

Cardinalidad

Pablo Verdes

LCC

8 de marzo de 2017

¿Por qué estudiamos cardinalidad?

- Recordemos nuestro objetivo: **modelar el proceso de cálculo**.
- ¿Cuál es el cálculo más elemental? ¿Sumar? No, es contar.

Contar: finito vs. infinito

- Supongamos que se nos pide ordenar conjuntos según tamaño.
- Si los conjuntos son finitos, la tarea es fácil: los ordenamos de acuerdo a cuántos elementos hay en cada conjunto.
- ¿Pero qué hacemos si algunos conjuntos son infinitos? ¿Qué sentido tiene 'más grande' o 'más pequeño' si no les podemos asignar un número a su tamaño?
- Para resolver este problema se introduce el concepto de **cardinalidad**, que generaliza la idea de 'tamaño' al caso de conjuntos infinitos.
- Entenderemos mejor el proceso de contar conjuntos finitos, y también veremos que existen 'diferentes tipos' de conjuntos infinitos.

Conjuntos contables

- Consideremos un conjunto finito, por ej. las letras del alfabeto:

$$S = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$$

- ¿Qué significa **contar** los elementos de este conjunto?
- En esencia, **contar es numerar**: asignar a cada elemento del conjunto un único número natural, comenzando en 1 y de manera ascendente:

a	b	c	\dots	x	y	z
\uparrow	\uparrow	\uparrow		\uparrow	\uparrow	\uparrow
\downarrow	\downarrow	\downarrow		\downarrow	\downarrow	\downarrow
1	2	3	\dots	26	27	28

- Obs. que también se puede pensar como la creación de una **biyección** desde el conjunto S al subconjunto de los naturales $\{1, 2, 3, \dots, 28\}$.

(Repaso) Funciones biyectivas

$f : X \rightarrow Y$ es **biyectiva** si es a la vez **inyectiva** y **sobreyectiva**

- f **inyectiva**:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o bien

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- f **sobreyectiva**:

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \mid f(x) = y$$

Definiciones

- Dos conjuntos A y B tienen la **misma cardinalidad** (son **equipotentes**) si existe una biyección de A en B .
Notación: $\#A = \#B$, $\text{card}(A) = \text{card}(B)$, $A \sim B$
- La **cardinalidad** de un conjunto A es **anterior** a la de un conjunto B si existe una función inyectiva f de A en B .
Notación: $\#A \preceq \#B$
- Si además ninguna de las inyecciones $f : A \rightarrow B$ es sobreyectiva, entonces $\#A \prec \#B$.
- Un conjunto es **finito** cuando es vacío o equipotente a $\{1, 2, \dots, n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En caso contrario, se dice **infinito**.
- Un conjunto A es **contable** o **finito numerable** si $A \sim X$ con $X \subset \mathbb{N}$. Si $A \sim \mathbb{N}$ se dice que A es **infinito numerable**. En caso contrario, se dice que A es **no numerable**.
- Cardinalidad de los números naturales: $\#\mathbb{N} = \aleph_0$ (aleph cero).

Unión numerable de conjuntos numerables

- Un conjunto F se dice una **familia de conjuntos** si sus elementos son conjuntos.
- F es una familia **indexada de conjunto índice** I (no vacío) si existe una función con dominio I y recorrido F .
- Llamando S_α con $\alpha \in I$ a los elementos de la familia F , podremos entonces escribir $F = \{S_\alpha \mid \alpha \in I\}$.
- Consideremos ahora el caso particular en que los elementos S_α son conjuntos numerables (finitos o infinitos).
- Supongamos además que el conjunto índice I es numerable (finito o infinito).
- En dicho caso, la unión de los elementos de la familia $\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$ será también numerable.

Teorema 1

La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

Demostración:

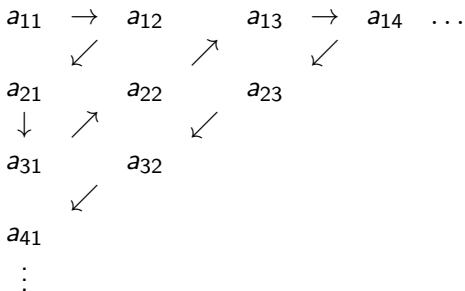
- Nos pondremos en el peor caso posible: supondremos que tanto los conjuntos S_α como el conjunto índice I son infinito numerables.
- Dado que el conjunto índice I es infinito numerable, sin pérdida de generalidad podemos considerar de aquí en más que $I = \mathbb{N}$.
- Podemos escribir entonces $F = \{S_\alpha \mid \alpha \in I\} = \{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
- Debemos mostrar que la unión $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ es equipotente a \mathbb{N} .
- Dado que S_i es infinito numerable, podemos escribir

$$S_i = \{a_{ik} \mid k \in \mathbb{N}\} = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, \dots\}$$

- Observemos que podemos organizar a los elementos de la unión de acuerdo a la siguiente tabla:

$$\begin{array}{ccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array}$$

- Podemos entonces contarlos de la siguiente manera:



- Por lo tanto, $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ es equipotente a \mathbb{N} .



Corolarios

- **Corolario 1.1:** $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

D/ Escribimos a \mathbb{Z} como u.n.c.n.:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \{1, 2, 3, \dots\}$$

- **Corolario 1.2:** $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

D/ Escribimos a \mathbb{Q} como u.n.c.n.:

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \quad A_k = \{\dots, -\frac{2}{k}, -\frac{1}{k}, \frac{0}{k}, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots\}$$

- **Corolario 1.3:** $\mathbb{N}^d \sim \mathbb{N}$

D/ Por inducción en d .

Caso $d = 1$: vale trivialmente.

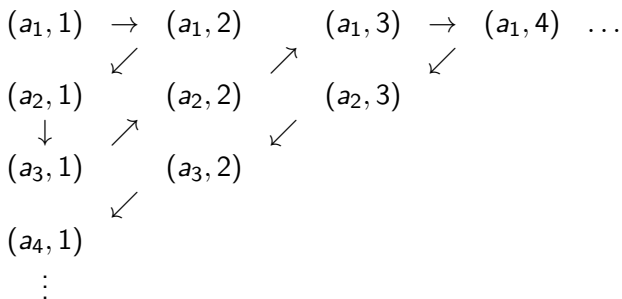
Ahora probemos que si \mathbb{N}^d es numerable, \mathbb{N}^{d+1} también.

Corolarios (cont)

Para mostrar que \mathbb{N}^{d+1} es numerable, escribimos $\mathbb{N}^{d+1} = \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}$.

Como \mathbb{N}^d es numerable, podemos denotar a sus elementos a_1, a_2, a_3, \dots

Disponemos \mathbb{N}^{d+1} de acuerdo a la siguiente tabla y usamos el mismo argumento que en el Teorema 1:



Conjuntos no numerables

- Por lo visto hasta aquí, pareciera que todos los conjuntos son numerables.
- Esto no es cierto, como veremos en el siguiente:

Teorema 2

El conjunto \mathbb{R} de los números reales es no numerable.

Demostración:

- Alcanza con probar que el intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ es no numerable. (¿Por qué?)
- Representamos a sus elementos por su expansión decimal infinita, por ejemplo $0.229384112598\dots$

(Para evitar ambigüedades, no usaremos expansiones con un número infinito de nueves.)

- Por el absurdo, supongamos que $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ es numerable.
- Habrá entonces en $(0, 1)$ un primer elemento, segundo, tercero, etc.

- Podemos entonces listarlos del siguiente modo:

$$\begin{array}{l}
 0.\underline{a_{11}}a_{12}a_{13}a_{14}\dots \\
 0.a_{21}\underline{a_{22}}a_{23}a_{24}\dots \\
 0.a_{31}a_{32}\underline{a_{33}}a_{34}\dots \\
 0.a_{41}a_{42}a_{43}\underline{a_{44}}\dots \\
 \vdots
 \end{array}$$

- Consideremos ahora el número $b = 0.b_1b_2b_3b_4\dots$ donde cada b_k puede ser cualquier dígito **excepto** a_{kk} , es decir, los subrayados en la diagonal.
- Es claro que $b \in (0, 1)$ pero no figura en el listado, ya que difiere de cada número de la lista en por lo menos un dígito.
- Esto constituye una contradicción, luego el intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ es no numerable. \square

Conjuntos no numerables

- El intervalo $(0, 1)$, y por lo tanto \mathbb{R} , es no numerable.
- De hecho, tienen la misma cardinalidad (queda como ejercicio).
Notación: $\#\mathbb{R} = c$
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, \mathbb{Q} numerable, \mathbb{R} no numerable $\Rightarrow \mathbb{I}$ no numerable
- Es claro que $\aleph_0 < c$.
- ¿Existen conjuntos con una cardinalidad ‘mayor’ que c ?
- Podríamos intentar con productos cartesianos de \mathbb{R} ;
sin embargo, se puede demostrar que $\forall d \in \mathbb{N} \quad \#(\mathbb{R}^d) = c$.
- La respuesta a la pregunta anterior es **sí**: existen conjuntos con una cardinalidad ‘mayor’ que c .
- Veremos ahora un método que, dado un conjunto S (finito o infinito), nos permite construir otro con una cardinalidad estrictamente ‘mayor’.

El conjunto de partes de un conjunto

- **Definición:** Dado un conjunto S , el **conjunto de partes** de S , denotado $\mathcal{P}(S)$, es el conjunto de todos los subconjuntos de S .

- Ejemplo:

$$S = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- En el caso finito, es claro que $\mathcal{P}(S)$ tiene estrictamente más elementos que S .

(De hecho, si S tiene n elementos, $\mathcal{P}(S)$ tendrá 2^n elementos —ejercicio).

- Ahora extenderemos dicho resultado al caso de conjuntos infinitos. Más precisamente, demostraremos que:

$$\text{card}(S) < \text{card}(\mathcal{P}(S))$$

Teorema 3

Para todo conjunto S , $\text{card}(S) \prec \text{card}(\mathcal{P}(S))$.

Demostración:

- $f(x) = \{x\}$ es una inyección de S en $\mathcal{P}(S)$. Por lo tanto
$$\text{card}(S) \preceq \text{card}(\mathcal{P}(S))$$
- Ahora veamos que no existe función de S en $\mathcal{P}(S)$ sobreyectiva.
- Por el absurdo: sea $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ sobreyectiva.
- Todo elemento del codominio tendrá pre-imagen:

$$\forall A \in \mathcal{P}(S) \quad \exists a \in S \mid f(a) = A$$

$$\forall A \subset S \quad \exists a \in S \mid f(a) = A$$

- Hay dos posibilidades: (1) $a \in A$ (2) $a \notin A$
- Definamos un nuevo conjunto:

$$B = \{a \in S \mid a \notin f(a)\} \subset S$$

(elementos de S que no pertenecen a su imagen)

- $B \in \mathcal{P}(S)$, f sobreyectiva $\Rightarrow \exists b \in S \mid f(b) = B$
- Pregunta: $\exists b \in B$?
- Supongamos que $b \in B$. Entonces, por definición de B , b no pertenece a su imagen: $b \notin f(b) = B$. Absurdo.
- Supongamos que $b \notin B$. Entonces, por definición de B , b pertenece a su imagen: $b \in f(b) = B$. Absurdo.
- Por lo tanto $\nexists f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ sobreyectiva. \square

- **Consecuencia:** dado un conjunto S , podemos construir una sucesión de conjuntos de cardinalidad 'creciente':

$$S, \mathcal{P}(S), \mathcal{P}(\mathcal{P}(S)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))), \dots$$

En particular:

$$\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))), \dots$$

- ¿Será \mathbb{N} el conjunto infinito más 'pequeño'? Respuesta: sí.

Teorema 4: (El conjunto infinito más pequeño es \mathbb{N})

Para todo conjunto infinito A , $\aleph_0 \preceq \text{card}(A)$.

Demostración:

- Sea A un conjunto infinito.
- A infinito $\Rightarrow A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_1 \in A$
- A infinito $\Rightarrow A \neq \{x_1\} \Rightarrow \exists x_2 \in A \mid x_2 \neq x_1$
- A infinito $\Rightarrow A \neq \{x_1, x_2\} \Rightarrow \exists x_3 \in A \mid x_3 \neq x_1, x_2$
- A infinito $\Rightarrow A \neq \{x_1, x_2, x_3\} \Rightarrow \exists x_4 \in A \mid x_4 \neq x_1, x_2, x_3$
- ...
- Así, se puede construir una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ de elementos de A tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.
- Definiendo $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ tal que $f(i) = x_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, tenemos que f es inyectiva. Luego $\aleph_0 \preceq \text{card}(A)$. \square

Cierre

- ¿Qué hace un programa? Desde el punto de vista de la máquina, sus entradas y salidas son cadenas de 0s y 1s.
- Podemos decir entonces que un programa es una $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
- Recíprocamente: dada una $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ arbitraria, ¿podemos escribir un programa que la calcule?
- La teoría de cardinalidad permite responder esta pregunta (ver último ejercicio de la práctica):

$$\text{card}(\{p \mid p \text{ programa}\}) \prec \text{card}(\{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\})$$

- Por lo tanto, existen infinitos posibles cálculos para los cuales no se puede escribir un programa. (Análogamente, la mayoría de los números reales no puede ser escrita en ningún formalismo que consista de secuencias de símbolos sobre un alfabeto numerable.)
- ¿Cuáles son? ¿Se pueden resolver cambiando el lenguaje?
- Estas son algunas de las preguntas que consideraremos en la materia.