Práctica 4: AUTOVECTORES Y AUTOVALORES

- 1. *i*) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$ definida por T(u, v) = (v, u) para $u, v \in \mathbb{K}$. Calcular los autovalores y los autovectores asociados para T.
 - ii) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^3)$ definida por T(u, v, w) = (2v, 0, 5w) para $u, v, w \in \mathbb{K}$. Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para T.
 - iii) Para $n \in \mathbb{N}$ sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ definida por

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n, \dots, x_1 + \dots + x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}.$$

Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para *T*.

2. Encontrar los autovalores y autovectores asociados para los operadores lineales sobre \mathbb{K}^2 dados por las siguientes matrices

$$a)\begin{bmatrix}3 & 0 \\ 8 & -1\end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix}10 & -9 \\ 4 & -2\end{bmatrix} \qquad c)\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad d)\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

3. Encontrar el autoespacio correspondiente de cada autovalor

$$i)A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 10, \qquad ii)B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 3$$

4. Para cada matriz dada, encontrar los autovalores para el operador T sobre \mathbb{K}^n sin realizar cálculos. Describir los autovectores $v \in \mathbb{K}^n$ asociados a cada autovalor λ analizando las soluciones a de la ecuación matricial $(A - \lambda I)v = 0$.

$$a) \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- 5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre \mathbb{K} y $T \in \mathcal{L}(V)$. Un espacio vectorial U se dice invariante bajo T si $T(U) \subset U$. Supongamos que U_1 , U_2 son dos subespacios invariantes bajo T. Probar que $U_1 \cap U_2$ también es invariante bajo T.
- 6. Sea V un espacio de dimensión finita sobre \mathbb{K} , $T \in \mathcal{L}(V)$ inversible y $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Probar que λ es autovalor de T si y sólo si λ^{-1} es autovalor de T^{-1} .
- 7. Sea V un espacio de dimensión finita sobre \mathbb{K} , $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ matriz inversible y $\lambda \in \mathbb{K}$. Probar que λ es autovalor de A si y sólo si λ es autovalor de A^t .
- 8. Sea V un espacio de dimensión finita sobre \mathbb{K} y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ con la propiedad que todo $v \in V$ es un autovalor para T. Probar que T debe ser igual a un escalar por la identidad en V.
- 9. *i*) Considerar una matriz $n \times n$ con la propiedad que todas las sumas de sus filas son iguales a un mismo número β . Mostrar que β es un autovalor de A.
 - ii) Considerar una matriz $n \times n$ con la propiedad que todas las sumas de sus columnas son iguales a un mismo número β . Mostrar que β es un autovalor de A.
- 10. Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encontrar h tal que el autoespacio correspondiente a $\lambda = 5$ sea bidimensional.

11. En cada uno de los siguientes items, sea $A = PDP^{-1}$ y calcule A^{4} .

$$i)P = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \ ii)P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}; \ iii)P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Diagonalizar las siguientes matrices

$$i) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -7 & -16 & 4 \\ 6 & 13 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- 13. Sea A una matriz 3×3 con dos autovalores. Cada autoespacio es unidimensional. Determinar si A es diagonalizable justificando la respuesta.
- 14. Demostrar que si A es tanto diagonalizable como invertible, también lo es A^{-1} .
- 15. i) Describir una matriz 2×2 distinta de cero que sea inversible pero no diagonalizable. ii) Describir una matriz 2×2 distinta de cero que sea diagonalizable pero no inversible.
- 16. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 6 & 12 & 11 & 2 & -4 \\ 9 & 20 & 10 & 10 & -6 \\ 15 & 28 & 14 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizarla, encontrar sus autovalores y determinar las bases para los autoespacios correspondientes.