Analizar el siguiente proceso estocástico:

Una fuente radioactiva emite partículas α y sea

X_t: *número de partículas emitidas durante un período especificado de tiempo [0,t).*

El interés se centra en determinar la distribución de probabilidad de X_t

Sea $p_n(t)=P[X_t=n]$

X_t: $0,1,2,........;\ \ n=0,1,2....$

Cinco hipótesis fundamentales

- A_1: el número de partículas emitidas durante intervalos de tiempo no sobrepuestos son variables aleatorias *independientes*
- A_2: si X_t se define como antes y si Y_t es el número de partículas emitidas $[t_1, t_1+t)$ para cualquier $t_1>0$, las variables aleatorias X_t y Y_t tienen la misma distribución de probabilidad. Es decir, la distribución del número de partículas emitidas durante cualquier intervalo depende sólo de la longitud del intervalo y no de los puntos extremos

…continuamos con las hipótesis

- A_3: $p_1(\Delta t)$ es aproximadamente igual a $\lambda\Delta t$, si Δt *es suficientemente pequeño,* donde λ es una constante positiva. Esto se escribe:

$$p_1(\Delta t) \sim \lambda\Delta t.$$

Esta hipótesis expresa que si el intervalo es suficientemente pequeño, la probabilidad de obtener exactamente una emisión durante ese intervalo es directamente proporcional a la longitud del intervalo.

...continuamos con las hipótesis

- A_4: $\sum_{k=2}^{\infty} p_k(\Delta t) \approx 0$ esto implica que $p_k(\Delta t) \to 0, \quad k \geq 2$

  Esto significa que la probabilidad de obtener dos o más emisiones en un intervalo suficientemente pequeño es despreciable.

- A_5:

  $X_o=0$, o equivalentemente, $p_o(0)=1$.

  Esto equivale a una condición inicial para el modelo

Conclusiones de las hipótesis

- Las hipótesis A_1 y A_2 juntas implican que la variable aleatoria $X_{\Delta t}$ y $[X_{t+\Delta t} - X_t]$ son variables aleatorias independientes con la misma distribución de probabilidad.
- De las hipótesis A_3 y A_4 se puede concluir que:

$$p_0(\Delta t) = 1 - p_1(\Delta t) - \sum_{k=2}^{\infty} p_k(\Delta t) \approx 1 - \lambda \Delta t \qquad [1]$$

Conclusiones (cont.)

$$
\begin{aligned}
p_0(t+\Delta t) &= P\left[X_{t+\Delta t}=0\right] \\
&= P\left[X_t = 0 \quad y \quad \left(X_{t+\Delta t} - X_t\right) = 0\right] \\
&= p_0(t)\, p_0(\Delta t) \\
&\approx p_0(t)\left[1-\lambda\Delta t\right] \quad por \quad [1]
\end{aligned}
$$

$$\frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} \approx -\lambda p_0(t)$$

haciendo $\Delta t \to 0$, se observa que el lado izquierdo es el cociente incremental de la función p_0 , por lo tanto tiende a derivada por derecha (p_0') porque $\Delta t > 0$

$$p_0' = -\lambda p_0(t)$$ o equivalentemente $$\frac{p_0'}{p_0(t)} = -\lambda$$

Integrando en ambos miembros con respecto a t,

$\ln p_0(t) = -\lambda t + C,$ C : constante de integración

De A_5 al hacer $t=0$, $C=0$. Luego:

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Así queda la expresión para $P[X_t = 0]$

Ahora determinar $p_n(t)$ $n \geq 1$

$$p_n(t+\Delta t) = P\left[X_{t+\Delta t} = n\right]$$

Ahora $X_{t+\Delta t} = n$ sí y solo sí $X_t = x$ y $\left[X_{t+\Delta t} - X_t\right] = n - x,$ $x = 0,1,2......n$

✓Utilizando hipótesis A_1 y A_2

$$p_n(t+\Delta t) = \sum_{x=0}^{n} p_x(t)\, p_{n-x}(\Delta t)$$

$$= \sum_{x=0}^{n-2} p_x(t) p_{n-x}(\Delta t) + p_{n-1}(t)\, p_1(\Delta t) + p_n(t)\, p_0(\Delta t)$$

- ✓ Utilizando A_3 y A_4

$$p_n(t+\Delta t) \approx p_{n-1}(t)\lambda\Delta t + p_n(t)[1-\lambda\Delta t]$$

$$\frac{p_n(t+\Delta t)-p_n(t)}{\Delta t} \approx \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t)$$

Haciendo $\Delta t \to 0$

Cociente diferencial de la función p_n

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad n = 1,2,....[*]$$

- Se define $q_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)$

Entonces [*] se transforma en

$$q_n'(t) = \lambda q_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, ...$$

$$Dado\ que\ p_0(t) = e^{-\lambda t}, encontramos\ q_0(t) = 1$$

$$\left[q_n(0) = 0,\ para\ n > 0\right] recursivamente$$

$$q_1'(t) = \lambda, \qquad \therefore q_1(t) = \lambda t;$$

$$q_2'(t) = \lambda q_1(t) = \lambda^2 t \quad \therefore q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2}$$

Proceso Poisson

- En general:

$$q_n'(t) = \lambda q_{n-1}(t) \quad \therefore \quad q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Finalmente:

$$p_n(t) = {e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}\big/{n!} \qquad n = 0,1,2,\ldots\ldots$$

Formalización

Consideremos el espacio muestral Ω.

Sea $w \in \Omega$ y $t \geq 0$.

Definimos,

$N_t(w)$: variable aleatoria que cuenta el número de arribos en el intervalo $[0, t)$ para la realización w.

- ✓ Para w fijo, $t \rightarrow N_t(w)$ es una función seccionalmente constante cuyos saltos se producen en los instantes de los arribos.
- ✓ El número de arribos posibles en un lapso de tiempo $[0, t)$ es cualquier número natural.

Luego,

la familia $N = \{N_t, t \geq 0\}$ es un proceso de parámetro continuo $(t \geq 0)$ y

espacio de estados $E = N_0$ (discreto).

Hipótesis de trabajo

• En el instante inicial no se ha producido ningún arribo. Luego, $N_0(w) = 0$

• $t \rightarrow N_t(w)$ tiene sólo saltos de magnitud 1. No se considera la posibilidad de que se produzcan dos arribos en el mismo instante

(si asi fuera en la realidad se considera que el contador no tiene sensibilidad como para contabilizar ambos y cuenta sólo uno).

- El número de arribos en un intervalo acotado es finito con probabilidad 1.

- El número de arribos en un intervalo de la forma (s, s+t] es $N_{s+t} - N_s$.

Ese número es independiente de los arribos ocurridos antes del tiempo s y más aún, del instante de inicio del intervalo. Sólo depende de la longitud del intervalo.

Estas hipótesis permiten asegurar que todas las v.a. que conforman el proceso tienen distribución de Poisson con el mismo parámetro . Esto significa que:

Lema 1: $$P(N_t = 0) = e^{-\lambda t} \quad \forall\, t \geq 0$$

Lema 2: $$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} P(N_t \geq 2) = 0$$

Lema 3: $$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} P(N_t = 1) = \lambda$$

Lema 4: $$P(N_t = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \quad \forall\, k \in \mathrm{N}\, ; \forall t \geq 0$$

Lema 5: $$E(N_t) = \lambda t \quad y \quad V(N_t) = \lambda t$$

El parámetro puede interpretarse como:

Número promedio de eventos por unidad de tiempo.

Además puede probarse que $\forall k \in$ □ , $\forall t, s \geq 0$

$$P\left(N_{s+t} - N_s = k / N_u, u \leq s\right) = P\left(N_{s+t} - N_s = k\right) = \frac{e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^k}{k!}$$

$$E\left(N_{s+t} - N_s = k / N_u, u \leq s\right) = \lambda t$$

Si: $t_1 < t_2 < \ldots\ldots t_{n-1} < t_n$ entonces:

$$\left(N_{t_2} - N_{t_1}\right);\left(N_{t_3} - N_{t_2}\right);\ldots\ldots;\left(N_{t_n} - N_{t_{n-1}}\right)$$

!!son variables aleatorias independientes entre si!!

(ver ej 1.16 pag.76 Cinlar)

Sea N_t un proceso de Poisson con tasa λt.

- ✓ La función $t \to N_t$ es no decreciente, continua a derecha y da saltos de medida 1.
- ✓ Esos saltos los da en los instantes en que se producen arribos (aleatorios).

Si T_k representa el instante en que se produce el $k-ésimo$ arribo, entonces:

$$\left\{ T_k \ , k \in \mathbb{N} \right\}$$

- ✓ representa el proceso de los instantes de arribo y
- ✓ es un proceso estocástico con espacio de estados $\mathbb{R}^+$ (infinito no numerable) y observado en tiempos discretos $k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto:

- ✓ Si el tiempo $k-ésimo$ del arribo es mayor que s significa que en [0, s] ocurren menos de *k* arribos.
- ✓ Recíprocamente si en [0, s] ocurren menos de *k* arribos, el $k+1-ésimo$ arribo ocurrirá después del tiempo s.

$$T_k > s \Leftrightarrow N_s < k$$

- ✓ Si el tiempo que pasa entre el $k-$*ésimo* arribo y el siguiente es mayor que *s* significa que:

  entre el tiempo del $k-$*ésimo* arribo y ese tiempo más *s* no ocurre ningún arribo.

- ✓ Recíprocamente, si entre el instante de arribo T_k y el instante T_k+s no ocurre ningún arribo:

  el lapso de tiempo entre el $k-$*ésimo* arribo y el siguiente es mayor que *s*.

$$T_{k+1} - T_k > s \Leftrightarrow N_{T_k+s} - N_{T_k} = 0$$

$$P(T_k > s) = P(N_s < k) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^j}{j!}, \quad [1]$$

$$P(T_{k+1} - T_k > s) = P(N_{T_k+s} - N_{T_k} = 0) = e^{-\lambda s}. \quad [2]$$

$$P(T_{k+1} - T_k < s \mid T_1, ..., T_k) = 1 - e^{-\lambda s} \quad [3]$$

De [2] y [3]: el tiempo transcurrido entre dos arribos sucesivos es independiente de los arribos de los que se trate y de los instantes de los arribos precedentes.

Más aún, los tiempos inter-arribos son independientes e idénticamente distribuidos y todos tienen distribución exponencial.

Si T es v.a. exp(λ) entonces $E(T) = \frac{1}{\lambda}$

Pensar:

Si en promedio ocurren λ arribos por unidad de tiempo, el tiempo entre dos arribos debe ser en promedio 1/λ.

Específicamente:

$$E(T_{k+1} - T_k) = \frac{1}{\lambda}, \quad \forall k.$$

A partir de [1] o su equivalente:

$$P(T_k < s) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^j}{j!}, \quad s \in \mathbb{R}^+$$

se dice que T_k tiene distribución de *Erlang* de grado k (caso particular de la distribución Gamma).

Notar que:

$$T_k = T_1 + (T_2 - T_1) + ... + (T_k - T_{k-1}),$$

Es decir T_k puede escribirse como suma de k variables aleatorias iid. Luego:

$$E(T_k) = \frac{k}{\lambda}.$$

Se puede probar que:

Si $\{T_k, k \in N\}$ es un proceso de tiempos de arribo en un proceso $N = \{N_t, t \geq 0\}$ y

$$T_k = T_1 + (T_2 - T_1) + ... + (T_k - T_{k-1}),$$

son variables aleatorias iid con distribución exp(λ), entonces N es un proceso de Poisson de tasa λ.

(ver ej (2.12) pag.82 Cinlar)

Lema 7 *Si* $\{T_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *es un proceso de tiempos de arribo en un proceso* $N = \{N_t, t \geq 0\}$ *y* $T_1, (T_2 - T_1), ..., (T_k - T_{k-1})...$ *son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro* λ*, entonces* N *es un proceso de Poisson de tasa* λ*.*

Superposición de Procesos de Poisson

Sean $L = \{L_t : t \geq 0\}$ y $M = \{M_t : t \geq 0\}$

dos procesos de Poisson independientes con tasas λ y μ respectivamente.

Para cada $\omega \in \Omega$ y $t \geq 0$ sea

$$N_t(\omega) = L_t(\omega) + M_t(\omega)$$

Luego el proceso $N = \{N_t : t \geq 0\}$

es la *superposición* de los procesos L y M,

y resulta un proceso de Poisson de tasa $= \lambda + \mu$.

Descomposición de Procesos Poisson

Sea $\{N_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson con tasa λ.

Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ un proceso de Bernoulli independiente de N con probabilidad de éxito p y sea:

$$S_n = X_1 + ... + X_n$$

número de éxitos hasta la n-ésima etapa.

Suponer que se realizan tantas repeticiones del ensayo de Bernoulli como cantidad de arribos hubo en el intervalo [0, t] .

En ese caso, la variable aleatoria:

$$M_t = S_{N_t} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

cuenta el número de éxitos del proceso de Bernoulli en el intervalo [0, t]. Mientras que

$$L_t = N_t - M_t$$

cuenta el número de fracasos.

Definidos de esa manera, los procesos

$$M = \{M_t : t \geq 0\} \text{ y } L = \{L_t : t \geq 0\}$$

son procesos de Poisson con tasas p y (1 – p) respectivamente.

Procesos de Poisson Compuestos

Se originan cuando en las Hipótesis de Trabajo se permite que la función $t \rightarrow N_t(\omega)$ tenga saltos de tamaño aleatorio.

Más precisamente, un proceso $Z=\{Zt;\ t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson compuesto sii:

- la función $t \rightarrow Z_t(\omega)$ tiene sólo un número de saltos finito en cualquier intervalo acotado.

- para t y s ≥ 0, $Z_{t+s} - Z_t$ es independiente de la historia pasada y del t inicial (incrementos independientes y estacionarios).

Sean T_1, T_2, ... los tiempos de los saltos y
X_1, X_2, ... las magnitudes de los mismos.

Dado que el número de saltos en un intervalo (t, t + s] es independiente de la historia ocurrida en (0, t] e independiente del instante de comienzo del intervalo,

T_1, T_2, ... son los tiempos de arribos en un proceso de Poisson N en el que:

N_t es el número de instantes en que Z presenta saltos en (0, t] .

Las variables X_1,X_2,... (magnitudes de los saltos) son independientes de los tiempos de los saltos. Por eso podemos decir que:

Para casi todo ω , para todo t,

$$Z_t(w) = X_1(w) + X_2(w) + ... + X_{N_t(w)}(w)$$

Proposición

Z es un proceso de Poisson compuesto *sii*:

- ✓ sus tiempos de saltos constituyen los tiempos de arribo de un proceso de Poisson (el de arribos de los saltos) y
- ✓ las magnitudes de dichos saltos son:
  - variables aleatorias independientes entre sí,
  - independientes de los tiempos de saltos e
  - idénticamente distribuidas.

Supongamos que se da que sólo una llegada ocurre en el intervalo $[0, t]$ y sea,

X:tiempo entre llegadas de un cliente.

$N(x)$ es el número de eventos hasta el momento x , para $0<x<t$

$N(t)-N(x)$ es el incremento en el intervalo $(x,t]$, luego:

$$P(X \leq x)=x/t$$

Esto implica que:

dado que una llegada ocurre en el intervalo [0,t], luego el tiempo de llegada está uniformemente distribuido en el intervalo [0,t].

Es decir las llegadas ocurren al azar!

Entonces:

Si el número de llegadas en el intervalo [0,t] es k, luego el tiempo entre llegadas está distribuido independientemente y uniformemente en el intervalo