Modelado y Simulación de Sistemas Dinámicos

Sistemas de Tiempo Discreto

Ernesto Kofman

FCEIA - Universidad Nacional de Rosario.
CIFASIS – CONICET. Argentina

Organización de la Presentación

1. Tipos de Modelos en Tiempo Discreto
   - Ecuaciones en Diferencias
   - Función de Transferencia Discreta
   - Diagramas de Bloques
2. Simulación de Sistemas de Tiempo Discreto
3. Algunas Propiedades de los Sistemas de Tiempo Discreto

Organización de la Presentación

Ecuaciones en Diferencias

El siguiente modelo, correspondiente a un filtro digital muy simple, es una ecuación en diferencias de segundo orden

$$y(k) + a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) = b_0 \cdot u(k)$$

- El modelo está definido sólo para los instantes discretos $t_0, t_1, \cdots, t_k, \cdots$.
- $y(k) = y(t_k)$ es la variable de salida del modelo.
- $u(k) = u(t_k)$ es la variable de entrada del modelo.
- Las constantes a_1, a_2, b_0 son parámetros del modelo.
- Este caso se trata de un modelo lineal y estacionario.

Ecuaciones en Diferencias

En general, las ecuaciones en diferencias pueden escribirse de la forma:

$$y(k) = f[y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m), k]$$

o más generalmente, admitiendo casos implícitos tenemos:

$$f[y(k), y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m), k] = 0$$

- En ambos casos se trata de un modelo externo.
- Suponiendo que $n > m$, n es el orden del sistema.

Ecuaciones en Diferencias: Estados

Una ecuación en diferencias de orden n se puede representar por n ecuaciones de orden 1. En el caso del filtro digital,

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = -a_2 \cdot x_1(k) - a_1 \cdot x_2(k) + u(k)$$

donde además

$$y(k) = -a_2 \cdot b_0 \cdot x_1(k) - a_1 \cdot b_0 \cdot x_2(k) + b_0 \cdot u(k)$$

- Las nuevas variables $x_1(k)$ y $x_2(k)$ se denominan variables de estado.
- Las dos ecuaciones de orden 1 se llaman ecuaciones de estado.
- La ecuación estática que calcula $y(k)$ es la ecuación de salida.

Ecuaciones en Diferencias. Ejemplo No Lineal

El siguiente modelo se denomina Ecuación de Nicholson–Bailey y representa la dinámica de poblaciones de parásitos y huéspedes.

$$N(k+1) = \lambda \cdot N(k) \cdot e^{-a \cdot P(k)}$$
$$P(k) = N(k) \cdot (1 - e^{-a \cdot P(k)})$$

- $N(k)$ y $P(k)$ son las variables de estado (número de huéspedes y parásitos, respectivamente).
- Son Ecuaciones de Estado no lineales.
- Es un modelo autónomo y estacionario.

Ecuaciones en Diferencias: Forma General

La forma general de escribir una ecuación en diferencias en su representación de Ecuaciones de Estado es la que sigue:

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= f_1[x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k), u_1(k), \cdots, u_m(k), k] \\
x_2(k+1) &= f_2[x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k), u_1(k), \cdots, u_m(k), k] \\
&\vdots \\
x_n(k+1) &= f_n[x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k), u_1(k), \cdots, u_m(k), k]
\end{aligned}
$$

con las Ecuaciones de Salida:

$$
\begin{aligned}
y_1(k) &= g_1[x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k), u_1(k), \cdots, u_m(k), k] \\
y_2(k) &= g_2[x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k), u_1(k), \cdots, u_m(k), k] \\
&\vdots \\
y_p(k) &= g_p[x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k), u_1(k), \cdots, u_m(k), k]
\end{aligned}
$$

Ecuaciones en Diferencias: Notación Vectorial

Las Ecuaciones de Estado se escriben generalmente en forma vectorial. Definiendo:

$$\mathbf{x}(k) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} ; \mathbf{u}(k) \triangleq \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix} ; \mathbf{y}(k) \triangleq \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix} ; \mathbf{f}(\cdot) \triangleq \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix}$$

las ecuaciones de estado y salida se pueden reescribir:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k]$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k]$$

Función de Transferencia Discreta

En los casos lineales y estacionarios como el del filtro digital

$$y(k) + a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) = b_0 \cdot u(k)$$

se suele convertir la ecuación en diferencias en una ecuación algebraica utilizando para ello la Transformada $\mathcal{Z}$:

$$Y(z) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} y(k) \cdot z^{-k}$$

que aplicada a la ecuación del filtro resulta,

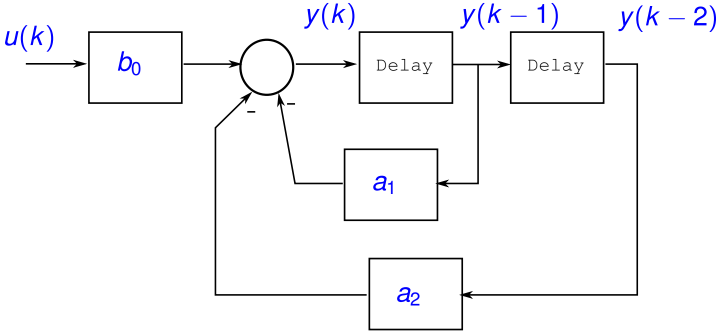
$$Y(z) + a_1 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + a_2 \cdot z^{-2} \cdot Y(z) = b_0 \cdot U(z)$$

de donde se obtiene la Función Transferencia Discreta

$$G(z) \triangleq \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 \cdot z^2}{z^2 + a_1 \cdot z + a_2}$$

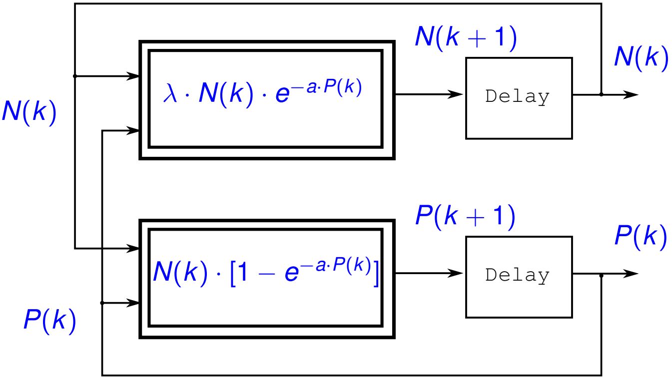
Diagramas de Bloques

Los Diagramas de Bloques son una herramienta gráfica de representación de modelos. Las variables se representan con flechas, y las operaciones matemáticas con bloques.



$$y(k) + a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) = b_0 u(k)$$

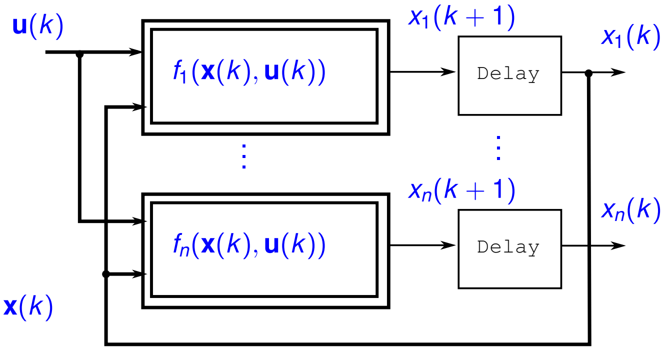
Diagramas de Bloques. Ejemplo No Lineal



$$N(t_{k+1}) = \lambda \cdot N(t_k) \cdot e^{-a \cdot P(t_k)}$$
$$P(t_{k+1}) = N(t_k) \cdot [1 - e^{-a \cdot P(t_k)}]$$

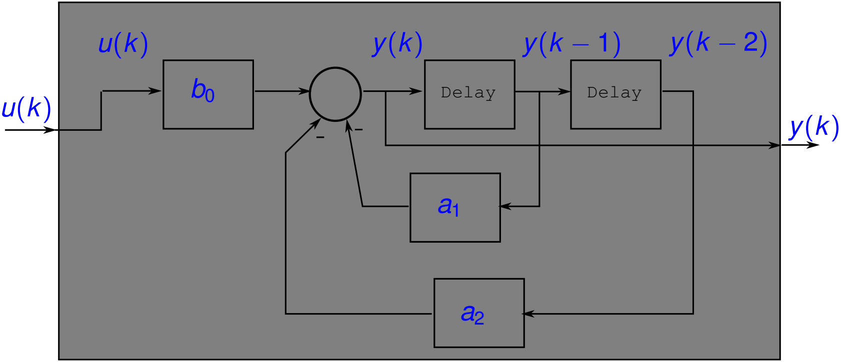
Nicholson–Bailey

Diagrama de Bloques. Caso General



$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]$$

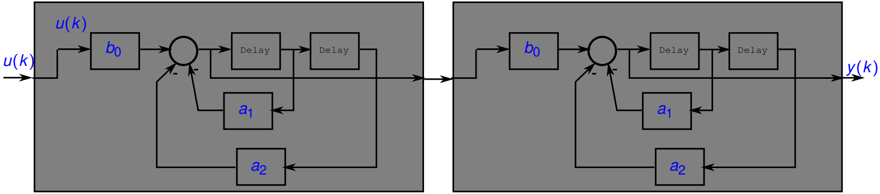
Diagramas de Bloques Jerárquicos



$$y(k) + a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) = b_0 u(k)$$

Diagramas de Bloques Jerárquicos

El acoplamiento jerárquico permite construir modelos más complejos a partir de submodelos ya construidos.



Cascada de dos filtros.

Organización de la Presentación

Simulación de Sistemas de Tiempo Discreto

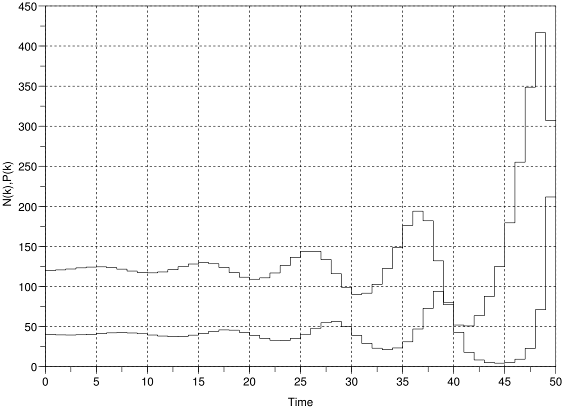
La simulación de un sistema de tiempo discreto es trivial. Dada una representación de la forma

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]$$

y conocidas las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0)$, el siguiente algoritmo simula el sistema:

1. Ponemos inicialmente $k = 0$
2. Calculamos el siguiente valor del estado $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]$.
3. Incrementamos k en 1.
4. Si $t_k \geq t_f$ terminamos la simulación. En otro caso, volvemos al punto 2.

Simulación de la Ecuación de Nicholson-Bailey



Cond.Inic.
$N(0) = 120$,
$P(0) = 40$.
Parámetros:
$\lambda = 1.5$, $a = 0.01$.

Software de Simulación de Tiempo Discreto

- Si bien la simulación de un sistema de tiempo discreto es trivial, su representación puede ser complicada.
- En el caso de los dos filtros en cascada, por ejemplo, resulta tedioso deducir las ecuaciones.
- Esto motivó el herramientas de software capaces de tratar en forma gráfica con los Diagramas de Bloques.
- Scilab, OpenModelica y PowerDEVS, sólo por nombrar algunos ejemplos, permiten simular Diagramas de Bloques de Sistemas de Tiempo Discreto.

Organización de la Presentación

Puntos de Equilibrio

Cuando en un sistema de tiempo discreto las entradas son constantes $\mathbf{u}(k) = \bar{\mathbf{u}}$, el modelo

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]$$

puede tener Puntos de Equilibrio, es decir, estados en los que vale $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k)$ y que resultan de resolver

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}]$$

por lo tanto si el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ es un punto de equilibrio, la solución permanece en dicho punto para siempre.

Estabilidad de los Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio pueden ser estables o inestables de acuerdo a lo que ocurre con las trayectorias que se inician en sus cercanías:

- En un punto de equilibrio estable, para todo estado inicial suficientemente cercano al mismo, las trayectorias nunca se alejan mucho de dicho equilibrio.
- Más aún, si el punto es asintóticamente estable, las trayectorias tienden al equilibrio.
- Por el contrario, un punto de equilibrio es inestable cuando no es estable.

Estabilidad de los Puntos de Equilibrio

Ejemplos:

- $x(k+1) = -x(k)$, tiene P.E. $\bar{x} = 0$ estable (pero no asintóticamente estable).
- $x(k+1) = 0.5 \cdot x(k)$, tiene P.E. $\bar{x} = 0$ asintóticamente estable.
- $x(k+1) = -1.5 \cdot x(k)$, tiene P.E. $\bar{x} = 0$ inestable.

Estabilidad en Sistemas Lineales y Estacionarios

En el caso Lineal y Estacionario, la Ecuación de Estados es

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] = A \cdot \mathbf{x}(k) + B \cdot \mathbf{u}(k)$$

y para una entrada constante suele haber un único punto de equilibrio (si $I - A$ es no singular). En este caso, la estabilidad del punto de equilibrio queda determinada por la posición de los autovalores de la matriz A:

- Si todos los autovalores de A están dentro de la circunferencia unitaria (tienen módulo menor que 1), entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable.
- Si al menos un autovalor está fuera de la circunferencia unitaria entonces es inestable.
- Si al menos un autovalor está sobre la circunferencia unitaria, entonces no es asintóticamente estable.

Bibliografía

J. Proakis and D. Manolakis.
Digital Signal Processing.
Prentice Hall, 4th. edition, 2006.

B. Zeigler, A. Muzy, and E. Kofman.
Theory of Modeling and Simulation. Third edition.
Academic Press, New York, 2018.