Taller de Tesina y Naturaleza de la Física 2020

El experimento, la teoría y el método de Galileo:

por Adolfo E. Trumper

Una vez que Galileo derriba la cinemática de Aristóteles --refutando cada uno de sus enunciados fundamentales, le resta la tarea de construir una nueva teoría de la cinemática. Pero este desafío era mucho más difícil aún si tenemos en cuenta que Galileo todavía no contaba con un método para construir y validar su futura teoría. Por esta razón, lo más sorprendente de su contribución fue el hecho de haber construido ambos a la vez, es decir, a medida que iba construyendo el método iba construyendo la teoría. Aquí es importante notar el cambio de actitud que tuvo Galileo. Qué queremos decir con esto? Si bien no se conocían las causas del movimiento (la idea de la gravedad como fuerza a distancia fue propuesta recién por Newton) Galileo se propuso describir el fenómeno de manera precisa a través de la experimentación. Es decir, encontrar alguna relación entre las cantidades cuantificables, como la posición y el tiempo, que caracterizaran al fenómeno del movimiento.

El experimento de las esferas rodantes en un plano inclinado: ley observacional

Uno de los problemas para la experimentación era la medición del tiempo de caída libre, pues éstos eran tan cortos que era prácticamente imposible medirlo con muy poco error. Aquí es donde Galileo tiene una gran intuición: utilizar un plano inclinado con esferas rodantes de manera de *diluir* la gravedad con el ángulo de inclinación y hacer mediciones sistemáticas de tiempos y espacios recorridos con un error menor que el que hubiera obtenido en una caída libre. El caso límite, en el que el ángulo de inclinación fuera de 90 grados, correspondería a la caída libre. Si bien la analogía no es del todo completa ésta funciona. Cuando las esferas ruedan tienen una fuerza de roce aplicada además de la gravedad; mientras que en la caída libre no hay ningún roce más allá del que puede producir el aire que es despreciable. Hoy sabemos, sin embargo, que en ambos casos la aceleración de caída es constante. Por eso decimos que Galileo tuvo una gran intuición!.

Uno de los objetivos de la materia consistía en realizar el experimento de las esferas rodantes en clase. Lamentablemente, por razones obvias no lo hemos podido hacer. Igualmente podemos seguir adelante y creerle a Galileo!

La idea del experimento es la siguiente: se construye un plano inclinado (no importa el valor del ángulo) en donde se marcan de antemano diferentes distancias, X_1=1m, X_2=1,50m, X_3=2m, X_4=2,50m, X_5=3m. Luego, se hace rodar las esferas desde las distintas posiciones se miden los tiempos t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, correspondientes a cada distancia. Cabe destacar que en aquella época no había muy buenos relojes. Sin embargo Galileo se las ingenió utilizando un clepsidra (reloj de agua) de manera tal de recoger el agua durante la caída. Luego, el peso de agua relativo entre dos recorridos era igual a la relación entre los dos tiempos correspondientes, $P_2/P_1=t_2/t_1$.

La relación más relevante que encontró Galileo fue la siguiente:

$X_2/X_1 = (t_2/t_1)^2$; $X_3/X_1 = (t_3/t_1)^2$; $X_4/X_1 = (t_2/t_1)^2$; $X_4/X_1 = (t_2/t_1)^2$; $X_5/X_1 = (t_5/t_1)^2$,

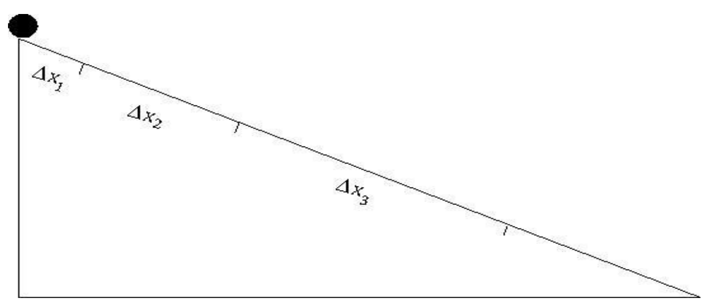
de lo que se puede concluir que,

<u>*la distancia total recorrida durante cierto período de tiempo*</u>
<u>*es proporcional al cuadrado del tiempo*</u> :

$$x \sim t^2 \quad \text{(ley observacional)}$$

A esta nueva relación la vamos a llamar ley observacional. El estatus de ley observacional está relacionado con la nueva actitud de Galileo frente a esta *ley observada,* es decir, asumir que la ley $x \sim t^2$ mostraba la manera en que la naturaleza realmente funcionaba, es decir, <u>era verdadera</u>.

Luego, Galileo ideó una manera alternativa, pero mucho más elegante, de expresar la misma *ley observacional* de la siguiente manera. Designando la variación Δx_1, Δx_2, Δx_3, Δx_4, de las posiciones de la esfera en intervalos iguales de tiempo Δt,



donde:

Δx_1 es la distancia recorrida en el <u>primer</u> intervalo de tiempo Δt
Δx_2 es la distancia recorrida en el <u>segundo</u> intervalo de tiempo Δt
Δx_3 es la distancia recorrida en el <u>tercer</u> intervalo de tiempo Δt, etc.

Si tomamos como unidad la longitud de la distancia Δx_1 recorrida en el primer intervalo de tiempo, el total de la distancia recorrida al final de los sucesivos intervalos, conforme a la ley observacional $x \sim t^2$, será

$\Delta x_1 = 1^2$, $\Delta x_1 + \Delta x_2 = 2^2$, $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 3^2$, $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 = 4^2$, etc, Luego, las distancias recorridas en cada uno de esos intervalos de tiempos respecto de Δx_1 serán

$$\Delta x_1/\Delta x_1 = 1 \,, \quad \Delta x_2/\Delta x_1 = 4-1 = 3 \,, \quad \Delta x_3/\Delta x_1 = 9-4 = 5 \,, \quad \Delta x_4/\Delta x_1 = 16-9 = 7, \text{ etc.}$$

Es decir, las distancias cubiertas en cada intervalo de tiempo sucesivo siguen la secuencia de los números impares,

$$\Delta x_1/\Delta x_1 = 1 \ : \ \Delta x_2/\Delta x_1 = 3 \ : \ \Delta x_3/\Delta x_1 = 5 \ : \ \Delta x_4/\Delta x_1 = 7 \ : \Delta x_5/\Delta x_1 = 9 \,, \text{ etc.}$$

Dado que a esta sucesión de los números impares la obtuvimos a partir de relaciones matemáticas, le podemos asignar el mismo estatus observacional que el de la ley $x \sim t^2$.

Deducción matemática de la ley observacional

No es para nada claro el modo en que Galileo pasó del mundo que fusionaba las ideas de Arquímedes, Aristóteles y el ímpetu a una dinámica completamente nueva; aunque en el camino incorporó la matemática y la experiencia como elementos fundamentales de su metodología de trabajo. Entre *De Motu (1589–1592)* y *El diálogo sobre los dos sistemas máximos del mundo* (1632), en donde se encuentran muchas de sus conclusiones sobre la caída libre, escribe relativamente poco de mecánica. Al menos después del 1609 sus intereses se dirigieron hacia la astronomía y la polémica cultural. Pero existen algunos indicios del fatigoso pasaje del viejo al nuevo sistema. El más famoso se encuentra en una carta enviada a Paolo Sarpi en 1604, en donde expresa que el axioma natural o el principio que explica la relación de los números impares del plano inclinado se debe *a la proporcionalidad de la velocidad instantánea respecto a la distancia recorrida:*

V ~ distancia recorrida.

Por supuesto que esta hipótesis estaba equivocada. Que la velocidad estaba relacionada a la distancia recorrida era una cuestión natural por excelencia. Quizás el hecho de que la matemática fuese esencialmente geometría lo indujo a que el espacio, y no el tiempo, fuera la dimensión más natural para tener en cuenta. Dos años más tarde (1606) Galileo retoma el tema desde una perspectiva diferente, es decir, sin preguntarse acerca de las causas del movimiento sino buscando proporciones matemáticas verdaderas entre la velocidad, el espacio y el tiempo. Así, llegó a darse cuenta que, si bien una causa constante debe producir un efecto constante, este efecto constante podía consistir en un ritmo de variación, y no en un valor fijo. Es decir, que podía tratarse de una aceleración a constante,

$$a \sim \text{cte},$$

en lugar de una velocidad constante. Galileo demuestra, entonces, que la ley observacional de la relación de los números impares observada en su experiencia del plano inclinado podía *ser explicada bajo la hipótesis* de que durante la caída libre la aceleración es la cantidad que se mantiene constante.

Posteriormente, Galileo derriba otra de las barreras interpuestas por Aristóteles acerca de la imposibilidad de superponer el movimiento natural y el movimiento violento. Valiéndose de los trabajos de Apollonio sobre secciones cónicas –traducidos en 1566–, Galileo demuestra matemática y experimentalmente que la trayectoria de los proyectiles es una parábola que resulta de la superposición de un movimiento con velocidad uniforme horizontal y otro movimiento uniformemente acelerado en la vertical. A continuación nos centraremos en las demostraciones de Galileo del experimento de las esferas rodantes en planos inclinados que se encuentra en *Discursos y demostraciones matemáticas acerca de dos nuevas ciencias (1638).*

Las demostraciones matemáticas de Galileo:

Uno de los rasgos característicos de Galileo fue su longevidad científica, que le permitió *ser discípulo de sí mismo*: hacia los veinticinco años escribió *De motu,* en donde se encuentra la primera etapa del desarrollo y evolución de sus ideas acerca del movimiento, y a los setenta y cuatro años mandó a imprimir sus *Discursos y demostraciones matemáticas acerca de dos nuevas ciencias,* en donde se encuentra su obra de mayor madurez sobre el mismo tema.

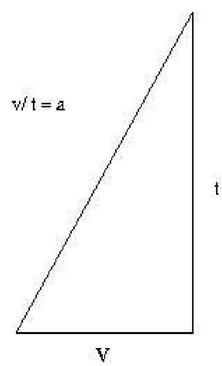
Sus *Discursos* se desarrollan en Venecia en forma de diálogo entre tres personajes: Salviati, que representa a Galileo, Sagredo, que representa a una persona culta de su época, y Simplicio, filósofo peripatético que frecuentemente invoca las opiniones de Aristóteles. Es interesante el papel de Sagredo en estos diálogos, ya que representa a una persona de mente clara y aguda, no especializada en el estudio de la matemática, y desconocedora de muchas de las ideas y descubrimientos que se enuncian. Por eso refuta muchas veces a Simplicio, pero no desde un punto de vista nuevo, sino simplemente haciéndole notar sus contradicciones. Es decir, Sagredo cumple el papel del buen sentido puesto como juez entre el aristotelismo de Simplicio y el Galileísmo de Salviati.

Dado que la notación algebraica era desconocida en Europa, Galileo dedujo las relaciones entre espacio, velocidad y tiempo haciendo uso de la geometría. Cabe destacar que muchas de sus contribuciones fueron esenciales para el posterior desarrollo de los conceptos de límite y derivada del cálculo diferencial. Por eso es muy interesante mostrar como las leyes del movimiento uniformemente acelerado que hoy se enseñan en la escuela pueden ser deducidas a partir de postulados muy sencillos de geometría.

Para Galileo *el movimiento uniforme* era aquel cuyos espacios, recorridos en tiempos cualesquiera iguales, eran iguales entre sí. En notación algebraica esto significaba la conocida expresión,

$$x = v\, t$$

Por otro lado, *el movimiento naturalmente acelerado* era aquel que, partiendo del reposo, iba adquiriendo incrementos iguales de velocidad durante intervalos iguales de tiempo. Esta última definición permitía representar en forma natural el movimiento uniformemente acelerado con un triángulo en donde uno de los catetos representa los tiempos y el otro las velocidades. Luego, por semejanza de triángulos, la relación entre los incrementos de velocidades Δv y los incrementos de tiempos Δt resultan siempre iguales, es decir, la aceleración $a = \Delta v / \Delta t$ es constante.

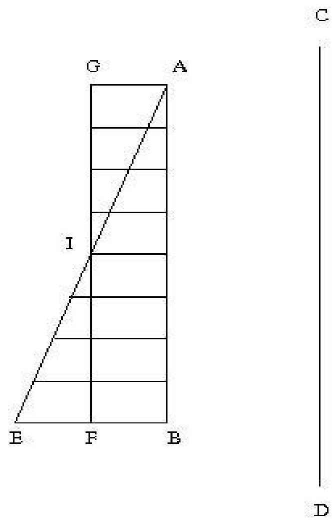


Antes de deducir matemáticamente la sucesión de los números impares Galileo demuestra su *primer teorema*, o proposición, que no es más que la demostración formal del problema del cálculo de la cualidad --aplicado al movimiento uniformemente acelerado--, enunciado por Nicolas Oresme dos siglos antes. La demostración puede resultar bastante enredada ya que no estamos acostumbrados a este tipo de demostraciones. Sin embargo, si se lee con cuidado se puede seguir bastante bien. Por una cuestión histórica lo reproducimos tal cual se encuentra en el discurso:

Primer Teorema

> *El tiempo en que un móvil recorre un espacio con un movimiento uniformemente acelerado desde el reposo es igual al tiempo en que el mismo móvil recorrería el mismo espacio con movimiento uniforme, cuyo grado de velocidad fuera la mitad del mayor y último grado de velocidad alcanzado en el movimiento uniformemente acelerado*

Demostración de Galileo (1633)

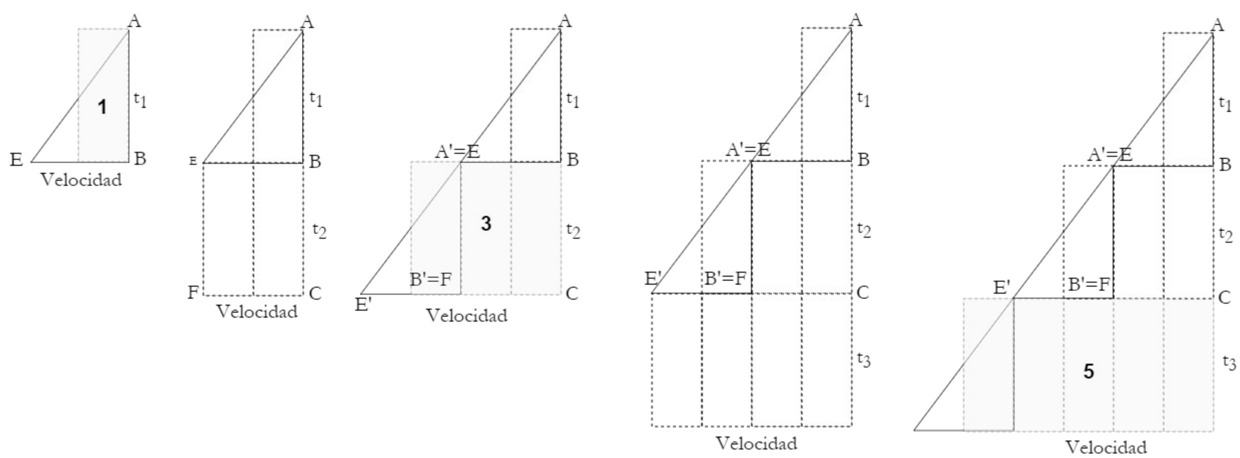


Representemos por la línea AB el tiempo en el cual el móvil, partiendo del reposo en C, recorre con un movimiento uniformemente acelerado el espacio CD; el mayor y último grado de velocidad adquiridos en el intervalo de tiempo AB, se representará por la línea EB, trazada perpendicularmente a AB. Al unir A con E, todas las líneas equidistantes y paralelas a BE, trazadas desde los diferentes puntos de la línea AB, representarán los grados crecientes de velocidad desde el instante inicial A. Dividamos luego BE en su mitad mediante el punto F y tracemos FG y AG paralelas respectivamente a AB y a FB; el paralelogramo formado AGFB será igual al triángulo AEB, ya que GF corta a AE por su mitad I. Y si las paralelas del triángulo AEB se prolongan hasta IG, tendremos que el agregado de todas las paralelas contenidas en el cuadrilátero es igual al conjunto de las comprendidas en el triángulo AEB; pues las que están en el triángulo IEF son iguales a las contenidas en el triángulo GIA y las contenidas en el trapecio son comunes. Y como a todos y a cada uno de los instantes de tiempo AB les corresponden todos y cada uno de los puntos de la línea AB, y como las paralelas trazadas por esos puntos y contenidas en el triángulo AEB representan los grados crecientes de la velocidad en aumento, y las paralelas comprendidas en el paralelogramo representan los mismos grados de velocidad no crecientes, sino iguales, se sigue que tantos son los momentos de velocidad tomados en el movimiento acelerado según las paralelas crecientes del triángulo AEB, como en el movimiento uniforme según las paralelas del paralelogramo GB, pues lo que falta a los momentos en la primera mitad del movimiento (y faltan los momentos representados por las paralelas del triángulo AGI) es compensado por los momentos representados por las paralelas del triángulo IEF. Es por tanto evidente que espacios iguales serán atravesados en tiempos iguales por dos móviles en los que uno se mueve a partir del reposo con un movimiento uniformemente acelerado y el otro con un movimiento uniforme de velocidad igual a la mitad del momento más grande de velocidad alcanzado por el primero, como queríamos demostrar.

Demostración de Galileo acerca de la sucesión de los números impares

Finalmente, haremos uso de la interpretación gráfica de los espacios recorridos en el movimiento uniformemente acelerado, desarrollada en los párrafos anteriores, para demostrar la relación de los números impares que resulta del experimento del plano inclinado. En líneas generales seguiremos la demostración de Galileo aunque la hemos reformulado de la siguiente manera:

Sea un móvil que, partiendo del reposo, se mueve con un movimiento uniformemente acelerado durante el intervalo de tiempo t_1. Utilizando el resultado del primer teorema de Galileo sabemos que el espacio recorrido en dicho intervalo será equivalente tanto al área del triángulo AEB como a la del rectángulo de la figura. Como hemos mostrado anteriormente, si el móvil siguiera con una velocidad constante igual al módulo de EB, en el intervalo t_2 recorrería un espacio igual al área de dos rectángulos EBCF. Pero como a intervalos iguales de tiempo el móvil cambia su velocidad en la misma proporción, por estar uniformemente acelerado, debemos sumarle a este espacio el equivalente al área del triángulo AEB (o el rectángulo), por lo que en el intervalo t_2 el móvil habrá recorrido un espacio equivalente al área de tres rectángulos y su velocidad final será el módulo del segmento CE'.



Si el móvil siguiera con velocidad constante igual al módulo de CE' durante el intervalo t_3 recorrería un espacio equivalente al área de cuatro rectángulos E'CDG. Pero, nuevamente como en el intervalo anterior t_2, para obtener el espacio total recorrido en el intervalo t_3 debemos sumarle a este espacio el equivalente al área del triángulo AEB (o un rectángulo más), por lo que el espacio resultante sería equivalente al de cinco rectángulos. Vemos de esta manera que el espacio recorrido en los sucesivos intervalos iguales de tiempo son la sucesión de los números impares:

$$\Delta x_1/\Delta x_1 = 1 \ : \ \Delta x_2/\Delta x_1 = 3 \ : \ \Delta x_3/\Delta x_1 = 5 \ : \ \Delta x_4/\Delta x_1 = 7 \ : \Delta x_5/\Delta x_1 = 9 \text{ , etc,}$$

que era lo que queríamos demostrar.

Síntesis esquemática del método de Galileo

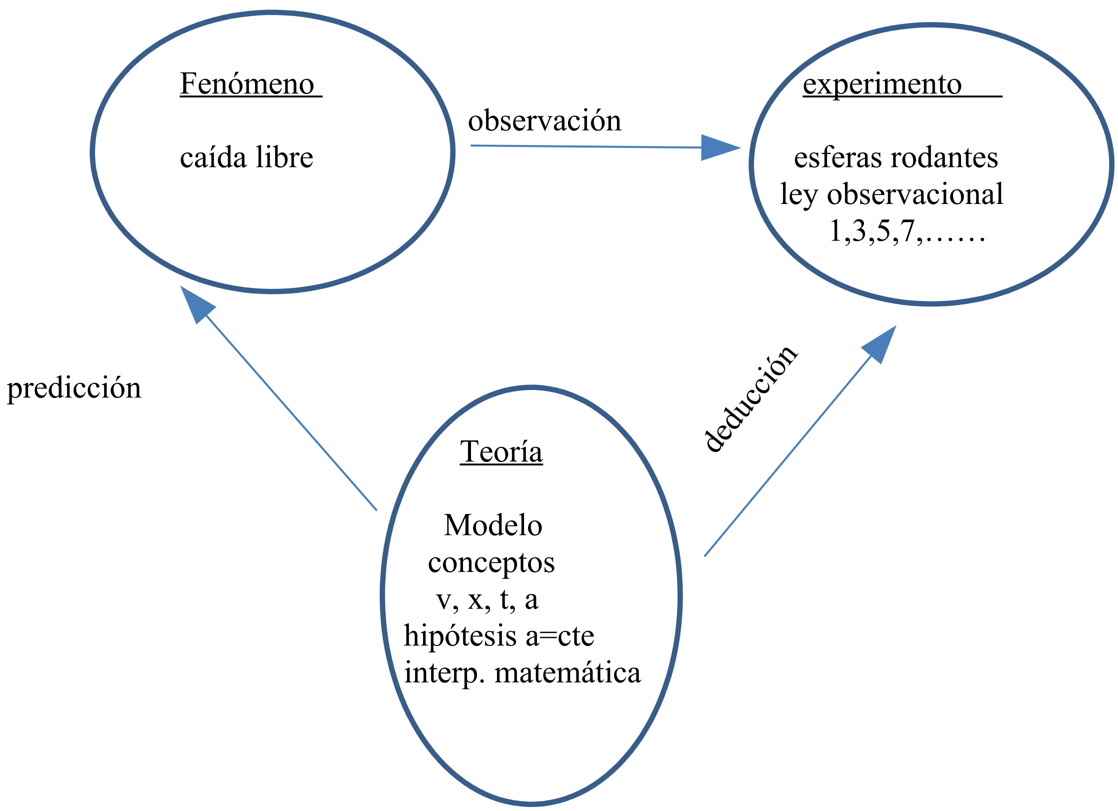
El método construido y utilizado por Galileo para demostrar la constancia de la aceleración durante la caída libre— se denomina:

método hipotético deductivo contrastado con la experiencia,

Posteriormente, este método se transformó en el método que hoy se utiliza en la física.

En nuestro caso particular, la hipótesis consistió en asumir a=cte; mientras que la posibilidad de representar el movimiento acelerado mediante triángulos fue lo que permitió deducir matemáticamente la ley observacional (sucesión de los números impares). Luego, el hecho de haber demostrado matemáticamente (teóricamente) la ley observacional a partir de la hipótesis (imaginada por la mente) le asignó el estatus de verdadera a la hipótesis a=cte.

Esquemáticamente, este método puede representarse de la siguiente manera:



Por completitud hemos incorporado el proceso de predicción, aunque en nuestro caso nos hemos concentrado solamente en la obtención de la ley observacional y en la deducción de ésta a partir de la hipótesis.

Es importante notar el rol fundamental que jugó el proceso de idealización (no tener en cuenta el efecto del aire ni del roce). Gracias a este proceso Galileo logró simplificar el problema del movimiento. A este proceso se lo denomina construcción del modelo y, generalmente, es clave para el diseño de los experimentos.

En la primera parte de su *Discurso sobre dos nuevas ciencias* Galileo desarrolla sus conocimientos sobre la resistencia de los materiales (mecánica); mientras que en la segunda parte desarrolla con una claridad magistral la teoría sobre el movimiento uniforme y el uniformemente acelerado que hemos desarrollado aquí.

Galileo era consciente que no solo había logrado explicar el movimiento de los cuerpos sino que también había desarrollado un método basado en conceptos, hipótesis, modelo, matemática y experiencia con un poder mucho más profundo. En el primer párrafo de la Tercer Jornada de sus *Discursos,* Galileo escribe:

> *Vamos a instituir una ciencia nueva sobre un tema muy antiguo. Tal vez no haya, en la naturaleza, nada más antiguo que el movimiento; y acerca de él son numerosos y extensos los volúmenes escritos por los sabios. Sin embargo, entre sus propiedades, que son muchas y dignas de saberse, encuentro yo no pocas que no hayan sido observadas ni demostradas hasta ahora. Se ha fijado la atención en algunas que son de poca importancia, como por ejemplo, que el movimiento natural de los graves en descenso se acelera continuamente; sin embargo no se ha hallado hasta ahora en qué proporción se lleve a cabo esta aceleración; pues nadie, que yo sepa, ha demostrado que los espacios, que un móvil en caída y a partir del reposo recorre en tiempos iguales, retienen entre sí la misma razón que tiene la sucesión de los números impares a partir de la unidad. Se ha observado que las armas arrojadizas o proyectiles describen una línea en cierto modo curva; sin embargo nadie notó que esa curva era una parábola.*

> *Yo demostraré que esto es así, y también otras cosas muy dignas de saberse; y, lo que es de mayor importancia, dejaré expeditos la puerta y el acceso hacia una vastísima y prestantísima ciencia, cuyos fundamentos serán estas mismas investigaciones, y en la cual, ingenios más agudos que el mío podrán alcanzar mayores profundidades.*

El valor que representó este Discurso para Galileo se ve reflejado en el esfuerzo que hizo a los 71 años para terminarlo en prisión domiciliaria --prácticamente ciego-- con la ayuda de su discípulo Torricelli. Finalmente, lograron sacar el manuscrito de Italia y publicarlo por medio de la editorial holandesa Elsevier en 1638. En 1642 Galileo muere a los 74 años.

Bibliografía:

Diálogos acerca de dos nuevas ciencias, Galileo Galilei. Editorial Losada.

Galileo. Edición de Victor Navarro. Textos Cardinales (Edición Península).

Biografía de la Física. George Gamow. Alianza Editorial.

The origin of modern science. Herbert Butterfield. The Free Press.

Il rinascimento scientifico 1450–1630. Marie Boas. Feltrinelli editore.

Galileo and the inclined plane controversy. Paul D. Sherman, The Physics Theacher, september 1974, página 343.

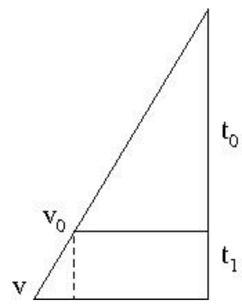
La obra de Galileo y la conformación del experimento en la física. J. L Álvarez y Y. Posadas V. Revista mexicana de física **49** (1), página 61–73. Febrero 2003.

Noticias del planeta Tierra. Galileo Galilei y la revolución científica. Guillermo Boido. A–Z Editora.

Apéndice: relación entre el primer teorema de Galileo y la ley de la cinemática

Vamos a mostrar como el primer teorema nos conduce a la ley de la cinemática, $x = v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$, tal como se enuncia hoy en la escuela. En vez de utilizar la geometría, como lo hizo Galileo, mostraremos que con elementos simples del álgebra es posible deducir en forma bastante inmediata a la ley de la cinemática.

Sea el triángulo AEB de la demostración anterior y dividamos el intervalo de tiempo t en dos intervalos de tiempo t_0 y t_1, no necesariamente iguales, tales que $t = t_0 + t_1$.



Sea además e_0 el espacio recorrido en el intervalo de tiempo t_0 y e_1 el recorrido en el intervalo t_1 tal que el espacio total recorrido $e = e_0 + e_1$. Si las velocidades adquiridas son v_0 después de un tiempo t_0 y v después de haber transcurrido el tiempo t, podemos escribir

$$e_0 = \tfrac{1}{2}\, v_0\, t_0 \qquad\qquad e = \tfrac{1}{2}\, v\, t\,,$$

en donde hemos utilizado el enunciado del teorema anterior. Luego,

$$e_1 = e - e_0 = \tfrac{1}{2}\, v\,(t_0 + t_1) - \tfrac{1}{2}\, v_0\, t_0 = \tfrac{1}{2}\,(v - v_0)\, t_0 + \tfrac{1}{2}\, v\, t_1. \qquad (1)$$

Pero si observamos con cuidado el triángulo AEB vemos que por semejanza de triángulos,

$$v_0 / t_0 = (v - v_0) / t_1 = a \qquad (2)$$

de donde resulta,

$$(v - v_0)\, t_0 = v_0\, t_1\,.$$

Si reemplazamos en la ecuación (1) esta última igualdad tenemos,

$$e_1 = \tfrac{1}{2}\, v_0\, t_1 + \tfrac{1}{2}\, v\, t_1 = \tfrac{1}{2}\,(v_0 + v)\, t_1.$$

Si en esta última ecuación reemplazamos $v = v_0 + a\, t_1$, la cual resulta naturalmente de la ecuación (2) ya que $(v - v_0) / t_1$ es la aceleración, obtenemos el resultado deseado:

$$e_1 = v_0\, t_1 + \tfrac{1}{2}\, a\, t_1^2\,.$$

Por otro lado, la notación algebraica nos permite interpretar al área encerrada por el triángulo AEB o el rectángulo ABFG como el espacio recorrido. Si partimos del reposo el espacio recorrido después de un tiempo t será:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a\, t\, t = \frac{1}{2} v\, t,$$

en donde v es la velocidad adquirida en el tiempo t. Pero ½ vt es la base por la altura sobre dos del triángulo AEB, es decir, su área. Por lo tanto, podemos agregar que la *longitud del segmento CD de la demostración de Galileo es igual al área del triángulo AEB*. Este resultado puede generalizarse para el caso en que el movimiento no parte del reposo. Luego, el espacio e_1 recorrido en el tiempo t_1 de la figura anterior será la suma de las áreas del rectángulo y el triángulo delimitados por la línea de puntos,

$$\text{área} = \text{área rectángulo} + \text{área triángulo}$$

$$e_1 \quad = \qquad v_0\, t_1 \qquad + \qquad \frac{1}{2}\, a\, t_1^2$$

Es importante notar que en todo el análisis precedente hemos obtenido las leyes de la cinemática, y su interpretación gráfica, utilizando álgebra y geometría. Un tratamiento más riguroso requiere la introducción de conceptos mucho más avanzados como funciones, derivadas e integrales.