CAPITULO 7: ORTOGONALIDAD

§1 PRODUCTO INTERNO, LONGITUD Y ORTOGONALIDAD

Definición 1 SEAN u, v MATRICES $n \times 1$ SOBRE $\mathbb{R}$. EL NÚMERO REAL $u^T v$ SE DICE PRODUCTO INTERNO DE u Y v, Y SE INDICA $u \cdot v$.

Teorema 1 SEAN u, v Y w VECTORES EN $\mathbb{R}^n$ Y c UN ESCALAR. ENTONCES:

a) $u \cdot v = v \cdot u$

b) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

c) $(cu) \cdot v = c(u \cdot v) = u \cdot (cv)$

d) $u \cdot u \geq 0$ Y $u \cdot u = 0$ SI Y SÓLO SI $u = 0$

Definición 2 LA LONGITUD (O NORMA) DE v ES EL ESCALAR NO NEGATIVO $\|v\|$ DEFINIDO MEDIANTE

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

Definición 3 PARA $u, v \in \mathbb{R}^n$, LA DISTANCIA ENTRE u Y v ES LA LONGITUD DEL VECTOR $u - v$, ESTO ES

$$dist(u, v) = \|u - v\|$$

Definición 4 DOS VECTORES u, v EN $\mathbb{R}^n$ SON ORTOGONALES ENTRE SÍ SI $u \cdot v = 0$

Observación 1 EL VECTOR CERO ES ORTOGONAL A TODO VECTOR EN $\mathbb{R}^n$

Teorema 2 TEOREMA DE PITÁGORAS

DOS VECTORES u Y v SON ORTOGONALES SI Y SÓLO SI $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Definición 5 Si un vector z es ortogonal a todo vector en un subespacio W de $\mathbb{R}^n$, decimos que z es ortogonal a W. El conjunto de todos los vectores z que son ortogonales a W se llama complemento ortogonal de W y se nota $W^\perp$.

Ejemplo 1 Sea W un plano que pasa por el origen en $\mathbb{R}^3$, y sea L la recta que pasa por 0 y es perpendicular a W. Si z y w son dos vectores no nulos, tales que z está sobre L y $w \in W$, entonces si pensamos que los puntos iniciales de ambos vectores coinciden (y es 0) vemos que $z \cdot w = 0$. Así que cada vector sobre L es ortogonal a cada $w \in W$. De hecho

$$L = W^\perp \quad y \quad W = L^\perp$$

Proposición 1. a) Un vector x está en $W^\perp$ si y sólo si x es ortogonal a todo vector de un conjunto que genere a W.

b) $W^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$

Teorema 3 Sea A una matriz $m \times n$. El complemento ortogonal del espacio fila de A es el espacio nulo de A, y el complemento ortogonal del espacio columna de A es el espacio nulo de A^T:

$$(\mathrm{Fil}\, A)^\perp = \mathrm{Nul}\, A \qquad (\mathrm{Col}\, A)^\perp = \mathrm{Nul}\, A^T$$

Demostración La regla fila-columna para calcular Ax muestra que si $x \in \mathrm{Nul}\, A$ entonces x es ortogonal a cada fila de A (viendo a las filas como vectores de $\mathbb{R}^n$). Dado que las filas de A generan el espacio fila, x es ortogonal a $\mathrm{Fil}\, A$.

De manera recíproca, si x es ortogonal a $\mathrm{Fil}\, A$, entonces evidentemente x es ortogonal a cada fila de A, y por lo tanto $Ax = 0$. Esto prueba la primer afirmación del Teorema.

Como el enunciado vale para cualquier matriz, vale para A^T; es decir que el complemento ortogonal del espacio fila de A^T es el espacio nulo de A^T. Lo cual demuestra el segundo enunciado, ya que $\mathrm{Fil}\, A^T = \mathrm{Col}\, A$.

§2 Conjuntos ortogonales

Definición 6 Decimos que un conjunto de vectores $\{u_1, \dots, u_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto ortogonal si cada par de vectores distintos en el conjunto es ortogonal, esto es, si $u_i \cdot u_j = 0$ si $i \neq j$.

Ejemplo 2 $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \right\}$ es ortogonal, pues

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3(-1) + 1.2 + 1.1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{pmatrix} = 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1(-2) + 1.\frac{7}{2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{pmatrix} = (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) + 2(-2) + 1.\frac{7}{2} = 0$$

Teorema 4 Si $S = \{u_1, \dots, u_p\}$ es un conjunto ortogonal de vectores distintos de cero en $\mathbb{R}^n$, entonces S es $l.i.$ (y por lo tanto es una base del subespacio generado por S).

Demostración SI $0 = c_1 u_1 + \dots + c_p u_p$ PARA ALGUNOS ESCALARES $c_1, \dots c_p$, ENTONCES

$$0 = 0 \cdot u_1 = (c_1 u_1 + \dots + c_p u_p) \cdot u_1 =$$
$$= c_1 (u_1 \cdot u_1) + \dots + c_p (u_p \cdot u_1) =$$
$$= c_1 \underbrace{(u_1 \cdot u_1)}_{\neq 0 \text{ por Hip}} \Longrightarrow c_1 = 0$$

DE IGUAL MANERA $c_2, \dots c_p$ DEBEN SER CERO, ASÍ QUE S ES l.i.

Definición 7 UNA BASE ORTOGONAL DE UN SUBESPACIO W DE $\mathbb{R}^n$ ES UNA BASE DE W QUE TAMBIÉN ES UN CONJUNTO ORTOGONAL.

Teorema 5 SEA $\{u_1, \dots, u_p\}$ UNA BASE ORTOGONAL DE UN SUBESPACIO W DE $\mathbb{R}^n$. PARA CADA $y \in W$, LOS PESOS EN LA COMBINACIÓN LINEAL

$$y = c_1 u_1 + \dots + c_p u_p$$

ESTÁN DADOS POR

$$c_j = \frac{y \cdot u_j}{u_j \cdot u_j} \qquad j = 1, \dots p$$

Demostración LA ORTOGONALIDAD DE $\{u_1, \dots u_p\}$ MUESTRA QUE

$$y \cdot u_1 = (c_1 u_1 + \dots + c_p u_p) \cdot u_1 = c_1 (u_1 \cdot u_1)$$

COMO $u_1 \cdot u_1 \neq 0$, $c_1 = \dfrac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}$

DE IGUAL MANERA SE OBTIENE LA FORMULA PARA CADA c_j, $j = 2 \dots p$

Ejemplo 3 EL CONJUNTO DEL Ejemplo 2 ES UNA BASE ORTOGONAL DE $\mathbb{R}^3$. EXPRESEMOS AL VECTOR $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ COMO COMBINACIÓN LINEAL DE LOS VECTORES DE ESA BASE

$$y \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 + 3 + 0 = 15 \; ; \; u_1 \cdot u_1 = 11 \Rightarrow c_1 = \frac{15}{11}$$

$$y \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 + 6 + 0 = 2 \; ; \; u_2 \cdot u_2 = 6 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{3}$$

$$y \cdot u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{pmatrix} = -2 - 6 + 0 = -8 \; ; \; u_3 \cdot u_3 = \frac{33}{2} \Rightarrow c_3 = -\frac{16}{33}$$

ENTONCES

$$y = \frac{15}{11}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{16}{33}\begin{pmatrix}-1/2\\-2\\7/3\end{pmatrix}$$

Nota 1 SEA $u \neq 0 \in \mathbb{R}^n$. QUEREMOS DESCOMPONER UN VECTOR $y \in \mathbb{R}^n$ EN LA SUMA DE DOS VECTORES, UNO MÚLTIPLO DE u Y EL OTRO ORTOGONAL A u. SE DESEA ENTONCES ESCRIBIR

$$y = \hat{y} + z \qquad (*)$$

DONDE $\hat{y} = \alpha u$ PARA ALGÚN ESCALAR α, Y z ES ALGÚN VECTOR ORTOGONAL A u.

DADO CUALQUIER ESCALAR α, SEA $z = y - \alpha u$, DE MANERA QUE $(*)$ SE CUMPLE. ENTONCES $y - \hat{y}$ ES ORTOGONAL A u SI Y SOLO SI

$$0 = (y - \alpha u)\cdot u = y\cdot u - \alpha(u\cdot u)$$

VALE DECIR, SI $\alpha = \dfrac{y\cdot u}{u\cdot u}$ Y $\hat{y} = \dfrac{y\cdot u}{u\cdot u}u$. EL VECTOR $\hat{y}$ ES LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE y SOBRE u, Y EL VECTOR z ES LA COMPONENTE DE y ORTOGONAL A u.

Observación 2 LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE y SOBRE u ES IGUAL A LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE y SOBRE cu, c ESCALAR CUALQUIERA. POR ESTO LA PROYECCIÓN ESTÁ DETERMINADA POR EL SUBESPACIO L GENERADO POR u, Y SE LA SUELE LLAMAR PROYECCIÓN ORTOGONAL DE y SOBRE L

$$\hat{y} = \operatorname{proy}_L y = \frac{y\cdot u}{u\cdot u}u$$

Definición 8 UN CONJUNTO $\{u_1, \dots, u_p\}$ ES UN CONJUNTO ORTONORMAL SI ES UN CONJUNTO ORTOGONAL DE VECTORES UNITARIOS.

Teorema 6 UNA MATRIZ U $m \times n$ TIENE COLUMNAS ORTONORMALES SI Y SÓLO SI $U^T U = I$

Demostración POR SIMPLICIDAD, SUPONGAMOS QUE U ES 3×3.

SEA $U = [u_1 \; u_2 \; u_3]$

$$U^T U = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ u_3^T \end{bmatrix} [u_1 \; u_2 \; u_3] = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T u_2 & u_1^T u_3 \\ u_2^T u_1 & u_2^T u_2 & u_2^T u_3 \\ u_3^T u_1 & u_3^T u_2 & u_3^T u_3 \end{bmatrix}$$

LAS COLUMNAS DE U SON ORTOGONALES SI Y SÓLO SI

$$u_i^T u_j = 0 \quad i \neq j \;, \; i,j = 1,2,3 \qquad (1)$$

LAS COLUMNAS DE U SON TODAS DE LONGITUD UNITARIA SI Y SÓLO SI $u_i^T u_i = 1 \;, \; i = 1,2,3 \qquad (2)$

LUEGO, EL TEOREMA SURGE INMEDIATAMENTE DE (1) Y (2).

Teorema 7 SEA U UNA MATRIZ $m \times n$ CON COLUMNAS ORTONORMALES, Y SEAN x E y VECTORES EN $\mathbb{R}^n$. ENTONCES:

a) $\|Ux\| = \|x\|$

b) $(Ux) \cdot (Uy) = x \cdot y$

c) $(Ux) \cdot (Uy) = 0$ SI Y SÓLO SI $x \cdot y = 0$

Ejemplo 4 SEAN $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\qquad x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

U TIENE COLUMNAS ORTONORMALES

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \|u_1\| = 1$$

$$u_1 \cdot u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{3}\right) + 0 = 0$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \|u_2\| = 1$$

$$U^T U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VERIFIQUEMOS QUE $\|Ux\| = \|x\|$

$$Ux = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|Ux\| = \sqrt{11}$$

$$\|x\| = \sqrt{2+9} = \sqrt{11}$$

Definición 9 UNA MATRIZ ORTOGONAL ES UNA MATRIZ U CUADRADA INVERTIBLE TAL QUE $U^{-1} = U^T$.

Observación 3 CUALQUIER MATRIZ CUADRADA CON COLUMNAS ORTONORMALES ES UNA MATRIZ ORTOGONAL. TAL MATRIZ TAMBIÉN DEBE TENER FILAS ORTONORMALES.

§3 PROYECCIONES ORTOGONALES

Teorema 8 EL TEOREMA DE LA DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL

SEA W UN SUBESPACIO DE $\mathbb{R}^n$. ENTONCES TODA $y \in \mathbb{R}^n$ PUEDE ESCRIBIRSE ÚNICAMENTE EN LA FORMA

$$y = \hat{y} + z \qquad (1)$$

DONDE $\hat{y}$ ESTÁ EN W Y z EN $W^\perp$. DE HECHO, SI $\{u_1, \dots u_p\}$ ES CUALQUIER BASE ORTOGONAL DE W, ENTONCES

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \dots + \frac{y \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p \qquad (2)$$

Y $z = y - \hat{y}$.

Demostración SEA $\{u_1, \dots u_p\}$ UNA BASE ORTOGONAL DE W Y DEFINIMOS $\hat{y}$ POR (2). ENTONCES $\hat{y} \in W$ PORQUE $\hat{y}$ ES UNA COMBINACIÓN LINEAL DE LA BASE $u_1, \dots u_p$. SEA $z = y - \hat{y}$. COMO u_1 ES ORTOGONAL A $u_2, \dots, u_p$ SE DEDUCE DE (2) QUE

$$z \cdot u_1 = (y - \hat{y}) \cdot u_1 = y \cdot u_1 - \left(\frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\right) u_1 \cdot u_1 - 0 - \dots - 0 = y \cdot u_1 - y \cdot u_1 = 0$$

ENTONCES z ES ORTOGONAL A u_1. DE MANERA SEMEJANTE, z ES ORTOGONAL A CADA u_j DE LA BASE DE W. POR LO TANTO, z ES ORTOGONAL A TODO VECTOR DE W, O SEA $z \in W^\perp$.

PARA MOSTRAR QUE LA DESCOMPOSICIÓN (1) ES ÚNICA, SUPONGAMOS QUE y TAMBIÉN PUEDE ESCRIBIRSE COMO $y = \hat{y}_1 + z_1$, CON $\hat{y}_1 \in W$ Y $z_1 \in W^\perp$. ENTONCES $\hat{y} + z = \hat{y}_1 + z_1$, Y POR ENDE $\hat{y} - \hat{y}_1 = z_1 - z$.
ESTA IGUALDAD MUESTRA QUE EL VECTOR $v = \hat{y} - \hat{y}_1$ ESTÁ EN W Y EN $W^\perp$ (PORQUE z_1 Y $z \in W^\perp$, Y $W^\perp$ ES UN SUBESPACIO). POR LO TANTO $v \cdot v = 0$, LO CUAL MUESTRA QUE $v = 0$. ESTO DEMUESTRA QUE $\hat{y} = \hat{y}_1$ Y $z = z_1$.

Ejemplo 5 SEAN $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\{u_1, u_2\}$ ES UNA BASE ORTOGONAL DE $W = \text{Gen}\{u_1, u_2\}$.

ESCRIBAMOS A $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ COMO LA SUMA DE UN VECTOR DE W Y UN VECTOR ORTOGONAL A W.

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$$
$$= \frac{9}{30}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{pmatrix} \in W$$

TAMBIÉN $y - \hat{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{pmatrix} \in W^{\perp}$

LA DESCOMPOSICIÓN DESEADA ES

$$y = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{pmatrix}$$

Teorema 9 EL TEOREMA DE LA MEJOR APROXIMACIÓN

SEA W UN SUBESPACIO DE $\mathbb{R}^n$, y CUALQUIER VECTOR DE $\mathbb{R}^n$, Y $\hat{y}$ LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE y SOBRE W. ENTONCES $\hat{y}$ ES EL PUNTO DE W MÁS CERCANO A y, EN EL SENTIDO QUE

$$\|y - \hat{y}\| < \|y - v\| \quad \forall v \in W \text{ DISTINTO DE } \hat{y}$$

Demostración SEA $v \in W$, $v \neq \hat{y}$. ENTONCES $\hat{y} - v \in W$. DE ACUERDO AL Teorema 8, $y - \hat{y}$ ES ORTOGONAL A W. EN PARTICULAR, $y - \hat{y}$ ES ORTOGONAL A $\hat{y} - v$.

PUESTO QUE

$$y - v = (y - \hat{y}) + (\hat{y} - v)$$

AL APLICAR EL Teorema de Pitágoras SE TIENE

$$\|y - v\|^2 = \|y - \hat{y}\|^2 + \|\hat{y} - v\|^2$$

AHORA, COMO $\|\hat{y} - v\|^2 > 0$ (PUES $\hat{y} - v \neq 0$)

LA DESIGUALDAD DEL ENUNCIADO SURGE INMEDIATAMENTE.

Observación 4 $\hat{y}$ es la mejor aproximación a y de los elementos de W.

Corolario 1 Si $y \in W = \text{Gen}\{u_1, \dots u_p\}$, entonces $\text{proy}_W y = y$.

Teorema 10 Si $\{u_1, \dots, u_p\}$ es una base ortonormal de un subespacio W de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\text{proy}_W y = (y \cdot u_1) u_1 + \dots + (y \cdot u_p) u_p \qquad (*)$$

Si $U = [u_1, \dots, u_p]$ entonces

$$\text{proy}_W y = UU^T y \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \qquad (\Delta)$$

Demostración $(*)$ es consecuencia inmediata de (2). $(*)$ muestra también que $\text{proy}_W y$ es una combinación lineal de las columnas de U usando los pesos $y \cdot u_1, \dots, y \cdot u_p$. Los pesos se pueden escribir como $u_1^T y, \dots, u_p^T y$, mostrando que son las entradas de $U^T y$ y justificando (Δ).

§4 El Proceso Gram-Schmidt

Nota 2 El Proceso Gram-Schmidt es un algoritmo sencillo para producir una base ortogonal u ortonormal para cualquier subespacio diferente de cero de $\mathbb{R}^n$. Primero veámoslo en un par de ejemplos.

Ejemplo 6 Sea $W = \text{Gen}\{x_1, x_2\}$ con $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Construyamos una base ortogonal $\{v_1, v_2\}$ para W. Sea p la proyección de x_2 sobre x_1. La componente de x_2 ortogonal a x_1 es $x_2 - p$, la cual está en W pues se forma a partir de x_2 y un múltiplo de x_1. Sea $v_1 = x_1$ y

$$v_2 = x_2 - p = x_2 - \frac{x_2 \cdot x_1}{x_1 \cdot x_1} x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{15}{45} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ENTONCES $\left\{\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ ES UN CONJUNTO ORTOGONAL DE VECTORES DIFERENTES DE CERO DE W. COMO $\dim W = 2$, $\{v_1, v_2\}$ ES UNA BASE DE W.

Ejemplo 7 SEAN $x_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$. ES CLARO QUE $\{x_1, x_2, x_3\}$ ES l.i. Y POR LO TANTO ES UNA BASE PARA UN SUBESPACIO W DE $\mathbb{R}^4$. QUEREMOS HALLAR UNA BASE ORTOGONAL DE W.

Paso 1 SEAN $v_1 = x_1$ Y $W_1 = \text{Gen}\{x_1\} = \text{Gen}\{v_1\}$

Paso 2 SEA v_2 EL VECTOR PRODUCIDO AL RESTAR DE x_2 SU PROYECCIÓN SOBRE EL SUBESPACIO W_1.

ESTO ES,
$$\begin{aligned} v_2 &= x_2 - \text{proy}_{W_1} x_2 \\ &= x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 \\ &= \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/4\\1/4\\1/4\\1/4\end{pmatrix} \end{aligned}$$

v_2 ES LA COMPONENTE DE x_2 ORTOGONAL A x_1, Y $\{v_1, v_2\}$ ES UNA BASE ORTOGONAL PARA EL SUBESPACIO W_2 GENERADO POR x_1 Y x_2

SE PUEDE ESCALAR A v_2 AHORA PARA SIMPLIFICAR LOS CÁLCULOS POSTERIORES. POR EJEMPLO, TOMAMOS
$$v_2' = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Paso 3 SEA v_3 EL VECTOR PRODUCIDO AL RESTAR DE x_3 SU PROYECCIÓN SOBRE EL SUBESPACIO W_2. UTILIZAMOS LA BASE $\{v_1, v_2'\}$ PARA CALCULAR LA PROYECCIÓN SOBRE W_2.

$$\operatorname{proy}_{W_2} x_3 = \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{x_3 \cdot v_2'}{v_2' \cdot v_2'} v_2'$$
$$= \frac{2}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{12}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$$

ENTONCES v_3 ES LA COMPONENTE DE x_3 ORTOGONAL A W_2

$$v_3 = x_3 - \operatorname{proy}_{W_2} x_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$$

$v_3 \in W$ PUES TANTO x_3 COMO $\operatorname{proy}_{W_2} x_3$ ESTÁN EN W.
ENTONCES $\{v_1, v_2', v_3\}$ ES UN CONJUNTO ORTOGONAL DE VECTORES DISTINTOS DE CERO, Y POR LO TANTO UN CONJUNTO l.i. DE W. COMO $\dim W = 3$, PUES FUE DEFINIDO CON UNA BASE DE TRES VECTORES, $\{v_1, v_2', v_3\}$ ES UNA BASE ORTOGONAL DE W.

Teorema 11 EL PROCESO GRAM-SCHMIDT

DADA UNA BASE $\{x_1, \dots, x_p\}$ PARA UN SUBESPACIO W DE $\mathbb{R}^n$, DEFINA

$$v_1 = x_1$$
$$v_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1$$
$$v_3 = x_3 - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2$$
$$\vdots$$
$$v_p = x_p - \frac{x_p \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \dots - \frac{x_p \cdot v_{p-1}}{v_{p-1} \cdot v_{p-1}} v_{p-1}$$

ENTONCES $\{v_1, \dots, v_p\}$ ES UNA BASE ORTOGONAL DE W.
ADEMÁS $\operatorname{Gen}\{v_1, \dots v_p\} = \operatorname{Gen}\{x_1, \dots x_p\}$ PARA $1 \leq k \leq p$

Demostración Para $i \leq k \leq p$, sea $W_k = \text{Gen}\{x_1, \dots x_k\}$

Haga $v_1 = x_1$, de manera que $\text{Gen}\{v_1\} = \text{Gen}\{x_1\}$.

Suponga que para alguna $k < p$ se ha construido $v_1, \dots v_k$ tal que $\{v_1, \dots v_k\}$ es una base ortogonal para W_k. Se define

$$v_{k+1} = x_{k+1} - \text{proy}_{W_k} x_{k+1}$$

De acuerdo con el Teorema 8, v_{k+1} es ortogonal a W_k

Observemos que $\text{proy}_{W_k} x_{k+1}$ está en W_k, y por lo tanto también está en W_{k+1}. Puesto que x_{k+1} está en W_{k+1}, también lo está v_{k+1} (pues W_{k+1} es un subespacio y es cerrado bajo la resta). Mas aún, $v_{k+1} \neq 0$ porque x_{k+1} no está en $W_k = \text{Gen}\{x_1, \dots x_k\}$. De aquí que $\{v_1, \dots v_{k+1}\}$ sea un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero en el espacio $(k+1)$-dimensional W_{k+1}, y así es una base ortogonal para W_{k+1}. Por lo tanto $W_{k+1} = \text{Gen}\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$. Cuando $k+1 = p$, el proceso se detiene.

§5 Espacios con Producto Interno

Definición 10 Un producto interno dentro de un espacio vectorial V es una función que asocia a cada par de vectores u y v en V un número real $\langle u, v \rangle$, y satisface los siguientes axiomas para todos u, v, w en V y para todo escalar c:

1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

2) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

3) $\langle cu, v\rangle = c\langle u, v\rangle$

4) $\langle u, u\rangle \geq 0$ Y $\langle u, u\rangle = 0$ SI Y SOLO SI $u = 0$

UN ESPACIO VECTORIAL CON UN PRODUCTO INTERNO SE LLAMA ESPACIO CON PRODUCTO INTERNO.

Ejemplo 8 FIJEMOS DOS NÚMEROS POSITIVOS CUALESQUIERA – POR EJEMPLO, 4 Y 5 – Y PARA LOS VECTORES $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, SEA

$$\langle u, v\rangle = 4u_1 v_1 + 5u_2 v_2$$

ESTO DEFINE UN PRODUCTO INTERNO EN $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 9 SEAN $t_0, \ldots, t_n$ NÚMEROS REALES DISTINTOS. SEA V EL ESPACIO VECTORIAL DE TODOS LOS POLINOMIOS DE GRADO MENOR O IGUAL A n. SEAN $p, q \in V$.

DEFINIMOS

$$\langle p, q\rangle = p(t_0)q(t_0) + \cdots + p(t_n)q(t_n) \qquad (*)$$

LOS AXIOMAS 1), 2) Y 3) SE COMPRUEBAN FACILMENTE.

PARA 4) OBSERVEMOS QUE

$$\langle p, p\rangle = p^2(t_0) + \cdots + p^2(t_n) \geq 0$$

TAMBIÉN $\langle 0, 0\rangle = 0$.

SI $\langle p, p\rangle = 0$ ENTONCES p DEBE ANULARSE EN $n+1$ PUNTOS, Y ESTO ES SÓLO POSIBLE SI $p = 0$, PUES gr p ES MENOR QUE $n+1$. ENTONCES $(*)$ ES UN PRODUCTO INTERNO EN V.

Definición 11 SEA V UN ESPACIO CON PRODUCTO INTERNO $\langle u, v\rangle$. LA LONGITUD O NORMA DE UN VECTOR v SE

DEFINE COMO EL ESCALAR

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

DE MANERA EQUIVALENTE, $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$.

Definición 12 UN VECTOR UNITARIO ES AQUEL CUYA LONGITUD MIDE 1.

Definición 13 LA DISTANCIA ENTRE u Y v ES $\|u - v\|$.

Definición 14 LOS VECTORES u Y v SON ORTOGONALES SI $\langle u, v\rangle = 0$.

Ejemplo 10 SEA V EL ESPACIO VECTORIAL DE TODOS LOS POLINOMIOS DE GRADO MENOR O IGUAL A 4, DOTADO DEL PRODUCTO INTERNO DEFINIDO EN EL Ejemplo 9, QUE IMPLICA LA EVALUACIÓN DE POLINOMIOS EN $-2, -1, 0, 1$ Y 2.
TOMEMOS AL ESPACIO W DE TODOS LOS POLINOMIOS DE GRADO MENOR O IGUAL A 2 COMO SUBESPACIO DE V.
VAMOS A PRODUCIR UNA BASE ORTOGONAL PARA W APLICANDO EL PROCESO GRAM-SCHMIDT A LOS POLINOMIOS $1, t, t^2$.
ENLISTEMOS PRIMERO LOS VALORES DE CADA POLINOMIO COMO UN VECTOR DE $\mathbb{R}^5$ BAJO EL NOMBRE DEL POLINOMIO:

$$\begin{array}{cccc}
\text{polinomio} & 1 & t & t^2 \\
\text{vector de valores} & \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\\2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4\\1\\0\\1\\4\end{pmatrix}
\end{array}$$

OBSERVEMOS QUE t ES ORTOGONAL A 1, ASÍ QUE TOMAMOS $p_0(t) = 1$ Y $p_1(t) = t$. PARA p_2 USAMOS ESTOS VECTORES PARA CALCULAR LA PROYECCIÓN DE t^2 SOBRE $\text{Gen}\{p_0, p_1\}$.

$\langle t^2, p_0 \rangle = \langle t^2, 1 \rangle = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10$

$\langle p_0, p_0 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = 5$

$\langle t^2, p_1 \rangle = \langle t^2, t \rangle = -8 - 1 + 0 + 1 + 8 = 0$

LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE t^2 SOBRE $\mathrm{Gen}\{1, t\}$ ES

$$\frac{10}{5} p_0 + 0\, p_1 = 2 p_0$$

ASÍ QUE $p_2(t) = t^2 - 2 p_0(t) = t^2 - 2$

UNA BASE ORTOGONAL PARA EL SUBESPACIO W DE V ES

$$\begin{array}{ccc} p_0 & p_1 & p_2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Teorema 12 DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

PARA TODOS $u, v \in V$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$

Demostración SI $u = 0$, ENTONCES AMBOS LADOS DE LA INECUACIÓN SON CERO Y POR LO TANTO VALE.

SI $u \neq 0$, SEA W EL SUBESPACIO GENERADO POR u.

ENTONCES

$$\|\mathrm{proy}_W v\| = \left\| \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u \right\| = \frac{|\langle v, u \rangle|}{|\langle u, u \rangle|} \|u\| =$$

$$= \frac{|\langle v, u \rangle|}{\|u\|^2} \|u\| = \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\|}$$

PUESTO QUE $\|\mathrm{proy}_W v\| \leq \|v\|$, SE TIENE QUE

$\dfrac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\|} \leq \|v\|$ DE DONDE SURGE EL ENUNCIADO.

Teorema 13 DESIGUALDAD TRIANGULAR

PARA TODOS $u, v \in V$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Demostración $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u,u \rangle + 2\langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle$

$$\leq \|u\|^2 + 2|\langle u,v \rangle| + \|v\|^2 \leq$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$$

Ejemplo 11 CONSIDEREMOS AL ESPACIO VECTORIAL $C[a,b]$ DE TODAS LAS FUNCIONES CONTINUAS DEFINIDAS EN UN INTERVALO $[a,b]$. PARA $f, g \in C[a,b]$ DEFINIMOS

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

ESTE ES UN PRODUCTO INTERNO EN $C[a,b]$