

## Práctica 3: Métodos de integración numérica

---

Alumno:Alonso Pablo

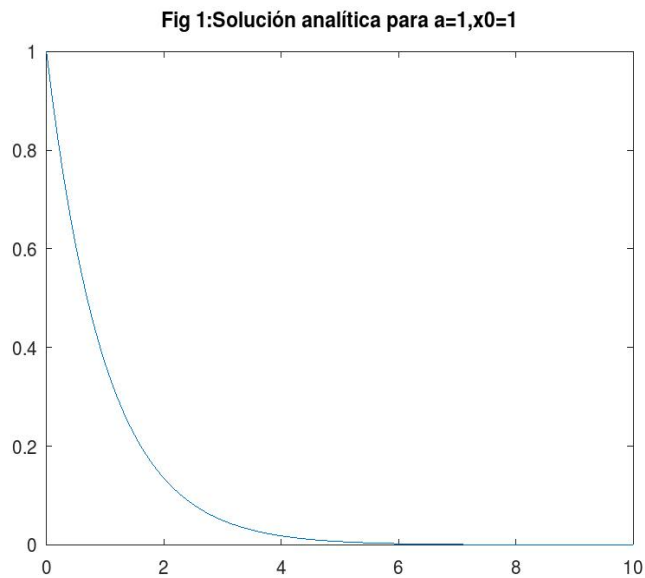
1)

1-

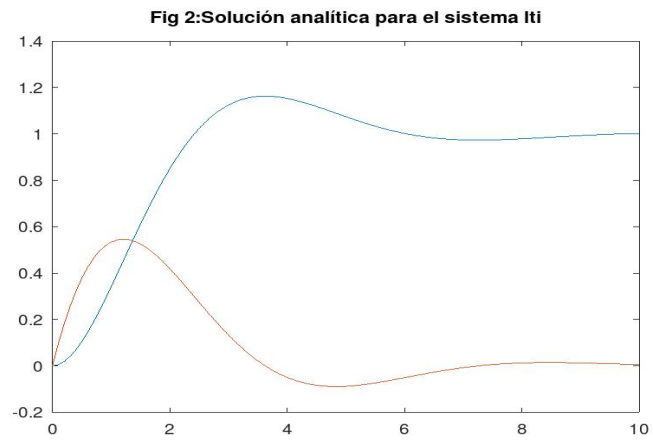
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = -ax(t) &\iff \frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) \iff \frac{dx(t)}{x(t)} = -adt \iff \int \frac{dx(t)}{x(t)} = \\ -a \int dt &\iff \ln(x(t)) = c_1 - at \iff x(t) = e^{c_1 - at} = Ce^{-at} \\ &\text{con } C = e^{c_1}. \end{aligned}$$

Luego tenemos que  $x(0) = C$

3-

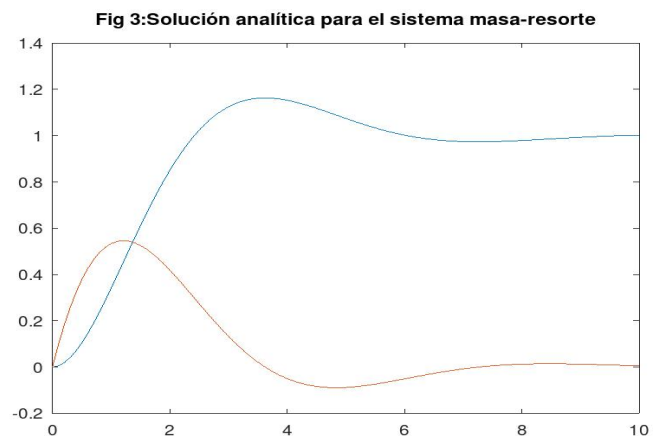


2)

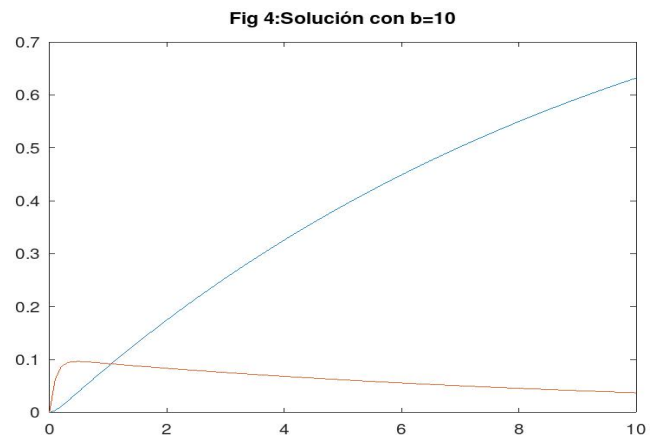
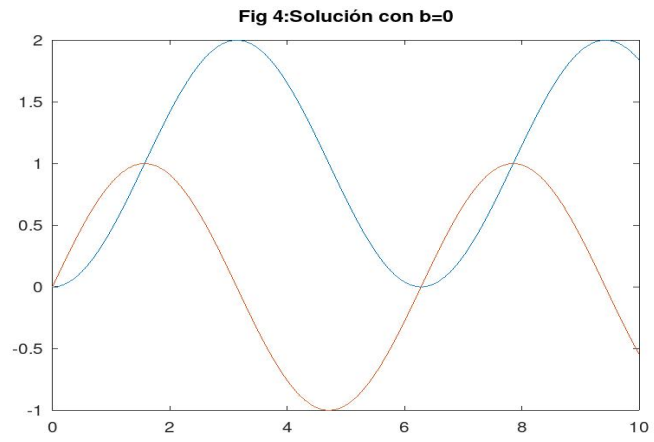


3)

1-

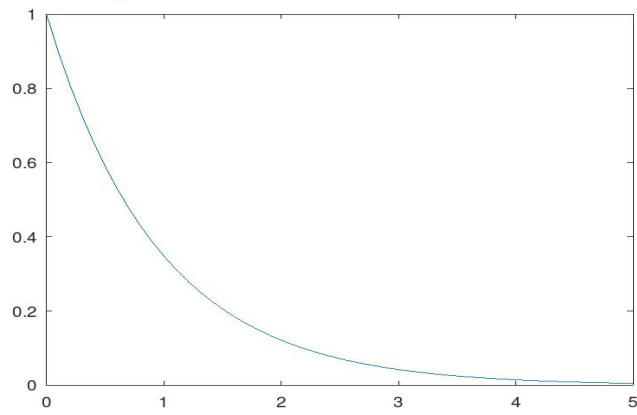


2-

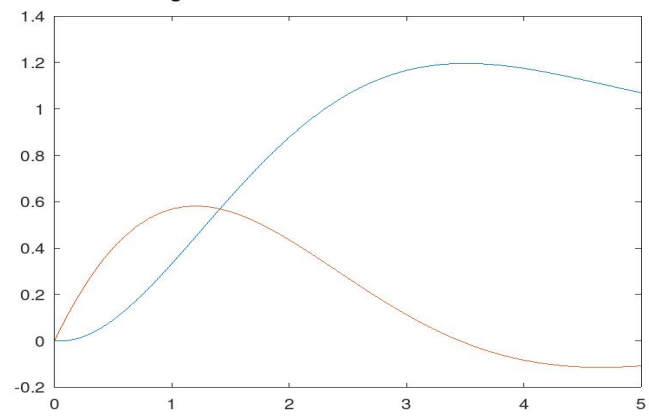


4)

**Fig 5: Absorción del farmaco usando Forward Euler**

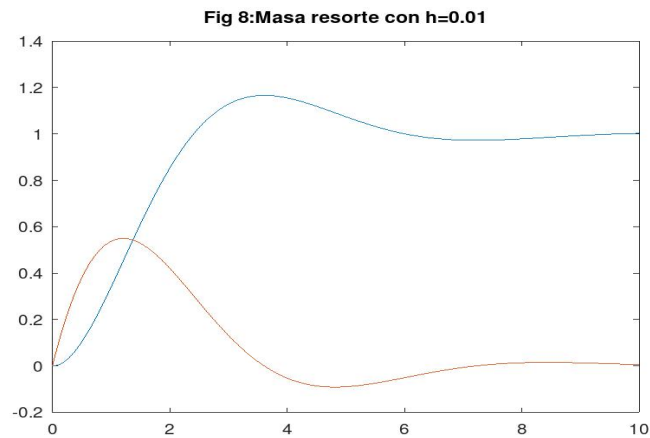
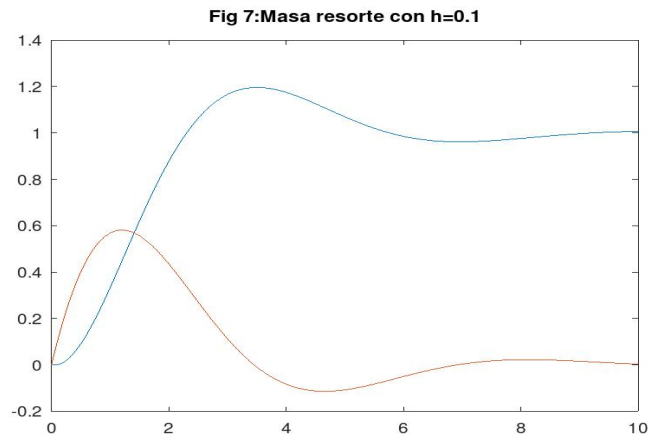


**Fig 6: Masa resorte usando Forward Euler**



5)

1-



Los resultados del error en el primer paso fueron:

Para  $h=0.1$  :  $9.8293e-03$

Para  $h=0.01$  :  $9.9833e-05$

Dado que Forward Euler es de orden 1, los errores obtenidos para cada paso  $h$  son proporcionales a  $h^2$ . Como se espera, al disminuir 10 veces el paso, el error disminuye 100 veces.

2-

Los errores máximos durante la simulación fueron:

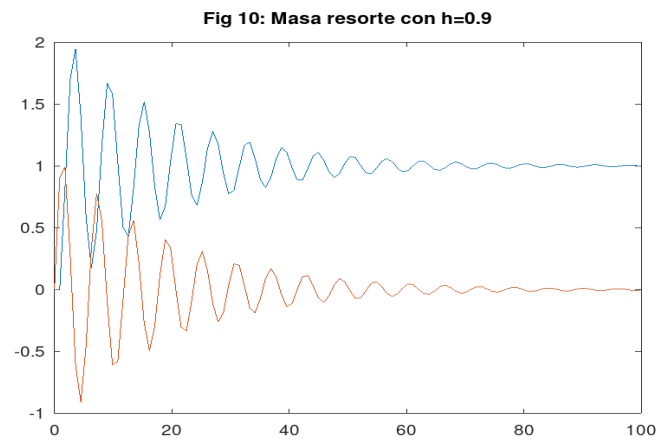
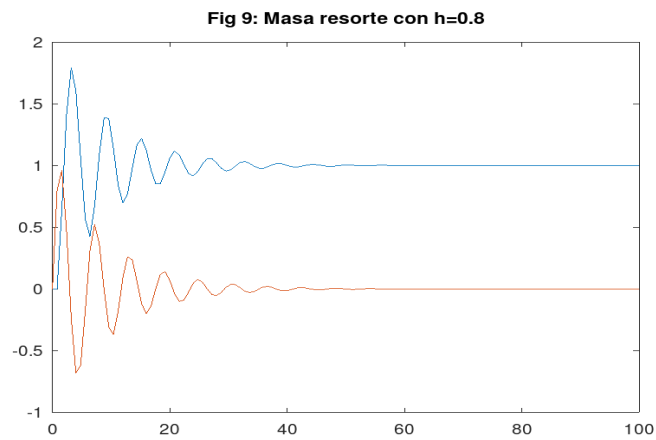
Para  $h = 0.1$  :  $0.066139$

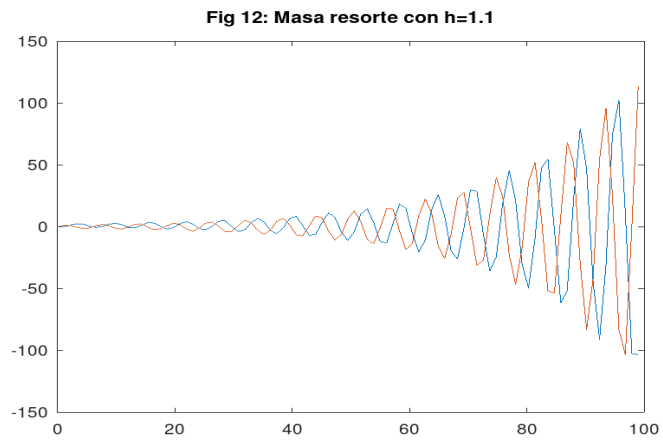
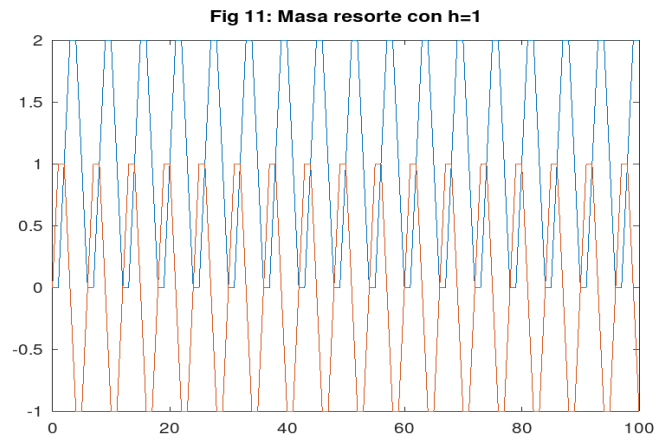
Para  $h=0.01$  :  $6.1432e-03$

El máximo error cometido durante la simulación para cada paso es proporcional a  $h^2$ . Para los métodos de orden 1, disminuir 10 veces el paso implica disminuir 10 el máximo error de simulación,

6)

1-



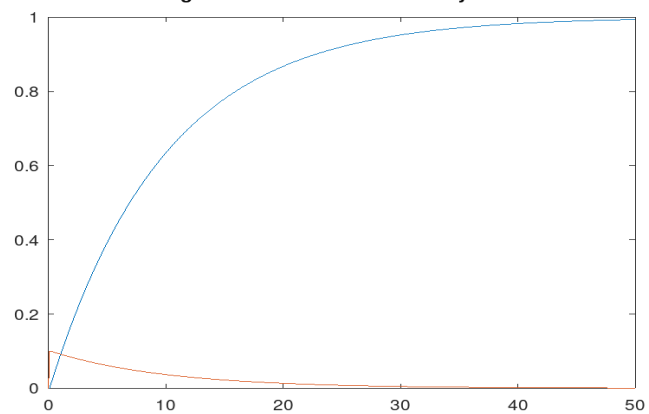


Se observa que la estabilidad numérica es preservada por Forward Euler hasta  $h = 0.9$ .

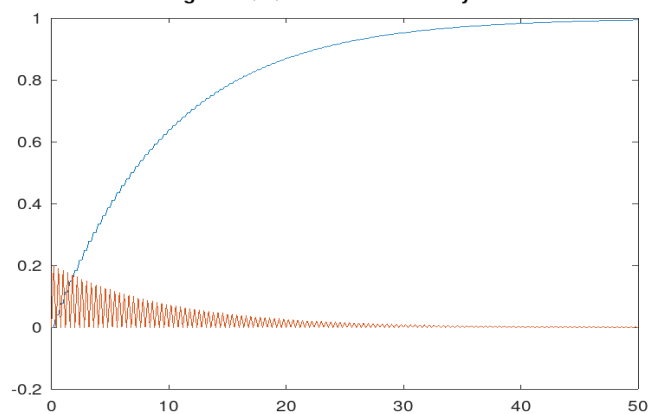
**2-**

Para  $b=10$  (mayor roce)

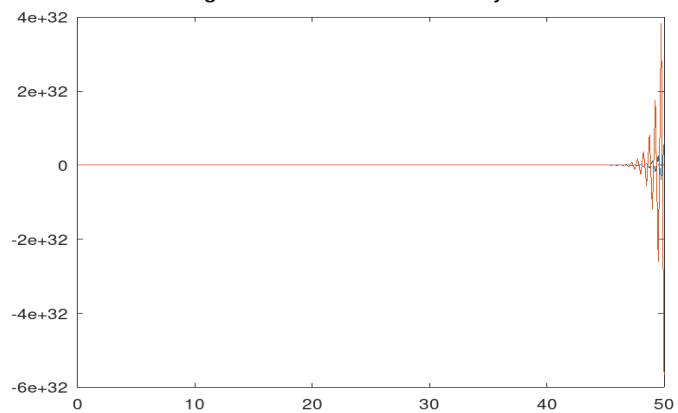
**Fig 13: Masa resorte con  $h=0.1$  y  $b=10$**



**Fig 14: Masa resorte con  $h=0.2$  y  $b=10$**



**Fig 15: Masa resorte con  $h=0.25$  y  $b=10$**





### 3-

Se vio que Forward Euler converge si y solo si se cumple :  $|h * \lambda + 1| < 1$ , donde  $h * \lambda + 1 = \lambda_d$  y  $\lambda_d$  son los autovalores de la matriz de evolución del sistema discreto que se obtiene a partir de usar Forward Euler en un sistema LTI. Obteniendo los autovalores de la matriz A correspondiente a cada b usado en los puntos anteriores, se puede despejar h de la siguiente forma:

$$|h * \lambda + 1| < 1 \iff -1 < h * \lambda < 0$$

Dado que  $h > 0$  tenemos que  $\lambda < 0$ , luego:

$$-1 < -h * |\lambda| < 0 \iff 0 < h * |\lambda| < 1 \iff h < |\lambda|^{-1}$$

Lo anterior se tiene que cumplir para todos los autovalores de la matriz A.

Para  $b = 1$ :

$$\lambda_1 = -0.5 + 0.8660i$$

$$\lambda_2 = -0.5 - 0.8660i$$

$$\therefore h < 1$$

Para  $b = 10$ :

$$\lambda_1 = -0.1010$$

$$\lambda_2 = -9.8990$$

$$\therefore h < 0.1$$

Para  $b = 0$ :

$$\lambda_1 = i$$

$$\lambda_2 = -i$$

En este caso los autovalores son imaginarios puros por lo tanto el sistema oscila.

## 7)

### 1-

Error en primer paso:

$$h = 0.1 \rightarrow 9.0896e - 03$$

$$h = 0.01 \rightarrow 9.9157e - 05$$

Máximo error de simulación:

$$h = 0.1 \rightarrow 0.056461$$

$$h = 0.01 \rightarrow 6.0471e - 03$$

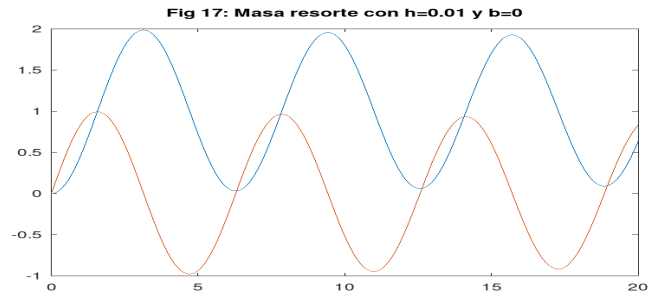
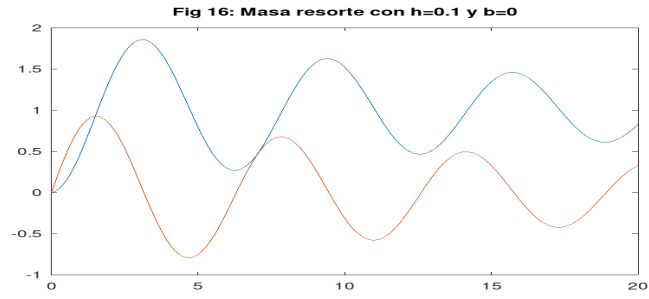
Al disminuir 10 veces el tamaño del paso, el error en el primer paso disminuye 100 veces, mientras que en el máximo error de simulación disminuye 10 veces, con lo cual el error del primer paso sigue siendo proporcional a  $h^2$  mientras que el máximo error de simulación sigue siendo proporcional a  $h$  tal y como ocurre con Forward Euler.

2-

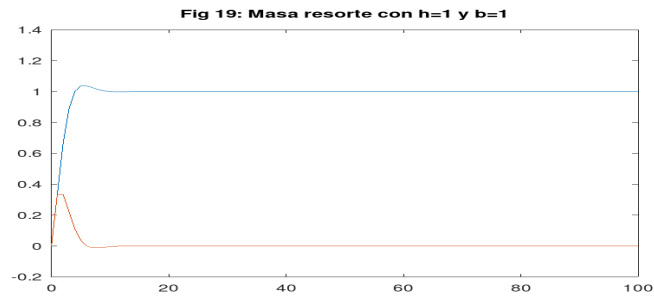
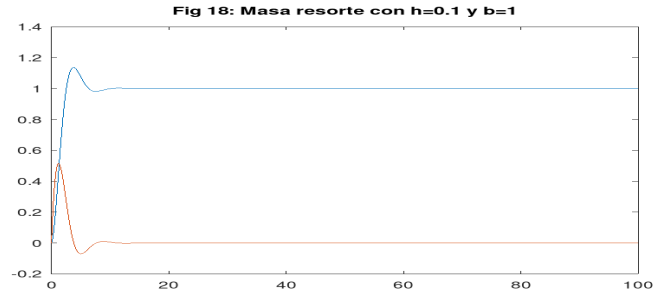
Se sabe que se tiene que cumplir  $|\frac{1}{1-\lambda h}| < 1$ .

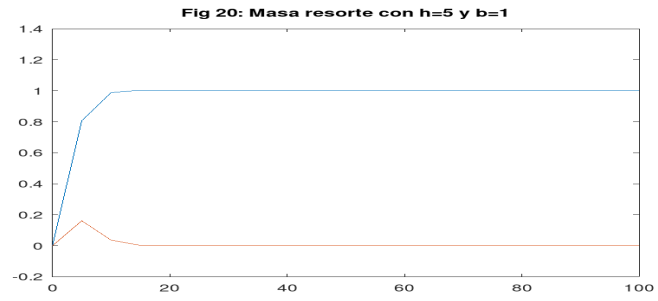
Si  $\lambda$  es una constante se puede despejar  $h$ :

$|1 - \lambda h| > 1 \iff \lambda h < 0$ , dado que  $h > 0$  se tiene  $\lambda < 0$ .

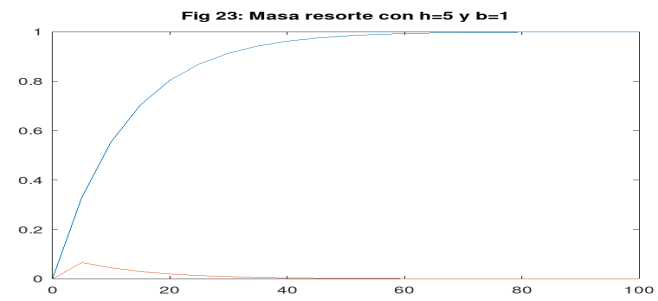
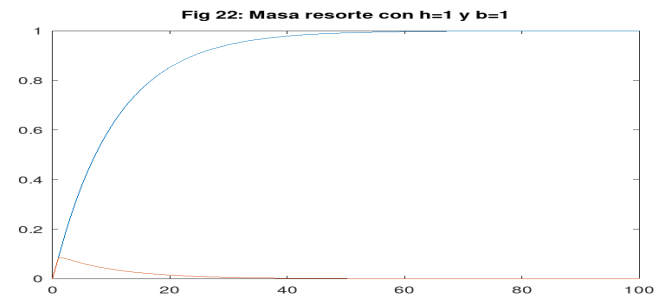
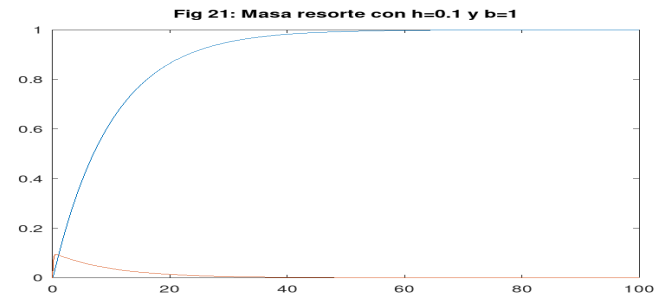


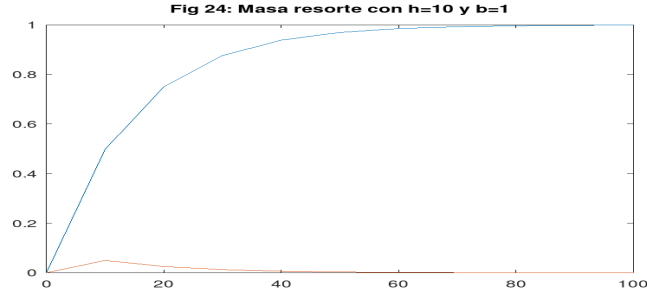
Para  $b = 0$ , los autovalores tienen parte real igual a 0, por lo que el sistema oscila para cualquier paso.





Para  $b=1$ , los autovalores tienen parte real negativa y convergen con cualquier paso.





Para  $b=10$  lo mismo que para  $b=1$ .

8)

1-

Error en primer paso:

$$h = 0.1 \rightarrow 1.7067e - 04$$

$$h = 0.01 \rightarrow 1.6708e - 07$$

Máximo error de simulación:

$$h = 0.1 \rightarrow 2.4063e - 03$$

$$h = 0.01 \rightarrow 2.3020e - 05$$

Para Heun se observa que al ser un método de orden 2, al disminuir el paso 10 veces el error en el primer paso disminuye 1000 veces mientras que el error máximo obtenido disminuye 100 veces.

2-

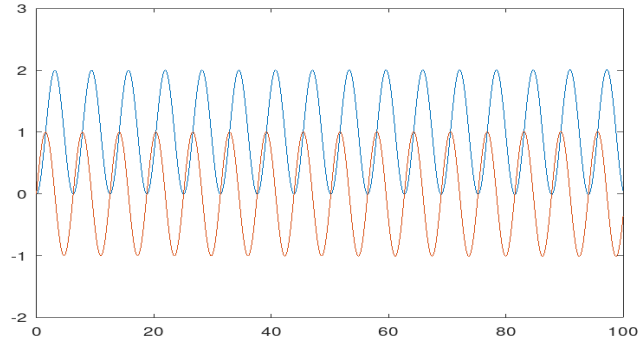
Se tiene que  $|1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}| < 1$ , es decir  $\begin{cases} 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} < 1 \\ 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} > -1 \end{cases}$

$$1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} < 1 \iff h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} < 0 \iff \frac{h^2\lambda^2}{2} < -h\lambda \iff h\lambda < -2 \iff h < \frac{-2}{\lambda}$$

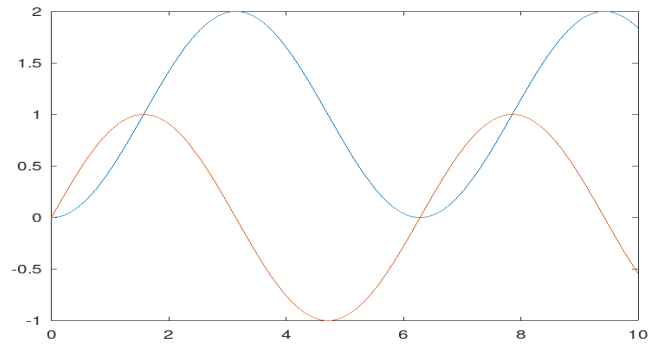
$h > 0$  implica que  $\lambda < 0$ , luego  $h < \frac{2}{|\lambda|}$ .

$1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} > -1 \iff h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} > -2 \iff h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} + 2 > 0$ , lo cual vale siempre.

**Fig 25: Masa resorte con  $h=0.1$  y  $b=0$**

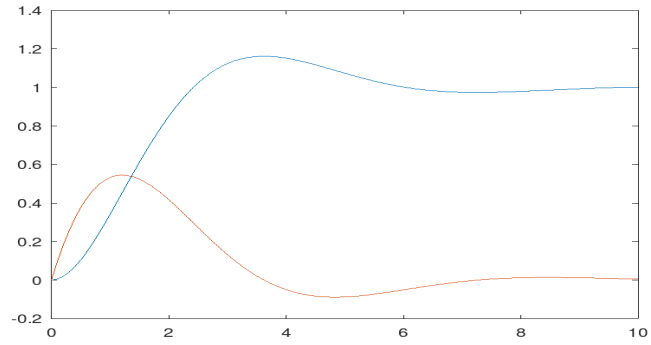


**Fig 26: Masa resorte con  $h=0.01$  y  $b=0$**

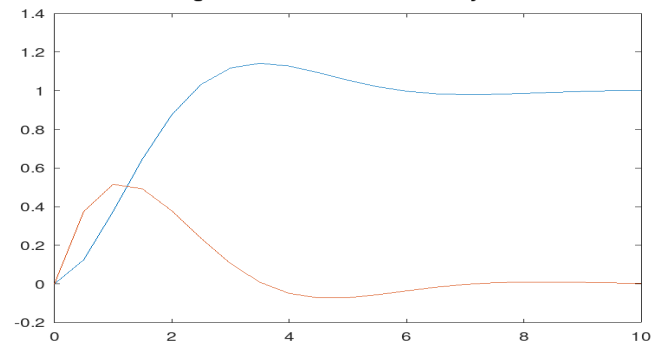


Para  $b=0$ ,  $A$  tiene autovalores imaginarios puros. Luego no se cumple  $\lambda < 0$ .

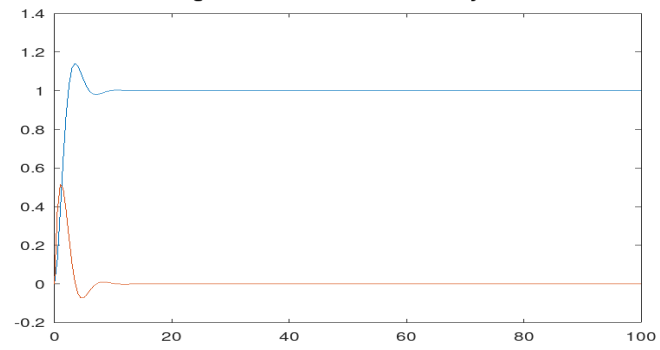
**Fig 27: Masa resorte con  $h=0.1$  y  $b=1$**



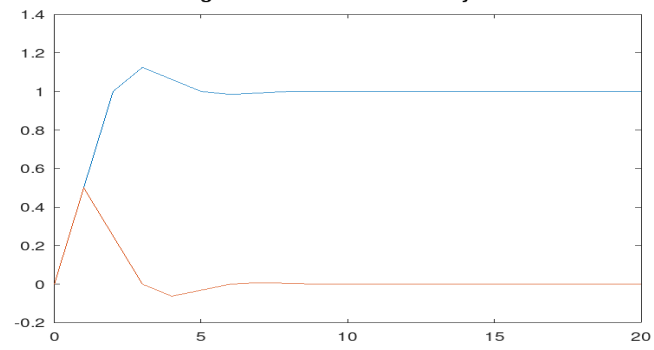
**Fig 28: Masa resorte con  $h=0.5$  y  $b=1$**



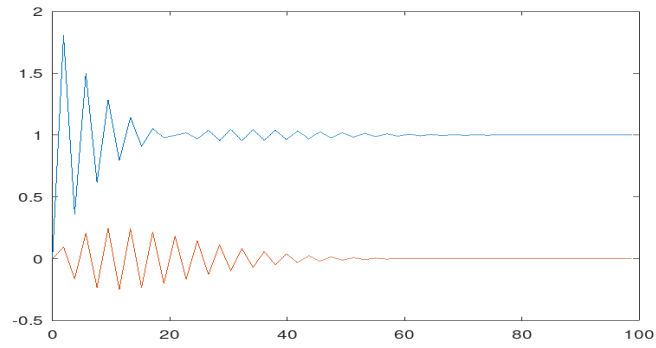
**Fig 28: Masa resorte con  $h=0.5$  y  $b=1$**



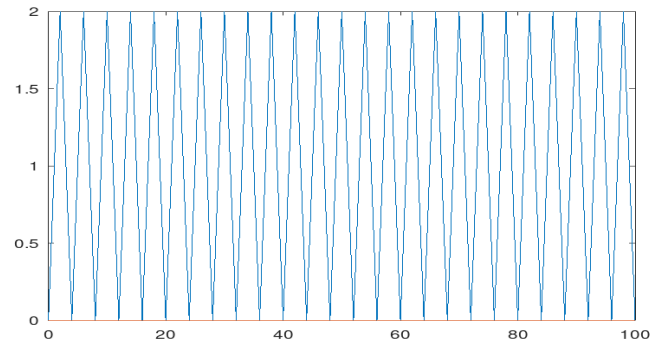
**Fig 29: Masa resorte con  $h=1$  y  $b=1$**



**Fig 30: Masa resorte con  $h=1.9$  y  $b=1$**

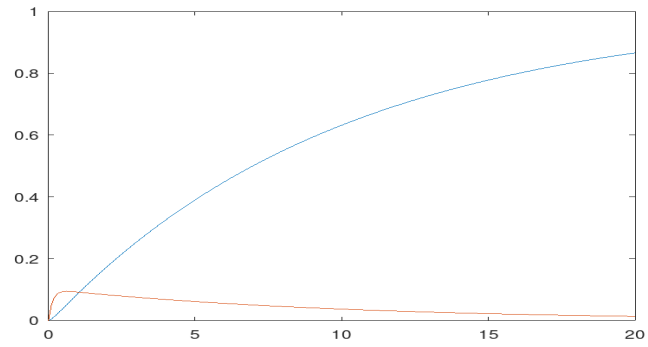


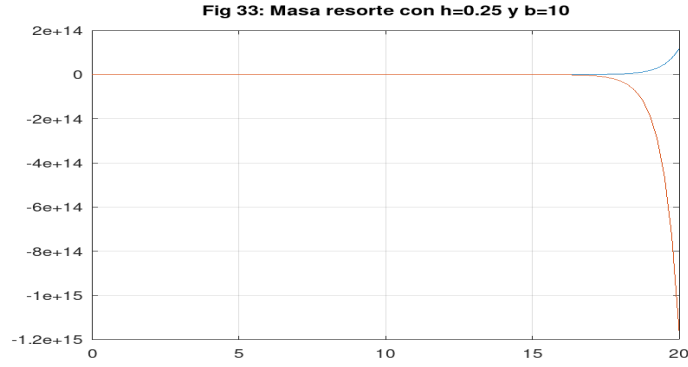
**Fig 31: Masa resorte con  $h=2$  y  $b=1$**



Para  $b=1$ , se tiene que  $|\lambda_i| \approx 1$ , luego basta tomar  $h < 2$ .

**Fig 32: Masa resorte con  $h=0.1$  y  $b=10$**





Para  $b=10$  se tiene que  $\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \approx 10$ , luego basta tomar  $h < 0.2$ .

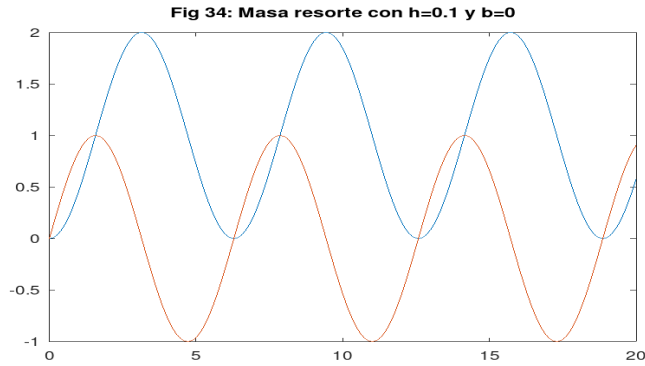
9)

Se tiene que  $|(1 - \frac{1}{2}h\lambda)^{-1}(1 + \frac{1}{2}h\lambda)| < 1$ , es decir  $\begin{cases} (1 - \frac{1}{2}h\lambda)^{-1}(1 + \frac{1}{2}h\lambda) < 1 \\ (1 - \frac{1}{2}h\lambda)^{-1}(1 + \frac{1}{2}h\lambda) > -1 \end{cases}$

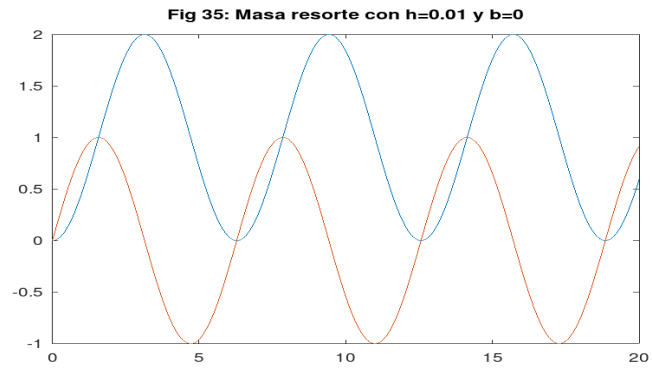
$(1 - \frac{1}{2}h\lambda)^{-1}(1 + \frac{1}{2}h\lambda) < 1 \iff 1 + \frac{1}{2}h\lambda < 1 - \frac{1}{2}h\lambda \iff \frac{1}{2}h\lambda < -\frac{1}{2}h\lambda \iff h\lambda < 0$

$h > 0$  implica  $\lambda < 0$ .

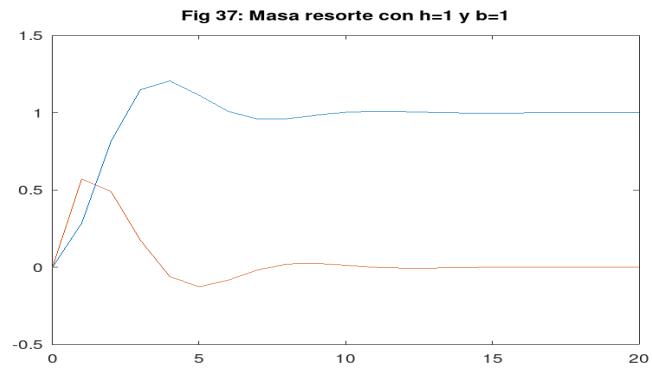
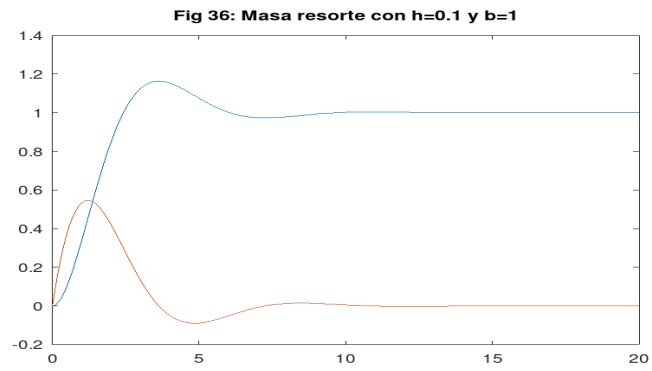
$(1 - \frac{1}{2}h\lambda)^{-1}(1 + \frac{1}{2}h\lambda) > -1 \iff 1 + \frac{1}{2}h\lambda > \frac{1}{2}h\lambda - 1$  lo cual se cumple siempre.

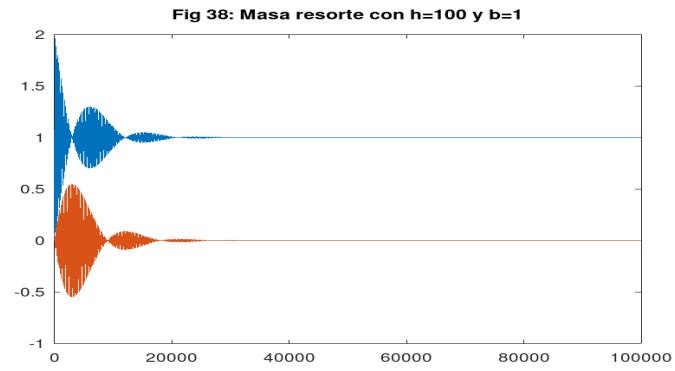




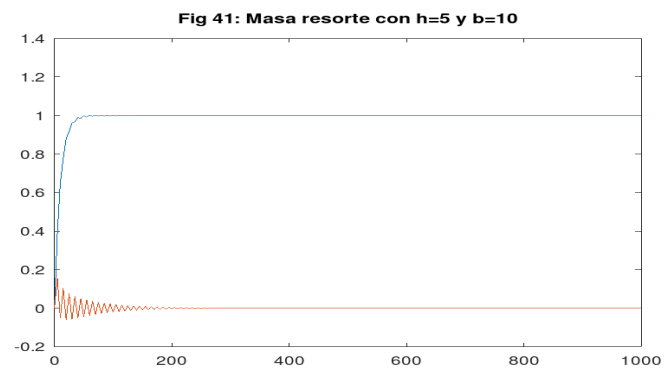
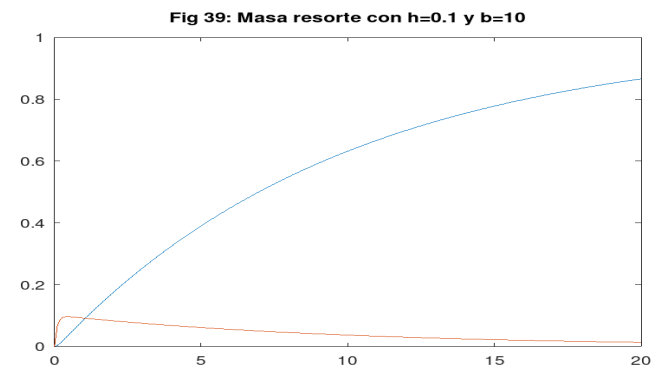


Para  $b=0$ , los autovalores son imaginarios puros por lo que el sistema diverge.



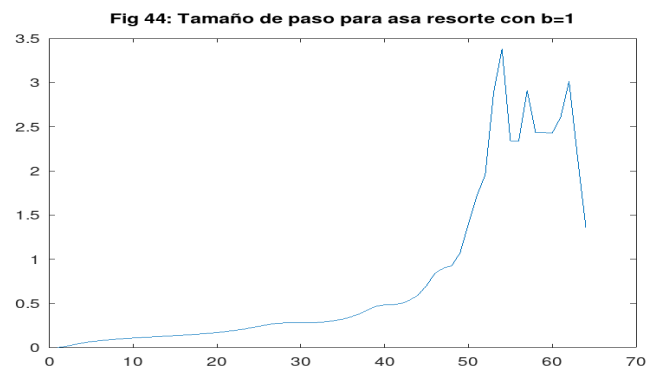
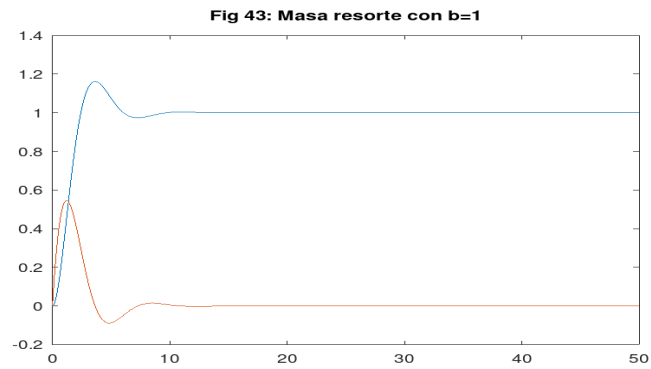


Para  $b=1$ , el sistema converge con cualquier  $h$ .

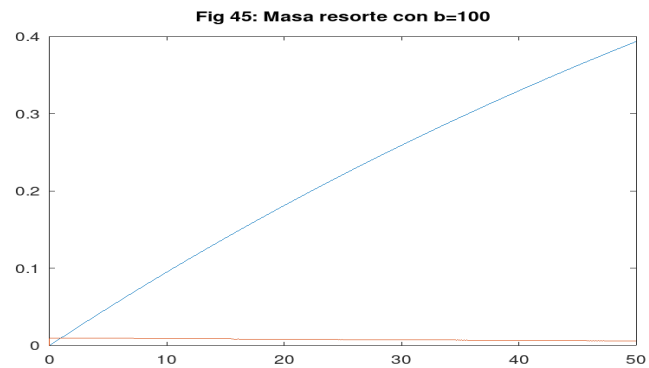


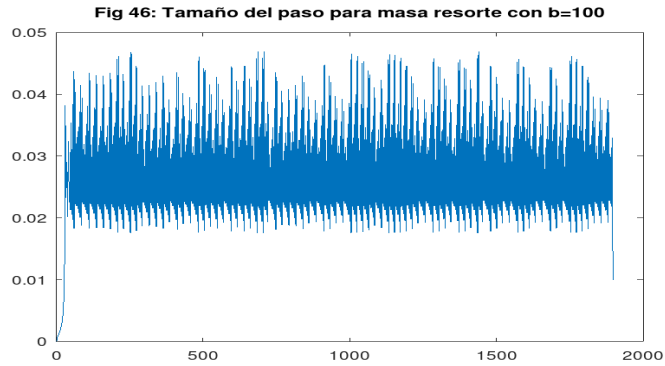
Análogo a  $b=1$

10)

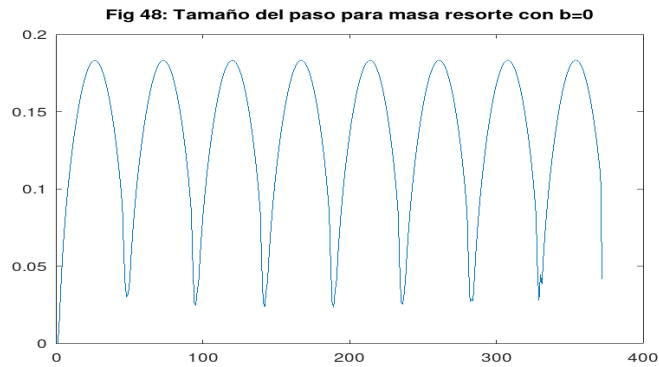
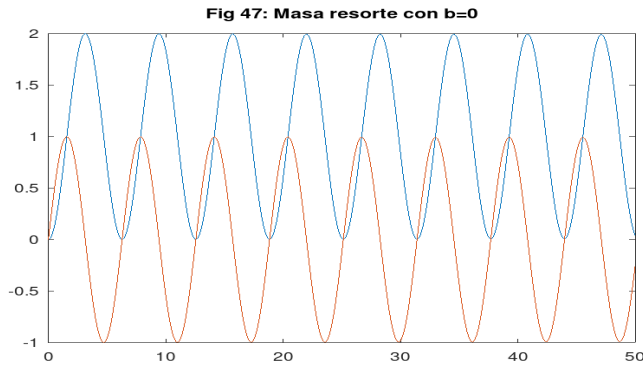


Se observa como el tamaño del paso aumenta inicialmente. Al acercarse a la solución, el método disminuye el paso puesto que el error cometido es mayor que la tolerancia.





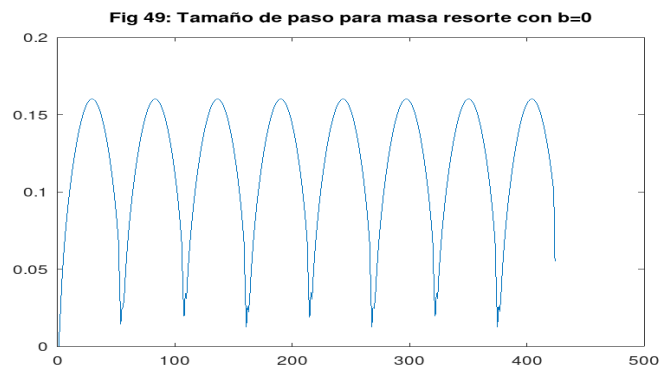
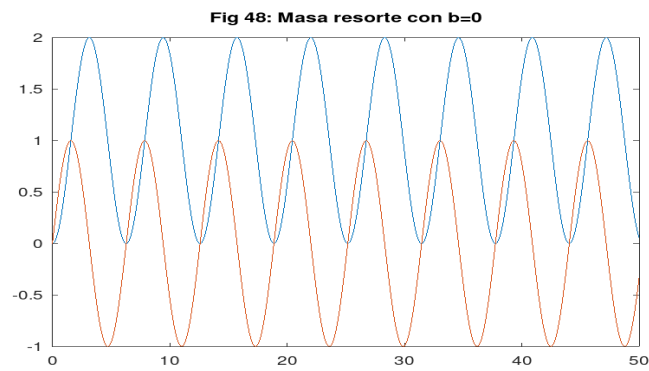
Para este caso se observa que la solución numérica tarda mucho en llegar al valor estable. Esta situación se da porque al aumentar el paso de integración, el sistema se inestabiliza. Como se vio al analizar el método de Heun, se tiene que cumplir  $h < \frac{2}{|\lambda|}$  y como para  $b=100$  se tiene un autovalor con valor absoluto 100 se tiene que cumplir  $h < 0.02$ . Dado que el método Runge Kutta usa Heun para aproximar el error cometido en cada paso, el usar un paso más grande se tiene un error excesivamente grande porque Heun se inestabiliza. Luego el método achica el paso dando un error chico y cuando vuelve a aumentar el paso lo anterior se repite. Esto causa que el método de una cantidad de pasos excesiva.



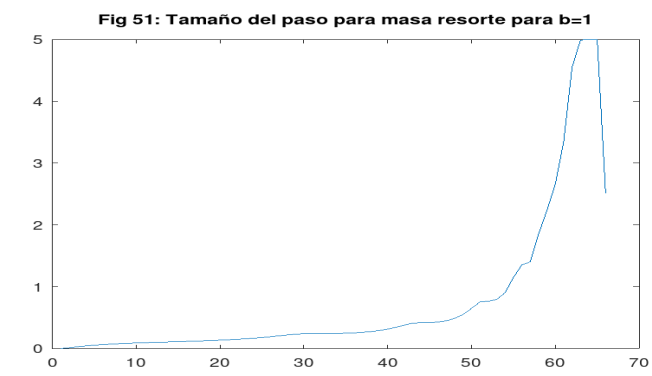
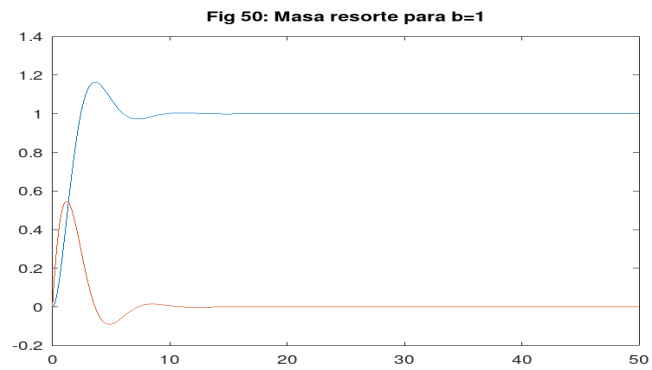
Para este caso, el sistema diverge. El método agranda el paso cuando su solución da valores cercanos a la solución analítica y vuelve a achicarse cuando se aleja.

Valor de b	Número de pasos
100	1898
0	373
1	65

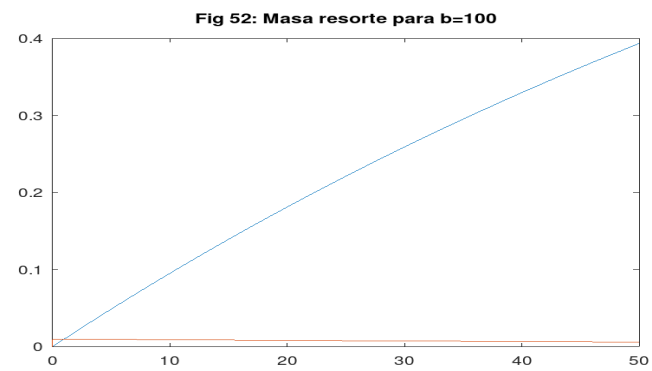
11)

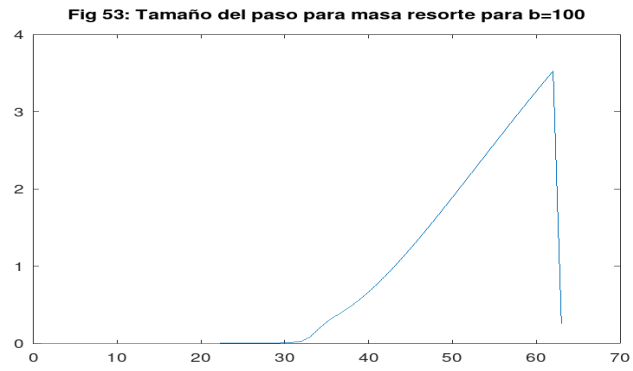


Los autovalores son imaginarios puros por lo que el sistema oscila.



El comportamiento es el mismo que el problema anterior.





A diferencia de Heun, la regla trapezoidal puede usar cualquier paso sin perder la estabilidad.

Valor de $b$	Número de pasos
100	64
0	427
1	67