FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Licenciatura y Profesorado en Matemática
Licenciatura en Ciencias de la Computación

ÁLGEBRA LINEAL - 2013

PRÁCTICA Nº 1: Eliminación Gaussiana. Factorización LU *(primera parte)*

1. *a*) Resuelva los siguientes sistemas utilizando eliminación gaussiana.

   b) Identifique las matrices de eliminación y/o permutación utilizadas en cada caso.

   I) $\begin{cases} x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$

   II) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -8 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

   III) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

2. Encuentre la operación elemental de fila que transforma a la primer matriz en la segunda de cada item siguiente. Además determine cuál es la operación elemental de fila que transforma a la segunda en la primera.

   a) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) La primera fila de AB es una combinación lineal de todas las filas de B. ¿Cuáles son los escalares de esta combinación, y cuál es la primera fila de AB? ¿Cuál es la segunda fila?

b) La primera columna de AB es una combinación lineal de todas las columnas de A. ¿Cuáles son los escalares de esta combinación, y cuál es la primera columna de AB? ¿Cuál es segunda columna?

4. Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justificar y mostrar un contraejemplo en el caso de que sea FALSO.

   a) Si la primera y la tercera columna de B son iguales, también lo son la primera y la tercera columna de AB.
   b) Si la primera y la tercera fila de B son iguales, también los son la primera y la tercera fila de AB.
   c) Si la primera y la tercera fila de A son iguales, también lo son la primera y la tercera fila de AB.
   d) $(AB)^2 = A^2B^2$.

5. Encontrar ejemplos de matrices de orden 2 por 2 tales que:

   a) $A^2 = -I$, donde A tenga sólo entradas reales;
   b) $B^2 = 0$, aunque $B \neq 0$;
   c) $CD = -DC$, dejando de lado el caso $CD = 0$;
   d) $EF = 0$, aunque ninguna de las entradas de E o de F sea 0.

6. La matriz de rotación del plano $x - y$ por un ángulo θ es

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

   Recordando algunas identidades trigonométricas, verifique que $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2)$. ¿Qué matriz es $A(\theta)A(-\theta)$?

7. *a*) Sean A y B dos matrices triangulares inferiores. Muestre que el producto AB es una matriz triangular inferior, y que si A es invertible, A^{-1} también es triangular inferior.
   b) Sean A y B dos matrices triangulares superiores. Muestre que el producto AB es una matriz triangular superior, y que si A es invertible, A^{-1} también es triangular superior.
   c) Sean A y B dos matrices diagonales. Muestre que el producto AB es una matriz diagonal, y que si A es invertible, A^{-1} también es una matriz diagonal.

8. ¿Qué le sucede a una matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ si la premultiplicamos por

$$E_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

   ¿Qué sucede si postmultiplicamos A por E_{31} o E_{23}?

9. Exhiba la matriz M de orden 3×3 que produce los siguientes pasos de eliminación:

   a) M suma 5 veces la fila 1 a la fila 2.
   b) M suma -7 veces la fila 2 a la fila 3.
   c) M intercambia las filas 1 y 2, y luego la 2 y la 3.

10. *a*) Determine las matrices de $E_{2,1}$, $E_{3,1}$ y $E_{3,2}$ que llevan a la matriz A a su forma triangular U, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b) Calcule la matriz $E = E_{3,2}E_{3,1}E_{2,1}$ que realiza todos los pasos de la eliminación: $EA = U$.

11. Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   Factorizar A en LU y escribir el sistema triangular superior $Ux = c$ que se obtiene después de la eliminación gaussiana.

12. Encontrar la matriz inversa del producto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Sea el sistema de ecuaciones $Ax = b$ dado por:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & & & + & 2x_4 & = & 6 \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 8 \\ & & & & 6x_3 & + & 5x_4 & = & -4 \end{array} \right.$$

   a) Factorizar A en LU y resolver el sistema anterior.

   b) Resolver el sistema $Ax = b'$, con $b' = (6, 2, 10, 2)^T$.

   c) Resolver el sistema $Ax = b''$, con $b'' = (5, 0, 2, 0)^T$.