Funciones recursivas

Pablo Verdes

LCC

17 de abril de 2017

Contenidos

- Motivación: las FRP no alcanzan
  - Funciones parciales y totales
  - Relación entre FRP y funciones totales. La función de Ackermann.
- Nuevo operador: minimizador
- Funciones Recursivas: definición
- Tesis de Church

Las FRP no alcanzan

- **Definición:** Una función numérica $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ se dice **parcial** si no está definida sobre todos los elementos de $\mathbb{N}^k$. Ejemplos:

  1. La función
  $$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto f(n) = n/3 \end{aligned}$$
  sólo está definida en $n = 0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots$

  2. La función
  $$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto f(n) = \sqrt{n} \end{aligned}$$
  sólo está definida en $n = 0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

  3. La función definida como: $f(0) = 0, \quad f(n+2) = f(n) + 3.$

Las FRP no alcanzan

- **Definición:** Una función numérica $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ se dice **total** si está definida sobre todos los elementos de $\mathbb{N}^k$.

- **Teorema:** Si $f \in FRP$ entonces f es una función total.

  D/ Por inducción sobre el conjunto FRP.

  - *Caso base*: trivial. Las funciones base $c^{(k)}, p_i^{(k)}$ y $s^{(1)}$ son totales.
  - *Composición*: sup. que $f^{(n)}, g_1^{(k)}, \ldots, g_n^{(k)}$ son totales y veamos que
  $$h = \Phi(f, g_1, g_2, \ldots, g_n)$$
  también es total. Dado $X \in \mathbb{N}^k$, podemos calcular
  $$Y = (g_1(X), g_2(X), \ldots, g_n(X))$$
  pues cada g_i es total (H.I.). Como f es total en $\mathbb{N}^n$, podemos también calcular $f(Y)$. Por lo tanto, $\exists z \in \mathbb{N}$ tal que $z = f(Y) = h(X)$. Dado que $\forall X \in \mathbb{N}^k \;\; \exists h(X)$, concluimos que h es una función total.
  - *Recursión*: ejercicio 1, Práctica 4. $\square$

Las FRP no alcanzan

- En otras palabras, acabamos de probar que
$$FRP \subseteq \{f \mid f \text{ es función total}\}.$$
- Es decir, las *FRP* no pueden representar funciones parciales.
- Consideremos la pregunta inversa. ¿Será que todas las funciones totales son *FRP*? Es decir, ¿será cierto que f total $\Rightarrow f \in FRP$?
- La respuesta es no: veremos a continuación la función de Ackermann, que es total pero no recursiva primitiva.
- Para demostrar que dicha función no es *FRP*, la estrategia será demostrar que todas las *FRP* cumplen cierta propiedad, mientras que la función de Ackermann no la cumple.
- Resumiendo, las FRP no pueden representar a:
  1. ninguna función parcial
  2. todas las funciones totales

Las FRP no alcanzan

- Decíamos que vamos a demostrar que cierta función (llamada de Ackermann) no es *FRP* mostrando que:
  1. todos los elementos del conjunto *FRP* satisfacen cierta propiedad
  2. la función de Ackermann no la satisface

- En términos coloquiales, dicha propiedad es la siguiente:

  "ser mayorado por algún elemento de la sucesión de Ackermann"

- Para formalizar este argumento, a continuación definiremos:
  - la sucesión (o serie) de Ackermann, $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$
  - la función de Ackermann, $ACK(x)$
  - el concepto "f mayora a g", que indicaremos $f \uparrow g$

  y demostraremos:
  1. $g \in FRP \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \mid f_k \uparrow g$
  2. $\nexists k \in \mathbb{N} \mid f_k \uparrow ACK$

Sucesión (o serie) de Ackermann

- Consideremos la siguiente sucesión de funciones, que llamaremos **sucesión (o serie) de Ackermann**:

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= s(x) = x + 1 \\
f_1(x) &= f_0^{x+2}(x) = s^{x+2}(x) = x + (x+2) = 2x + 2 \\
f_2(x) &= f_1^{x+2}(x) \\
&\vdots \\
f_k(x) &= f_{k-1}^{x+2}(x) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- Para ver mejor cómo funciona, calculemos algunos valores de $f_2(x)$:

$f_2(0) = f_1^2(0) = (2(2x+2)+2)|_{x=0} = 6$

$f_2(1) = f_1^3(1) = (2(2(2x+2)+2)+2)|_{x=1} = 22$

$f_2(2) = f_1^4(2) = (2(2(2(2x+2)+2)+2)+2)|_{x=2} = 62$

Función de Ackermann

- **Propiedades:**

  1. $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad f_k(x) \in FRP$
  2. $\forall x, k \in \mathbb{N}$ $\quad f_k(x) > x$
  3. $\forall x_1, x_2, k \in \mathbb{N}$ $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f_k(x_1) < f_k(x_2)$
  4. $\forall x, k \in \mathbb{N}$ $\quad f_k(x) < f_{k+1}(x)$

  D/ Ejercicio 2, Práctica 4.

- **Definición:** Función de Ackermann

$$ACK(x) = f_x(x)$$

Calculemos algunos valores en el pizarrón.

Función de Ackermann

- **Definición:** Decimos que una función $f^{(1)}$ **mayora** a otra función $g^{(n)}$ si $\forall(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ se verifica que

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ \leq \ f(\max(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

  Notación: $f^{(1)} \uparrow g^{(n)}$.

- **Teorema 1:** Sea $g^{(n)} \in FRP$, entonces existe f_k de la sucesión de Ackermann tal que $f_k \uparrow g$.

  D/ Por inducción en g.

  No la hacemos en clase (ver el libro Temas de Teoría de la Computación, Proyecto LATIn, pág. 56).

Función de Ackermann

- **Teorema 2:** $ACK(x) \notin FRP$

D/

Por el absurdo, supongamos que $ACK(x) \in FRP$.

Luego $ACK(x) + 1 \in FRP$.

Por el teorema anterior, existe f_M en la sucesión de Ackermann que la mayora:

$$\begin{array}{rrl} \forall x \in \mathbb{N} & ACK(x) + 1 \leq f_M(x) & \\ \forall x \in \mathbb{N} & f_x(x) + 1 \leq f_M(x) & \\ x = M & f_M(M) + 1 \leq f_M(M) & \text{absurdo!} \end{array}$$

Por lo tanto $ACK(x) \notin FRP$. $\square$

Operador Minimizador M

- Con la intención de completar nuestro modelo de cálculo, agregaremos un nuevo operador.

- **Definición:** Operador Minimizador M
  Dada $h^{(n+1)}$, decimos que $g^{(n)}$ se construye por **minimización** de h (y lo notaremos $g = M[h]$) cuando g se define del modo siguiente:

$$g(X) = M[h](X) = \mu_t(h(t, X) = 0)$$

  donde $\mu_t(h(t, X) = 0)$ es, si existe, el mínimo valor de t tal que $h(t, X) = 0$.

- **Obs:** Nada garantiza que tal valor de t exista. Por lo tanto, las funciones construidas con el operador M pueden ser parciales.

Ejemplos

- La función **cociente** $C(x,y) = x/y$, que sólo está definida si existe t tal que $ty = x$:
$$C(x,y) = \mu_t(h(t,x,y) = 0)$$
donde
$$h(t,x,y) = (ty \dot{-} x) + (x \dot{-} ty)$$

- La función **logaritmo** $Log(x,y) = \log_x y$, que sólo está definida si existe t tal que $x^t = y$:
$$Log(x,y) = \mu_t(h(t,x,y) = 0)$$
donde
$$h(t,x,y) = (y \dot{-} x^t) + (x^t \dot{-} y)$$

- La función **raíz enésima** $Rad(x,n) = \sqrt[n]{x}$, que sólo está definida si existe t tal que $t^n = x$:
$$Rad(x,n) = \mu_t(h(t,x,n) = 0)$$
donde
$$h(t,x,n) = (x \dot{-} t^n) + (t^n \dot{-} x)$$

Funciones Recursivas (FR)

- **Definición:**
  Definimos inductivamente el conjunto de **Funciones Recursivas (FR)** como el menor conjunto tal que:
  - Las funciones base pertenecen a FR.
  - Las funciones obtenidas aplicando un número finito de operaciones de composición (Φ), recursión (R) y minimización (M) sobre elementos de FR también pertenecen a FR.

- Observemos que $FRP \subset FR$.

- Se extiende la propiedad de ser **recursivos** a conjuntos y relaciones de manera análoga a como se hizo para la recursión primitiva.

- Todos los mecanismos que permiten construir elementos nuevos de FRP, CRP y RRP a partir de otros elementos pueden ser extendidos al caso de FR, CR y RR.

Tesis de Church

- ¿Hará falta introducir algún operador más?
- La **Tesis de Church** afirma que el conjunto de las *FR* coincide con el de las funciones "calculables".
- Por función "calculable" entendemos una función para la cual podemos, en principio, obtener el valor de la imagen de cualquier elemento de su dominio mediante un algoritmo. (Esto no significa que efectivamente podamos realizar el cálculo —podría haber limitaciones de tiempo y espacio.)
- Observemos que no es posible demostrar la Tesis de Church, pues la definición de función "calculable" es intuitiva pero no rigurosa.
- Sin embargo, en la búsqueda de otros posibles modelos para el cálculo (que estudiaremos en la materia) no se ha encontrado ningún proceso que no pueda ser representado como una *FR*.