Álgebra Lineal - LM - PM - LCC 2017

Práctica 3: TRANSFORMACIONES LINEALES. CONTINUACIÓN

1. Sea V el espacio vectorial de los números complejos y $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales. Con las operaciones usuales, V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Describir explícitamente un isomorfismo de este espacio con $\mathbb{R}^2$.

2. Una matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ con entradas en $\mathbb{C}$ tal que $A = \overline{A}^t$, i.e. $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, para todos $i, j = 1, \cdots, n$ se dice *Hermitiana*.
   Sea W el conjunto de todas las matrices Hermitianas 2×2.
   $i)$ Verificar que W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
   $ii)$ Verificar que la aplicación
   $$(x, y, z, t) \mapsto \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$
   es un isomorfismo de $\mathbb{R}^4$ en W.

3. Mostrar que $\mathbb{K}^{m\times n}$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{mn}$.

4. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Probar que V y W son isomorfos si y sólo si $\dim V = \dim W$.

5. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por
   $$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$
   $i)$ Si $\mathcal{B}$ es la base ordenada estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}'$ es la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^2$, determinar la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
   $ii)$ Si $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(0, 1), (1, 0)\}$ ¿Cuál es la matriz de T relativa a al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

6. Sea T un operador lineal sobre $\mathbb{K}^n$ y sea A la matriz de T relativa a la base estándar de $\mathbb{K}^n$. Sea W el subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por los vectores columnas de A. ¿Qué relación existe entre W y T?

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{K}$ y sean S y T operadores lineales sobre V. Probar que existen dos bases ordenadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ en V tales que $[S]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}'}$ si y sólo si existe un operador lineal inversible U sobre V tal que $T = USU^{-1}$.

8. En $\mathbb{R}^3$, sean $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$ y $v_3 = (-1, -1, 0)$.
   $i)$ Si f es un funcional lineal sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1) = 1$, $f(v_2) = -1$ y $f(v_3) = 3$ y si $v = (a, b, c)$, hallar $f(v)$.
   $ii)$ Describir explícitamente un funcional lineal f sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1 = f(v_2) = 0$ pero $f(v_3) \neq 0$.
   $iii)$ Sea f cualquier funcional lineal tal que $f(v_1) = f(v_2) = 0$ pero $f(v_3) \neq 0$. Si $v = (2, 3, -1)$, muestre que $f(v) \neq 0$.

9. Sea $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ una base de $\mathbb{C}^3$. Hallar la base dual de $\mathcal{B}$.

10. Sean $v_1 = (1, 0, -1, 2)$ y $v_2 = (2, 3, 1, 1)$ y sea $W =< \{v_1, v_2\} >$. ¿Qué funcionales lineales de la forma $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ están en el anulador de W?.

11. Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y sean
    $$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
    Sea W el subespacio de V que consiste de todas las matrices A tales que $AB = 0$. Sea f, un funcional lineal sobre V que está en el anulador de W. Supongamos que $f(I) = 0$ (I matriz identidad) y $f(C) = 3$. Hallar $f(B)$.

12. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.
    $i)$ Probar que $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.
    $ii)$ Probar que $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

13. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio de V. Si f es un funcional lineal sobre W, pruebe que existe un funcional lineal g sobre V tal que $g(v) = f(v), \forall v \in W$.

14. Sea $v \in V$ espacio vectorial, entonces v induce un funcional lineal L_v en V^* definido por

$$\begin{array}{rccc} L_v : & V^* & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & L_v(f) = f(v) \end{array}$$

a) Mostrar que L_v es lineal.

b) Probar que si V es de dimensión finita y $v \neq 0$, entonces existe un funcional lineal f tal que $f(v) \neq 0$.

c) Probar que si V es de dimensión finita, la aplicación $v \mapsto L_v$ es un isomorfismo de V en V^{**}. V^{**} se conoce como el *doble dual de* V.

d) Probar que si L es un funcional lineal sobre el espacio dual V^* del espacio vectorial V de dimensión finita, entonces existe un único vector $v \in V$ tal que $L(f) = f(v)$ para todo $f \in V^*$.

e) Mostrar que en un espacio vectorial V de dimensión finita, toda base de V^* es la dual de alguna base de V.