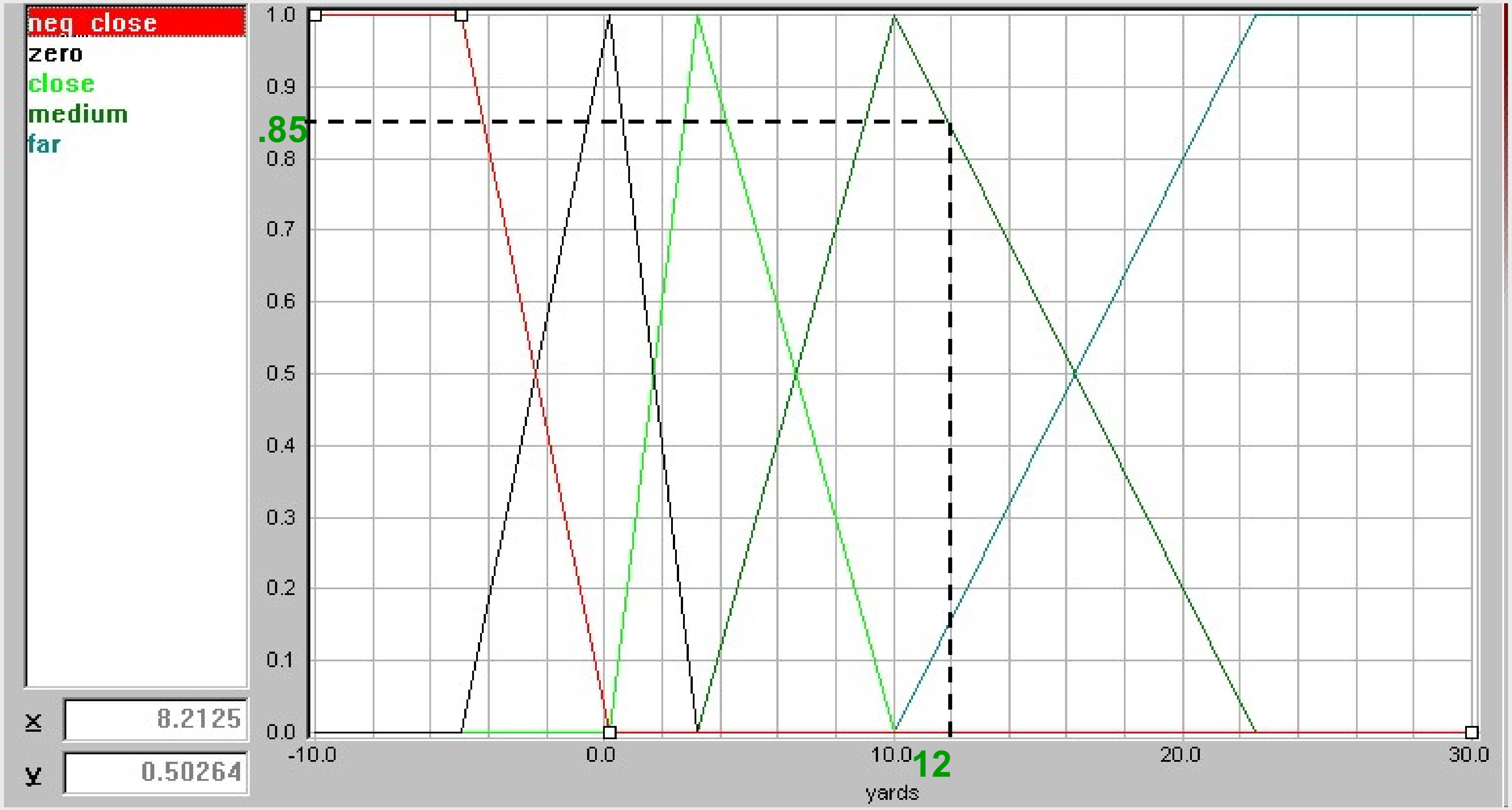
Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**



REGRA NÚMERO 3

Se **DISTÂNCIA** = **Medium** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

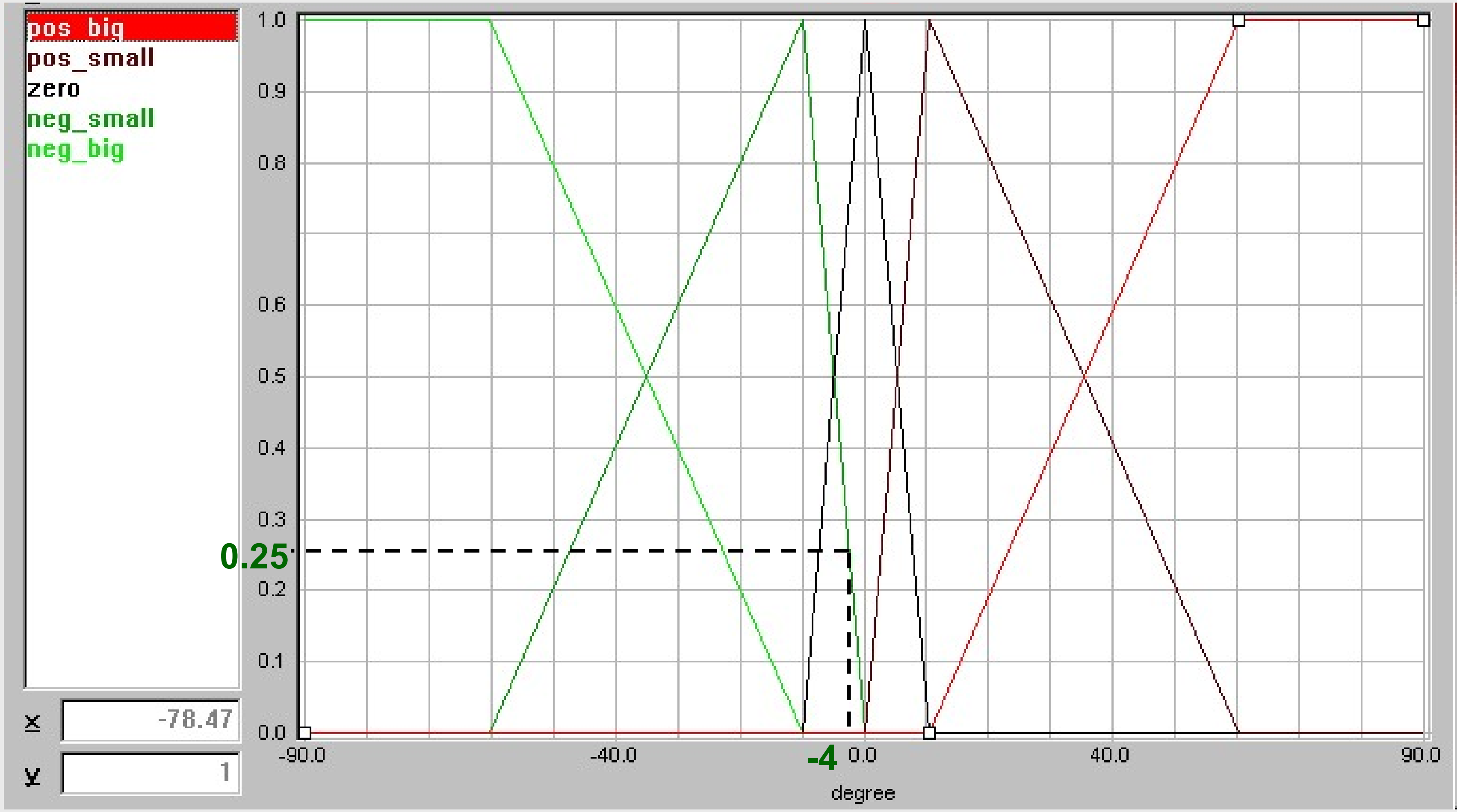
Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**



REGRA NÚMERO 3

Se **DISTÂNCIA** = **Medium** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**



INFERÊNCIA - Antecedente

- ***Portanto:***
  - Cálculo do antecedente da regra 3:

Se **DISTÂNCIA** = **Medium** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**

$\mu_{MEDIUM}(x) = 0.85 \quad \cap \quad \mu_{NEG\_SMALL}(x) = 0.25$

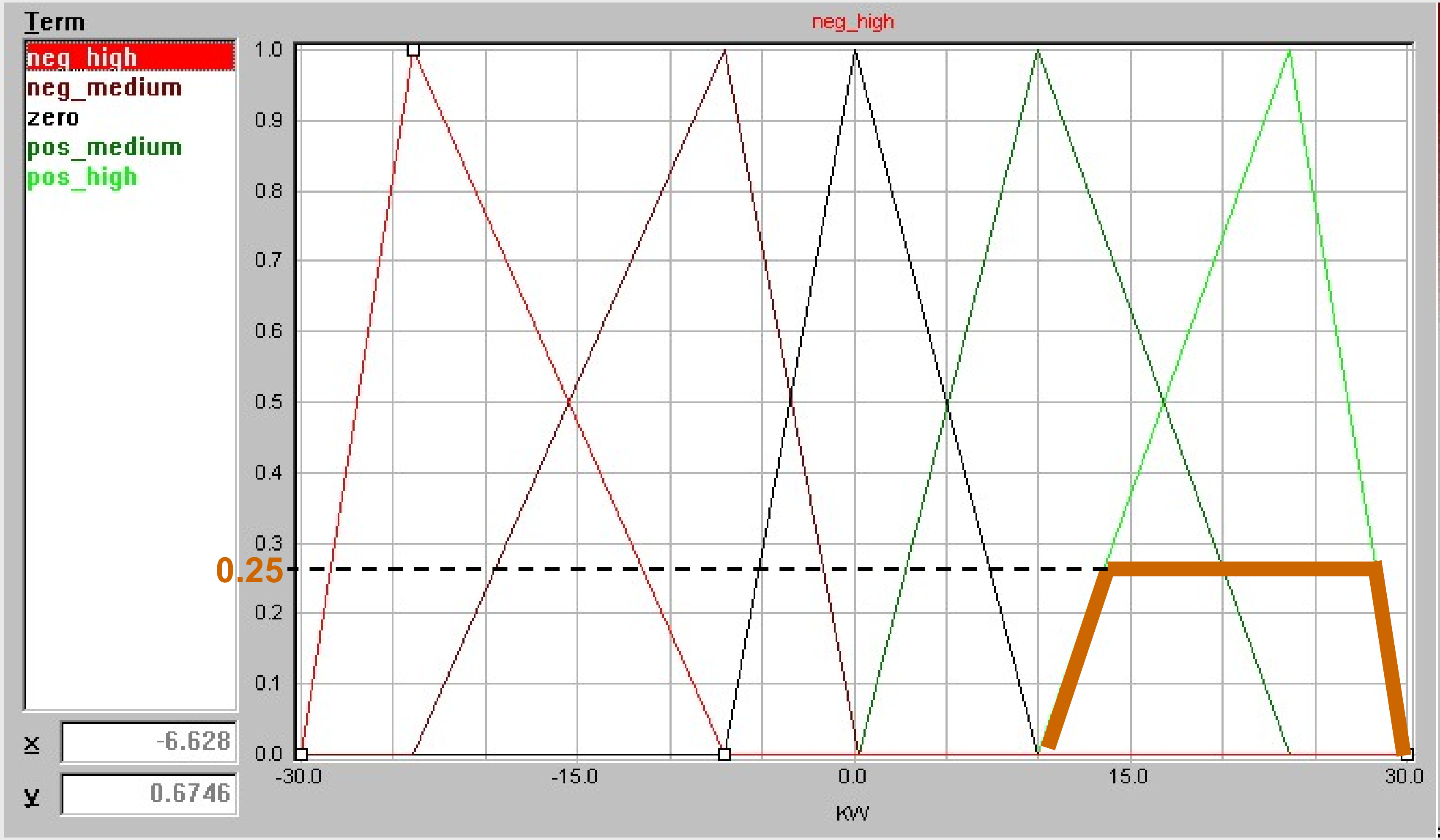
$\Downarrow$

$\mu_{medium \cap NEG\_small} = 0.25$

INFERÊNCIA - Conseqüente

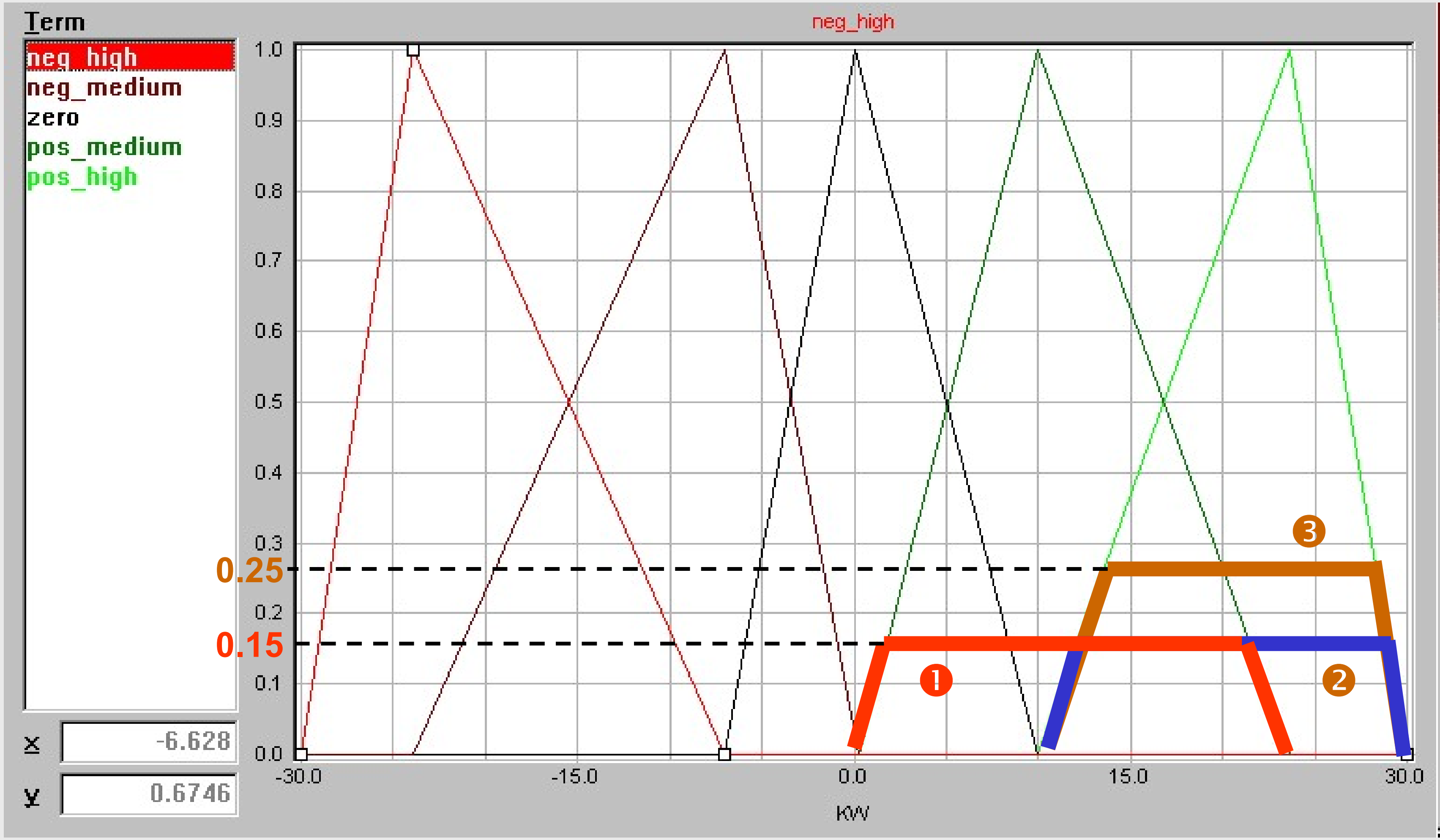
Se **DISTÂNCIA** = **Medium** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**



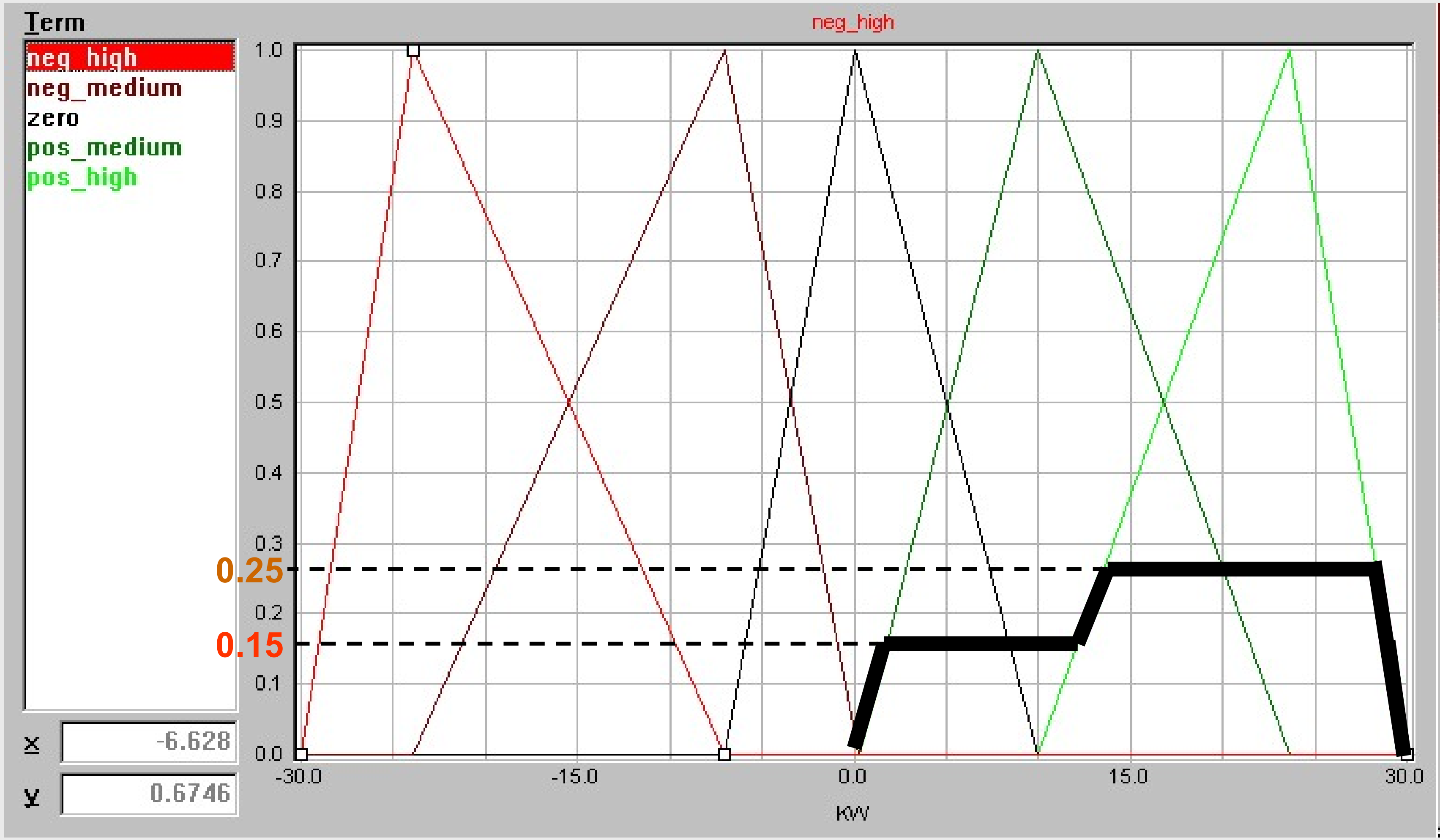
INFERÊNCIA

Composição **→ União de TODAS as regras com *Grau de ativação* diferente de ZERO**



INFERÊNCIA

Como é a UNIÃO, utiliza-se, geralmente o MÁXIMO



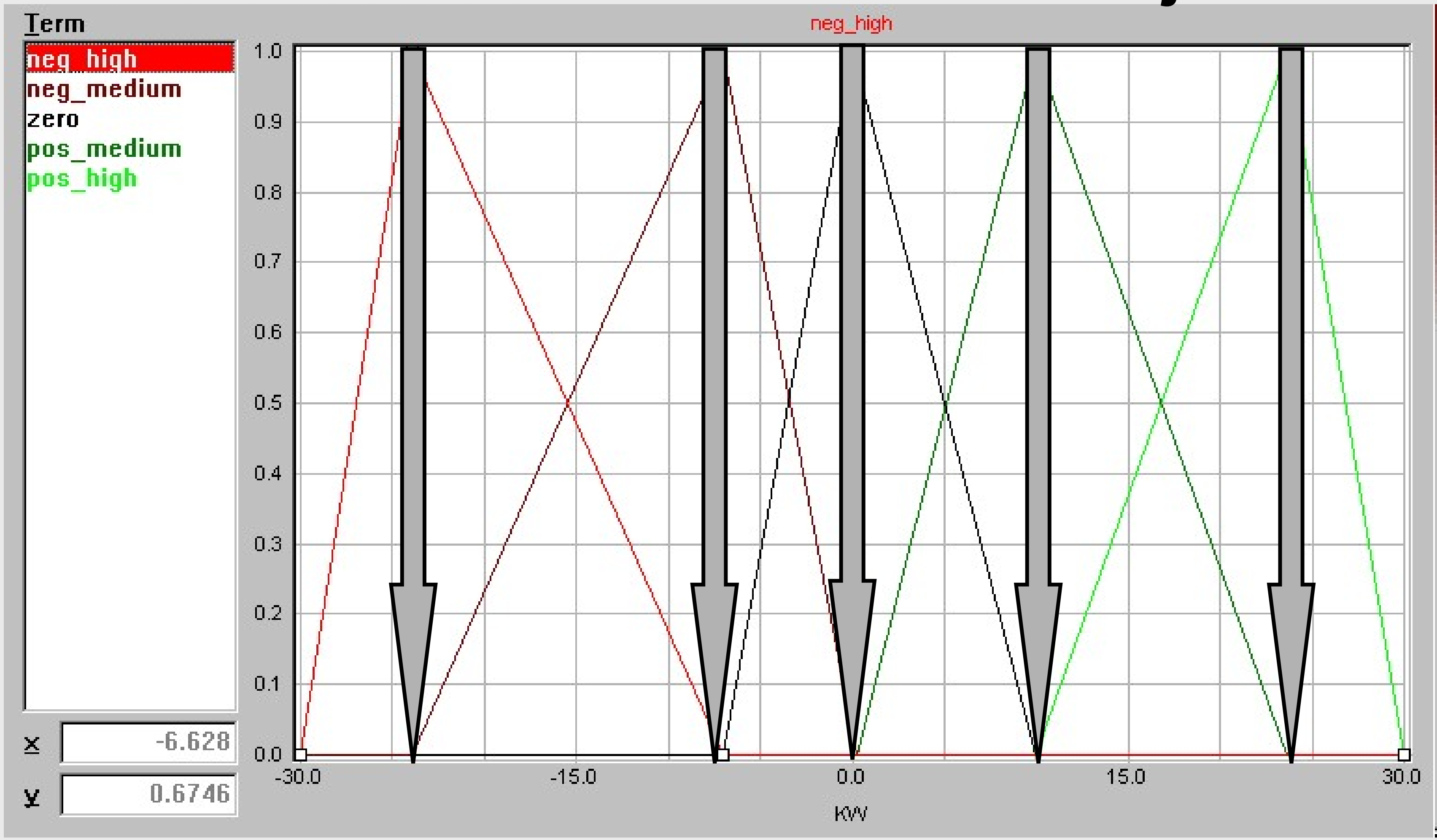
DEFUZZIFICADOR

DEFUZZIFICADOR

Transforma o **conjunto fuzzy** de saída, obtido pela **Inferência,** e transforma em um **valor preciso**

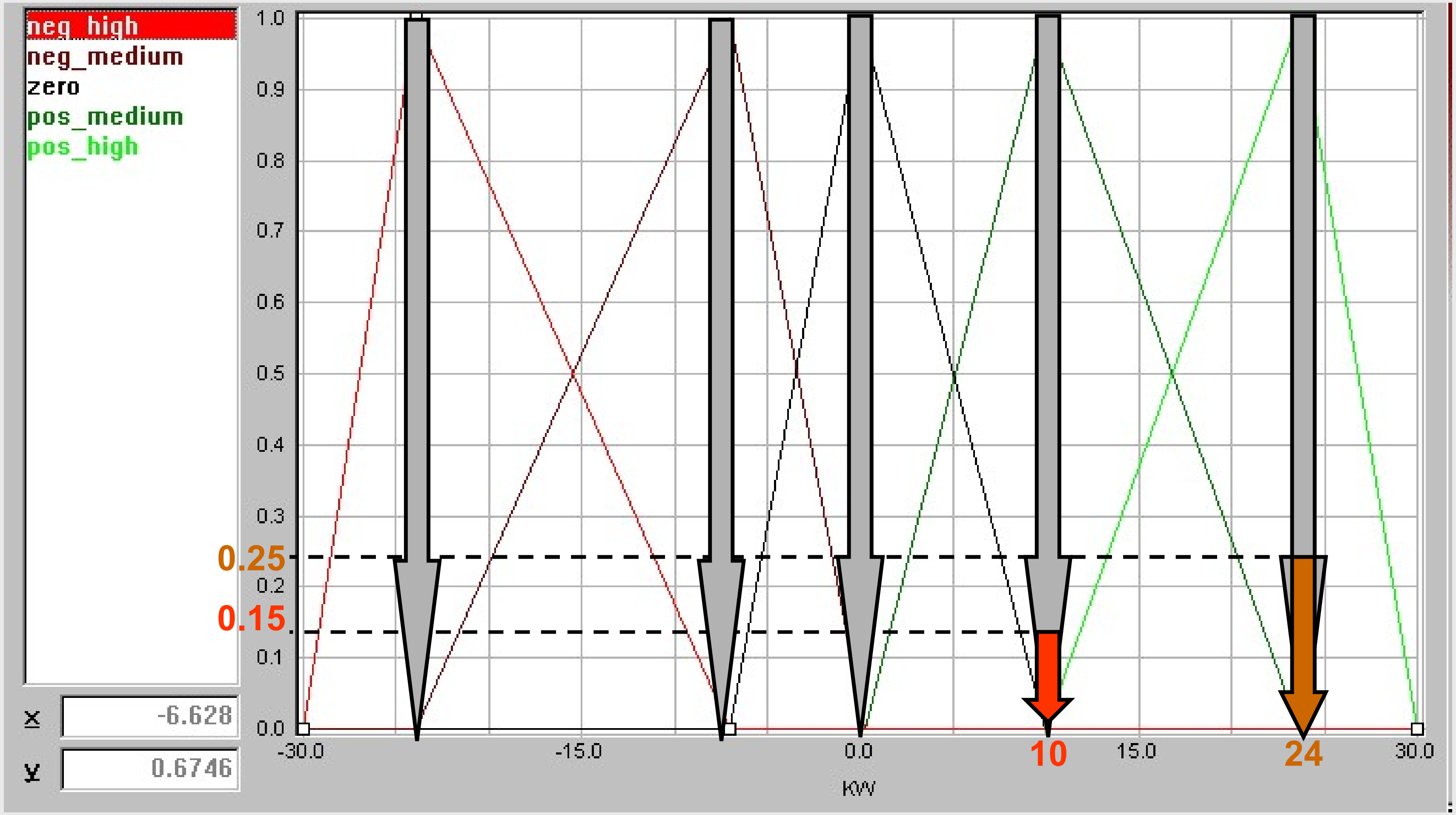
DEFFUZIFICADOR

Um Método possível: ***Avalia-se os valores TÍPICOS de cada conjunto***



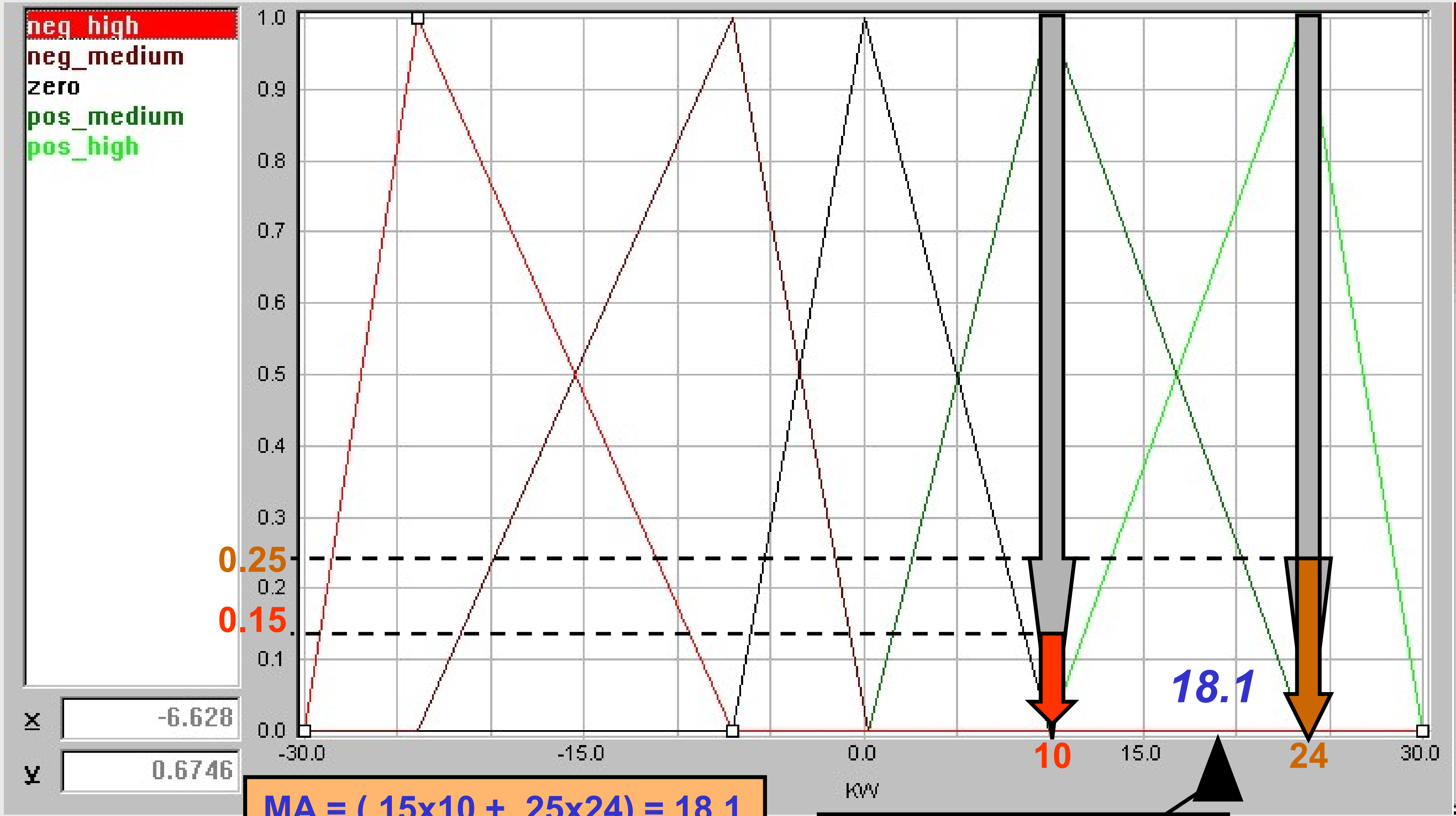
INFERÊNCIA

Pondera-se o valor típico com o seu grau de pertinência



INFERÊNCIA

Pondera-se o valor típico com o seu grau de pertinência



$$MA = \frac{(.15x10 + .25x24)}{(.15 + .25)} = 18.1$$

Método da Altura

CONTEÚDO

- Introdução
  - Introdução, Objetivo e Histórico
- Conceitos Básicos
  - Definição, Características e Formas de Imprecisão
- ***Conjuntos Fuzzy***
  - Propriedades, Formas de Representação e Operações
- Lógica Fuzzy
  - Relações, Composições, Modus Ponens Generalizado
- Fuzzy Control

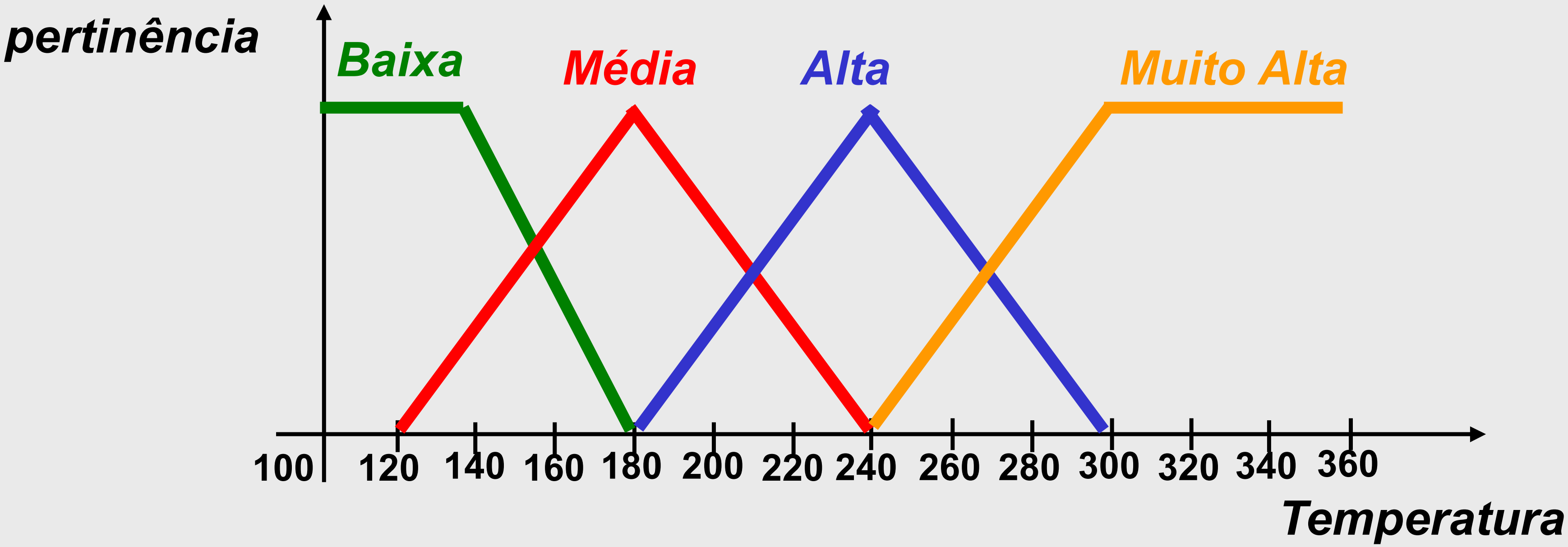
Variáveis Linguísticas

- Têm a função de fornecer uma maneira sistemática para uma caracterização aproximada de fenômenos complexos ou mal definidos
- Por exemplo:
  - temperatura;
  - idade.

Variáveis Linguísticas

- ***Variável linguística:*** variável cujos ***valores*** são nomes de conjuntos fuzzy

Exemplo: temperatura de um processo



Variáveis Linguísticas

- ***Formalismo:*** **caracterizada por uma quíntupla (*N*, *T*(*N*), *X*, *G*, *M*), onde:**

_N_: nome da variável

ex: temperatura

_T_(_N_): conjunto de termos de N, ou seja, o conjunto de nomes dos valores linguísticos de N

{baixa, média, alta, muito alta}

_X_: universo de discurso (espaço fuzzy completo de variação de uma variável do modelo)

100 a 360 ºC

Variáveis Linguísticas

G: regra sintática para gerar os *valores* de N como uma composição de termos de *T*(*N*), conectivos lógicos, modificadores e delimitadores

temperatura *não baixa*

temperatura *não muito alta*

M: regra semântica, para associar a cada valor gerado por *G* um conjunto fuzzy em *X*

associa os *valores* acima a *conjuntos fuzzy* cujas *funções de pertinência* exprimem seus significados

Funções de Pertinência

- Aos ***termos*** de uma ***variável linguística*** (ou aos seus ***valores***) faz-se corresponder conjuntos fuzzy, definidos por suas ***funções de pertinência***
- Podem ter formas padrão ou definidas pelo usuário

Funções de Pertinência

- **<u>*Contínuas*</u>: podem ser definidas por meio de funções analíticas**

$$\boxed{\mu_A(x) = (1 + (a(x-c))^b)^{-1}}$$

$$\mu_{pequeno}(x) = (1 + 9x^2)^{-1}$$

$$\mu_{médio}(x) = (1 + 9(x - 0{,}5)^2)^{-1}$$

$$\mu_{grande}(x) = (1 + 9(x - 2)^2)^{-1}$$

Funções de Pertinência

- ***Discretas***: consistem em valores discretos correspondendo a elementos (discretos) do universo

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mu_{pequeno}(x) = \{0{,}3;\ 0{,}7;\ 1;\ 0{,}7;\ 0{,}3;\ 0;\ 0\}$$

$$\mu_{médio}(x) = \{0;\ 0;\ 0{,}3;\ 0{,}7;\ 1;\ 0{,}7;\ 0{,}3\}$$

$$\mu_{grande}(x) = \{0;\ 0;\ 0;\ 0\ \ 0{,}3;\ 0{,}7;\ 1\}$$

Funções de Pertinência

- Diferentes pessoas, ou grupos de pessoas, podem definir funções de pertinência (para um mesmo conjunto) de forma diferente
  - Exemplo: estatura de pessoas

CONJUNTOS FUZZY

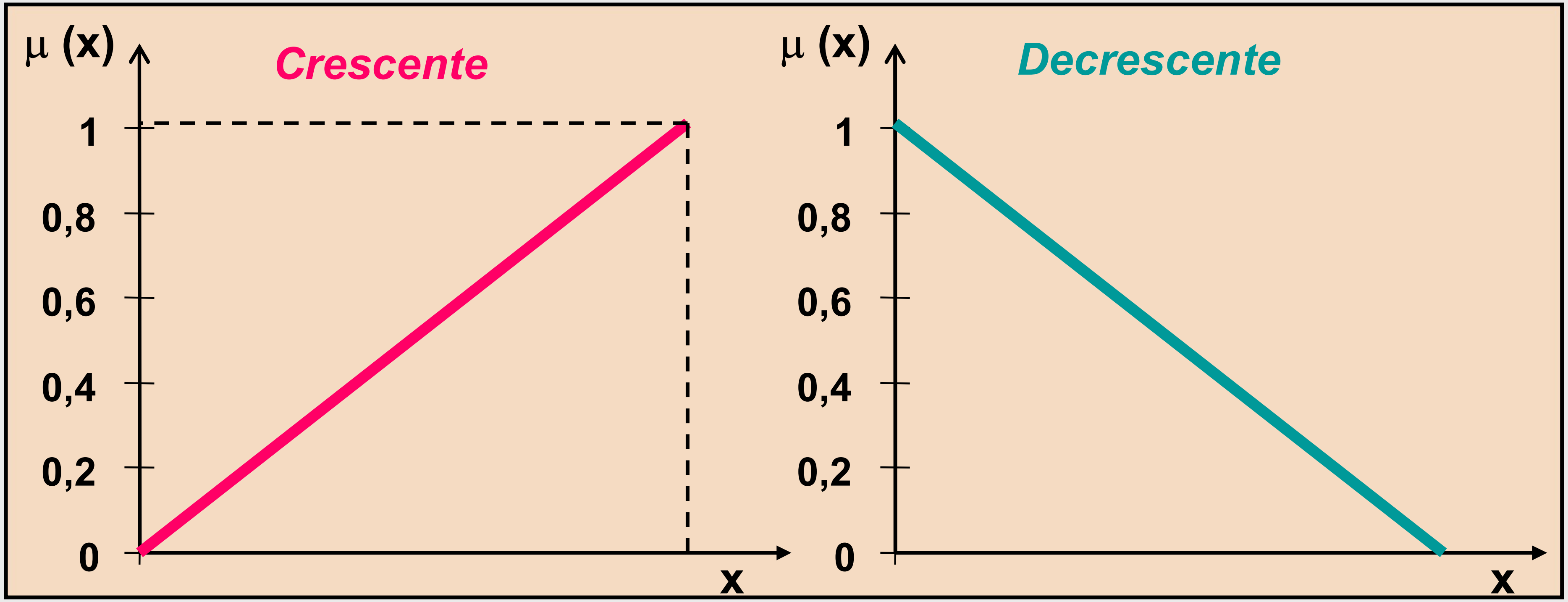
- Conjuntos Crisp x Fuzzy
- Definição
- Representação
- Propriedades
- ***Formatos***
- Operações
- Hedges

Funções de Pertinência

- *Linear*
- *Trapezoidal*
- *Triangular*
- *Formato S*
- *Formato Z*
- *Formato PI*
- *Gaussiana*
- *Singleton*
- *Irregulares*

Formatos dos Conjuntos

- ***Linear:***
  - É o conjunto mais simples, sendo uma boa escolha na aproximação de conceitos não bem compreendidos



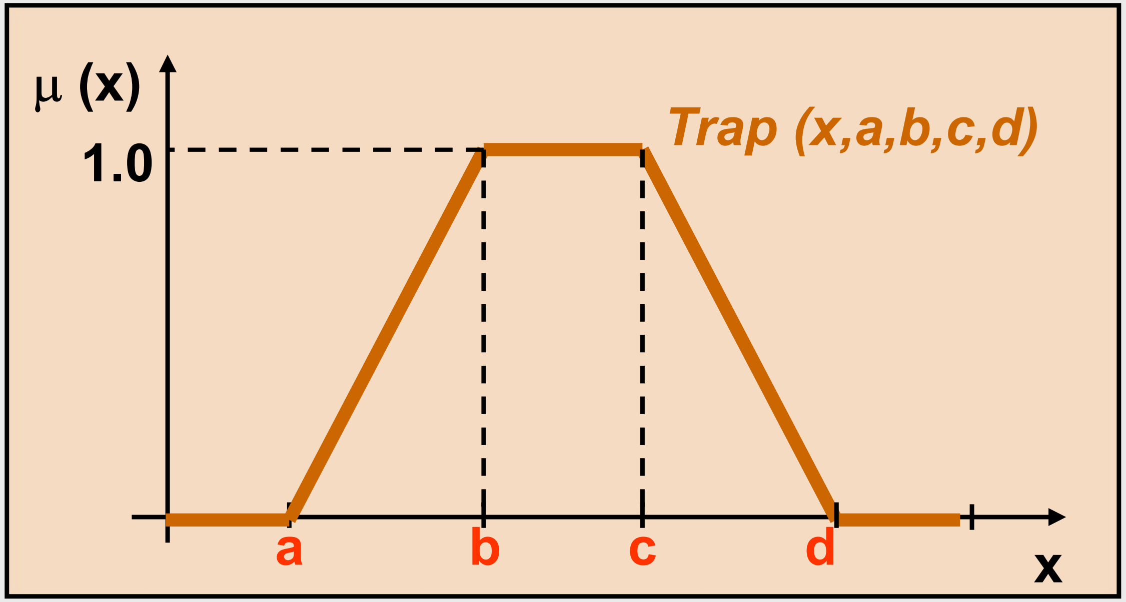
Formatos dos Conjuntos

- ***Trapezoidal:*** ➲ Rápido processamento
  ➲ Contém descontinuidades

Variável independente

Parâmetros do formato

$$\mathrm{Trap}\,(x,\underbrace{a,b,c,d}) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 1 - (b - x)/(b - a) & a < x \leq b \\ 1 & b < x \leq c \\ (d - x)/(d - c) & c < x \leq d \\ 0 & x > d \end{cases}$$



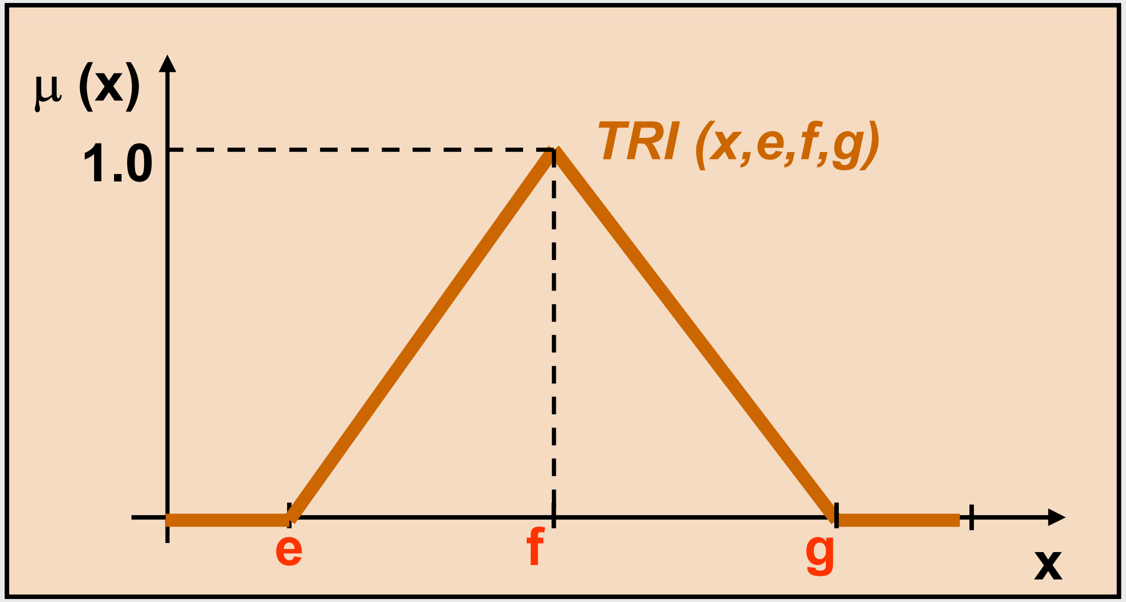
Formatos dos Conjuntos

- ***Triangular:*** **Mais simples que a Trapezoidal**

Variável independente

Parâmetros do formato

$$\mathrm{TRI}\,(x,\underbrace{e,f,g}) = \begin{cases} 0 & x \le e \\ 1 - (f - x)/(f - e) & e < x \le f \\ (g - x)/(g - f) & f < x \le g \\ 0 & x > g \end{cases}$$



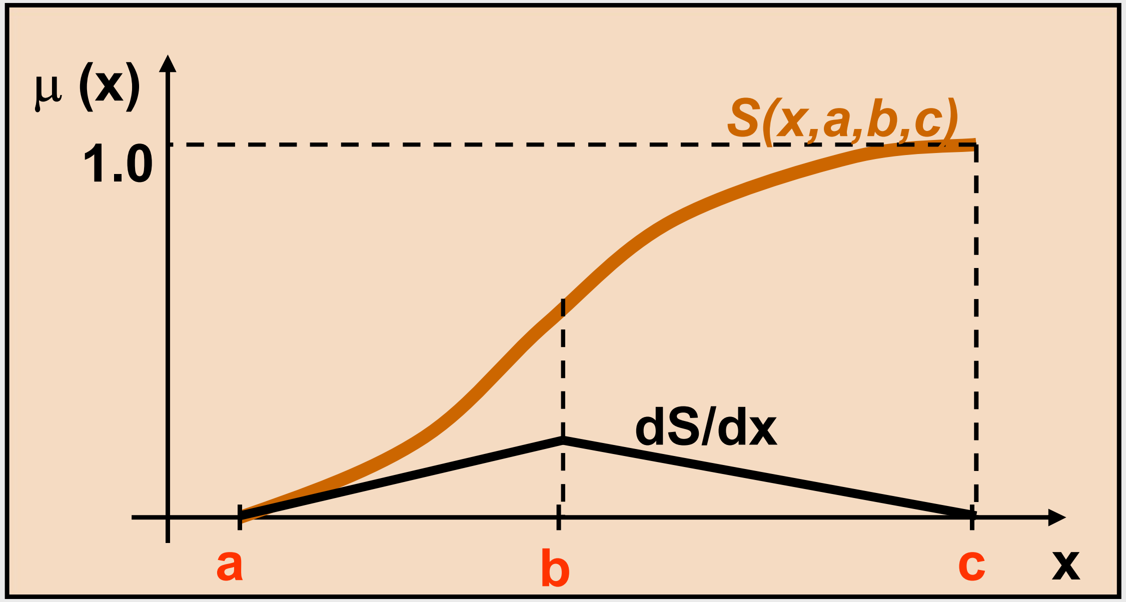
Formatos dos Conjuntos

- ***Formato S:*** **Equação Quadrática**

$$S(x,\underbrace{a,b,c}) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ 2\left[(x-a)/(c-a)\right]^2 & a \le x \le b \\ 1 - 2\left[(x-c)/(c-a)\right]^2 & b \le x \le c \\ 1 & x \ge c \end{cases}$$

Variável independente

Parâmetros do formato



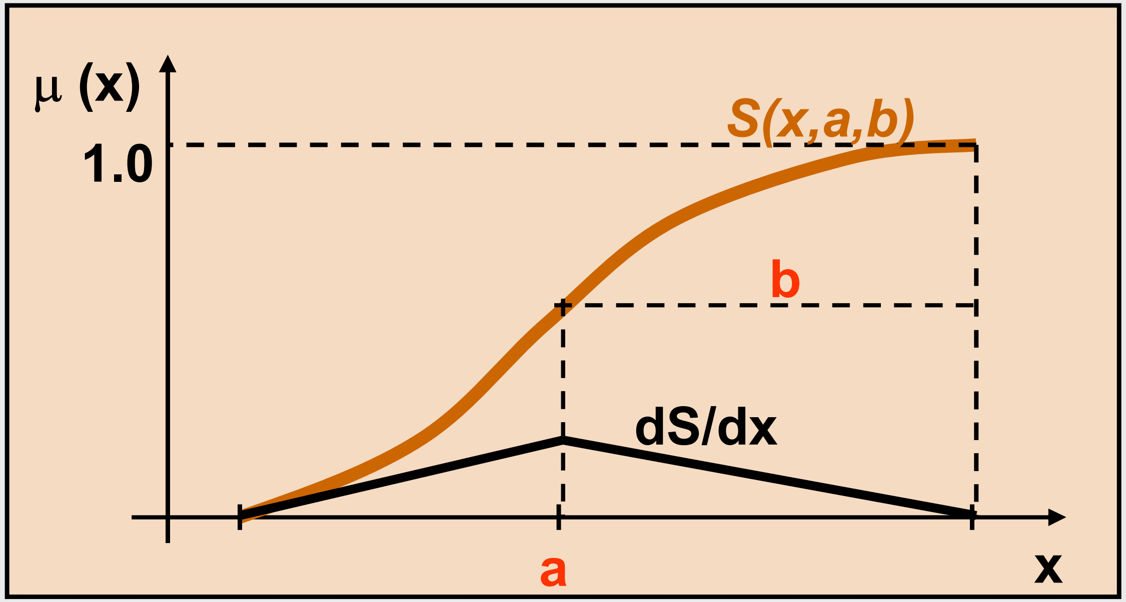
Formatos dos Conjuntos

- ***Formato S com 2 parâmetros:***

Variável independente

Parâmetros do formato

$$S(x,\underbrace{a,b}) = \begin{cases} 0 & x \leq a - b \\ [x - (a - b)]^2 / 2b^2 & a - b \leq x \leq a \\ 1 - [(a + b) - x]^2 / 2b^2 & a < x \leq a + b \\ 1 & x > a + b \end{cases}$$



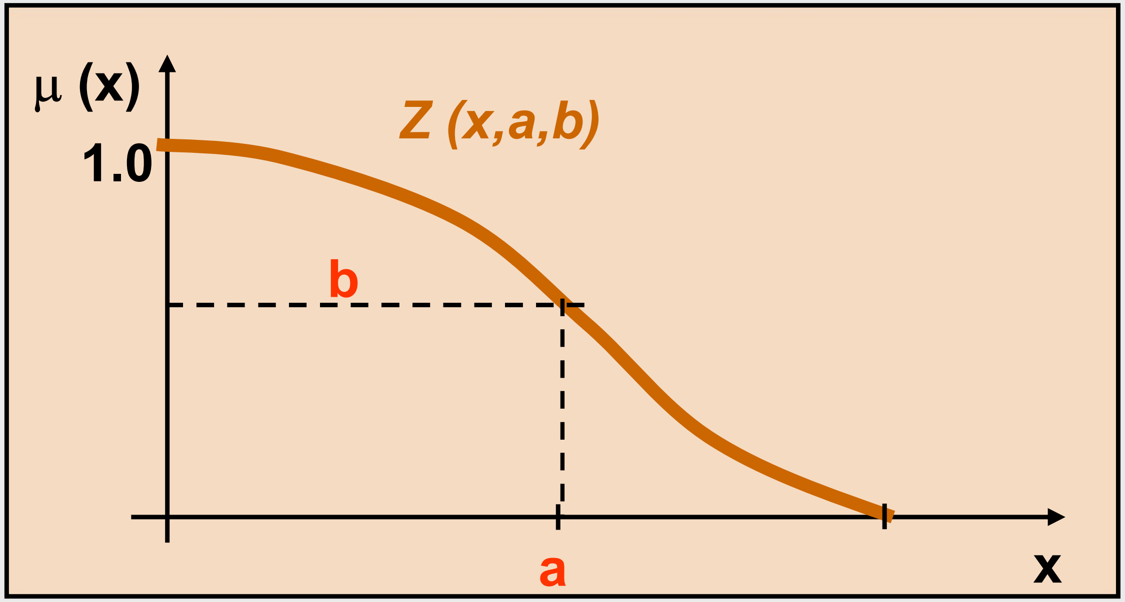
Formatos dos Conjuntos

- ***Formato Z:*** **Z (x,a,b) = 1 - S(x,a,b)**

Variável independente

Parâmetros do formato

$$Z(x,\underbrace{a,b}) = \begin{cases} 1 & x < a - b \\ 1 - [x - (a - b)]^2 / 2b^2 & a - b \leq x \leq a \\ [(a + b) - x]^2 / 2b^2 & a < x \leq a + b \\ 0 & x > a + b \end{cases}$$



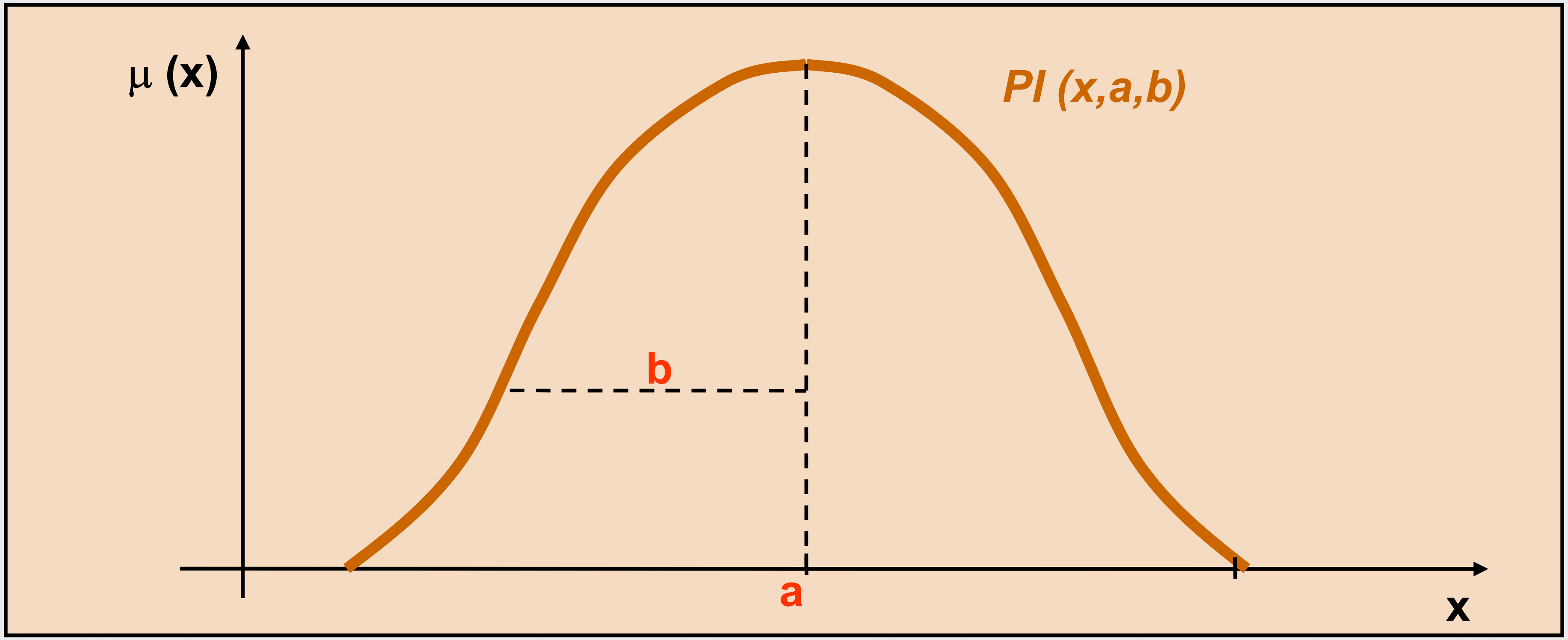
Formatos dos Conjuntos

- ***Formato PI:*** **Junção das curvas S e Z**

Variável independente

Parâmetros do formato

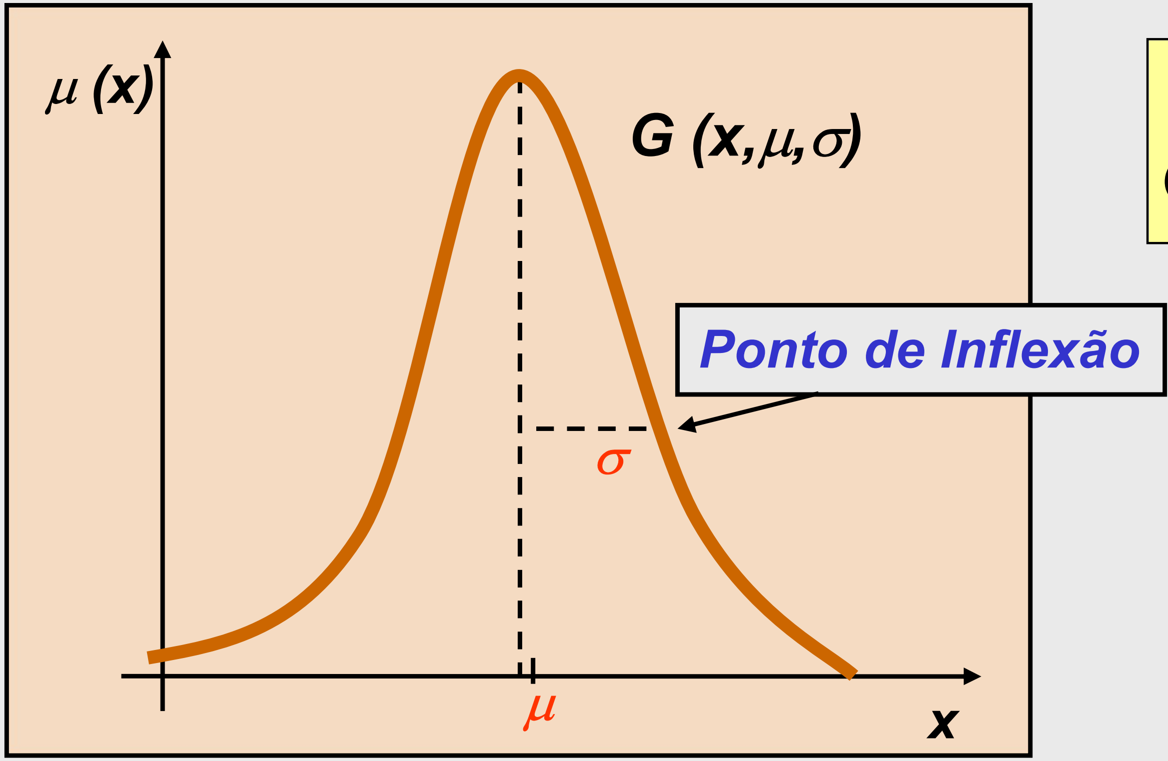
$$PI(x,\underbrace{a,b}) = \begin{cases} S(x,\ a - b/2,\ b/2) & x \leq a \\ Z(x,\ a + b/2,\ b/2) & x \geq a \end{cases}$$



Formatos dos Conjuntos

- ***Gaussiana:*** **- distribuição normal**

  - cai a zero para valores muito maiores ou muito menores do que a média



$$G(x,\mu,\sigma) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

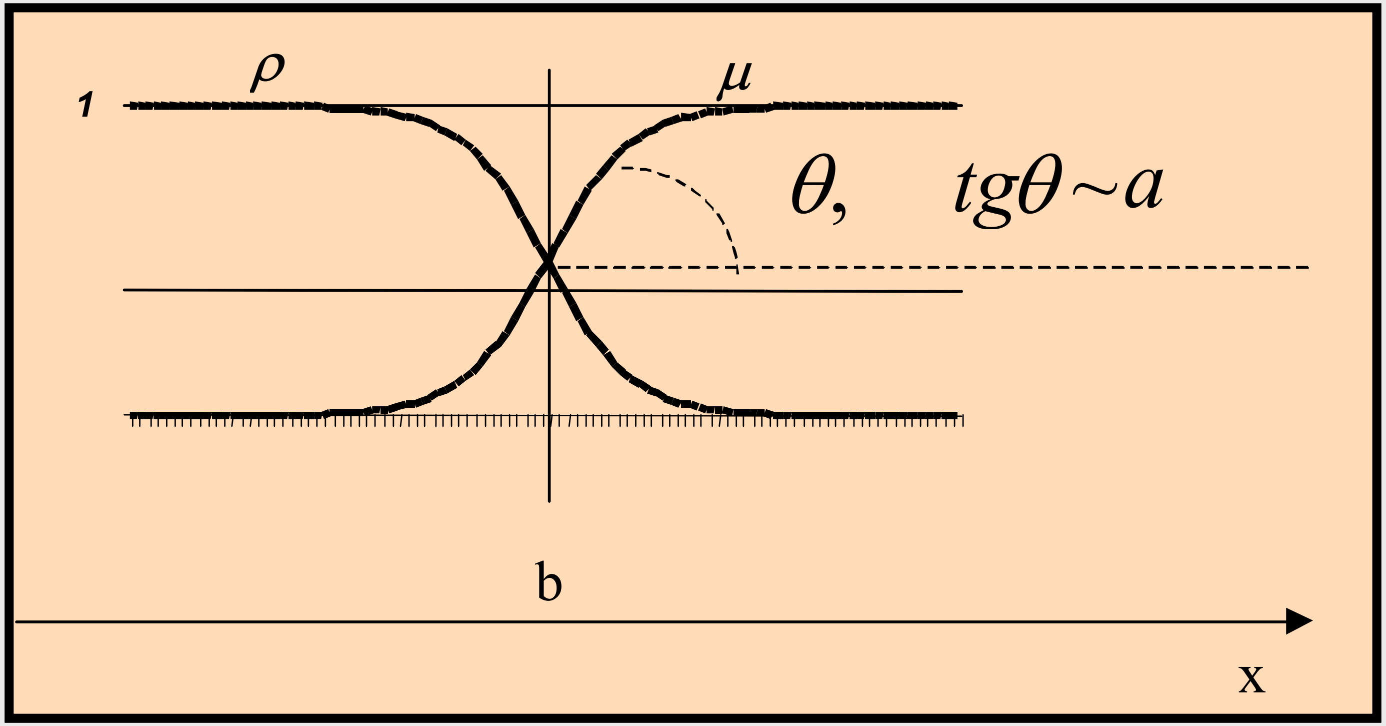
μ = **média**

σ = **desvio padrão**

Formatos dos Conjuntos

- ***Sigmoidal:***

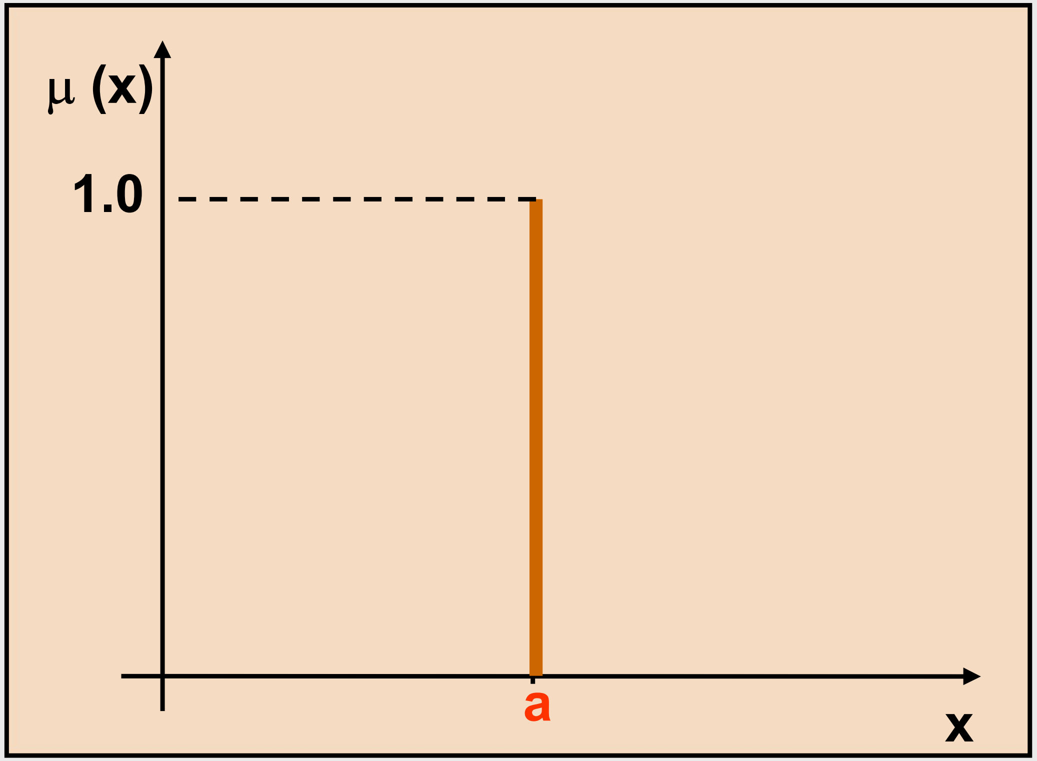
$$S\,(\underbrace{x}_{\text{Variável independente}},\underbrace{a,b}_{\text{Parâmetros do formato}}) = \frac{1}{1+e^{-a(x-b)}}$$



Formatos dos Conjuntos

- ***Singleton:*** - na verdade **não é um conjunto fuzzy**

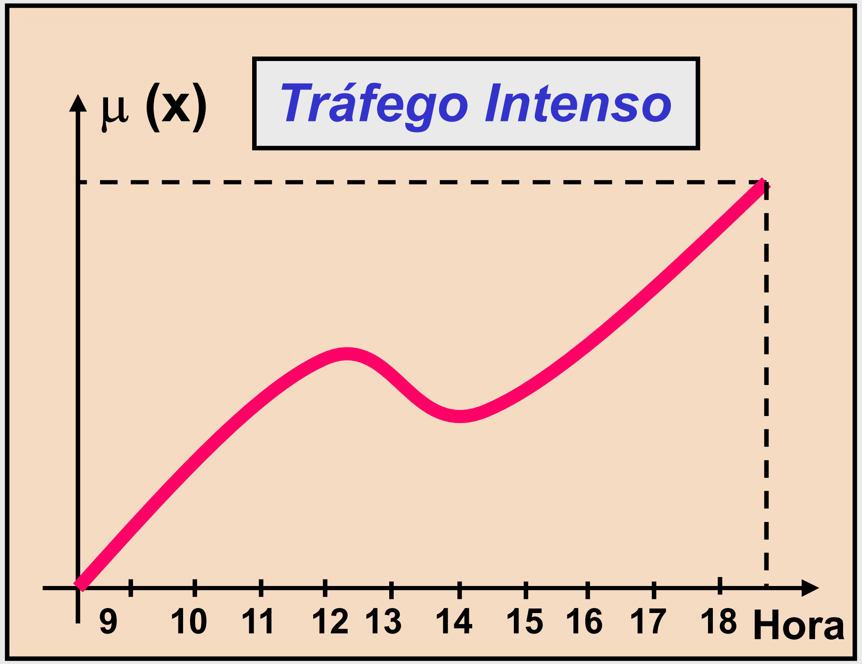
  - Simplifica os cálculos para produzir as saídas fuzzy.

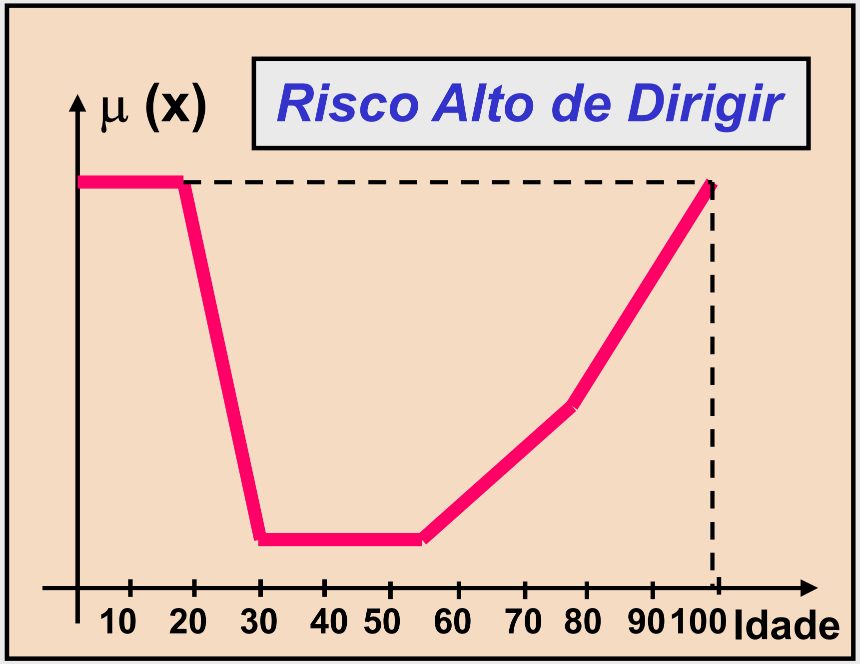


$$Sgl\,(x,a) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

Formatos dos Conjuntos

- ***Irregulares:*** - Ocasionalmente as formas padrões não conseguem capturar a semântica de uma variável ➔ representações arbitrárias.





CONJUNTOS FUZZY

- Conjuntos Crisp x Fuzzy
- Definição
- Representação
- Propriedades
- Formatos
- ***Operações***
- Hedges

Operações Conjuntos Crisp

- ***Função Característica:***
  - determina se os indivíduos do conjunto universal **são** ou **não membros** de um certo **conjunto A**

$$f(x) = 0 \qquad x \notin A$$

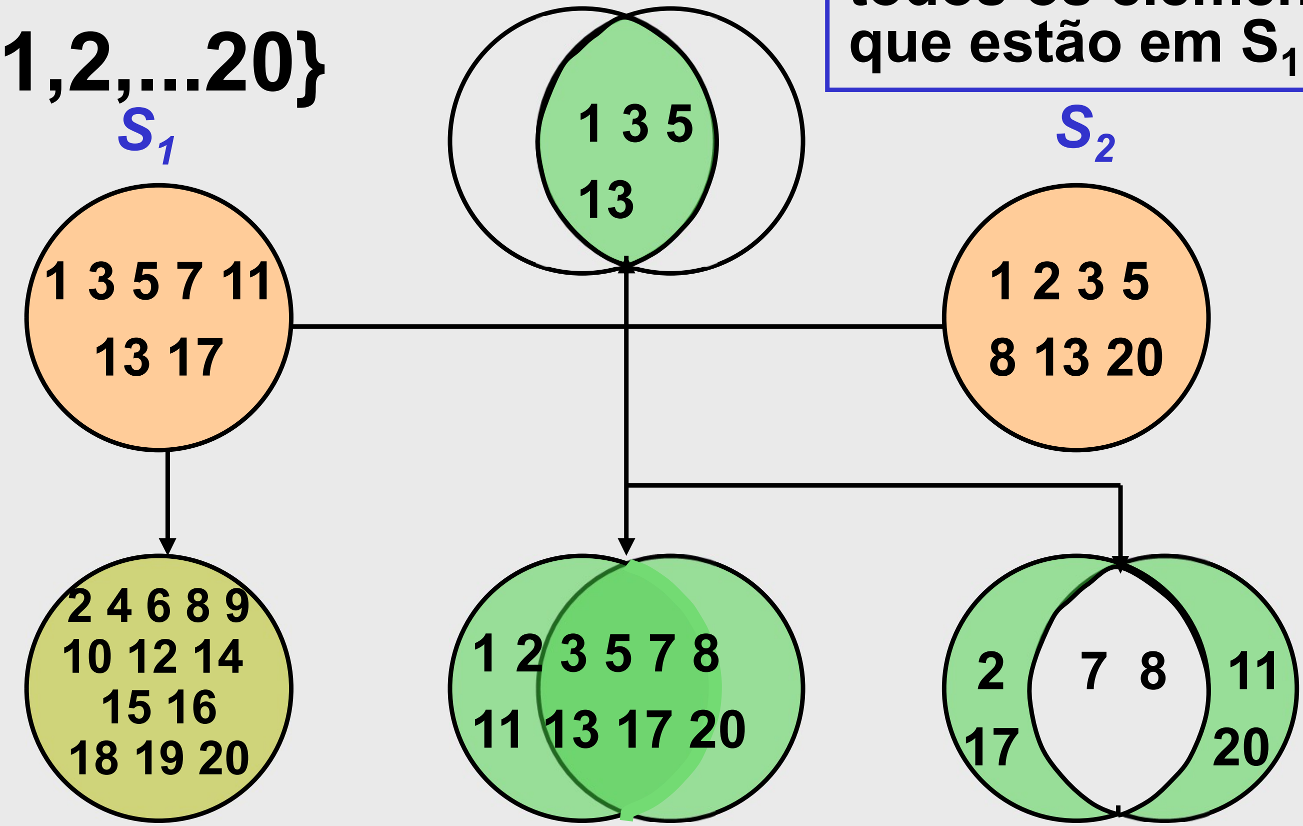
$$f(x) = 1 \qquad x \in A$$

- ***4 Operações Básicas:***
  - União, Interseção, Negação e União Exclusiva

Operações Conjuntos Ordinários

- ***Exemplo:***

  $X = \{1,2,...20\}$



Interseção

todos os elementos de X que estão em S_1 e em S_2

Complemento

todos os elementos de X que $\notin S_1$

União

todos os elementos de X que $\in$ a S_1 ou a S_2

União Exclusiva

$S_1 \oplus S_2 = S_1 \cup S_2 - S_1 \cap S_2$

Definições e operações

- *Interseção* - *Conjuntos ordinários*

Contém todos os elementos que pertencem a *A* e a *B*

$$f_{A \cap B}(x) = 1 \qquad \text{se } x \in A \text{ e } x \in B$$

$$f_{A \cap B}(x) = 0 \qquad \text{se } x \notin A \text{ ou } x \notin B$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \wedge f_B(x) \qquad \forall x \in X}$$

Definições e operações

- ***União*** **- *Conjuntos ordinários***

Contém todos os elementos que pertencem a *A ou* a *B*

$$f_{A\cup B}(x) = 1 \qquad \text{se } x \in A \text{ ou } x \in B$$

$$f_{A\cup B}(x) = 0 \qquad \text{se } x \notin A \text{ e } x \notin B$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f_{A\cup B}(x) = f_A(x) \vee f_B(x) \qquad \forall x \in X}$$

Definições e Operações

- a exemplo dos conjuntos *crisp,* existem operações para combinar e modificar os conjuntos fuzzy

⬇

As operações são aplicadas
às funções de pertinência

- um certo elemento é membro de um conjunto fuzzy:
  - se está dentro do domínio do conjunto
  - se o grau de pertinência é $>$ 0
  - (se está acima do limite α-cut)

Operações Básicas

- *Interseção*
- *União*
- *Complemento*

Operadores de Zadeh

- ***Interseção:***
  - Em analogia com os conjuntos ordinários, que utilizam o operador AND, em conjuntos fuzzy geralmente se utiliza o *Mínimo* das *Funções de Pertinência* (operadores de Zadeh).

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

Operadores de Zadeh

- ***União:***

  – **Em analogia com os conjuntos crisp, que utilizam o operador OR, em conjuntos fuzzy geralmente se utiliza o *Máximo* das *Funções de Pertinência* (operadores de Zadeh).**

$$\boxed{\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \qquad \forall x \in X}$$

Operadores de Zadeh

- ***Complemento:***

  – **Em analogia com os conjuntos crisp, o complemento do conjunto fuzzy A (~A) contém TODOS os elementos que não estão em A.**

  – **Em conjuntos fuzzy geralmente se utiliza:**

$$\boxed{\mu_{\sim A}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad \forall x \in X}$$

Supondo conjuntos normalizados!!

Definições e operações

- ***Conjunto Vazio***

$$A = \varnothing \quad \text{se e somente se} \quad \mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X$$

- ***Complemento***

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X$$

Definições e operações

- *Conjuntos iguais*

$$A = B \quad \text{se e somente se} \quad \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

- *A subconjunto de B*

$$A \subset B \quad \text{se} \quad \mu_A(x) \le \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

Propriedades

Utilizando os operadores (de Zadeh) *max* e *min* para a união e interseção fuzzy, verificam-se as seguintes propriedades:

- $(A')' = A$

- $\begin{cases} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{cases}$

Propriedades

$$\begin{cases} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{cases}$$

Comutatividade

$$\begin{cases} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{cases}$$

Associatividade

Propriedades

$$\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & \textbf{(1)} \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$$

Distributividade

Demonstração de (1):

$$\mu_A(x) \wedge (\mu_B(x) \vee \mu_C(x)) =$$
$$(\mu_A(x) \wedge (\mu_B(x)) \vee (\mu_A(x) \wedge \mu_C(x))$$

Para cada uma das situações seguintes, verificam-se os resultados correspondentes:

(considerando-se os cálculos como feitos "elemento a elemento")

Propriedades

- $\mu_B > \mu_C > \mu_A \Rightarrow$

$$\mu_A \wedge (\mu_B \vee \mu_C) = \mu_A \wedge \mu_B = \mu_A$$

$$(\mu_A \wedge \mu_B) \vee (\mu_A \wedge \mu_C) = \mu_A \vee \mu_A = \mu_A \quad \boldsymbol{c.q.d.}$$

- $\mu_B > \mu_A > \mu_C \Rightarrow \mu_A = \mu_A$
- $\mu_C > \mu_B > \mu_A \Rightarrow \mu_A = \mu_A$
- $\mu_C > \mu_A > \mu_B \Rightarrow \mu_A = \mu_A$
- $\mu_A > \mu_B > \mu_C \Rightarrow \mu_B = \mu_B$
- $\mu_A > \mu_C > \mu_B \Rightarrow \mu_C = \mu_C$

Propriedades

$$\begin{cases} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases}$$

se $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

$$\begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$$

Propriedades

Observando que as funções de pertinência dos conjuntos vazio e universo são 0 e 1:

$$\begin{cases} A \cap \varnothing = \varnothing \\ A \cup \varnothing = A \end{cases} \qquad \boldsymbol{e} \qquad \begin{cases} A \cap X = A \\ A \cup X = X \end{cases}$$

Propriedades

Conjuntos ordinários:

$$A \cap A' = \varnothing \quad \mathbf{e} \quad A \cup A' = X$$

Conjuntos fuzzy:

$$\mu_{A \cap A'}(x) = \mu_A(x) \wedge (1 - \mu_A(x)) \neq 0 \Rightarrow A \cap A' \neq \varnothing$$

$$\mu_{A \cup A'}(x) = \mu_A(x) \vee (1 - \mu_A(x)) \neq 1 \Rightarrow A \cup A' \neq X$$

Operações Conjuntos Fuzzy

- ***Lei da Não Contradição:*** → **INVÁLIDA!!**
  - $A \cap \sim A \neq \phi$

- ***Lei da Exclusão Mútua:*** → **INVÁLIDA!!**
  - $A \cup \sim A \neq U$

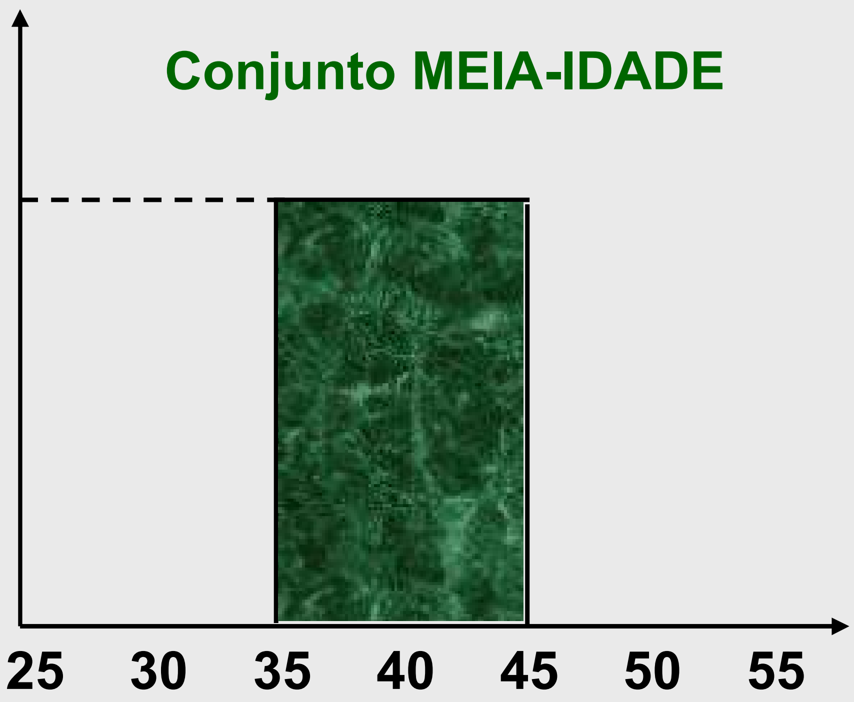
Lei da Contradição

Ex. 1: Quais os membros que são de *MEIA- IDADE* e *não-MEIA-IDADE* ao mesmo tempo?

Ex. 2: Quais os membros que são *ALTOS* e *não-ALTOS* ao mesmo tempo?

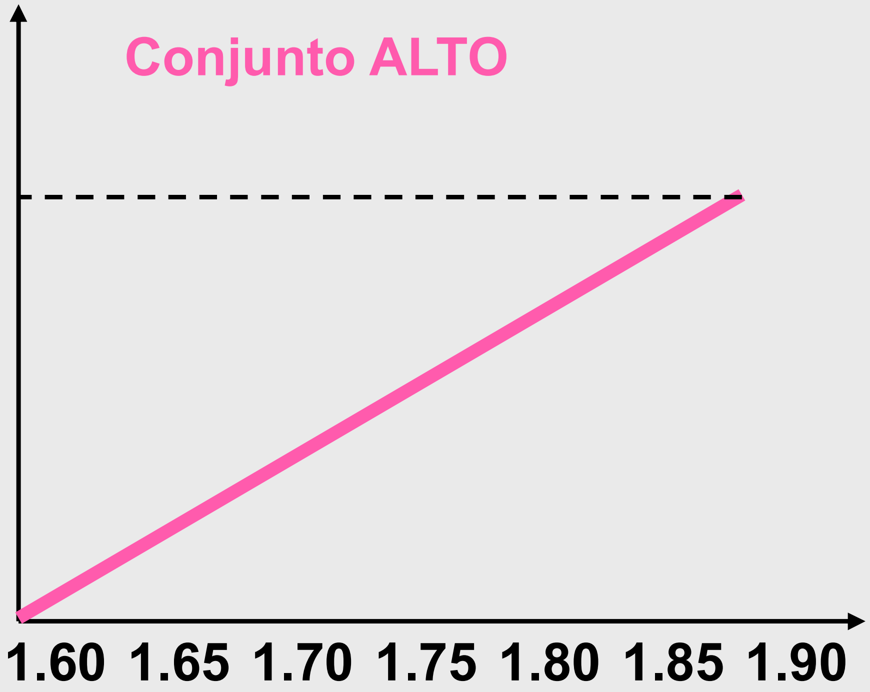
INTERSEÇÃO

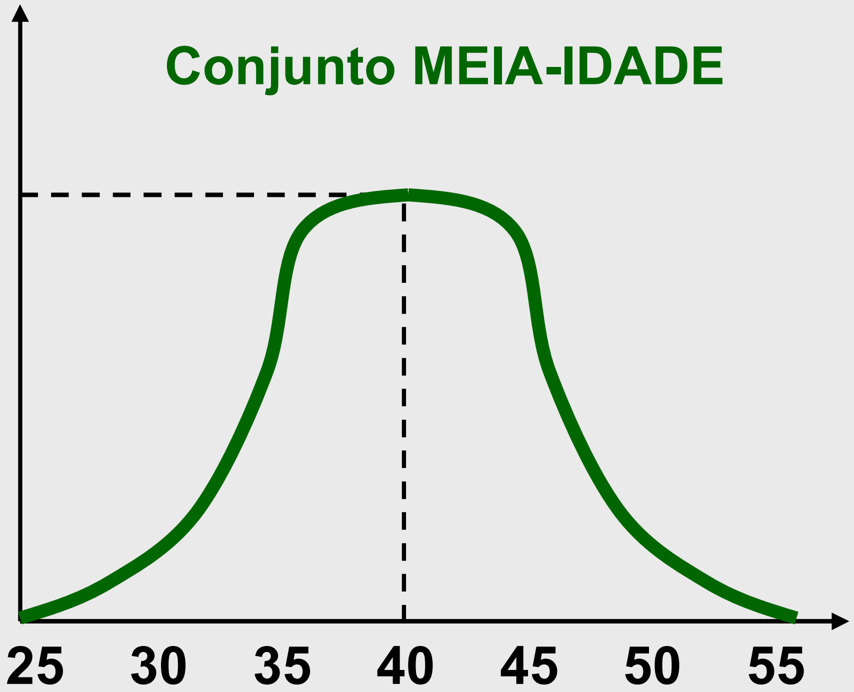
① ***Caso Crisp:***



INTERSEÇÃO

① ***Caso Fuzzy:***





Lei da Não Contradição

– Quais os membros que são de *MEIA-IDADE* e *não-MEIA-IDADE* ao mesmo tempo?

NOME	IDADE	$\mu_{M\text{-}I}$ (x)	$\mu_{\sim M\text{-}I}$ (y)	FUZZY
Abel	36	.92	.08	.08
José	58	0	1	0
Carlos	64	0	1	0
João	32	.47	.53	.47
Pedro	40	1	0	0
Tiago	22	0	1	0
Felipe	47	.74	.26	.26
André	25	.10	.90	.10

4 membros têm grau de pertinência diferente de zero para ambos os conjuntos Meia-Idade e não-Meia-Idade

Lei da Não Contradição

– **Quais os membros que são *ALTOS* e *não-ALTOS* ao mesmo tempo?**

NOME	ALTURA	μ_{ALTO} (y)	$\mu_{\sim ALTO}$ (y)	FUZZY
Abel	1.70	.84	.16	.16
José	1.75	.92	.08	.08
Carlos	1.65	.68	.32	.32
João	1.78	.96	.04	.04
Pedro	1.77	.94	.06	.06
Tiago	1.60	.39	.61	.39
Felipe	1.73	.90	.10	.10
André	1.75	.92	.08	.08

TODOS os membros têm grau de pertinência diferente de zero para ambos os conjuntos ALTO e não-ALTO

Lei da Exclusão Mútua

– **Quais os membros que são de *MEIA-IDADE* ou *não-MEIA-IDADE* ao mesmo tempo?**

NOME	IDADE	$\mu_{M\text{-}I}$ (x)	$\mu_{\sim M\text{-}I}$ (y)	FUZZY
Abel	36	.92	.08	.92
José	58	0	1	1
Carlos	64	0	1	1
João	32	.47	.53	.53
Pedro	40	1	0	1
Tiago	22	0	1	1
Felipe	47	.74	.26	.74
André	25	.10	.90	.90

Nem TODOS os membros têm grau de pertinência um para a união dos conjuntos Meia-Idade e não-Meia-Idade

Lei da Exclusão Mútua

– **Quais os membros que são *ALTOS* ou *não-ALTOS* ao mesmo tempo?**

NOME	ALTURA	μ_{ALTO} (y)	$\mu_{\sim ALTO}$ (y)	FUZZY
Abel	1.70	.84	.16	.84
José	1.75	.92	.08	.92
Carlos	1.65	.68	.32	.68
João	1.78	.96	.04	.96
Pedro	1.77	.94	.06	.94
Tiago	1.60	.39	.61	.61
Felipe	1.73	.90	.10	.90
André	1.75	.92	.08	.92

NENHUM dos membros têm grau de pertinência igual a um para a união dos conjuntos ALTO e não-ALTO

Operadores

- *Generalização*

$\Downarrow$

operadores *norma-t* e *co-norma-t* (*norma-s*)

- Operações binárias de [0,1] x [0,1] $\rightarrow$ [0,1], tal que, $\forall x, y, z, w \in [0,1]$, determinadas propriedades são satisfeitas.

Operadores T-NORM

- ***Definição:***
  - Seja **T** uma função de duas variáveis **x** e **y** no intervalo [0,1]. Se, para qualquer **x**, **y**, e **z** em [0,1], as seguintes condições forem satisfeitas ➔ **T** é dita uma operação **T-norm**

① $T(x,1) = x$

② $T(x,0) = 0$

③ Se $x \leq x'$, então $T(x,y) \leq T(x',y)$ — **monotônica**

④ $T(x,y) = T(y,x)$ — **comutativa**

⑤ $T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$ — **associativa**

Norma-t

As seguintes propriedades são satisfeitas:

$$x * y = y * x$$

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

se $x \leq y,\ w \leq z$, então $x * w \leq y * z$

$$x * 0 = 0 \qquad \text{e} \qquad x * 1 = x$$

Operadores T-NORM

- ***Exemplos:***

Mínimo $M(x,y) = \text{mín}(x,y)$

Produto $P(x,y) = x * y$

Lukasiewicz $W(x,y) = \text{máx}(0, x + y - 1)$

T-norm degenerada

$$Z(x,y) = \begin{cases} x, & \text{se } y = 1 \\ y, & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Operadores T-CONORM

- ***Definição:***
  - Seja **S** uma função de duas variáveis **x** e **y** no intervalo [0,1]. Se, para qualquer **x**, **y**, e **z** em [0,1], as seguintes condições forem satisfeitas ➔ **S** é dita uma operação **T-conorm**

① **S(x,0) = x**

② **S(x,1) = 1**

③ **Se x ≤ x', então S(x,y) ≤ S(x',y)** — **monotônica**

④ **S(x,y) = S(y,x)** — **comutativa**

⑤ **S(S(x,y),z) = S(x,S(y,z))** — **associativa**

Co-norma-t

As seguintes propriedades são satisfeitas:

$$x \oplus y = y \oplus x$$

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

$$\text{se } x \leq y,\ w \leq z, \text{ então } x \oplus w \leq y \oplus z$$

$$x \oplus 0 = x \qquad \text{e} \qquad x \oplus 1 = 1$$

Operadores T-CONORM

- ***Exemplos:***

Máximo

$$M(x,y) = \text{máx}(x,y)$$

Soma Probabilística

$$P^*(x,y) = x + y - x * y$$

Soma Limitada

$$W^*(x,y) = \text{mín}(1, x + y)$$

T-conorm degenerada

$$Z^*(x,y) = \begin{cases} x, & \text{se } y = 0 \\ y, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Outras Operações Básicas

- ***A é subconjunto de B*** → **$A \subseteq B$**
  - $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$
- ***A é igual a B*** → **$A = B$**
  - $\mu_A(x) = \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$
- ***A é subconjunto próprio de B*** → **$A \subset B$**
  - $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$
  - $\mu_A(x) < \mu_B(x)$ para pelo menos 1 elemento de X

Propriedades de Conjuntos Fuzzy

- ***Dominância:***
  - $\mu (x) \cup 1 = 1$
  - $\mu (x) \cup 0 = \mu (x)$
  - $\mu (x) \cap 1 = \mu (x)$
  - $\mu (x) \cap 0 = 0$

1 ➔ função de pertinência com $\mu (x) = 1 \ \forall x \in X$

0 ➔ função de pertinência com $\mu (x) = 0 \ \forall x \in X$

Propriedades de Conjuntos Fuzzy

- ***Associatividade:***

  - $\mu_A(x) \cup [\mu_B(x) \cup \mu_C(x)] = [\mu_A(x) \cup \mu_B(x)] \cup \mu_C(x)$
  - $\mu_A(x) \cap [\mu_B(x) \cap \mu_C(x)] = [\mu_A(x) \cap \mu_B(x)] \cap \mu_C(x)$

Ex: HOT $\cap$ (WARM $\cap$ COOL) = (HOT $\cap$ WARM) $\cap$ COOL

Propriedades de Conjuntos Fuzzy

- ***Comutatividade:***

  - $\mu_A (x) \cup \mu_B (x) = \mu_B (x) \cup \mu_A (x)$
  - $\mu_A (x) \cap \mu_B (x) = \mu_B (x) \cap \mu_A (x)$

Ex: HOT ∩ COOL = COOL ∩ HOT

Propriedades de Conjuntos Fuzzy

- ***Distributividade:***

$$\mu_A(x) \cup [\mu_B(x) \cap \mu_C(x)] = [\mu_A(x) \cup \mu_B(x)] \cap [\mu_A(x) \cup \mu_C(x)]$$

$$\mu_A(x) \cap [\mu_B(x) \cup \mu_C(x)] = [\mu_A(x) \cap \mu_B(x)] \cup [\mu_A(x) \cap \mu_C(x)]$$

Ex: HOT $\cap$ (WARM $\cup$ COOL) =

(HOT $\cap$ WARM) $\cup$ (HOT $\cap$ COOL)

Propriedades de Conjuntos Fuzzy

- ***De Morgan:***

  - $\overline{\mu_A(x) \cup \mu_B(x)} = \overline{\mu_A(x)} \cap \overline{\mu_B(x)}$

  - $\overline{\mu_A(x) \cap \mu_B(x)} = \overline{\mu_A(x)} \cup \overline{\mu_B(x)}$

Ex: NOT (HOT $\cup$ COOL) = (NOT-HOT $\cap$ NOT-COOL)