Práctica 5: ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO. ORTOGONALIDAD

1. Verificar la ley del paralelogramo para los vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$:
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

2. Sea $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Describir el conjunto H de vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que son ortogonales a v.

3. Sea $W = < \{v_1, \cdots, v_p\} >$. Mostrar que si x es ortogonal a todo v_j, para $1 \leqslant j \leqslant p$, luego x es ortogonal a todo vector en W.

4. Mostrar que si $x \in W \cup W^\perp$, entonces $x = 0$.

5. En cada caso, mostrar que $\{u_1, u_2\}$ o $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortogonal para $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ respectivamente, y luego expresar a x como combinación lineal de la base correspondiente.

   a) $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}$.

   b) $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

6. Suponer que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por n vectores ortogonales distintos de cero. Explicar por qué $W = \mathbb{R}^n$.

7. Sean U, V matrices ortogonales. Explicar por qué UV es una matriz ortogonal.

8. Sea $\{u_1, u_2\}$ un conjunto ortogonal de vectores distintos de cero, y c_1, c_2 escalares no nulos. Mostrar que $\{c_1u_1, c_2u_2\}$ también es ortogonal.

9. Dado $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$, sea $L = < \{u\} >$. Para $y \in \mathbb{R}^n$, *la reflexión de y en L* se define como
$$refl_L y = 2proy_L y - y.$$

   a) Graficar en $\mathbb{R}^2$ para observar que la $refl_L y$ es la suma de $\hat{y} = proy_L y$ con $\hat{y} - y$.

   b) Mostrar que la aplicación que $y \mapsto refl_L y$ es una transformación lineal.

10. Sean
$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
    Escribir x como suma de dos vectores, uno en $< \{u_1, u_2, u_3\} >$ y el otro en $< \{u_4\} >$.

11. Sea W el subespacio generado por $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, y $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

    a) Si $y = [3, 1, 5, 1]^T$, escribirlo como la suma de un vector en W y uno en $W^\perp$.

    b) Si $y = [3, -1, 1, 13]^T$, encontrar el punto más cercano a y en W.

    c) Si $y = [2, 4, 0, 1]^T$, encontrar la mejor aproximación a y mediante vectores de la forma $c_1v_1 + c_2v_2$. Hallar la distancia de y a W.

12. Sean $y = [4, 8, 1]^t$, $u_1 = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^T$, $u_2 = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]^T$ y $W = < \{u_1, u_2\} >$.

    a) Sea $U = [u_1 u_2]$. Calcular U^tU y UU^t.

    b) Calcular $proy_W y$ y $(UU^t)y$.

13. Sea A una matriz $m \times n$. Demostrar que todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ puede escribirse en la forma $x = p + u$, donde p está en $Fil(A)$ y $u \in nul(A)$. Mostrar que si la ecuación $Ax = b$ es consistente, entonces hay una única p en $Fil(A)$ tal que $Ap = b$.

14. Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con una base ortogonal $\{w_1, \cdots, w_p\}$ y sea $\{v_1, \cdots, v_q\}$ una base ortogonal de $W^\perp$.

    a) Explicar por qué $\{w_1, \cdots, w_p, v_1, \cdots, v_q\}$ es un conjunto ortogonal.

    b) Explicar por qué el conjunto definido en el ítem anterior genera $\mathbb{R}^n$.

    c) Demostrar que $\dim W + \dim W^\perp = n$.

15. Siendo $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$, utilizar el proceso de Gram-Schimdt para producir una base ortogonal de $< \{u, v\} >$.

16. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
    Encontrar una base ortogonal para el espacio columnas de A.

17. *a*) Verificar que $A \times B = \sum_{i,j} A_{ij}B_{ij}$ es un producto interno en $\mathbb{R}^{n\times n}$ (conocido como producto de Frobenius).

    b) Probar que $A \times B = tr(AB^t)$.

    c) Probar que $AB \times C = B \times A^tC$.

18. Verificar que $f \times g = \int_1^e \log(x)f(x)g(x)dx$ es un producto interno en $C([1, e])$, espacio de las funciones a valores reales continuas en el intervalo $[1, e]$.

19. Dados $u, v \in V$ espacio vectorial con producto interno, probar que $u = v$ si y sólo si $u \times w = v \times w$ para todo $w \in V$.

20. Sea $W \underset{s.e.}{\subset} V$, V *e.v.* con producto interno. Probar que $(W^\perp)^\perp = W$.

21. Sea $\mathbb{R}^{n\times n}$ con el producto interno definido en el ejercicio (17).

    a) Hallar una base ortogonal para $\mathbb{R}^{n\times n}$ para dicho producto interno.

    b) Hallar $W^\perp$, si $W = gen\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

    c) Ídem *b*) para $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

22. Sea $C([1, e])$, con el producto interno definido en el ejercicio (18).

    a) Calcular $\|f\|$ para $f(x) = \sqrt{2}$.

    b) Hallar un polinomio de grado una que sea ortogonal a $g(x) = 1$.