Modelado y Simulación de Sistemas Dinámicos

Ecuaciones Diferenciales Algebraicas

Ernesto Kofman

FCEIA - Universidad Nacional de Rosario.
CIFASIS – CONICET. Argentina

Organización de la Presentación

Organización de la Presentación

Introducción

- En muchas ramas de la ciencia y de la técnica se trabaja con Modelos de Sistemas Dinámicos.
- Estos modelos buscan representar las leyes que rigen la evolución en el tiempo de ciertas variables.
- Cuando las variables cambian de forma continua en el tiempo, los modelos se describen mediante Sistemas de Ecuaciones Diferenciales.
- Bajo ciertas condiciones, dichos modelos resultan en sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODEs).

El problema que nos ocupa es como obtener un sistema de ODEs a partir de las distintas ecuaciones que aparecen en un modelo.

Organización de la Presentación

Modelos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Los sistemas de ODEs que nos interesa obtener son los correspondientes a las Ecuaciones de Estado:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t) \\
\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t) \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

donde t representa el tiempo y $x_i(t)$ son las variables de estado.

La representación de las ODEs en la forma de la Ecuación (1) permite tanto simular el sistema mediante métodos de integración numérica como realizar análisis de propiedades y eventualmente diseñar sistemas de control.

Organización de la Presentación

Ejemplo Introductorio

La Figura 3 muestra el esquema de un circuito RLC serie, y a la derecha listamos las distintas ecuaciones involucradas.

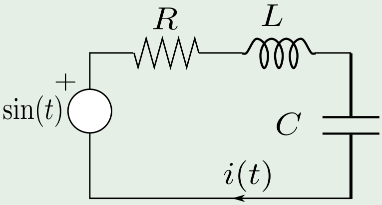


Figura 1: Circuito RLC Serie

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0 \tag{2a}$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) - i_C(t) = 0 \tag{2b}$$
$$q(t) - C\ u_C(t) = 0 \tag{2c}$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) - u_L(t) = 0 \tag{2d}$$
$$\phi(t) - L\ i_L(t) = 0 \tag{2e}$$
$$u_S(t) - \sin(t) = 0 \tag{2f}$$
$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0 \tag{2g}$$
$$i_L(t) - i_R(t) = 0 \tag{2h}$$
$$i_C(t) - i_L(t) = 0 \tag{2i}$$
$$i_S(t) - i_R(t) = 0 \tag{2j}$$

Ecuaciones Diferenciales Algebraicas

- Como vemos, las ecuaciones del modelo dado en (2) no tienen la forma de la ODE de la Ec.(1).
- Esto es algo habitual al construir un modelo, ya que lo que se conoce a priori son las ecuaciones de los componentes y las ecuaciones de la estructura.
- Estas ecuaciones constitutivas y estructurales constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas (DAE) en lugar de una ODE.

En el caso general, una DAE tendrá la forma

$$\mathrm{F}(\dot{\mathrm{x}}(t), \mathrm{x}(t), \mathrm{a}(t), t) = 0$$

donde $\mathrm{x}(t)$ es el vector de estados y $\mathrm{a}(t)$ es el vector de variables algebraicas.

Simulación de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas

En algunos casos, es posible reescribir las DAEs como

$$0 = g(\mathrm{x}(t), \mathrm{a}(t), t) \tag{3}$$
$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{f}(\mathrm{x}(t), \mathrm{a}(t), t) \tag{4}$$

y resolviendo (3) en cada paso para obtener $\mathrm{a}(t)$ se puede utilizar cualquier método de integración numérica para ODEs. Por ejemplo, se podría usar Forward Euler como sigue:

$$\mathrm{a}(t_k) = \mathrm{solve}[g(\mathrm{x}(t_k), \mathrm{a}(t_k), t_k) = 0]$$
$$\mathrm{x}(t_{k+1}) = \mathrm{x}(t_k) + h \cdot \mathrm{f}(\mathrm{x}(t_k), \mathrm{a}(t_k), t_k)$$

Esto puede tener un costo computacional alto cuando la dimensión de $\mathrm{a}(t)$ es alta.

Simulación Directa de DAEs

Es posible simular DAEs sin convertirlas en ODEs. Por ejemplo, usando Backward Euler para una ODE $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ resulta

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + h \cdot f(x(t_{k+1}), t) = x(t_k) + h \cdot \dot{x}(t_{k+1})$$
$$\implies \dot{x}(t_{k+1}) = \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h}$$

Aplicando esta aproximación de la derivada $\dot{x}(t_{k+1})$ a la DAE $F(\dot{x}(t), x(t), a(t), t) = 0$ con $t = t_{k+1}$ obtenemos

$$F\left(\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h}, x(t_{k+1}), a(t_{k+1}), t_{k+1}\right) = 0$$

que permite en principio obtener $x(t_{k+1})$ resolviendo la ecuación algebraica anterior en cada paso.

Esto se puede usar con cualquier método de integración, pero es muy costoso cuando la dimensiones de $x(t)$ y $a(t)$ son grandes.

Conversión de DAE a ODE

- Una manera más eficiente de resolver el problema es transformar la Ecuación Diferencial Algebraica en una Ecuación Diferencial Ordinaria.
- Esto podría hacerse manualmente despejando primero las expresiones de las variables algebraicas $\mathrm{a}(t)$ y luego reemplazandolas en las expresiones de las derivadas $\dot{\mathrm{x}}(t)$.
- Sin embargo, luego veremos que es posible hacer este procedimiento de manera automática

Organización de la Presentación

De la DAE a la ODE

Reordenando el sistema del ejemplo obtenemos:

$$
\begin{aligned}
u_R(t) - R\ i_R(t) &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) - i_C(t) &= 0 \\
q(t) - C\ u_C(t) &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) - u_L(t) &= 0 \\
\phi(t) - L\ i_L(t) &= 0 \\
u_S(t) - \sin(t) &= 0 \\
u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) &= 0 \\
i_L(t) - i_R(t) &= 0 \\
i_C(t) - i_L(t) &= 0 \\
i_S(t) - i_R(t) &= 0
\end{aligned}
$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C} \tag{5a}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L} \tag{5b}$$

$$u_S(t) := \sin(t) \tag{5c}$$

$$i_R(t) := i_L(t) \tag{5d}$$

$$i_C(t) := i_L(t) \tag{5e}$$

$$i_S(t) := i_R(t) \tag{5f}$$

$$u_R(t) := R\ i_R(t) \tag{5g}$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t) \tag{5h}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t) \tag{5i}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t) \tag{5j}$$

De la DAE a la ODE

Las Ecuaciones (5a)–(5j) definen un sistema de ODEs de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) &= f_1(q(t), \phi(t), t) \\ \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) &= f_2(q(t), \phi(t), t) \end{aligned} \tag{6}$$

Si bien $f_1(\cdot)$ y $f_2(\cdot)$ no están explicitadas, dados $q(t)$, $\phi(t)$ y t, el conjunto de ecuaciones nos permite calcular directamente las derivadas $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t)$ y $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t)$.

Si hacemos una rutina en cualquier lenguaje de programación que contenga la secuencia de las Ecs.(5a)–(5j), será equivalente a una que contenga las expresiones de $f_1(\cdot)$ y $f_2(\cdot)$.

$\Rightarrow$ El problema de obtener la ODE se reduce (bajo ciertas condiciones) a ordenar vertical y horizontalmente el sistema de DAEs.

Organización de la Presentación

Organización de la Presentación

Algoritmo Básico de Ordenamiento

Para ordenar las ecuaciones, vamos a tener en cuenta lo siguiente:

- Tendremos un sistema de N ecuaciones y N incógnitas.
- Las incógnitas son las derivadas de los estados y las variables algebraicas desconocidas.

Utilizaremos entonces las siguientes reglas:

R1 Si una ecuación (E_i) contiene una única incógnita u_j, entonces:
- u_j debe despejarse de (E_i) (ordenamiento horizontal).
- La ecuación (E_i) despejada debe colocarse al principio (ordenamiento vertical).

R2 Si una incógnita u_j aparece en una única ecuación (E_i), entonces:
- u_j debe despejarse de (E_i) (ordenamiento horizontal).
- La ecuación (E_i) despejada debe colocarse al final (ordenamiento vertical).

Una vez despejada una incógnita u_j, la misma deja de ser considerada incógnita para las restantes ecuaciones.

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) - i_C(t) = 0$$
$$\boxed{q(t) - C\ u_C(t) = 0}$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) - u_L(t) = 0$$
$$\phi(t) - L\ i_L(t) = 0$$
$$u_S(t) - \sin(t) = 0$$
$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$
$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$
$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$
$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$
\begin{aligned}
u_R(t) - R\ i_R(t) &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) - i_C(t) &= 0 \\
\boxed{q(t) - C\ u_C(t) = 0} \\
\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) - u_L(t) &= 0 \\
\phi(t) - L\ i_L(t) &= 0 \\
u_S(t) - \sin(t) &= 0 \\
u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) &= 0 \\
i_L(t) - i_R(t) &= 0 \\
i_C(t) - i_L(t) &= 0 \\
i_S(t) - i_R(t) &= 0
\end{aligned}
$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) - i_C(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) - u_L(t) = 0$$
$$\phi(t) - L\ i_L(t) = 0$$
$$u_S(t) - \sin(t) = 0$$
$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$
$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$
$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$
$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) - i_C(t) = 0$$
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t)} - u_L(t) = 0$$
$$\phi(t) - L\ i_L(t) = 0$$
$$u_S(t) - \sin(t) = 0$$
$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$
$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$
$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$
$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) - i_C(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$\phi(t) - L\ i_L(t) = 0$$

$$u_S(t) - \sin(t) = 0$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$

$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$

$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) - i_C(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$\boxed{\phi(t) - L\ i_L(t) = 0}$$

$$u_S(t) - \sin(t) = 0$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$

$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$

$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0 \qquad u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) - i_C(t) = 0 \qquad i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$
\begin{aligned}
u_S(t) - \sin(t) &= 0 \\
u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) &= 0 \\
i_L(t) - i_R(t) &= 0 \\
i_C(t) - i_L(t) &= 0 \\
i_S(t) - i_R(t) &= 0
\end{aligned}
$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) - i_C(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$\boxed{u_S(t) - \sin(t) = 0}$$
$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$
$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$
$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$
$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) - i_C(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$
$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$
$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$
$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t)} - i_C(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$

$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$

$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$\begin{aligned} u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) &= 0 \\ i_L(t) - i_R(t) &= 0 \\ i_C(t) - i_L(t) &= 0 \\ i_S(t) - i_R(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$
$$\boxed{i_L(t) - i_R(t) = 0}$$
$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$
$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$

$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$\boxed{i_C(t) - i_L(t) = 0}$$

$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

$$\boxed{i_S(t) - i_R(t) = 0}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := \sin(t)$$
$$i_R(t) := i_L(t)$$
$$i_C(t) := i_L(t)$$
$$i_S(t) := i_R(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$\boxed{u_R(t) - R\ i_R(t) = 0}$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := \sin(t)$$
$$i_R(t) := i_L(t)$$
$$i_C(t) := i_L(t)$$
$$i_S(t) := i_R(t)$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := \sin(t)$$
$$i_R(t) := i_L(t)$$
$$i_C(t) := i_L(t)$$
$$i_S(t) := i_R(t)$$
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$\boxed{u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0}$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := \sin(t)$$
$$i_R(t) := i_L(t)$$
$$i_C(t) := i_L(t)$$
$$i_S(t) := i_R(t)$$
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

$$
\begin{aligned}
u_C(t) &:= \frac{q(t)}{C} \\
i_L(t) &:= \frac{\phi(t)}{L} \\
u_S(t) &:= \sin(t) \\
i_R(t) &:= i_L(t) \\
i_C(t) &:= i_L(t) \\
i_S(t) &:= i_R(t) \\
u_R(t) &:= R\ i_R(t) \\
u_L(t) &:= u_S(t) - u_R(t) - u_C(t) \\
\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) &:= i_C(t) \\
\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) &:= u_L(t)
\end{aligned}
$$

Algoritmo Básico de Ordenamiento

- El algoritmo de causalización que vimos es simple.
- Sin embargo, hay sistemas de ecuaciones en los que este algoritmo falla.
- Dichas limitaciones se deben a la presencia de lazos algebraicos, de índice alto o de singularidades estructurales.
- En estos casos, veremos extensiones del algoritmo que resuelven dichas limitaciones.

Para poder tratar el problema de manera formal y general recurriremos a la Teoría de Grafos.

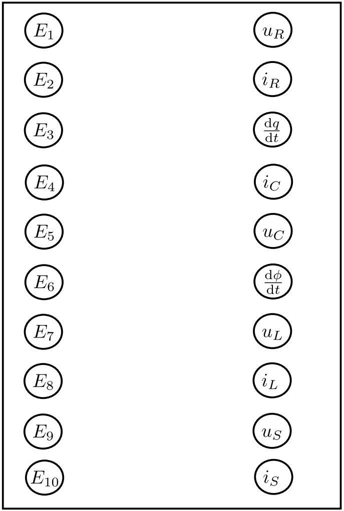
Planteo como Problema de Grafos

La formulación del algoritmo en términos de grafos requiere construir un grafo bipartito de la siguiente forma:

- Se agrega un nodo representando cada ecuación.
- Se agrega un nodo representando cada incógnita.
- Si la incógnita u_j aparece en la ecuación (E_i), se agrega un arco entre los nodos correspondientes.

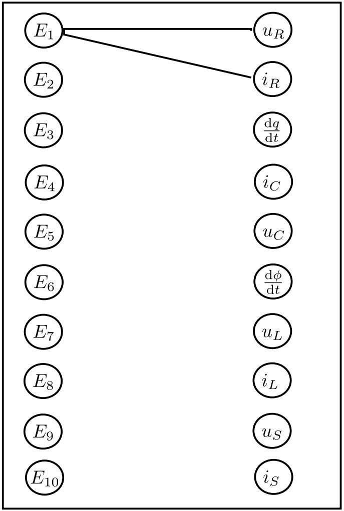
Construcción del Grafo

$$u_R - R\ i_R = 0 \qquad (E_1)$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - i_C = 0 \qquad (E_2)$$
$$q - C\ u_C = 0 \qquad (E_3)$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} - u_L = 0 \qquad (E_4)$$
$$\phi - L\ i_L = 0 \qquad (E_5)$$
$$u_S - \sin(t) = 0 \qquad (E_6)$$
$$u_L + u_R + u_C - u_S = 0 \qquad (E_7)$$
$$i_L - i_R = 0 \qquad (E_8)$$
$$i_C - i_L = 0 \qquad (E_9)$$
$$i_S - i_R = 0 \qquad (E_{10})$$



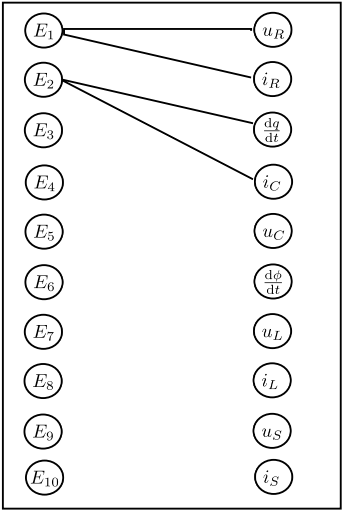
Construcción del Grafo

$$u_R - R\ i_R = 0 \qquad (E_1)$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - i_C = 0 \qquad (E_2)$$
$$q - C\ u_C = 0 \qquad (E_3)$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} - u_L = 0 \qquad (E_4)$$
$$\phi - L\ i_L = 0 \qquad (E_5)$$
$$u_S - \sin(t) = 0 \qquad (E_6)$$
$$u_L + u_R + u_C - u_S = 0 \qquad (E_7)$$
$$i_L - i_R = 0 \qquad (E_8)$$
$$i_C - i_L = 0 \qquad (E_9)$$
$$i_S - i_R = 0 \qquad (E_{10})$$



Construcción del Grafo

$$
\begin{aligned}
u_R - R\, i_R &= 0 & (E_1)\\
\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - i_C &= 0 & (E_2)\\
q - C\, u_C &= 0 & (E_3)\\
\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} - u_L &= 0 & (E_4)\\
\phi - L\, i_L &= 0 & (E_5)\\
u_S - \sin(t) &= 0 & (E_6)\\
u_L + u_R + u_C - u_S &= 0 & (E_7)\\
i_L - i_R &= 0 & (E_8)\\
i_C - i_L &= 0 & (E_9)\\
i_S - i_R &= 0 & (E_{10})
\end{aligned}
$$



Construcción del Grafo

$$u_R - R\, i_R = 0 \qquad (E_1)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - i_C = 0 \qquad (E_2)$$

$$q - C\, u_C = 0 \qquad (E_3)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} - u_L = 0 \qquad (E_4)$$

$$\phi - L\, i_L = 0 \qquad (E_5)$$

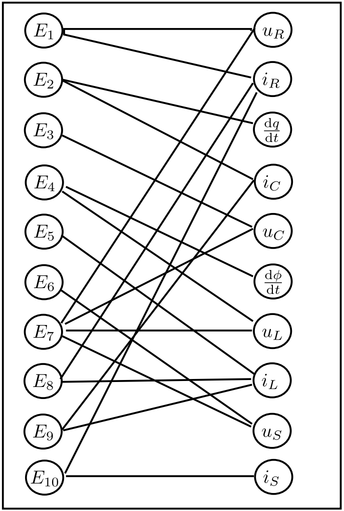
$$u_S - \sin(t) = 0 \qquad (E_6)$$

$$u_L + u_R + u_C - u_S = 0 \qquad (E_7)$$

$$i_L - i_R = 0 \qquad (E_8)$$

$$i_C - i_L = 0 \qquad (E_9)$$

$$i_S - i_R = 0 \qquad (E_{10})$$



Algoritmo de Ordenamiento

Notar que:

- Si el nodo que representa la ecuación (E_i) tiene un único arco, entonces (E_i) contiene una única incógnita u_j que debe despejarse de (E_i)
- Si el nodo que representa la incógnita u_j tiene un único arco, entonces u_j aparece en una única ecuación (E_i) de la que debe despejarse.

El algoritmo se reduce a encontrar nodos que sólo tienen un arco, es decir nodos de grado 1.

Algoritmo de Ordenamiento

El algoritmo que utilizamos antes, aplicado al grafo, se traduce en las siguientes reglas:

R1 Si el nodo de la ecuación (E_i) está conectado a un único nodo correspondiente a la incógnita u_j, entonces:

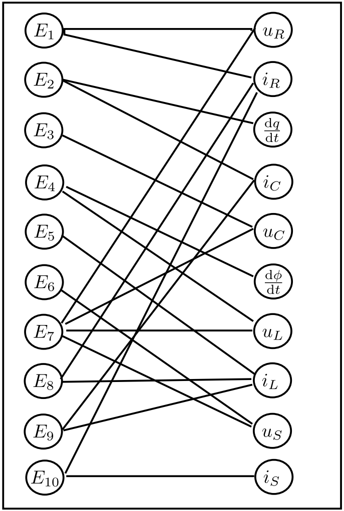
- u_j debe despejarse de (E_i) (ordenamiento horizontal).
- La ecuación (E_i) despejada debe colocarse al principio (ordenamiento vertical).

R2 Si el nodo de la incógnita u_j está conectado a una único nodo correspondiente a la ecuación (E_i), entonces:

- u_j debe despejarse de (E_i) (ordenamiento horizontal).
- La ecuación (E_i) despejada debe colocarse al final (ordenamiento vertical).

Cada vez que se aplica una regla, se deben eliminar del grafo los dos nodos involucrados y todos los arcos involucrados en dichos nodos.

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

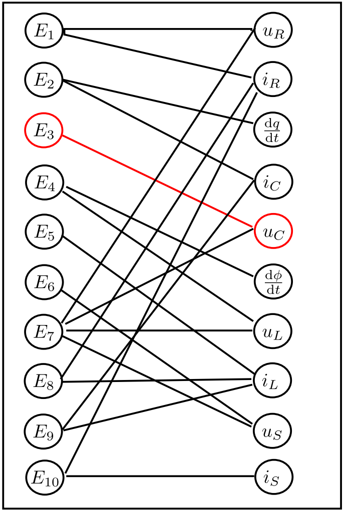
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{d\phi}{dt}(t) := u_L(t)$$

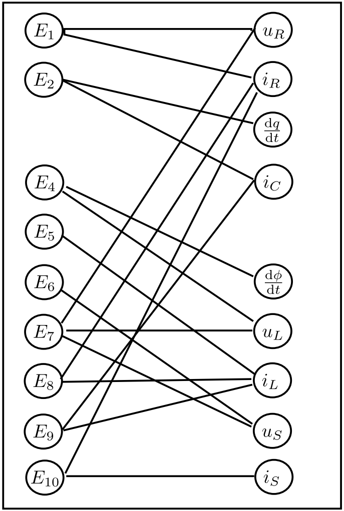
$$\frac{dq}{dt}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := \sin(t)$$
$$i_R(t) := i_L(t)$$
$$i_C(t) := i_L(t)$$
$$i_S(t) := i_R(t)$$
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$
$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$
$$\frac{d\phi}{dt}(t) := u_L(t)$$
$$\frac{dq}{dt}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

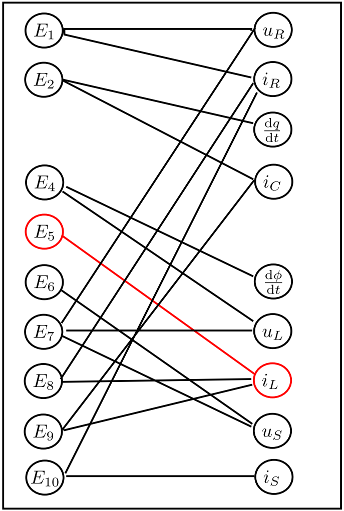
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

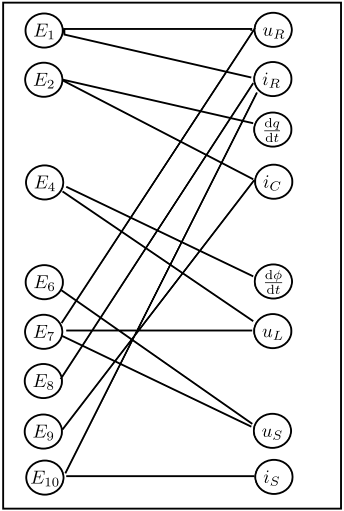
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

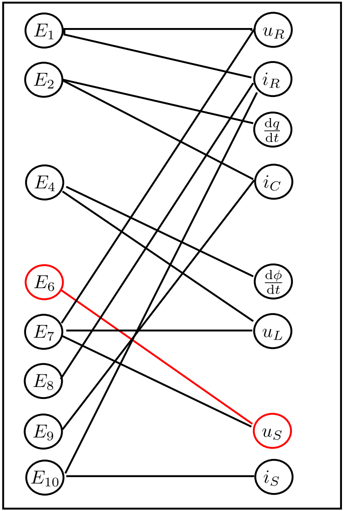
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{d\phi}{dt}(t) := u_L(t)$$

$$\frac{dq}{dt}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

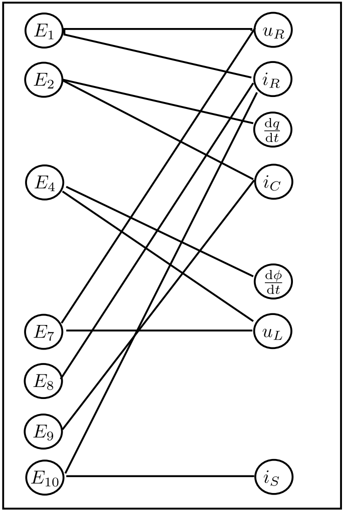
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{d\phi}{dt}(t) := u_L(t)$$

$$\frac{dq}{dt}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

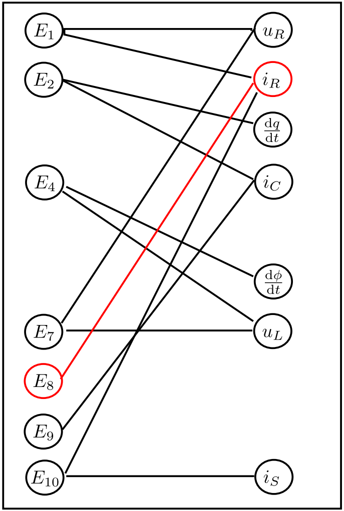
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{d\phi}{dt}(t) := u_L(t)$$

$$\frac{dq}{dt}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

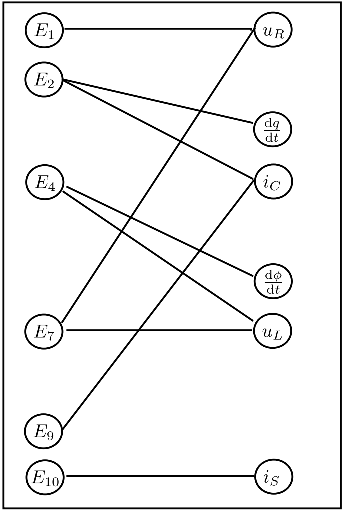
$$u_R(t) := R\, i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

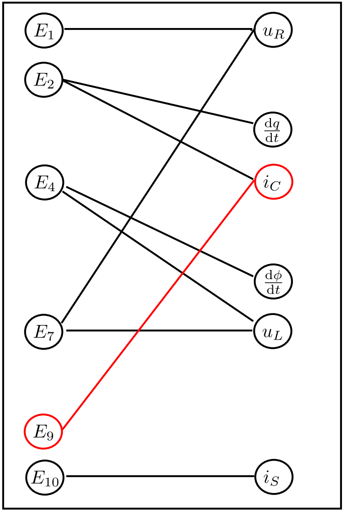
$$u_R(t) := R\, i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{d\phi}{dt}(t) := u_L(t)$$

$$\frac{dq}{dt}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

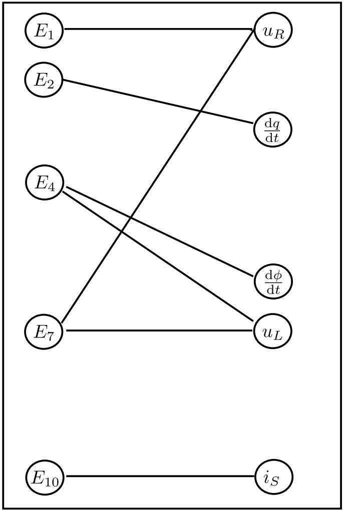
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

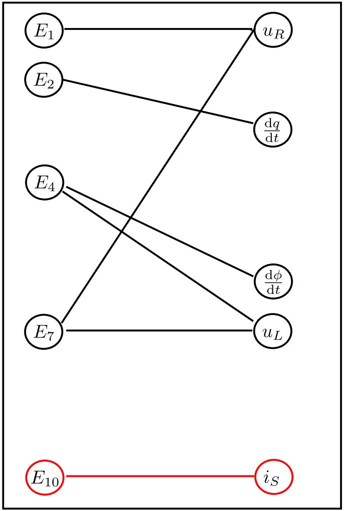
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{d\phi}{dt}(t) := u_L(t)$$

$$\frac{dq}{dt}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

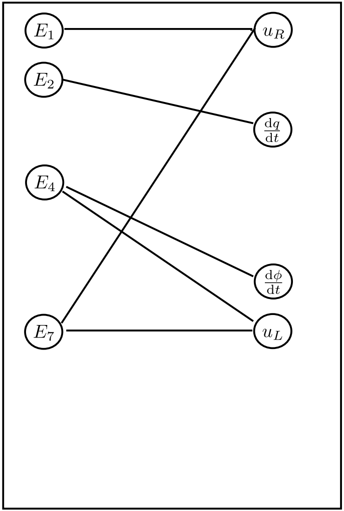
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{d\phi}{dt}(t) := u_L(t)$$

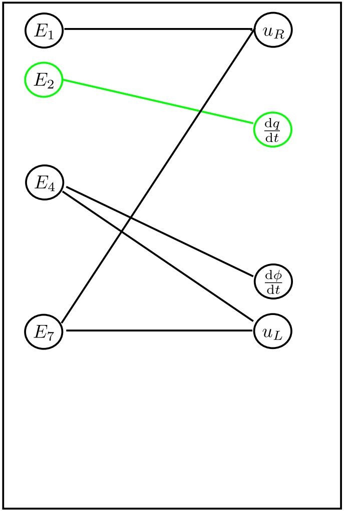
$$\frac{dq}{dt}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := \sin(t)$$
$$i_R(t) := i_L(t)$$
$$i_C(t) := i_L(t)$$
$$i_S(t) := i_R(t)$$
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$
$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$
$$\frac{d\phi}{dt}(t) := u_L(t)$$
$$\frac{dq}{dt}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

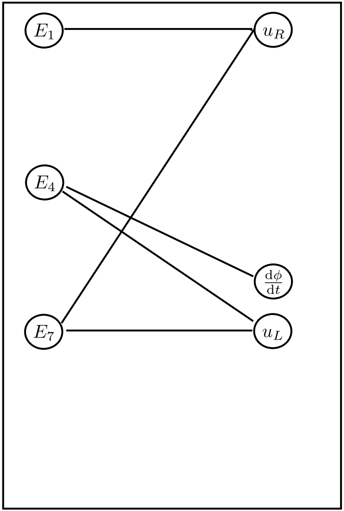
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

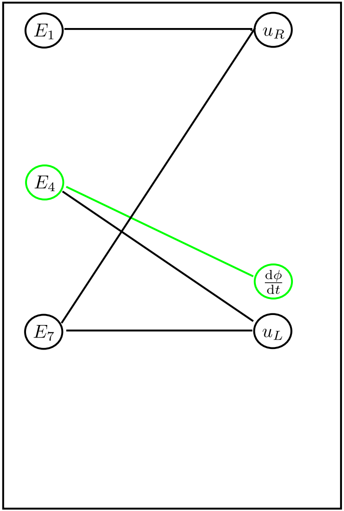
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{d\phi}{dt}(t) := u_L(t)$$

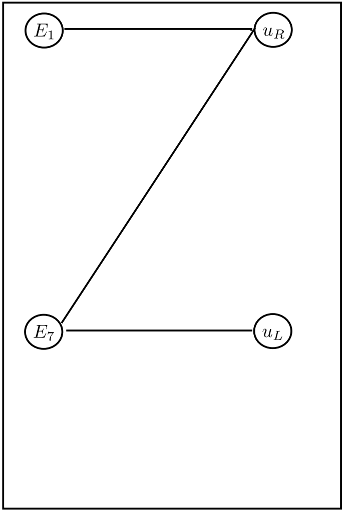
$$\frac{dq}{dt}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



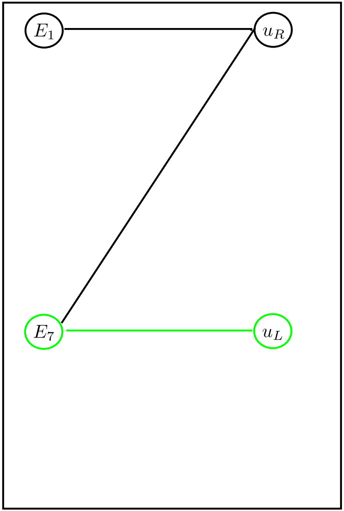
$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := \sin(t)$$
$$i_R(t) := i_L(t)$$
$$i_C(t) := i_L(t)$$
$$i_S(t) := i_R(t)$$
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$
$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := \sin(t)$$
$$i_R(t) := i_L(t)$$
$$i_C(t) := i_L(t)$$
$$i_S(t) := i_R(t)$$
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$
$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

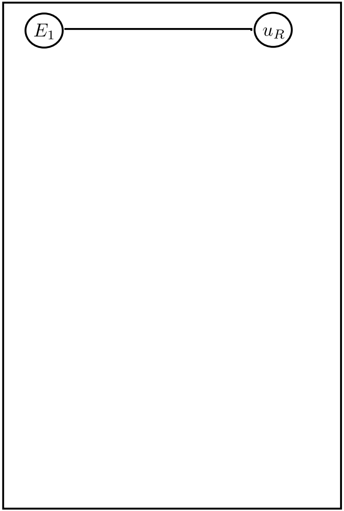
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

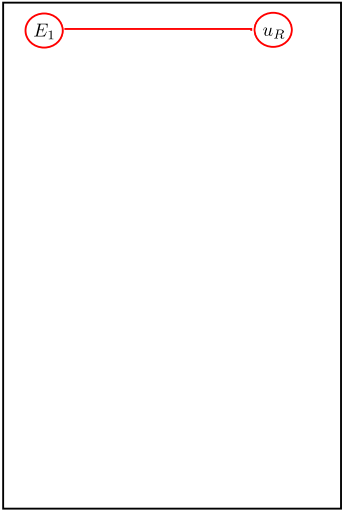
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := \sin(t)$$
$$i_R(t) := i_L(t)$$
$$i_C(t) := i_L(t)$$
$$i_S(t) := i_R(t)$$
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$
$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := \sin(t)$$
$$i_R(t) := i_L(t)$$
$$i_C(t) := i_L(t)$$
$$i_S(t) := i_R(t)$$
$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$
$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := \sin(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

$$u_R(t) := R\ i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) := i_C(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo

- El algoritmo de ordenamiento resulta muy simple y eficiente.
- Es un algoritmo muy simple de implementar computacionalmente utilizando herramientas estándar para tratar con grafos.
- El procedimiento utilizado permite encontrar el matching completo en el grafo bipartito.
- Sin embargo, este procedimiento sólo funciona cuando el matching completo existe y es único.

Por este motivo, hay muchos sistemas en los cuales este algoritmo no funciona.

Organización de la Presentación

Otro ejemplo

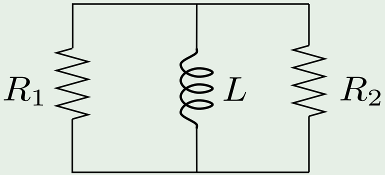
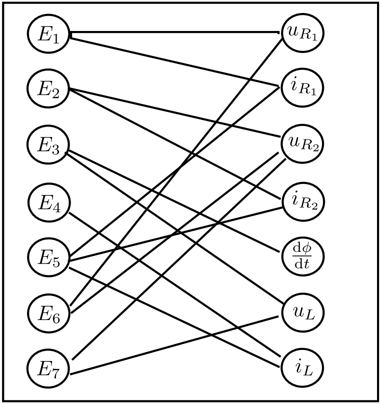


Figura 2: Circuito RL Paralelo

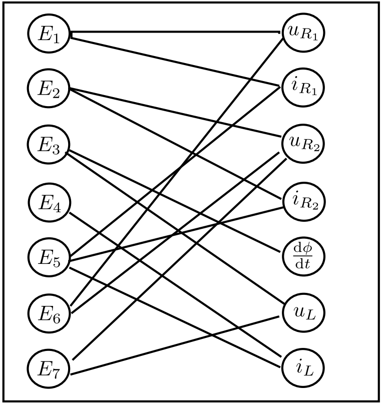
$$u_{R_1}(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0 \tag{8a}$$
$$u_{R_2}(t) - R_2\ i_{R_2}(t) = 0 \tag{8b}$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) - u_L(t) = 0 \tag{8c}$$
$$\phi(t) - L\ i_L(t) = 0 \tag{8d}$$
$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0 \tag{8e}$$
$$u_{R_1}(t) - u_{R_2}(t) = 0 \tag{8f}$$
$$u_L(t) - u_{R_2}(t) = 0 \tag{8g}$$

Otro ejemplo

$$u_{R_1}(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$
$$u_{R_2}(t) - R_2\ i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_2)$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) - u_L(t) = 0 \qquad (E_3)$$
$$\phi(t) - L\ i_L(t) = 0 \qquad (E_4)$$
$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_5)$$
$$u_{R_1}(t) - u_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_6)$$
$$u_L(t) - u_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_7)$$



Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_{R_1}(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

$$u_{R_2}(t) - R_2\ i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_2)$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_5)$$

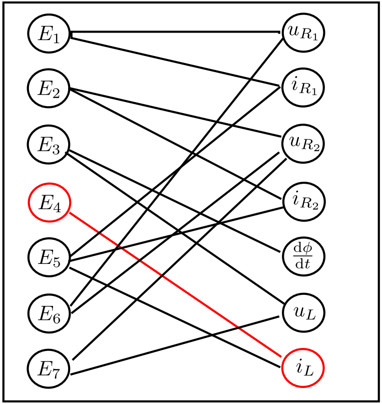
$$u_{R_1}(t) - u_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_6)$$

$$u_L(t) := u_{R_2}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Las ecuaciones E_1, E_2, E_5 y E_6 no pueden resolverse independientemente para calcular u_{R_1}, i_{R_1}, u_{R_2} e i_{R_2}. Estas ecuaciones constituyen un lazo algebraico.

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_{R_1}(t) - R_1\; i_{R_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

$$u_{R_2}(t) - R_2\; i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_2)$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_5)$$

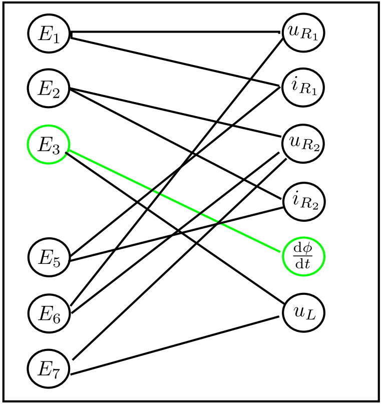
$$u_{R_1}(t) - u_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_6)$$

$$u_L(t) := u_{R_2}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Las ecuaciones E_1, E_2, E_5 y E_6 no pueden resolverse independientemente para calcular u_{R_1}, i_{R_1}, u_{R_2} e i_{R_2}. Estas ecuaciones constituyen un lazo algebraico.

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_{R_1}(t) - R_1\; i_{R_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

$$u_{R_2}(t) - R_2\; i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_2)$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_5)$$

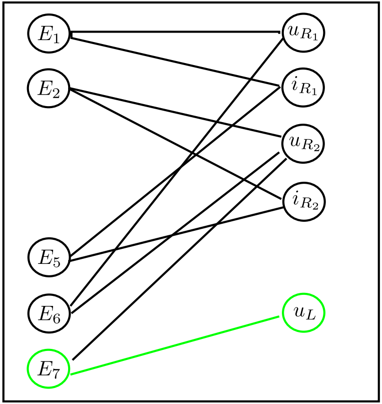
$$u_{R_1}(t) - u_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_6)$$

$$u_L(t) := u_{R_2}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Las ecuaciones E_1, E_2, E_5 y E_6 no pueden resolverse independientemente para calcular u_{R_1}, i_{R_1}, u_{R_2} e i_{R_2}. Estas ecuaciones constituyen un lazo algebraico.

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_{R_1}(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

$$u_{R_2}(t) - R_2\ i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_2)$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_5)$$

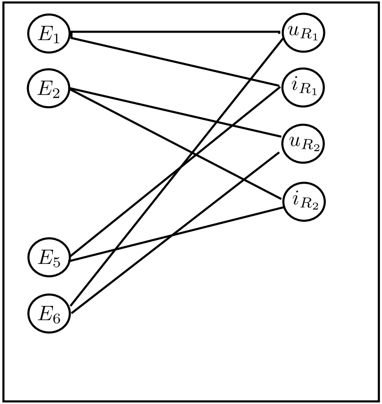
$$u_{R_1}(t) - u_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_6)$$

$$u_L(t) := u_{R_2}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Las ecuaciones E_1, E_2, E_5 y E_6 no pueden resolverse independientemente para calcular u_{R_1}, i_{R_1}, u_{R_2} e i_{R_2}. Estas ecuaciones constituyen un lazo algebraico.

Algoritmo de Ordenamiento sobre el Grafo



$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_{R_1}(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

$$u_{R_2}(t) - R_2\ i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_2)$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_5)$$

$$u_{R_1}(t) - u_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_6)$$

$$u_L(t) := u_{R_2}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t)$$

Las ecuaciones E_1, E_2, E_5 y E_6 no pueden resolverse independientemente para calcular u_{R_1}, i_{R_1}, u_{R_2} e i_{R_2}. Estas ecuaciones constituyen un lazo algebraico.

Lazos Algebraicos

- En el ejemplo analizado, el problema del lazo algeraico se soluciona resolviendo simultáneamente el conjunto de ecuaciones involucrados en el lazo.
- Pueden existir múltiples lazos algebraicos en un sistema de ecuaciones.
- El costo computacional de resolverlos todos simultáneamente puede ser muy elevado.
- Por esto es conveniente detectar los distintos lazos o caminos cerrados.

La detección de los caminos cerrados se realiza eficientemente utilizando el Algoritmo de Tarjan.

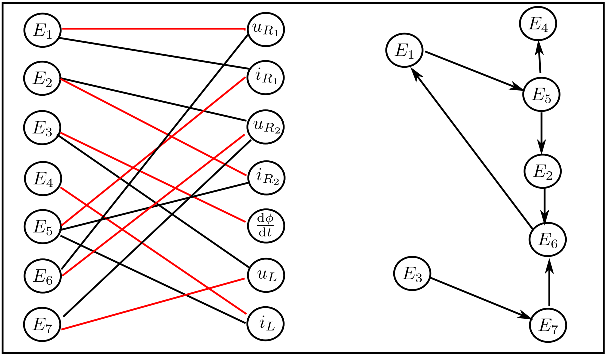
Algoritmo de Tarjan

El algoritmo de Tarjan permite encontrar los componentes fuertemente conexos en un grafo dirigido.

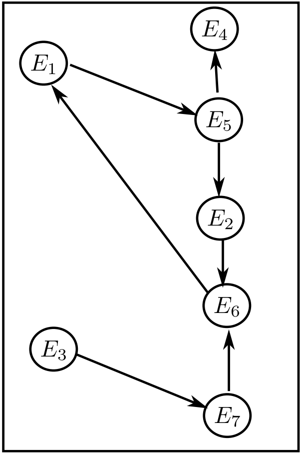
- Para poder utilizar este algoritmo, se construye en primer lugar un grafo dirigido que contiene sólo los vértices correspondientes a las ecuaciones.
- Luego, un arco desde el vértice E_1 al vértice E_2 indica que E_2 debe resolverse antes que E_1.
- Cada componente fuertemente conexo constituye un lazo algebraico.
- El algoritmo de Tarjan entonces permite detectar y separar los distintos lazos algebraicos.

Algoritmo de Tarjan

La transformación del grafo bipartito en uno dirigido se hace con un algoritmo de matching donde los vértices de las incógnitas se colapsan con los de las ecuaciones apareadas. Luego, cada arco remanente se dirige hacia el de la variable apareada.

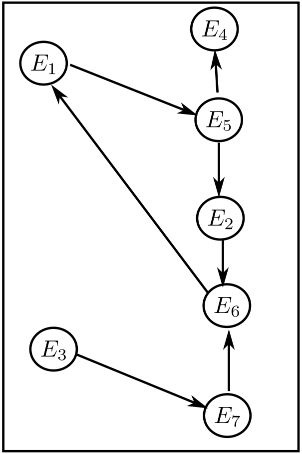


Algoritmo de Tarjan



- El algoritmo de Tarjan encuentra los componentes conexos del grafo dirigido.
- En este caso, los mismos son E_4, $\{E_1, E_5, E_2, E_6\}$, E_7, y E_3.
- Más aún, el algoritmo encuentra los componentes en su orden de precedencia.
- Este último punto permite establecer el orden en que resolverse las ecuaciones.

Algoritmo de Tarjan



$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L} \qquad (E_4)$$

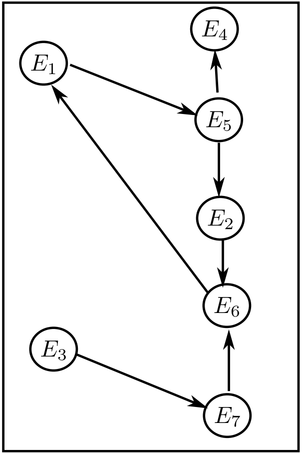
$$u_{R_1}(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

$$u_{R_2}(t) - R_2\ i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_2)$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_5)$$

$$u_{R_1}(t) - u_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_6)$$

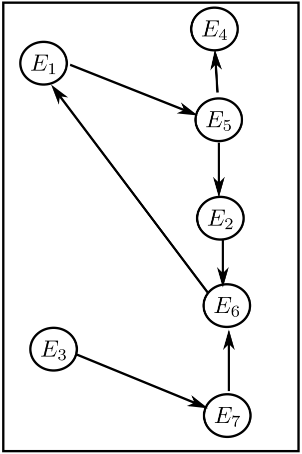
Algoritmo de Tarjan



$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L} \qquad (E_4)$$

$$(u_{R_1}, u_{R_2}, i_{R_1}, i_{R_2}) := \mathrm{solve}(i_L) \qquad (E_{1,2,5,6})$$

Algoritmo de Tarjan



$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L} \qquad (E_4)$$

$$(u_{R_1}, u_{R_2}, i_{R_1}, i_{R_2}) := \mathrm{solve}(i_L) \qquad (E_{1,2,5,6})$$

$$u_L(t) := u_{R_2}(t) \qquad (E_7)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t) := u_L(t) \qquad (E_3)$$

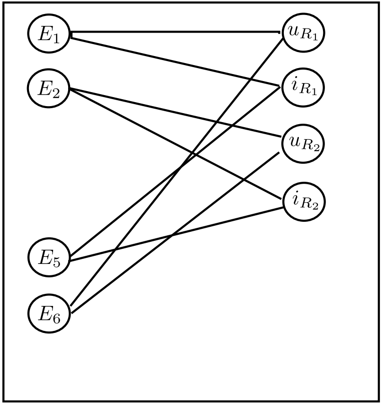
Tearing

Una vez aislados los lazos algebraicos, estos pueden tener muchas ecuaciones simultáneas. Para reducirlas, se suele utilizar un algoritmo denominado Tearing. Este algoritmo se basa en la siguiente idea:

1. Se asume conocida una de las variables del lazo.
2. Se elimina una de las ecuaciones que involucra dicha variable.
3. Se ordena el resto de las ecuaciones del lazo.

Si este procedimiento conduce a un sistema sin lazo algebraico, el lazo original debe resolverse entonces sobre la variable que se asumió conocida.

Tearing

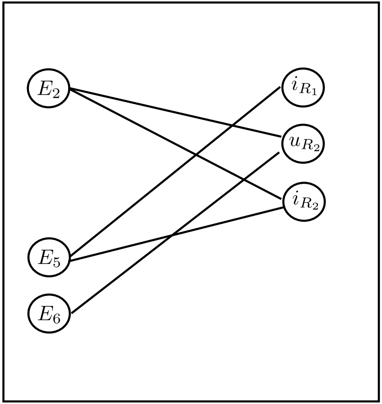


Asumiendo conocido $u_{R_1}(t)$:

$$
\begin{aligned}
u_{R_1}(t) - R_1\ i_{R_1}(t) &= 0 \qquad (E_1)\\
u_{R_2}(t) - R_2\ i_{R_2}(t) &= 0 \qquad (E_2)\\
i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) &= 0 \qquad (E_5)\\
u_{R_1}(t) - u_{R_2}(t) &= 0 \qquad (E_6)
\end{aligned}
$$

Notar que se trata de un sistema de una ecuación (E_1) en una única variable (u_{R_1}). Las restantes son asignaciones y variables auxiliares.

Tearing

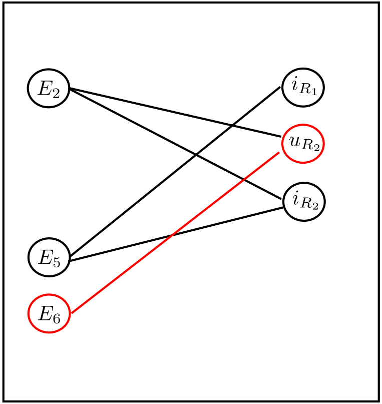


Asumiendo conocido $u_{R_1}(t)$:

$$u_{R_1}(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$
$$u_{R_2}(t) - R_2\ i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_2)$$
$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_5)$$
$$u_{R_1}(t) - u_{R_2}(t) = 0 \qquad (E_6)$$

Notar que se trata de un sistema de una ecuación (E_1) en una única variable (u_{R_1}). Las restantes son asignaciones y variables auxiliares.

Tearing



$$u_{R_2}(t) := u_{R_1}(t)$$

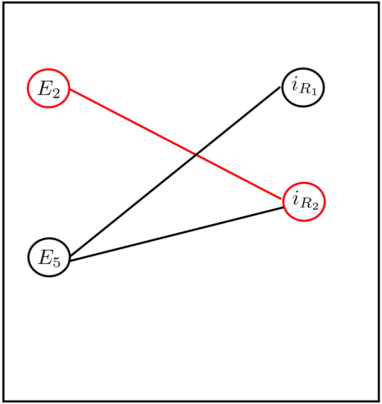
$$i_{R_2}(t) := \frac{u_{R_2}(t)}{R_2}$$

$$i_{R_1}(t) := -i_{R_2}(t) - i_L(t)$$

$$u_{R_1}(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

Notar que se trata de un sistema de una ecuación (E_1) en una única variable (u_{R_1}). Las restantes son asignaciones y variables auxiliares.

Tearing



$$u_{R_2}(t) := u_{R_1}(t)$$

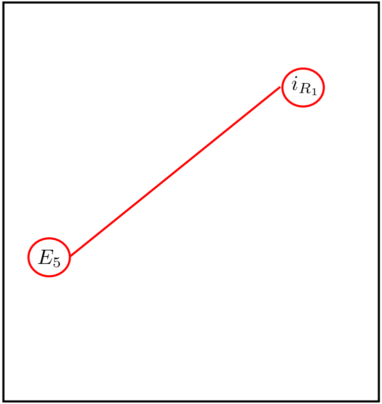
$$i_{R_2}(t) := \frac{u_{R_2}(t)}{R_2}$$

$$i_{R_1}(t) := -i_{R_2}(t) - i_L(t)$$

$$u_{R_1}(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

Notar que se trata de un sistema de una ecuación (E_1) en una única variable (u_{R_1}). Las restantes son asignaciones y variables auxiliares.

Tearing



$$u_{R_2}(t) := u_{R_1}(t)$$

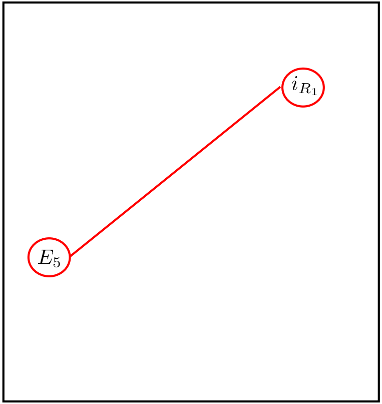
$$i_{R_2}(t) := \frac{u_{R_2}(t)}{R_2}$$

$$i_{R_1}(t) := -i_{R_2}(t) - i_L(t)$$

$$u_{R_1}(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

Notar que se trata de un sistema de una ecuación (E_1) en una única variable (u_{R_1}). Las restantes son asignaciones y variables auxiliares.

Tearing



$$
\begin{aligned}
u_{R_2}(t) &:= u_{R_1}(t) \\
i_{R_2}(t) &:= \frac{u_{R_2}(t)}{R_2} \\
i_{R_1}(t) &:= -i_{R_2}(t) - i_L(t) \\
u_{R_1}(t) - R_1\ i_{R_1}(t) &= 0 \qquad (E_1)
\end{aligned}
$$

Notar que se trata de un sistema de una ecuación (E_1) en una única variable (u_{R_1}). Las restantes son asignaciones y variables auxiliares.

Organización de la Presentación

Otro ejemplo

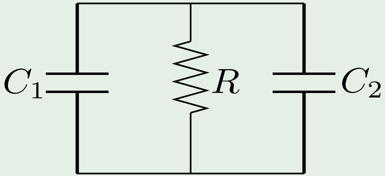


Figura 3: Circuito RC Paralelo

$$C_1 \frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} - i_{C_1}(t) = 0 \tag{10a}$$

$$C_2 \frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t} - i_{C_2}(t) = 0 \tag{10b}$$

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0 \tag{10c}$$

$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0 \tag{10d}$$

$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0 \tag{10e}$$

$$u_{C_2}(t) - u_R(t) = 0 \tag{10f}$$

Otro ejemplo

$$C_1\,\frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} - i_{C_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

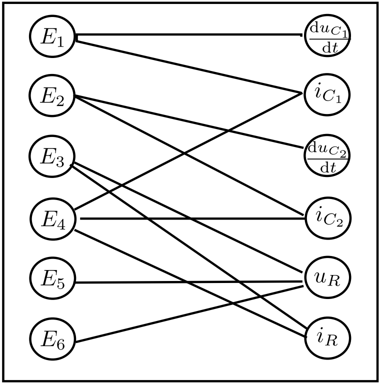
$$C_2\,\frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t} - i_{C_2}(t) = 0 \qquad (E_2)$$

$$u_R(t) - R\; i_R(t) = 0 \qquad (E_3)$$

$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0 \qquad (E_4)$$

$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0 \qquad (E_5)$$

$$u_{C_2}(t) - u_R(t) = 0 \qquad (E_6)$$



La ecuación E_6 no tiene ninguna incógnita libre. Esto indica la presencia de una singularidad estructural (problema de índice alto).

Otro ejemplo

$$C_1 \frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} - i_{C_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

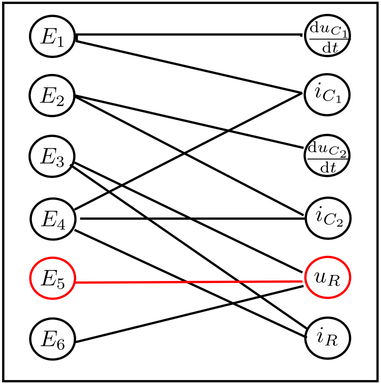
$$C_2 \frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t} - i_{C_2}(t) = 0 \qquad (E_2)$$

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0 \qquad (E_3)$$

$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0 \qquad (E_4)$$

$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0 \qquad (E_5)$$

$$u_{C_2}(t) - u_R(t) = 0 \qquad (E_6)$$



La ecuación E_6 no tiene ninguna incógnita libre. Esto indica la presencia de una singularidad estructural (problema de índice alto).

Otro ejemplo

$$C_1\,\frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} - i_{C_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

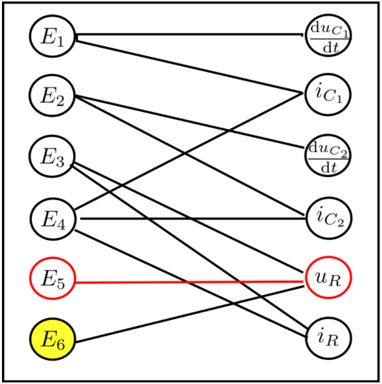
$$C_2\,\frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t} - i_{C_2}(t) = 0 \qquad (E_2)$$

$$u_R(t) - R\;i_R(t) = 0 \qquad (E_3)$$

$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0 \qquad (E_4)$$

$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0 \qquad (E_5)$$

$$u_{C_2}(t) - u_R(t) = 0 \qquad (E_6)$$



La ecuación E_6 no tiene ninguna incógnita libre. Esto indica la presencia de una singularidad estructural (problema de índice alto).

Problemas de Índice Alto

Hay sistemas que no pueden ordenarse tal como están. Entre los mismos se encuentran las DAEs de índice alto.

- La solución es derivar respecto al tiempo la ecuación que no tiene incógnitas.
- Luego se reemplaza esta ecuación (llamada ecuación de restricción) por su derivada miembro a miembro.
- Este procedimiento se realiza iterativamente hasta que las singularidades estructurales desaparecen.

Esta idea es la base del algoritmo de Pantelides para la reducción de índice.

Reducción de Índice

$$C_1\,\frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} - i_{C_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

$$C_2\,\frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t} - i_{C_2}(t) = 0 \qquad (E_2)$$

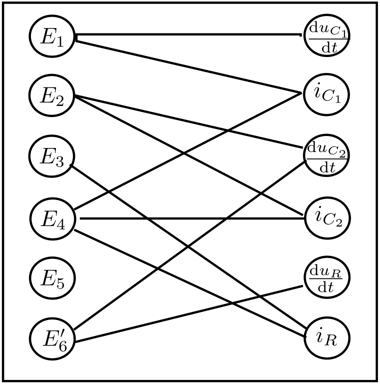
$$u_R(t) - R\,i_R(t) = 0 \qquad (E_3)$$

$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0 \qquad (E_4)$$

$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0 \qquad (E_5)$$

$$\cancel{u_{C_2}(t) - u_R(t)} = 0 \qquad (\cancel{E_6})$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}(t) = 0 \qquad (E_6')$$



Ahora la Ecuación E_5 no tiene incógnitas libres. Hay que aplicar nuevamente el procedimiento.

Reducción de Índice

$$C_1\,\frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} - i_{C_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

$$C_2\,\frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t} - i_{C_2}(t) = 0 \qquad (E_2)$$

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0 \qquad (E_3)$$

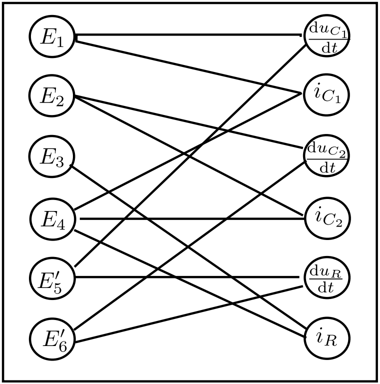
$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0 \qquad (E_4)$$

$$\cancel{u_{C_1}(t) - u_R(t)} = 0 \qquad (\cancel{E_5})$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}(t) = 0 \qquad (E_5')$$

$$\cancel{u_{C_2}(t) - u_R(t)} = 0 \qquad (\cancel{E_6})$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}(t) = 0 \qquad (E_6')$$



Reducción de Índice

$$C_1 \frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} - i_{C_1}(t) = 0 \qquad (E_1)$$

$$C_2 \frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t} - i_{C_2}(t) = 0 \qquad (E_2)$$

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0 \qquad (E_3)$$

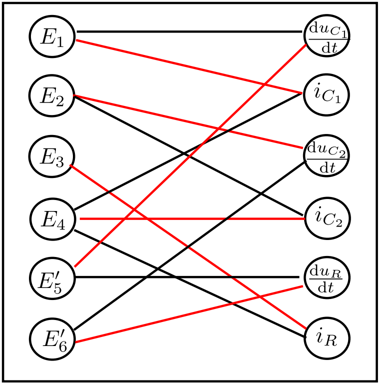
$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0 \qquad (E_4)$$

$$\cancel{u_{C_1}(t) - u_R(t)} = 0 \qquad (\cancel{E_5})$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}(t) = 0 \qquad (E_5')$$

$$\cancel{u_{C_2}(t) - u_R(t)} = 0 \qquad (\cancel{E_6})$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}(t) = 0 \qquad (E_6')$$



Ahora sí es posible hacer un matching completo.

Reducción de Índice

- Una vez completado el matching se debe aplicar el Algoritmo de Tarjan para encontrar los lazos algebraicos.
- Tras esto, se puede simplificar el problema usando Tearing.
- Las ecuaciones de restricción E_5 y E_6 no se descartan del todo, sino que se utilizan para calcular condiciones iniciales consistentes.