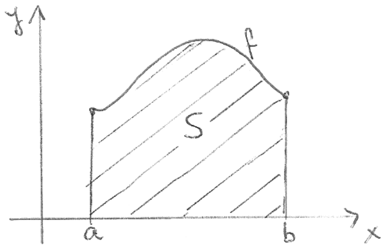
Unidad 2 – Cálculo Integral

20/3

El problema del área

Surgió

En principio, nuestro objetivo será, pues así históricamente el concepto de integral, calcular el área de S regiones del plano como la de la figura. Más precisamente, si f está definida en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$ sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.



Primero deberíamos preguntarnos cuál es el significado de la palabra "área". En cursos avanzados de Análisis Matemático, se da una defición axiomática de área.
Idea: El *área* es una función $\mathcal{A}$ que asigna a ciertas regiones del plano ("regiones medibles") un número real. Veamos algunas condiciones que debe verificar esta función para ser un área. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de regiones medibles (familia de subconjuntos del plano que conti~~n~~ene a los rectángulos):

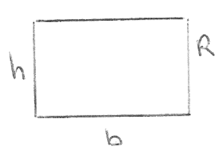
$$\mathcal{A} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_0^+$$

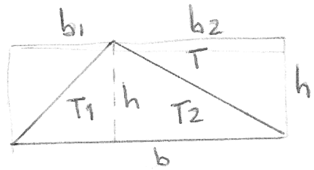
tal que:

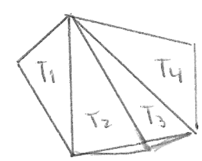
1) $\mathcal{A}(R) \geq 0\ \forall R \in \mathcal{M}$.
2) Si R es un rectángulo de base b y altura h, $\mathcal{A}(R) = bh$.
3) Si $R_1 \subseteq R_2$ entonces $\mathcal{A}(R_1) \leq \mathcal{A}(R_2)\quad \forall R_1, R_2 \in \mathcal{M}$.
4) $\forall R_1, R_2 \in \mathcal{M}$, $\mathcal{A}(R_1 \cup R_2) = \mathcal{A}(R_1) + \mathcal{A}(R_2) - \mathcal{A}(R_1 \cap R_2)$
5) Si R_1 es congruente con R_2 entonces $\mathcal{A}(R_1) = \mathcal{A}(R_2)$.

Para ciertas figuras ya conocemos la fórmula que permite calcular su área a partir de ciertos datos de éstas, por ejemplo:

$\mathcal{A}(R) = bh$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{A}(T) = \dfrac{bh}{2}$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(T_1) + \mathcal{A}(T_2) + \mathcal{A}(T_3) + \mathcal{A}(T_4)$



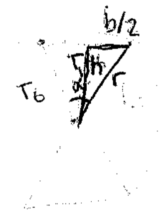




$$bh = (b_1 + b_2)\,h = b_1 h + b_2 h = 2\mathcal{A}(T_1) + 2\mathcal{A}(T_2)$$
$$= 2\mathcal{A}(T)$$

Para regiones más generales, que contengan lados curvos, la idea es aproximar su área a través de regiones poligonales.

Ejemplo: Área de C_r un círculo de radio r.



1º) Consideramos la sucesión de polígonos P_n, regulares, de n lados, inscriptos en C_r.

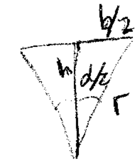
Y sean T_n los n triángulos cuya unión es P_n.

$\mathcal{A}(P_n) = n\mathcal{A}(T_n)$

Si $\alpha_n = \dfrac{2\pi}{n}$, $\sin\left(\dfrac{\alpha_n}{2}\right) = \dfrac{b_n/2}{r} \Rightarrow b_n = 2r\sin\left(\dfrac{\alpha_n}{2}\right)$

y $\cos\dfrac{\alpha_n}{2} = \dfrac{h_n}{r} \Rightarrow h_n = r\cos\left(\dfrac{\alpha_n}{2}\right)$.

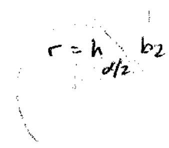
$6\,A(T_6) = A(P_6)$



Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(P_n) &= n\mathcal{A}(T_n) = n\frac{b_n h_n}{2} = n\frac{1}{2}2r\sin\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) r\cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) \\
&= nr^2\sin\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) = nr^2\frac{1}{2}\sin(\alpha_n) \\
&= \frac{1}{2}nr^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

2º) Consideramos ahora la sucesión de polígonos Q_n, regulares, de n lados, circunscriptos a C_r.



Y sean T_n los n triángulos cuya unión es Q_n.

$\mathcal{A}(Q_n) = n\mathcal{A}(T_n)$

Si $\alpha_n = \dfrac{2\pi}{n}$, $\tan\dfrac{\alpha_n}{2} = \dfrac{b_n/2}{h_n} \underset{h_n=r}{=} \dfrac{b_n}{2r} \Rightarrow$

$b_n = 2r\tan\dfrac{\alpha_n}{2}$ y $h_n = r$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(Q_n) &= n\mathcal{A}(T_n) = n\frac{b_n h_n}{2} = n\frac{1}{2}2r\tan\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) r \\
&= nr^2\tan\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) = nr^2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

Claramente, para cada n

$$\mathcal{A}(P_n) \leq \mathcal{A}(C_r) \leq \mathcal{A}(Q_n)$$

Además

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\mathcal{A}(P_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}nr^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\pi r^2\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\pi\frac{2}{n}}}_{\searrow 1} = \pi r^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\mathcal{A}(Q_n) &= \lim_{n\to\infty} nr^2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} nr^2\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi r^2}{\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}_{\searrow 1}}\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}}_{\searrow 1} = \pi r^2
\end{aligned}$$

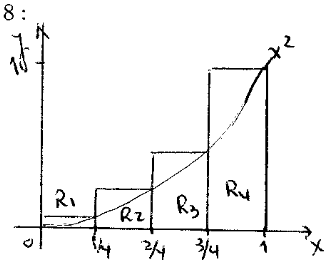
Luego (Teorema del sandwich) por principio de intercalación

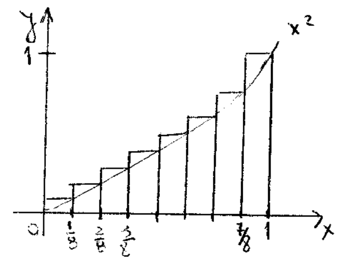
$$\boxed{\mathcal{A}(C_r) = \pi r^2}$$

Volvamos al problema original de calcular el área de la región

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Hagámoslo primero para el caso particular de $f(x) = x^2$ en $[a, b] = [0, 1]$, siendo $f(x) \geq 0$.
1°) Subdividimos el intervalo $[0, 1]$ en n subintervaloes de igual tamaño y calculemos la suma de las áreas de los rectángulos R_i, cuyas bases son las longitudes de los subintervalos $\frac{1}{n}$ y las alturas son los valores que asume f en los extremos derechos de cada subintervalo, por ejemplo, para $n = 4$ y $n = 8$:



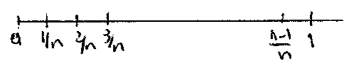


Tenemos

Si $n = 4$, $\sum_{i=1}^{4} \mathcal{A}(R_i) = \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{4}\left(\frac{i}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{4}\right)^2 = \frac{15}{32} \simeq 0.46875$

Si $n = 8$, $\sum_{i=1}^{8} \mathcal{A}(R_i) = \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{8}\left(\frac{i}{8}\right)^2 = \frac{51}{128} \simeq 0.398438$

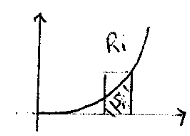
Si dividimos el intervalo $[0, 1]$ en n partes iguales tendremos que cada subintervalo es de la forma $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ para $i = 1, \ldots, n$ y



$$\mathcal{A}(R_i) = \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

Observemos que esta división del $[0, 1]$ divide a la región S en n subregiones S_i y que para cada $i = 1, \ldots, n$ es $S_i \subseteq R_i$ luego

$$\mathcal{A}(S_i) \leq \mathcal{A}(R_i) \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

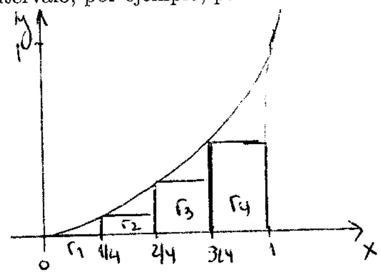


y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(S) &= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(S_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(R_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = U_n \end{aligned} \qquad (2)$$

Notaremos con U_n a dicha suma $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(R_i)$ y llamaremos *suma superior* de la función f asociada a la división del intervalo $[0, 1]$ en n partes iguales.

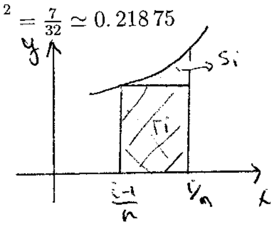
2°) Volvamos a hacer un trabajo similar al hecho en 1°) pero tomando rectángulos r_i, cuyas bases son las longitudes de los subintervalos $\frac{1}{n}$ y las alturas son los valores que asume f en los extremos izquierdos de cada subintervalo, por ejemplo, para $n = 4$:



Tenemos para $n = 4$ que $\sum_{i=1}^{4} \mathcal{A}(r_i) = \frac{1}{4}(0)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} \simeq 0.218\,75$

Para n cualquiera, cada $r_i \subseteq S_i$ para $i = 1, \ldots, n$ entonces

$$\mathcal{A}(r_i) \leq \mathcal{A}(S_i)$$



Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(r_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(S_i) = \mathcal{A}(S) \qquad (3)$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(r_i) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \\
& \qquad\qquad (2(n-1)+1) \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)\,n\,(2n-2+1)}{6} \\
&= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = L_n
\end{aligned}$$

Notaremos con L_n a dicha suma $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}(r_i)$ y la llamaremos *suma inferior* de la función f asociada a la subdivisión de $[0, 1]$ en n subintervalos iguales.

Por (2) y (3), tenemos entonces que

$$L_n \leq \mathcal{A}(S) \leq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Cada una de las sumas L_n y U_n es una aproximación del área de S que "mejora" a medida que aumenta n. Estimemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} U_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{1}{3} \\
\lim_{n\to\infty} L_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+1}{6n^2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Resulta natural decir que

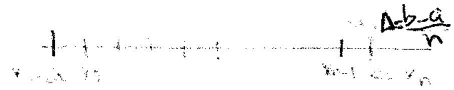
$$\mathcal{A}(S) = \frac{1}{3}$$

Pero, cabe preguntarse si para toda f será $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} L_n$? o siempre existirán dichos límites?

Suma superior e inferior de una funcioón continua.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Particionamos el $[a, b]$ en n puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

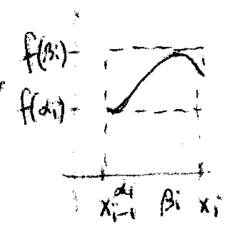


De manera tal que cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tenga (igual) longitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ para $i = 1, \ldots, n$.
Como f es continua (también, por serlo en $[a, b]$) en cada $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, \ldots, n$ por Teorema de Weierstrass existen $\alpha_i, \beta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ donde f asume el mínimo y el máximo respectivamente en dicho subintervalo es decir $\alpha_i, \beta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que

$$\begin{aligned} f(\alpha_i) &\leq f(x) \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \\ f(\beta_i) &\geq f(x) \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} U_n(f) &= \sum_{i=1}^{n} f(\beta_i) \Delta x_i \quad \text{suma superior de } f \\ L_n(f) &= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \Delta x_i \quad \text{suma inferior de } f \end{aligned}$$



Teorema: Si f es continua en $[a, b]$ entonces
i) existen $\lim_{n\to\infty} U_n$ y $\lim_{n\to\infty} L_n$
ii) $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} L_n$
Dem: no la hacemos.

Observación: Sea $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, cualquiera, para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene

$$f(\alpha_i) \leq f(c_i) \leq f(\beta_i) \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Luego

$$L_n(f) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i \leq U_n(f)$$

Si f es continua en $[a, b]$, por teorema anterior $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} L_n = I$ sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i = I$$

Definición: Sea f continua y no negativa en $[a, b]$ y sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ definimos

$$\mathcal{A}(S) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \frac{b-a}{n}$$

cualquiera sea $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, \ldots, n$ con $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$.

De ahora en más buscaremos obtener resultados que nos permitan un cálculo más sencillo que el procedimiento anterior.

La integral definida.

Las sumas que se obtuvieron en el ejemplo $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$ son ejemplos de una clase más general llamada sumas de Riemann.

Definición: Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de puntos de $[a, b]$ tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Decimos que es una *partición* de $[a, b]$.

Ejemplo: $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ es una partición de $[a, b]$ si $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$.

Definición: Llamamos $\mathcal{P}[a, b]$ al conjunto de todas las particiones posibles de $[a, b]$.

Una partición $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]$ divide al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, \ldots, n$ cuyas longitudes (no necesariamente iguales entre si) son

$$\Delta x_i = \text{long}([x_{i-1}, x_i]) = x_i - x_{i-1}$$

Definición: Si para una partición $\mathcal{P} \in$ $[a, b]$ se tiene que $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ $\forall i$, decimos que es *regular* (puede notarse $\mathcal{P}_n$), en ese caso

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n} \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

Definición: Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Llamamos a la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i \qquad \text{Suma de Riemann de } f \text{ en } [a,b] \text{ asociada a } \mathcal{P}$$

Observación: Para $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$, U_n y L_n son ejemplos de sumas de Riemann asociadas a la partición regular $\mathcal{P}_n$.

¿Les parece que funcionará todo lo hecho en otro ejemplo, si las particiones no fuesen regulares?

Definición: Llamamos *norma de la partición* $\mathcal{P}$, al número

$$\|\mathcal{P}\| = \text{máx}\{\ |\Delta x_i|\ :\ i = 1, \ldots, n\}\|$$

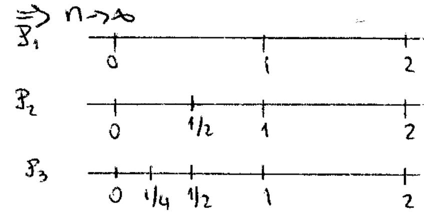
Notas:

1) Si $\mathcal{P}$ es regular $\|\mathcal{P}\| = \dfrac{b-a}{n}$. Por lo tanto

$$\|\mathcal{P}\| \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$$

2) Si $\mathcal{P}$ no es regular, lo anterior no es cierto, por ejemplo en $[a, b] = [0, 2]$ consideramos las particiones

Si $\|P\| \to 0 \Rightarrow n \to \infty$ pero $n \to \infty \not\Rightarrow \|P\| \to 0$



donde $\|\mathcal{P}_1\| = 1$ y $n = 2$; $\|\mathcal{P}_2\| = 1$ y $n = 3$; $\|\mathcal{P}_3\| = 1$ y $n = 4$ y así podemos agregar tantos puntos como quisiéramos, sin modificar la norma de la partición.

Definición: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a,b]$, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y sean $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, \ldots, n$. Decimos que $\lim\limits_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = I$ si y sólo si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $\|\mathcal{P}\| < \delta$ entonces $|\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - I| < \epsilon$ independientemente de la elección de los c_i.

Definición: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, decimos que f es integrable en $[a,b]$ si existe

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad \forall \mathcal{P} \quad \forall c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

y en este caso, llamamos a ese número *integral definida de* f *desde* a *hasta* b y lo notamos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Observación:

1) $\int_a^b f(x)dx$ se conoce también con el nombre de integral de Riemann. (1826-1866).

2) Nombres

símbolo integral $\int_a^b$ — función integrando $f(x)$ — variable de integrac dx — extremos de integrac a, b

3) Podemos poner:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f$$

queriendo significar lo mismo, pues $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número y no depende de x.

Extendemos la definición de integral definida para $a > b$ y $a = b$.

Definición:

Si $a > b$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Si $a = b$, $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Teorema: Si f es integrable en $[a,b]$ entonces

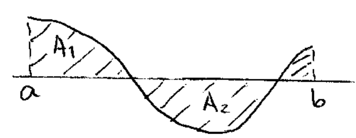
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \cancel{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)}$$

Dem: Si f es integrable en $[a,b]$, por definición, las sumas de Riemann tienden a $\int_a^b f$ para toda partición $\mathcal{P}$ tal que $\|\mathcal{P}\| \to 0$ y cualesquiera sean los puntos c_i elegidos en cada subintervalo. En particular, si tomamos $\mathcal{P}_n$ regular, será $\|\mathcal{P}\| = \dfrac{b-a}{n} = \Delta x_i\ \forall i$ y cuando $\|\mathcal{P}\| \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$. además, $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ para $i = 1, \ldots, n$ y podemos elegir $c_i = x_{i-1}$ o $c_i = x_i$. □

Nota: Relación de la integral definida con el área. No toda integral definida representa un área.

· Si $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$ y f es integrable entonces $\int_a^b f(x)dx = \mathcal{A}(S)$ donde $S = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

· Si no, por ejemplo



$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$, donde A_1 es el área de la región por debajo de la G_f y por encima del eje x, donde f es positiva y A_2 es el área de la región por debajo del eje x y por encima de la G_f, donde f es negativa.

Condiciones necesarias y suficientes de integrabilidad.

Teorema (Condiciones suficientes de integrabilidad): Si f es continua o mónotona en $[a,b]$ entonces es integrable.
Dem: no la hacemos.
Ejemplo: Calcular $\int_0^3 (x^2-5x)\,dx$. Sea $f(x) = x^2-5x$ es continua por tanto integrable. Por teorema anterior es

$$\begin{aligned}
\int_0^3 (x^2-5x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(i\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\left(i\frac{3}{n}\right)^2 - 5\left(i\frac{3}{n}\right)\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{45}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{27}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{45}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{2}\underbrace{\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}}_{\searrow 2} - \frac{45}{2}\underbrace{\frac{(n+1)}{n}}_{\searrow 1}\right) = 9 - \frac{45}{2} = -\frac{27}{2} \quad \text{no es un área!!}
\end{aligned}$$

Teorema (Condición necesaria de integrabilidad): Si f es integrable en $[a,b]$ entonces f es acotada en $[a,b]$. Es decir, existe $M>0$ tal que $\|f(x)| \leq M \ \forall x \in [a,b]$.
El teorema nos dice que si f no es acotada en $[a,b]$ no es integrable. Por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

no es integrable en $[0,1]$.
El recíproco del teorema anterior no es cierto. Es decir,

$$f \text{ acotada} \nRightarrow f \text{ integrable}$$

Por ejemplo: Función de Dirichlet $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable aunque acotada, en efecto, $U_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}1 = n\frac{1}{n} = 1$ y $L_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}0 = 0$ luego $\lim_{n\to\infty} U_n \neq \lim_{n\to\infty} L_n$ por lo tanto f no es integrable aunque acotada $|f(x)| \leq 1 \forall x$.

Propiedades de la integral definida.

Teorema: Sean f y g integrables en $[a,b]$. Entonces:

a) $\int_a^b c\,dx = c\,(b-a) \quad \forall c \in \mathbb{R}$.
b) $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ (linealidad)
c) $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \quad \forall c \in \mathbb{R}$ (homogeneidad)
d) $\int_a^b (f-g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
e) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ cualquiera sea c y siempre que exista $\int_a^c f$ o $\int_c^b f$

Dem: a) Como $f(x) = c$ es continua, es integrable en $[a,b]$, sea $\mathcal{P}_n$ una partición regular y $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\lim\limits_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} c\dfrac{b-a}{n} = c(b-a)$.

b) Sabemos que $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = I_1$ (1) y que $\int_a^b g(x)dx = \lim\limits_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} g(d_i)\,\Delta x_i = I_2$ (2).

Queremos ver que $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \lim\limits_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} (f(r_i)+g(r_i))\Delta x_i = I_1 + I_2$ (3) independientemente de la elección de los $r_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Sea $\varepsilon > 0$, consideremos $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Por (1) existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\|\mathcal{P}\| < \delta_1 \Rightarrow \left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - I_1\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, cualesquiera sean $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Por (2) existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\|\mathcal{P}\| < \delta_2 \Rightarrow \left|\sum\limits_{i=1}^{n} g(d_i)\,\Delta x_i - I_2\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, cualesquiera sean $d_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Tomando $\delta = \text{mín}\,(\delta_1, \delta_2)$ tenemos que si $\mathcal{P}$ es una partición tal que $\|\mathcal{P}\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} I_1 - \frac{\varepsilon}{2} &< \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i < I_1 + \frac{\varepsilon}{2} \\ I_2 - \frac{\varepsilon}{2} &< \sum_{i=1}^{n} g(d_i)\,\Delta x_i < I_2 + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

tomando $c_i = d_i = r_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y sumando miembro a miembro se tiene

$$I_1 + I_2 - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} (f(r_i) + g(r_i))\,\Delta x_i < I_1 + I_2 + \varepsilon$$

o sea

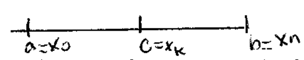
$$\left|\sum_{i=1}^{n} (f(r_i) + g(r_i))\,\Delta x_i - (I_1 + I_2)\right| < \varepsilon$$

y luego vale (3).

c) ejercicio de práctica

d) se deduce de b) y c), queda como ejercicio.

e) <u>1° caso</u>: $a < c < b$.



Sabemos que $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$. Sea $\mathcal{P} = \{x_0, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $x_k = c$. Llamamos $\mathcal{P}_1 = \{x_0, ..., x_k\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{x_k, ..., x_n\}$ que serán particiones de $[a,c]$ y de $[c,b]$ respectivamente y $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}$

Es claro que si $\|\mathcal{P}\| \to 0$ también $\|\mathcal{P}_1\| \to 0$ y $\|\mathcal{P}_2\| \to 0$.

Renombremos los puntos de $\mathcal{P}_2 = \{t_0, ..., t_m\}$, $m = n - k$, $t_0 = x_k = c$, $t_m = x_{k+m} = x_n = b$.

Entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \left(\sum_{i=1}^{k} f(c_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i\right) \\ &= \overbrace{\lim_{\|\mathcal{P}_1\|\to 0} \sum_{i=1}^{k} f(c_i)\,\Delta x_i}^{L_1} + \overbrace{\lim_{\|\mathcal{P}_2\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} f(c_i')\,\Delta t_i}^{L_2} \end{aligned}$$

con $c_i' \in [t_{i-1}, t_i]$. Si existe alguno de los límites L_1 o L_2 entonces existe el otro y vale

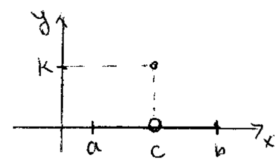
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

<u>2º caso</u>: $c < a < b$. Por 1º caso,

$$\int_c^b f = \int_c^a f + \int_a^b f \Rightarrow \int_a^b f = -\int_c^a f + \int_c^b f \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

<u>3º caso</u>: $a < b < c$ Se demuestra de manera análoga al 2º. □

Ejemplos:
1) Sea f definida en $[a, b]$ por



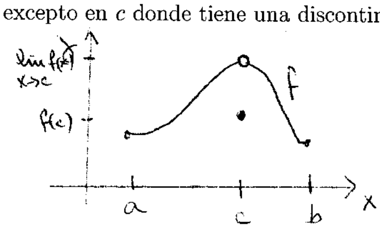
$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } x = c \\ 0 & \text{si } x \neq c \end{cases}$$

para $c \in [a, b]$. Probar que $\int_a^b f = 0$. Para toda $\mathcal{P}$ se tiene que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \leq 1 \underbrace{\Delta x_k}_{\text{donde está } c} \leq \|\mathcal{P}\|$$

Luego si $\|\mathcal{P}\| \to 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \to 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = 0$

2) Sea f continua en $[a, b]$ excepto en c donde tiene una discontinuidad evitable.



Entonces podemos definir g continua en $[a, b]$ y por tanto integrable,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq c \\ \lim\limits_{x \to c} f(x) & \text{si } x = c \end{cases}$$

entonces

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq c \\ f(c) - \lim\limits_{x \to c} f(x) & \text{si } x = c \end{cases}$$

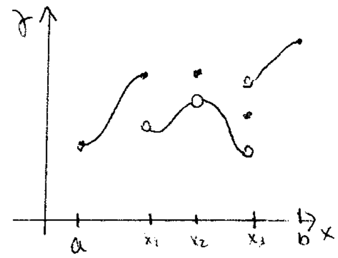
Luego por 1) resulta $f - g$ integrable y $\int_a^b (f - g) = 0$, además por prop b) y teniendo en cuenta que $f = (f - g) + g$ resulta f integrable y

$$\int_a^b f = \int_a^b (f - g) + \int_a^b g = \int_a^b g$$

3) Repitiendo este razonamiento, se puede probar que si f tiene un número finito de discontinuidades evitables, f es integrable.

Definición: Se dice que f es *seccionalmente continua* en $[a, b]$, si f tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, del tipo evitable o del tipo salto finito. Es decir, existe una partición $\mathcal{P}$ de

$[a, b]$ tal que f es continua en cada subintervalo abierto de $\mathcal{P}$ y existen los límites laterales para cada uno de los extremos de los subintervalos.



Teorema (Condición suficiente de integrabilidad): Si f es seccionalmente continua en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$. Además

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt$$

Siendo $\{x_1, \dots x_n\}$ los ptos discont. de f en $[a,b]$

Propiedades de orden de la integral definida.

Teorema: Sean f, g integrables en $[a, b]$. Entonces

a) si $f(x) \geq 0$ en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

b) si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

c) si $m \leq f(x) \leq M$ en $[a, b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

d) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

Dem: a) f integrable entonces $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i$ $\forall c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Pero $f(c_i) \geq 0$, $\Delta x_i \geq 0$ $\forall i$ luego $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i \geq 0$ para toda partición y por tanto $\lim\limits_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

b) Sea $h(x) = f(x) - g(x)$, como f y g son integrables es h integrable y $h(x) \geq 0$ luego por a) $0 \leq \int_a^b h = \int_a^b f - \int_a^b g$.

c) ejercicio práctica.

d) Sabemos que $-|f| \leq f \leq |f|$ luego por b) es $-\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$
por lo tanto $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$ □

Definición: Sea f integrable en $[a, b]$, se define el valor promedio (o valor medio) de f en $[a, b]$ al número

$$VP(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Nos preguntamos, existe algún $\xi \in [a, b]$ para el cual $f(\xi)$ sea el $VP(f)$?

Teorema del Valor Medio para el cálculo integral: Sea f continua en $[a, b]$. Entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = VP(f)$. Es decir,

$$f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

Dem: ejercicio de práctica.