CAPITULO 8 LA FORMA NORMAL DE JORDAN

§ 1 SUMA DIRECTA E INVARIANCIA

Definición 1 SEA V UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE EL CAMPO F. SEAN U Y W SUBESPACIOS DE V. SE DICE QUE V ES UNA SUMA DIRECTA DE U Y W SI PARA TODO ELEMENTO $v \in V$ EXISTEN ELEMENTOS <u>ÚNICOS</u> $u \in U$ Y $w \in W$ TALES QUE $v = u + w$. LO NOTAREMOS $V = U \oplus W$

Observación 1 SI U, W SON SUBESPACIOS DEL ESPACIO VECTORIAL V TALES QUE $V = U + W$ Y ADEMÁS $U \cap W = \{0\}$ ENTONCES $V = U \oplus W$

Teorema 1 SEA V UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN FINITA SOBRE EL CAMPO F. SEA W UN SUBESPACIO DE V. ENTONCES EXISTE UN SUBESPACIO U TAL QUE V ES LA SUMA DIRECTA DE U Y W.

Teorema 2 SI V ES UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSION FINITA SOBRE EL CAMPO F, TAL QUE $V = U \oplus W$ CON U, W SUBESPACIOS, ENTONCES

$$\dim V = \dim U + \dim W$$

Definición 2 SEA V UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE EL CAMPO F, Y SEA $T: V \to V$ UN OPERADOR LINEAL SOBRE V. UN SUBESPACIO W DE V SE DICE INVARIANTE POR T SI T APLICA A W EN SÍ MISMO. ESTO ES, SI $v \in W$ ENTONCES $T(v) \in W$.

Ejemplo 1 SEA v_1 UN VECTOR PROPIO DE T, Y SEA V_1 EL ESPACIO GENERADO POR v_1. ENTONCES V_1 ES UN SUBESPACIO INVARIANTE POR T.

Ejemplo 2 SEA λ UN VALOR PROPIO DE T, Y SEA V_λ EL SUBESPACIO DE V QUE CONSTA DE TODO $v \in V$ TAL QUE $Tv = \lambda v$ (VALE DECIR, EL ESPACIO PROPIO DE λ). ENTONCES V_λ ES INVARIANTE POR T.

Ejemplo 3 SEA $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ TAL QUE

$$T(x, y, z) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta,\ x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta,\ z)$$

ES EL OPERADOR LINEAL QUE ROTA CADA VECTOR SOBRE EL EJE Z UN ÁNGULO θ.

OBSERVEMOS QUE CADA VECTOR $w = (a, b, 0) \in W$ (EL PLANO XY) PERMANECE EN W POR LA APLICACIÓ[N] DE T, LUEGO W ES INVARIANTE POR T.

Teorema 3 SEA $T: V \to V$ LINEAL Y $p(t)$ UN POLINOMIO CUALQUIERA. ENTONCES $Nul(p(T))$ ES INVARIANTE POR T.

Demostración SEA $v \in Nul(p(T))$, ESTO ES $p(T)(v) = 0$

NECESITAMOS PROBAR QUE $T(v) \in Nul(p(T))$, VALE DECIR QUE $p(T)(T(v)) = 0$

COMO $p(t)\,t = t\,p(t)$, TENEMOS $p(T)T = Tp$[(T)]

LUEGO

$$p(T)(T(v)) = T\,p(T(v)) = T(0) = 0$$

Teorema 4 Sea $p(t) \in \mathcal{P}$, el espacio de todas las funciones polinomicas sobre el campo F. Supongamos que $p = p_1 p_2$, donde p_1, p_2 son polinomios de grado ≥ 1 y su máximo común divisor es igual a 1. Sea $T: V \to V$ un operador lineal. Supongamos que $p(T) = 0$. Sean

$$W_1 = \mathcal{N}ul(p_1(T)) \quad ; \quad W_2 = \mathcal{N}ul(p_2(T))$$

Entonces $V = W_1 \oplus W_2$

Demostración Por suposición, existen polinomios q_1, q_2 tales que

$$q_1(t)\,p_1(t) + q_2(t)\,p_2(t) = 1$$

De donde

$$q_1(T)\,p_1(T) + q_2(T)\,p_2(T) = I \qquad (*)$$

Sea $v \in V$. Entonces

$$v = q_1(T)\,p_1(T)(v) + q_2(T)\,p_2(T)(v)$$

El primer término de esta suma pertenece a W_2, ya que

$$p_2(T)\,q_1(T)\,p_1(T)(v) = q_1(T)\,p_1(T)\,p_2(T)(v)$$
$$= q_1(T)\,p(T)(v) = 0$$

Análogamente, el segundo término está en W_1.

Así, V es la suma de W_1 y W_2.

Para mostrar que esta suma es directa, se debe probar que una expresión

$$v = w_1 + w_2$$

CON $w_1 \in W_1$ Y $w_2 \in W_2$, ESTÁ DETERMINADA EN FORMA ÚNICA POR v. AL APLICAR $q_1(T)\,p_1(T)$ A ESTA SUMA SE OBTIENE

$$q_1(T)\,p_1(T)(v) = q_1(T)\,p_1(T)\,w_2$$

PUES $p_1(T)\,w_1 = 0$. APLICANDO LA EXPRESIÓN $(*)$ A w_2 SE OBTIENE

$$w_2 = q_1(T)\,p_1(T)\,w_2$$

DEBIDO A QUE $p_2(T)\,w_2 = 0$. EN CONSECUENCIA

$$w_2 = q_1(T)\,p_1(T)(v)$$

Y POR LO TANTO w_2 ESTÁ DETERMINADO DE MANERA ÚNICA. ANÁLOGAMENTE, $w_1 = q_2(T)\,p_2(T)(v)$ ESTÁ DETERMINADO DE MANERA ÚNICA Y POR CONSECUENCIA LA SUMA ES DIRECTA.

Teorema 5 SEA V UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE $\mathbb{C}$, Y SEA $T: V \to V$ UN OPERADOR LINEAL. SEA $P(t)$ UN POLINOMIO TAL QUE $P(T) = 0$, Y SEA

$$P(t) = (t-\alpha_1)^{m_1} \cdots (t-\alpha_r)^{m_r}$$

SU FACTORIZACIÓN, DONDE $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ SON LAS RAICES DISTINTAS ENTRE SÍ. SEA $U_i = \mathrm{Nul}\,(T-\alpha_i I)^{m_i}$. ENTONCES V ES LA SUMA DIRECTA DE LOS SUBESPACIOS $U_1, \ldots, U_r$.

Demostración EJERCICIO (AYUDA: POR INDUCCIÓN)

§2 El Lema de Schur

Definición 3 Sea V un espacio vectorial sobre F, y sea S un conjunto de operadores de V. Sea W un subespacio de V. Se dice que W es un subespacio S-invariante si BW está en W para todo $B \in S$. Se dice que V es un S-espacio simple si $V \neq \{0\}$ y si los únicos subespacios S-invariantes son V mismo y el subespacio nulo.

Proposición 1 Sea $T: V \to V$ un operador tal que $TU = UT$ para toda $U \in S$. Entonces $\operatorname{Im} T$ y $\operatorname{Nul} T$ son subespacios S-invariantes de V.

Demostración Sea $w \in \operatorname{Im} T$, por ejemplo $w = Tv$ con $v \in V$. Entonces $Uw = UTv = TUv$. Esto muestra que Uw también está en $\operatorname{Im} T$ y por lo tanto que $\operatorname{Im} T$ es S-invariante.

Sea $u \in \operatorname{Nul} T$. Entonces $TUu = UTu = 0$, dede donde Uu también está en $\operatorname{Nul} T$, el cual resulta S-invariante.

Proposición 2 Sea S un conjunto de operadores de V. Sea $T: V \to V$ un operador. Supongamos que $TU = UT$ para todo $U \in S$. Si p es un polinomio sobre F, entonces $p(T)U = Up(T)$.

Demostración Ejercicio

Teorema 5 Lema de Schur

Sea V un espacio vectorial sobre F y sea

S UN CONJUNTO DE OPERADORES DE V. SUPONGAMOS QUE V ES UN S-ESPACIO SIMPLE. SEA $T: V \to V$ UNA TRANSFORMACION LINEAL TAL QUE $TU = UT$ PARA TODO $U \in S$. ENTONCES T ES INVERTIBLE O T ES LA APLICACIÓN NULA.

Demostración Supongamos $T \neq 0$. Por la Proposición 1 $\mathcal{N}ul\, T = \{0\}$ e $\mathcal{I}m\, T = V$. Por lo tanto T es invertible.

§3 La Forma Normal de Jordan

Definición 4 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Sea $T: V \to V$ una transformación lineal. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ y $v \in V$ con $v \neq 0$. Diremos que v es $(T - \alpha I)$ cíclico si existe un entero $r \geq 1$ tal que $(T - \alpha I)^r v = 0$. El mínimo entero positivo r que tiene esta propiedad recibe el nombre de período de v relativo a $T - \alpha I$. Si r es dicho periodo, entonces tenemos que $(T - \alpha I)^k v \neq 0$ para cualquier entero k tal que $0 \leq k < r$.

Lema 1 Si $v \neq 0$ es $(T - \alpha I)$ cíclico, con periodo r, entonces los elementos

$$v, (T - \alpha I)v, \ldots, (T - \alpha I)^{r-1} v$$

son l.i.

Demostración Sea $U = T - \alpha I$, PARA SIMPLIFICAR LA NOTACIÓN. UNA RELACIÓN DE DEPENDENCIA LINEAL ENTRE LOS ELEMENTOS ANTERIORES SE PUEDE EXPRESAR DE LA MANERA SIGUIENTE:

$$p(U)v = 0$$

DONDE p ES UN POLINOMIO $\neq 0$ DE GRADO $\leq r-1$, A SABER

$$c_0 v + c_1 Uv + \dots + c_s U^s v = 0$$

CON $p(t) = c_0 + c_0 t + \dots + c_s t^s$ Y $s \leq r-1$.

TENEMOS TAMBIÉN QUE $U^r v = 0$ POR HIPÓTESIS.

Sea $g(t) = t^r$. Si h ES EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE p Y g, ENTONCES SE PUEDE ESCRIBIR

$$h = p_1 p + g_1 g$$

DONDE p_1, g_1 SON POLINOMIOS, Y ASÍ

$$h(U) = p_1(U)\, p(U) + g_1(U)\, g(U).$$

SE DEDUCE QUE $h(U)v = 0$. Pero $h(t)$ DIVIDE A t^r Y ES DE GRADO $\leq r-1$, ASÍ QUE $h(t) = t^d$ CON $d < r$. ESTO CONTRADICE LA HIPÓTESIS QUE r ES UN PERIODO DE v, Y ASÍ PROBAMOS EL LEMA.

Definición 5 EL ESPACIO VECTORIAL V DE dim r SE CONOCE COMO CÍCLICO SI EXISTE ALGÚN NÚMERO α Y UN ELEMENTO $v \in V$ QUE ES $(T - \alpha I)$ CÍCLICO DE ORDEN r

Observación 2 Si V es cíclico, entonces

$$\{(T-\alpha 1)^{r-1}v, \dots, (T-\alpha 1)v, v\} \qquad (*)$$

es una base de V. Con respecto a esta base la matriz de T es particularmente simple. Para cada k se tiene

$$T(T-\alpha 1)^k v = (T-\alpha 1)^{k+1} v + \alpha (T-\alpha 1)^k v$$

Por definición, se infiere que la matriz asociada para T con respecto a esta base es igual a la matriz triangular

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene a α en la diagonal, a 1 arriba de la diagonal y cero en las demás entradas. Se puede observar que $(T-\alpha 1)^{r-1}v$ es un vector propio para T, con valor propio α.

La base $(*)$ se conoce como base de Jordan para T.

Nota 1 Supongamos que V se expresa como una suma directa de subespacios T-invariantes

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$$

Y SUPONGAMOS QUE CADA V_i ES CÍCLICO. SI SE SELECCIONA UNA BASE DE JORDAN PARA CADA V_i, ENTONCES LA SUCESIÓN DE ESTAS BASES FORMA UNA BASE PARA V, CONOCIDA NUEVAMENTE COMO UNA BASE DE JORDAN PARA T. CON RESPECTO A ESTA BASE, LA MATRIZ PARA T SE DIVIDE POR CONSIGUIENTE EN BLOQUES

$$\left(\begin{array}{cccc}
\boxed{\begin{matrix}\alpha_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha_1\end{matrix}} & & & \\
& \boxed{\begin{matrix}\alpha_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha_2\end{matrix}} & & \\
& & \boxed{\begin{matrix}\alpha_3 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha_3\end{matrix}} & \\
& & & \ddots
\end{array}\right)$$

EN CADA UNO DE LOS BLOQUES SE TIENE UN VALOR PROPIO α_i EN LA DIAGONAL. TENEMOS 1 ARRIBA DE LA DIAGONAL Y CEROS EN LAS DEMÁS ENTRADAS. ESTA MATRIZ SE CONOCE COMO FORMA NORMAL DE JORDAN PARA T.

Teorema 6 SEA V UN ESPACIO DE DIMENSIÓN FINITA SOBRE $\mathbb{C}$, Y SEA $V \neq \{0\}$. SEA $T: V \to V$ UN OPERADOR. ENTONCES V SE PUEDE EXPRESAR COMO UNA SUMA DIRECTA DE SUBESPACIOS CÍCLICOS T-INVARIANTES.

Demostración SIN PERDER GENERALIDAD, SUPONGAMOS QUE EXISTE UN NÚMERO α Y UN ENTERO $r \geq 1$ TAL QUE $(T-\alpha I)^r = 0$. SEA $U = T - \alpha I$. ENTONCES $U^r = 0$. SUPONGAMOS QUE r ES EL MÍNIMO DE DICHOS ENTEROS. ENTONCES $U^{r-1} \neq 0$. EL SUBESPACIO UV NO ES IGUAL A V DEBIDO A QUE SU DIMENSIÓN ES ESTRICTAMENTE MENOR QUE LA DE V. (POR QUÉ? PENSAR)

POR INDUCCIÓN, SE PUEDE ESCRIBIR UV COMO UNA SUMA DIRECTA DE SUBESPACIOS T-INVARIANTES (O U-INVARIANTES) QUE SON CÍCLICOS; SEA

$$UV = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$$

TAL QUE W_i TIENE UNA BASE QUE CONSTA DE ELEMENTOS $U^k w_i$ PARA ALGÚN VECTOR CÍCLICO $w_i \in W_i$ DE PERÍODO r_i. SEA $v_i \in V$ TAL QUE $U v_i = w_i$.

ENTONCES, CADA UNO DE LOS v_i ES UN VECTOR CÍCLICO, DEBIDO A QUE

$$\text{SI } B^{r_i} w_i = 0 \quad \text{ENTONCES } B^{r_i+1} v_i = 0$$

SEA V_i EL SUBESPACIO DE V GENERADO POR LOS ELEMENTOS $B^k v_i$ PARA $k = 1, \ldots, r_i + 1$.

AFIRMAMOS QUE EL SUBESPACIO V' IGUAL A LA SUMA

$$V' = V_1 + \cdots + V_m$$

ES UNA SUMA DIRECTA. HAY QUE PROBAR QUE CUALQUIER ELEMENTO u DE ESTA SUMA SE PUEDE EXPRESAR DE MANERA ÚNICA EN LA FORMA

$$u = u_1 + \cdots + u_m$$

CUALQUIER ELEMENTO DE V_i ES DEL TIPO $p_i(U)v_i$ DONDE p_i ES UN POLINOMIO DE GRADO $\leq r_i + 1$. SUPONGAMOS QUE

$$p_1(U)v_1 + \cdots + p_m(U)v_m = 0 \qquad (1)$$

APLICANDO U Y OBSERVANDO QUE $U p_i(U) = p_i(U)U$, SE OBTIENE

$$p_1(U)w_1 + \cdots + p_m(U)w_m = 0$$

SIN EMBARGO $W_1 + \cdots + W_m$ ES UNA DESCOMPOSICIÓN EN SUMA DIRECTA DE UV, DE DONDE

$$p_i(U)w_i = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, m$$

POR CONSIGUIENTE, t^{r_i} DIVIDE A $p_i(t)$ Y, EN PARTICULAR, t DIVIDE A $p_i(t)$. ASÍ SE PUEDE ESCRIBIR

$$p_i(t) = g_i(t)t$$

PARA ALGÚN POLINOMIO g_i Y POR LO TANTO $p_i(U) = g_i(U)U$.

SE DEDUCE DE (1) QUE

$$g_1(U)w_1 + \cdots + g_m(U)w_m = 0$$

NUEVAMENTE, t^{r_i} DIVIDE A $g_i(t)$, DE DONDE t^{r_i+1} DIVIDE A $p_i(t)$ Y POR CONSIGUIENTE $p_i(U)v_i = 0$. ESTO PRUEBA LO QUE SE QUERÍA: V' ES UNA SUMA DIRECTA DE $V_1, \ldots, V_m$.

A PARTIR DE LA CONSTRUCCIÓN DE V' SE OBSERVA QUE $UV' = UV$, DEBIDO A QUE CUALQUIER ELEMENTO EN UV ES DE LA FORMA $p_1(U)w_1 + \cdots + p_m(U)w_m$

CON ALGUNOS POLINOMIOS p_i Y POR CONSIGUIENTE ES LA IMAGEN BAJO U DEL ELEMENTO

$$p_1(U)v_1 + \cdots + p_m(U)v_m$$

QUE ESTÁ EN V'. DE ESTO SE CONCLUYE QUE

$$V = V' + \mathcal{N}ul\, U.$$

CIERTAMENTE, SEA $v \in V$. ENTONCES $Uv = Uv'$ PARA ALGÚN $v' \in V'$ Y POR LO TANTO $U(v - v') = 0$. ASÍ

$$v = v' + (v - v'),$$

Y SE PRUEBA ASÍ QUE $V = V' + \mathcal{N}ul\, U$. POR SUPUESTO, ESTA SUMA NO ES DIRECTA. SIN EMBARGO, SEA $\mathcal{B}'$ UNA BASE DE JORDAN DE V'. SE PUEDE EXTENDER $\mathcal{B}'$ A UNA BASE DE V USANDO ELEMENTOS DE $\mathcal{N}ul\, U$. A SABER, SI $\{u_1, \ldots, u_s\}$ ES UNA BASE DE $\mathcal{N}ul\, U$, ENTONCES

$$\{\mathcal{B}', u_{j_1}, \ldots, u_{j_l}\}$$

ES UNA BASE DE V PARA ÍNDICES CONVENIENTES $j_1, \ldots, j_l$. CADA UNO DE LOS u_j SATISFACE $Uu_j = 0$, DE DONDE u_j ES UN VECTOR PROPIO PARA T Y EL ESPACIO DE UNA DIMENSION GENERADO POR u_j ES T-INVARIANTE Y CÍCLICO. SE DENOTARÁ ESTE ESPACIO POR U_j. ENTONCES SE TIENE

$$\begin{aligned} V &= V' \oplus U_{j_1} \oplus \cdots \oplus U_{j_l} \\ &= V_1 \oplus \cdots \oplus V_m \oplus U_{j_1} \oplus \cdots \oplus U_{j_l} \end{aligned}$$

DANDO ASÍ LA EXPRESIÓN DESEADA DE V COMO UNA SUMA DIRECTA DE SUBESPACIOS CÍCLICOS. ESTO PRUEBA EL TEOREMA.

Nota 2 ¿CÓMO HALLAR LA FORMA NORMAL DE JORDAN PARA UNA MATRIZ T?

VEAMOSLO CON UN EJEMPLO: CONSIDEREMOS LA SIGUIENTE MATRIZ

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

EL POLINOMIO CARACTERÍSTICO DE T ES

$$\det(T-\lambda I) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 8$$

ENTONCES LOS AUTOVALORES SON $\lambda_1 = 2$ CON MULTIPLICIDAD $m(\lambda_1) = 1$ Y $\lambda_2 = -2$ CON MULTIPLICIDAD $m(\lambda_2) = 2$

EL ESPACIO PROPIO DE $\lambda_1 = 2$ ES $V(\lambda_1) = Nul(T-2I)$

$$V_1(2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (T-2I)x = 0\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + 3y + z = 0 \wedge 2x + y + 3z = 0\}$$

COMO $\dim V_1(2) = 1 = m(\lambda_1)$, BASTA ENCONTRAR UN VECTOR EN $V_1(2)$ PARA TENER UNA BASE. POR EJEMPLO $u_1 = (1,1,-1)$, Y ASÍ $V_1(2) = Gen\{(1,1,-1)\}$

EL ESPACIO PROPIO DE $\lambda_2 = -2$ ES $V(\lambda_2) = Nul(T+2I)$

$$V(-2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (T+2I)x = 0\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 0 \wedge 2x + y - z = 0\}$$

ENTONCES $\dim V(-2) = 1 \neq m(\lambda_2)$. LUEGO T NO ES DIAGONALIZABLE. LLAMEMOS $V_1(-2) = V(-2)$

ARMAMOS EL SEGUNDO ESPACIO PROPIO ASOCIADO A λ_2:

$$V_2(-2) = Nul\,(T+2I)^2$$

$$V_2(-2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (T+2I)^2 x = 0\} =$$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0\}$

OBSERVEMOS QUE $Nul(T+2I) \subseteq Nul(T+2I)^2$ Y

$\dim V_2(-2) = 2 = m(-2)$. ENTONCES VAMOS A BUSCAR UNA BASE DE $V_2(-2)$ QUE CONTENGA UN VECTOR DE $V_1(-2)$ COMO SIGUE:

i) ELEGIMOS UN VECTOR CUALQUIERA $u_3 \in V_2(-2) - V_1(-2)$, POR EJEMPLO $u_3 = (0,0,1)$

ii) SEA AHORA $u_2 = (T+2I)u_3$, LUEGO $u_2 = (1,-1,1)$

ENTONCES $\{u_2, u_3\}$ ES UNA BASE DE $V_2(-2)$ Y ADEMÁS $u_2 \in V_1(-2)$

PENSANDO A T COMO UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL, POR EL MODO EN QUE HEMOS ELEGIDO A $\{u_1, u_2, u_3\}$ TENEMOS QUE $Tu_1 = 2u_1$, $Tu_2 = -2u_2$, $Tu_3 = u_2 - 2u_3$

LUEGO LA MATRIZ ASOCIADA A T EN LA BASE $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ ES

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = J$$

PODEMOS COMPROBAR QUE T Y J SON SIMILARES VIA

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$ LA MATRIZ DE CAMBIO DE BASE.