FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Licenciatura en Matemática- Profesorado en Matemática

ALGEBRA LINEAL - 2011

PRÁCTICA 14

Eduardo A. Santillan Marcus
Paola Tolomei - Yanina Lucarini

---

1. Supongamos que $T : V \to V$ es lineal. Muestre que cada uno de los siguientes subespacios es invariante por T:
   I)- $\{0\}$
   II)- V
   III)- $Nul\,T$
   IV)- $Im\,T$

2. Supongamos que $\{W_i\}$ es una colección de subespacios invariantes por T de un espacio vectorial V. Muestre que $W = \bigcap_i W_i$ también es invariante por T.

3. Halle todos los subespacios invariantes de $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ considerada como un operador sobre $\mathbb{R}^2$.

4. Sea $\hat{T}$ la restricción de un operador T a un subespacio invariante W, esto es, $\hat{T}(w) = T(w)$ para todo $w \in W$. Pruebe que:
   I)- Para todo polinomio $f(t)$, $f(\hat{T})(w) = f(T)(w)$.
   II)- El polinomio mínimo de $\hat{T}$ divide al polinomio mínimo de T.

5. Sea $T : V \to V$ lineal, y supongamos que $T = T_1 \bigoplus T_2$ con respecto a una descomposición de V en suma directa invariante por T $V = U \bigoplus W$. Muestre que:
   I)- $m(t)$ es el mínimo común múltiplo de $m_1(t)$ y $m_2(t)$, donde $m(t)$, $m_1(t)$ y $m_2(t)$ son los polinomios mínimos de T, T_1 y T_2 respectivamente.
   II)- $\Delta(t) = \Delta_1(t)\Delta_2(t)$, donde $\Delta(t)$, $\Delta_1(t)$ y $\Delta_2(t)$ son los polinomios característicos de T, T_1 y T_2 respectivamente.

6. Sea $T : V \to V$ lineal. Supongamos que para cada $v \in V$, $T^k(v) = 0$ pero $T^{k-1}(v) \neq 0$. Pruebe que:
   I)- $S = \{v, T(v), \cdots, T^{k-1}(v)\}$ es linealmente independiente.
   II)- El subespacio W generado por S es invariante por T.
   III)- La restricción $\hat{T}$ de T a W es nilpotente de índice k.
   IV)- Relativo a la base $\{T^{k-1}(v), \cdots, T(v), v\}$ de W, la matriz de T es de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego la anterior matriz cuadrada de orden k es nilpotente de orden k.

7. Sea $T : V \to V$ lineal. Sean $U = Nul\,T^i$ y $W = Nul\,T^{i+1}$. Muestre que $U \subset W$ y que $T(W) \subset U$.

8. Sea $T : V \to V$ lineal. Sean $X = Nul\,T^{i-2}$, $Y = Nul\,T^{i-1}$ y $Z = Nul\,T^i$. Por el problema anterior, $X \subset Y \subset Z$. Supongamos que $\{u_1, \cdots, u_r\}$, $\{u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_s\}$ y $\{u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_s, w_1, \cdots, w_t\}$ son bases de X, Y y Z respectivamente. Muestre que $S = \{u_1, \cdots, u_r, T(w_1), \cdots, T(w_t)\}$ está contenido en Y y es linealmente independiente.

9. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   I)- Muestre que A es nilpotente de índice 2.
   II)- Halle la matriz nilpotente M en forma canónica que es similar a A.

10. Determinar todas las posibles formas canónicas de Jordan para un operador lineal $T : V \to V$ cuyo polinomio característico es $\Delta(t) = (t-2)^3\,(t-5)^2$.

11. Determinar todas las posibles formas canónicas de Jordan para una matriz de orden 5 cuyo polinomio mínimo es $m(t) = (t-2)^2$.

12. Muestre que las siguientes matrices nilpotentes de orden n son similares:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Mostrar que toda matriz compleja es similar a su traspuesta.

14. Muestre que todas las matrices complejas A de orden n tales que $A^n = I$ son similares.

15. Supongamos que A es una matriz compleja que únicamente tiene valores propios reales. Muestre que A es similar a una matriz que tiene únicamente componentes reales.