

PHYSIQUE

SALIKEL

2025-2026 PCSI

1 Incertitudes

1.1 Incertitude de type A

Évaluation par méthodes statistiques avec plusieurs mesures

- Résultat donne par moyenne arithmétique
- L'écart-type expérimental $s_{\text{exp}} = \sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m})^2}$
- L'incertitude-type (type A) $s = \sqrt{\frac{1}{N} s_{\text{exp}}^2}$

1.2 Incertitude de type B

Évaluation par des incertitudes données

1.2.1 Incertitude-type

Étant donné une incertitude de $\pm a$, $s_B = \frac{a}{\sqrt{3}}$. On fait toujours la division par $\sqrt{3}$.

1.2.2 Propagation

Somme des carrés des dérivées partielles

$$s_B = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} s(x_k) \right)^2}$$

1.3 z-score

$$\text{Z-score, } z = \frac{M_{\text{mesure}} - M_{\text{réf}}}{s(M)}$$

- $z \leq 2$ indique la compatibilité avec la valeur de référence.

2 Optique

2.1 Définitions

2.1.1 Milieux

- Homogène - Toutes les propriétés physiques sont identiques en tout point du milieu
- Isotrope - Les propriétés physiques sont identiques dans toutes les directions de propagation
- Un dioptre - La surface séparant deux milieux différents

2.1.2 Systèmes optiques

- Stigmatique - Pour un couple de points (A, A'), tous les rayons issus de A et traversant le système optique passent par A'
- Centré - Le système a un axe de symétrie (l'axe optique)
- Plan transverse - Un plan perpendiculaire à l'axe optique
- Aplanétique - Pour A et A' deux points conjugués et B un point du plan transverse passant par A , le conjugué de B (noté B') est dans le plan transverse passant par A'
- Foyer image F' - L'image d'un objet situé à l'infini et sur l'axe optique
- Foyer objet F - L'objet d'une image situé à l'infini et sur l'axe optique
- Afocal - Les foyers sont à l'infini

2.1.3 L'œil

- Pupille - contenue dans l'iris, le diamètre est variable de 2 à 8 mm
- Cristallin - muscle assimilable à une lentille mince convergente dont la distance focale est variable selon sa contraction
- Rétine - cellules sensibles à la lumière, l'écran de l'œil
- Punctum proximum - 0,25 m
- Punctum remotum - à l'infini
- Champ angulaire - l'angle du cône de vision - 40° à 50° (mais la zone de perception des détails est plus réduite à 1°).
- Pouvoir séparateur - $\epsilon = 1' = \frac{1}{60}^\circ = 3 * 10^{-4}$ rad
- Myopie - Cristallin trop convergeant, le Punctum Promximum est plus proche et le Ponctum Remotum n'est plus à l'infini.

- Hypermétropie - Cristallin pas assez convergente, le Punctum Proximum plus loin et le Ponctum Remotum se trouve derrière l'œil.

2.1.4 Grandeur

- Grandissement γ - Par taille $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. Pour objet et image à distance finie.
- Puissance P - Angle sur taille $P = \frac{\alpha'}{\overline{AB}}$. Pour objet à distance finie, mais image à distance infinie. Unité: dioptrie ($\delta = \text{rad m}^{-1}$)
- Grossissement G - Par angle $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$. Pour objet et image à l'infini.
- Grandissement commercial G_c - Grossissement pour un objet au ponctum proximum $G_c = \frac{\alpha'}{\beta} = \frac{P}{4}$. Attention aux signes.

Notons que l'image est toujours au numérateur.

2.1.5 Lentilles

- Lentille mince - L'épaisseur est très petite devant les rayons de courbure des dioptres sphériques de la lentille. On considère que les sommets des deux dioptres et le centre optique (O) sont confondus.
- Distance focale - Distances du centre optique aux plans focaux. Pour une lentille mince, $f' = -f$. Pour une lentille convergente, f est négatif car F est devant O .
- Vergence V - $V = \frac{1}{f'}$

2.2 Indice optique n

$v = \frac{c}{n} \leq c$. Plus n est grand, plus le milieu est réfringent, plus la lumière ralentit.

2.3 Formule de Cauchy

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

2.4 Propriétés des rayons lumineux

- Les rayons lumineux se propagent en ligne droite dans un milieu homogène et isotrope
- La trajectoire suivie par la lumière ne dépend pas du sens de propagation
- Les rayons lumineux sont indépendants entre eux

2.5 Conditions de Gauss

Pour les systèmes optiques centrés, le stigmatisme et l'aplanétisme approchés sont vérifiés dans ces conditions.

- Les rayons lumineux font un angle petit avec l'axe optique
- Les rayons lumineux rencontrent les dioptres (et miroirs) au voisinage de leur sommet (intersection avec l'axe optique)
- Les rayons rencontrent les dioptres et miroirs avec un angle d'incidence par rapport à leur normale qui est petit

2.6 Théorèmes et démonstrations

2.6.1 Première loi Snell-Descartes - réflexion

$$r = -i$$

Attention aux angles algébriques.

2.6.2 Deuxième loi Snell-Descartes - réfraction

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

2.6.3 Réflexion totale

Il n'existe pas de rayon réfracté - $\frac{n_i}{n_r} \sin i > 1$. Une démonstration par contreposée (trouver les conditions pour avoir de la réfraction) est plus facile à justifier.

$$i^{\lim} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

2.6.4 Réfraction limite

L'angle maximal réfracté est limité.

$$r^{\lim} = \arcsin \frac{n_1}{n_2}$$

2.6.5 Tracée des rayons pour une lentille

- Un rayon passant par le centre optique n'est pas dévié.
- Un rayon incident parallèle à l'axe optique donne un rayon transmis passant par le foyer image.
- Un rayon incident passant par le foyer objet donne un rayon transmis parallèle à l'axe optique.

Utiliser ces règles pour tracer des rayons connus, pour construire les rayons quelconques.

- Pour un rayon incident, prendre un rayon connu qui croise le rayon incident par un des plans focales - les deux rayons transmis sont parallèles.

2.6.6 Théorème de Newton

Observer géométriquement avec Thalès.

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = f'f = -f^2$$

Attention aux signes algébriques.

2.6.7 Théorème de Descartes

Observer géométriquement avec Thalès. Obtenir une relation linéaire avec \overline{OA} $\overline{OA'}$ $\overline{OF'}$ puis diviser.

$$\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = -\frac{1}{f'}$$

Version lycée - $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$

2.6.8 Théorème des Vergences

Pour 2 lentilles de distances focales f_1 et f_2 , accolées tel que leurs centres optiques sont confondus, la distance focale des 2 lentilles f est donnée par

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$$

Démonstration par cherchons la distance d'un objet donnant une image à l'infini. La distance de l'objet intermédiaire est dans le plan focal objet de la deuxième lentille. Utiliser le théorème de Descartes.

2.6.9 Distance minimale objet-écran - Méthode de Silbermann

On pose $D = \overline{AA'}$ la distance entre l'objet et l'image (sur l'écran). On varie la position de la lentille. Par le théorème de Descartes, on obtient une équation du second degré.

$$\overline{OA'}^2 - \overline{OA'} \cdot D + D \cdot f' = 0$$

On a donc

$$D \geq 4f'$$

2.6.10 Autocollimation

Considérons un système optique lentille et miroir plan. On cherche à former une image dans le même plan que son objet. L'objet est dans le plan focal objet pour créer une image intermédiaire à l'infini, qui est reflétée par le miroir et qui forme l'image finale dans le plan focal objet. Ce principe est utile pour le réglage d'un collimateur aux TP.

2.6.11 Dispositifs à plusieurs lentilles

Un dispositif est composé de 3 parties

- Objectif - du côté de l'objet
- Réticule - point de réglage sans effet optique
- Oculaire - du côté de l'œil

On cherche à établir le schéma de principe pour chercher les positions des objets, des objets intermédiaires, et l'image finale. Pour la plupart des dispositifs, l'image finale se trouve à l'infini pour que l'œil observateur n'ait pas besoin d'accorder - l'objet intermédiaire se trouve donc dans le plan focal objet de l'oculaire.

2.6.12 L'appareil photographique

L'appareil est modélisé par un diaphragme à l'entrée, un objectif juste derrière le diaphragme, et un capteur.

- Durée d'exposition - le temps d'ouverture d'un obturateur pour régler la quantité de lumière reçue par le capteur.
- Nombre d'ouverture - indique l'ouverture de diaphragme. $N = \frac{f'}{D}$. Attention que l'ouverture de diaphragme D est au dénominateur.
- Distance hyperfocale - Pour un réglage à l'infini, le capteur est placé dans le plan focal image. La distance hyperfocale est la limite de netteté dans cette configuration. Tout objet plus loin que la distance hyperfocale h jusqu'à l'infini est donc nette. On trace les rayons limites qui passent par les extrémités d'un pixel (de diamètre ϵ) pour obtenir finalement $h = \frac{f'D}{\epsilon} = \frac{f'^2}{N\epsilon}$
- Profondeur de champ - pour la mise au point sur un point A quelconque (non à l'infini), on cherche les limites de netteté (indiqué par les objets A_1 et A_2 avec les rayons passant par les extrémités d'un pixel). On utilise la relation de Descartes pour $\overline{OA'}$, $\overline{OA'_1}$ et $\overline{OA'_2}$ et on exprime $\frac{\epsilon}{D}$ avec Thalès. On supprime le terme ϵ^2 pour $\epsilon \ll D$ et on prend $l - f' = l$ si $f' \ll l$ pour obtenir $\overline{A_1A_2} = \frac{2\epsilon l^2}{Df'} = 2\epsilon l^2 \frac{N}{f'^2}$

3 Électrocinétique

3.1 Définitions

3.1.1 Intensité

L'intensité du courant électrique à travers une surface S la charge totale qui traverse cette surface par unité de temps. (Unité: Ampère A)

$$i = \frac{dq}{dt}$$

3.1.2 Potentiel

La tension est la différence de potentiel entre deux points. (Unité: Volt V)

3.1.3 Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires ARQS

Si les grandeurs ne varient pas trop rapidement (par rapport à la vitesse de propagation des variations = vitesse de la lumière), les lois du régime constant restent applicables à chaque instant.

- Régime constant - Les grandeurs sont constantes dans le temps
- Dipôle - Circuit relié à l'extérieur par deux bornes
- Nœud - Point de jonction entre au moins 3 fils de connexion
- Branche - Ensemble de dipôles montés en série entre deux nœuds. Les dipôles d'une branche sont traversés par le même courant.
- Maille - Ensemble de branches formant un contours fermé qui passe une seule fois en un nœud donné.

3.1.4 Conventions

- Convention générateur - Tension u au même sens que le courant i - la puissance $P = ui$ positive est une puissance fournie.
- Convention récepteur - Tension u et courant i sont du sens contraire - la puissance $P = ui$ positive est une puissance reçue.

3.1.5 Point de fonctionnement

Le point de fonctionnement à un instant t est le point de coordonnées $(u(t), i(t))$. Le tracé de l'ensemble des points de fonctionnement est la caractéristique du dipôle.

- Dipôle symétrique - caractéristique statique admet une symétrie centrale par rapport à l'origine (sinon: dipôle polarisé)

- Dipôle passif - caractéristique passe par l'origine (sinon: dipôle actif)
- Dipôle linéaire - $u(t)$ et $i(t)$ pour le dipôle sont liées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants (sinon: dipôle non-linéaire)

3.2 Lois de Kirchhoff

3.2.1 Loi des nœuds

$$\sum i = 0$$

Il n'y a pas d'accumulation de charge dans un nœud. On peut appliquer directement la loi des nœuds dans un circuit donné pour réduire le nombre d'inconnues. Cette loi peut être exprimée en termes de potentiel.

$$\sum_k \frac{V_k - V_0}{R_k} + \sum i = 0$$

Avec $V_k - V_0$ la tension sur la R_k et V_0 le potentiel au nœud. On peut retirer V_0 pour trouver le théorème de Millman.

$$V_0 \sum_k \frac{1}{R_k} = \sum_k \frac{V_k}{R_k} + \sum i$$

On utilise ce théorème en appliquant une masse (potentiel $V_m = 0$ V) dans le circuit où ça convient, et calculant ensuite les potentiels dans les points connus, pour trouver le potentiel dans un point qui nous intéresse.

3.2.2 Loi des mailles

Pour une maille orientée

$$\sum u = 0$$

Cette loi est une conséquence de l'additivité des potentiels.

3.3 Théorème de superposition

Dans un réseau ne contenant que des dipôles linéaires, les tensions et les intensités sont la somme des tensions et intensités obtenues dans les différents variants du circuit où toutes les sources sauf une sont éteintes.

3.4 Représentation complexe

Pour un signal $s(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, on a la grandeur complexe

$$\underline{s}(t) = Ae^{j(\omega t + \phi)} = \underline{A}e^{j\omega t}$$

1. A - l'amplitude réelle
2. $\underline{A} = Ae^{j\phi}$ - l'amplitude complexe

3. ϕ - la phase initiale
4. $\omega t + \phi$ - la phase instantanée

On peut représenter \underline{s} dans le plan complexe (représentation de Fresnel).

3.4.1 Propriétés

1. Dérivation - $\dot{\underline{s}}(t) = j\omega \underline{s}(t) = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} \underline{s}(t)$ - La dérivée est en quadrature avance
2. Intégration - $\int \underline{s}(t) dt = \frac{\underline{s}(t)}{j\omega} = \omega e^{-j\frac{\pi}{2}} \underline{s}(t)$ - La dérivée est en quadrature retard

3.4.2 Grandeurs sinusoïdaux

Pour une fonction f T -périodique, et un signal s sinusoïdal.

1. Valeur moyenne - $\bar{f} = \langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$ - $\bar{s} = 0$
2. Valeur efficace (RMS) - $f_{\text{eff}} = \sqrt{\langle f^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)^2 dt}$ - $s_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$
 - (a) Égalité de Parseval - $f_{\text{eff}}^2 = A_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2$ avec A_k le k -ième harmonique dans la série de Fourier du signal f

3.5 Impédance

$$\underline{u}(t) = \underline{Z}(\omega) \underline{i}(t)$$

\underline{Z} l'impédance complexe est un polynôme de ω , et ne dépend pas du temps. Il peut aussi s'écrire sous forme exponentielle avec son argument $\phi(\omega)$:

$$\underline{Z}(\omega) = |\underline{Z}(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

3.5.1 Propriétés

L'impédance vérifie les mêmes propriétés que la résistance.

1. L'association en série - $\underline{Z}_{eq} = \sum \underline{Z}$
2. L'association en parallèle - $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum \frac{1}{\underline{Z}}$
3. Loi des noeuds et théorèmes associés
4. Diviseur de tension et de courant

3.5.2 Puissances

$$P(t) = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} [\cos(2\omega t - \phi) + \cos \phi]$$

Où $\cos \phi$ le facteur de puissance est une fonction de ω qui est définie par \underline{Z} .

$$\langle P(t) \rangle = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi = I_{\text{eff}}^2 \text{Re}(\underline{Z})$$

En moyenne,

- La valeur efficace d'une tension est la valeur constante qui donnerait la même puissance reçue par le même résistor pendant la même durée
- Seule la partie réelle d'un dipôle consomme de l'énergie
- Pour un signal périodique quelconque, on peut déduire de l'égalité de Parseval que la puissance moyenne est la somme des puissances moyennes des signaux sinusoïdaux composants.

3.6 Dipôles usuels

3.6.1 Résistance

En convention récepteur -

$$u = Ri$$

Avec R la résistance (unité: Ohm Ω).

$$\underline{Z}_R = R$$

Pour un signal sinusoïdal, u et i en phase.

- L'association en série - $R_{eq} = \sum R$
- L'association en parallèle - $\frac{1}{R_{eq}} = \sum \frac{1}{R}$
- Aspect énergétique - $P = ui = Ri^2 = \frac{u^2}{R}$
- Facteur de puissance $\cos \phi = 1$ - toujours de nature récepteur

On peut utiliser les règles de diviseur de tension et de courant.

- Diviseur de tension (résistances en série) - $u_k = \frac{R_k}{\sum R} u$
- Diviseur de courant (résistances en parallèle) - $i_k = \frac{\frac{1}{R_k}}{\sum \frac{1}{R}} u$

3.6.2 Bobine

En convention récepteur -

$$u = L \frac{di}{dt}$$

Avec L l'inductance (unité: Henry H).

$$\underline{Z}_L = jL\omega$$

Pour un signal sinusoïdal, u est en quadrature avance par rapport à i .

- L'association en série - $L_{eq} = \sum L$
- L'association en parallèle - $\frac{1}{L_{eq}} = \sum \frac{1}{L}$
- Aspect énergétique - $P = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} Li^2)$ d'où $E = \frac{1}{2} Li^2$ l'énergie instantanée emmagasinée dans la bobine
- Facteur de puissance $\cos \phi = 0$ - en moyenne, la puissance reçue / fournie est nulle

En régime constant, $u = 0$, la bobine est équivalente à un fil.

3.6.3 Condensateur

En convention récepteur -

$$q = Cu$$

Avec C la capacité (unité: Farad F). On utilise souvent la dérivée

$$i = C \frac{du}{dt}$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

Pour un signal sinusoïdal, u est en quadrature retard par rapport à i .

- L'association en série - $\frac{1}{C_{eq}} = \sum \frac{1}{C}$
- L'association en parallèle - $C_{eq} = \sum C$
- La forme des associations est différente!
- Aspect énergétique - $P = C \frac{du}{dt} u = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} Cu^2)$ d'où $E = \frac{1}{2} Cu^2$ l'énergie instantanée emmagasinée dans le condensateur
- Facteur de puissance $\cos \phi = 0$ - en moyenne, la puissance reçue / fournie est nulle

En régime constant, $i = 0$, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

3.6.4 Source de tension (Générateur de Thévenin)

Une source idéale de tension impose entre ses bornes une tension donnée E (force électromotrice ou tension à vide). Une source réelle peut être modélisée par un générateur de Thévenin, avec caractéristique $u = E - ri$ où r est la résistance interne en série avec une source idéale.

3.6.5 Source de courant (Générateur de Norton) [HP]

Une source idéale de courant impose un courant I (courant électromoteur ou courant de court-circuit). Une source réelle peut être modélisée par un générateur de Norton, avec caractéristique $u = I - \frac{u}{r}$ où r est la résistance interne en parallèle avec une source idéale.

Le générateur de Norton est équivalent à un générateur de Thévenin avec une résistance interne r et une tension à vide $E = rI$. On peut démontrer que la tension u et le courant i sont les mêmes.

3.6.6 Diode

La diode est un dipôle non-linéaire avec une tension seuil u_s (0,4 V à 0,6 V)

- $u < u_s$ - La diode est bloquée, la courant ne passe pas $i = 0$
- $u > u_s$ - La diode est passante.

3.7 Résolution des circuits

3.7.1 Notions

- Régime constant / continu - toutes les grandeurs dans le circuit sont indépendants du temps
- Régime permanent - les caractéristiques des grandeurs ne dépend pas du temps (e.g. source AC constant = régime permanent mais non constant)
- Régime transitoire - le régime pendant le passage d'un régime à un autre

Pour le cas des signaux sinusoïdaux -

- Déphasage - la différence entre les phases instantanées
- Synchrone - déphasage constante
 - En phase - $\Delta\phi = 0[2\pi]$
 - En opposition de phase - $\Delta\phi = \pm\pi[2\pi]$
 - En phase - $\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$

3.7.2 Méthode (Équation différentielle)

1. Obtenir l'équation différentielle du circuit (lois de Kirchhoff)
2. La mettre sous forme canonique et identifier le type d'équation différentielle ainsi que les constantes
3. La solution de l'équation différentielle homogène de ... ordre est de la forme: [Déterminer la solution générale selon le type d'équation différentielle, et la solution particulière selon le second membre]
4. Chercher les conditions initiales
 - (a) On suppose qu'à $t = 0^-$, le régime permanent constant est atteint depuis suffisamment longtemps.
[Dessiner le circuit équivalent. Les bobines se comportent comme un court-circuit et les condensateurs comme un interrupteur ouvert]
 - (b) Par continuité $\begin{cases} \text{de la tension aux bornes d'un condensateur} \\ \text{du courant traversant la bobine} \end{cases}$, on a

$$\begin{cases} u(t = 0^+) = u(t = 0^-) \\ i(t = 0^+) = i(t = 0^-) \end{cases}.$$

[Déterminer l'expression des grandeurs continues]
5. Finalement, la solution [résoudre l'équation différentielle]

3.7.3 Circuits classiques

- Circuit RC - 1er ordre avec $\tau = RC$
- Circuit RL - 1er ordre avec $\tau = \frac{L}{R}$
- Circuit LC - Oscillateur harmonique avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Circuit RLC - 2nd ordre (oscillateur amorti) avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

3.8 Filtres

3.8.1 Notions

- Filtre passif - contient uniquement des composants passifs (sinon: actif)
- Pulsation de coupure ω_c avec $G(\omega_c) = \frac{G_{\text{asymp}}}{\sqrt{2}}$ (ou $G(\omega_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$ pour un filtre passe-bande)
- Filtres linéaires - H linéaire - on peut appliquer le principe de superposition et la décomposition en série de Fourier pour analyser tout signal périodique
- Filtres non-linéaires - principe de superposition n'est plus valable - on observe un enrichissement du spectre du signal de sortie

3.8.2 Fonctions de transfert

- Rapport d'une grandeur complexe de sortie et d'une grandeur complexe d'entrée
- Habituellement $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$
- En générale, la fonction de transfert change selon la charge (ce qui est branché à la sortie)
 - Conditions idéals pour ne pas modifier la fonction de transfert lors de la mise en cascade des filtres - $\underline{Z}_s = 0, \underline{Z}_e = \infty$ - on aura $\underline{H}_{\text{tot}} = \prod_n \underline{H}_n$
- On définit la fonction de transfert intrinsèque pour une quadripôle en absence de charge
- Gain $G = |\underline{H}(\omega)|$ (en décibel - $G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}(\omega)|$), Phase $\phi = \arg(\underline{H}(\omega))$

3.8.3 Méthode d'étude

1. Étude asymptotique en haute et basse fréquence pour déterminer le type de filtre
2. Obtenir une expression de \underline{H} avec pont diviseur (ou Théorème de Millman)
3. Identification du forme canonique (cf. table des filtres usuels)
 - $H_{\text{asymp/max}}$
 - ω_c ou ω_0
 - Q pour 2e ordre
4. Étude asymptotique et valeur en $x = 1$, en G_{dB} et $\phi(\omega)$

3.8.4 Filtres usuels

On a suppose que $H_{\text{asymp/max}} = 1$

	<u>N</u>	<u>D</u>	<u>H</u> usuel	Type	ϕ	Remarques
$R[\underline{C}]$	1	$1 + j(\frac{\omega}{\omega_c})$	$\frac{1}{1+jx}$	Passe-bas	$0 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$	Pente HF: -20 dB par décade [Intégrateur]
$[R]C$	$j(\frac{\omega}{\omega_c})$	$1 + j(\frac{\omega}{\omega_c})$	$\frac{jx}{1+jx}$	Passe-haut	$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$	Pente BF: $+20$ dB par décade [Dérivateur]
$RL[\underline{C}]$	1	$1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}$	$\frac{1}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$	Passe-bas	$0 \rightarrow -\pi$	Pente HF: -40 dB par décade [Double intégrateur]. Résonance pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$
$R[\underline{L}]C$	$-(\frac{\omega}{\omega_0})^2$	$1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}$	$\frac{-x^2}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$	Passe-haut	$\pi \rightarrow 0$	Pente BF: $+40$ dB par décade [Double dérivateur]. Résonance pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$
$[R]LC$	$j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}$	$1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}$	$\frac{1}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$	Passe-bande	$\frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$	Pente BF: $+20$ dB par décade [Dérivateur], Pente HF: -20 dB par décade [Intégrateur], Croisements des asymptotes varie selon Q

Attention à la différence entre ω_c pour 1er ordre et ω_0 pour 2e ordre

3.8.5 Comportement intégrateur et dérivateur

- Pente BF à $+20$ dB par decade - comportement dérivateur
- Pente HF à -20 dB par decade - comportement intégrateur
 - On peut intégrer sur une demi-période pour obtenir l'amplitude du signal de sortie

3.8.6 Variations selon Q

Pour les secondes ordres passe-bas et pass-haut, on a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ la valeur de Q pour avoir de resonance.

- $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ - Courbe en dessous de l'asymptote
- $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ - Courbe la plus proche de l'asymptote
- $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ - Courbe au dessus de l'asymptote, reonance à $w_r < w_0$

3.9 Amplificateur linéaire intégré

3.9.1 Entrées et sortie

- Entrée inverseuse (V_-)
- Entrée non-inverseuse (V_+)
- Sortie avec tension (V_S) relative à la masse

3.9.2 Caractéristique

- $\epsilon = V_+ - V_-$
- $V_L < V_S < V_H$ - régime linéaire et $V_s = A_V \epsilon$ (A l'amplification en tension / gain différentiel)
- Régime de saturation - $V_s = V_L$ ou $V_s = V_H$

3.9.3 ALI parfait

- Résistance d'entrée infinie donc courants d'entrée nuls
- Résistance de sortie nulle, en série avec un générateur de tension idéal
- A_V infinie - régime linéaire uniquement pour $\epsilon = 0$

Remplacer l'ALI par ses composants supposés parfaits peut servir pour une étude asymptotique.

3.9.4 Méthode d'étude système bouclé

1. Suppose que l'ALI est idéal
2. Détermination du régime de fonctionnement
 - Si la rétroaction se fait sur l'entrée inverseuse - système stable - régime linéaire - $\epsilon = 0$ donc $V_- = V_+$
 - Si la rétroaction se fait sur l'entrée non-inverseuse, ou si le système est en boucle ouverte 0 - système instable - régime de saturation - $V_s = V_{\text{sat}}$
 - Si de multiples rétroactions sur les deux entrées - étude complète nécessaire
3. Résolution mathématique pour obtenir $V_-, V_+, e(t), s(t)$

4 Superposition

4.1 Ondes planes progressives unidimensionnelle

$$s(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi)$$

$$s(x, t) = s(x - ct, 0) = s(0, t - \frac{x}{c})$$

$$s(x, t) = A \cos(\omega(t - \frac{x}{c}) + \phi) = A \cos(kct - kx + \phi)$$

- $k = \frac{\omega}{c}$ la norme du vecteur d'onde
- $v_\phi = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c$ vitesse de phase est la célérité de l'onde (Δx et Δt entre deux points ayant la même phase)
- $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ la période spatiale
- $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ le nombre d'onde

4.2 Superposition de 2 ondes

4.2.1 Intéférence

Pour 2 ondes synchrones, on aura une onde résultant ayant la même fréquence d'amplitude:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

Démonstration - Diagramme de Fresnel et Pythagore généralisé

Intéférence avec 2 sources ponctuelles, séparées par une distance a et de distance D de l'écran

- Interfrange $i = \frac{D\lambda}{a}$ [Démonstration - On détermine $d_2 - d_1 = \frac{xa}{D}$ avec une développement limitée et on étudie l'amplitude à l'écran qui dépend du phase $\phi_i - \frac{2\pi}{\lambda}d_i$]

4.3 Battements

Pour 2 ondes de pulsations légèrement différente

$$\omega_{\text{moy}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$\omega_{\text{mod}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

- ω_{mod} la pulsation de modulation
- $\omega_{\text{batt}} = 2\omega_{\text{mod}} = \omega_1 - \omega_2$
- $s(t) = 2A \cos(\omega_{\text{moy}}t + \phi_{\text{moy}}) \cos(\omega_{\text{mod}}t + \phi_{\text{mod}})$ pour 2 ondes de même amplitude
- Pour des amplitudes différents, $A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_{\text{batt}}t)}$

4.4 Onde stationnaire

La somme de deux ondes synchrones et de même amplitude, qui se propagent dans des sens opposées, donne:

$$2A \cos(\omega t + \phi) \cos(kx + \psi)$$

- Ventre - positions où $\cos(kx + \psi) = 1$ donc amplitude maximale
- Noeud - positions où $\cos(kx + \psi) = 0$ donc amplitude nulle
- Séparation entre ventres ou entre noeuds - $\frac{\lambda}{2}$
- Séparation entre ventre et noeud - $\frac{\lambda}{4}$

4.4.1 Corde de Melde

!!

4.5 Diffraction

Pour un trou circulaire de diamètre $D \lesssim \lambda$

$$\sin \theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Pour un réseau de diffraction

$$\sin \theta_p - \sin \theta_i = p \frac{\lambda}{na}$$

Démonstration - avec différence de marche On peut étudier la déviation $D = \theta - \theta_i$

5 Mécanique

5.1 Définitions

- Cinématique du point - Domaine où l'on décrit les mouvements sans en chercher les causes
- Dynamique - Domaine où l'on cherche à établir le lien entre les mouvements et les causes qui engendrent ces mouvements
- Statique - Étude des équilibres des systèmes (cas particulier de la dynamique)
- Système indéformable
 - Solide indéformable - distance entre 2 points dans le solide est constante
 - Description du solide dans le système nécessite 6 paramètres (3 axes de position pour le centre d'inertie, 3 angles de rotation)
- Point matériel
 - On considère que la translation et néglige la rotation
 - Tous les points du solide ont le même mouvement - il suffit donc d'étudier un point (le centre d'inertie)
- Référentiel - repère muni d'une horloge
- Équation horaire - l'équation donnant $\overrightarrow{OM}(t)$
- Trajectoire - l'ensemble des points parcourus par M - équation de la trajectoire relie les coordonnées sans faire intervenir le temps
- Vitesse - $\vec{v}_{|R}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}|_R$ - colinéaire à la trajectoire
- Accélération - $\vec{a}_{|R}(M) = \frac{d\vec{v}_{|R}(M)}{dt}|_R = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}|_R$ - pointe vers la concavité de la trajectoire
 - $\frac{d\|\vec{v}_{|R}\|}{dt} = \|\vec{a}_{|R}\| \cos \alpha$
- Translation - Les directions du repère lié au solide sont fixes par rapport au référentiel d'étude
- Masse inerte - grandeur qui caractérise la capacité d'un système de résister à des contraintes pour modifier son mouvement (supposée indépendante du mouvement et du référentiel)
- Masse grave - grandeur associée aux poids d'un objet (supposée équivalente à la masse inerte par principe d'équivalence)

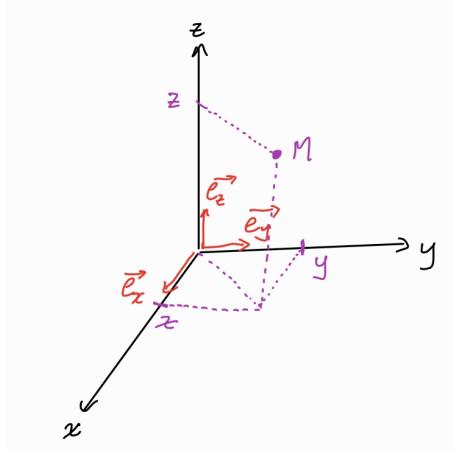
5.2 Systèmes de coordonnées

5.2.1 Définitions

- Système d'axes - axes de référence liées à un solide
- Le vecteur position \overrightarrow{OM} est unique
- On définit une base avec 3 vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
 - Base unitaire - $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$
 - Base orthonormale - les 3 vecteurs sont orthogonaux
 - Base directe - $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$
- Repère - association d'une base avec un point d'origine

5.2.2 Coordonnées cartésiennes

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

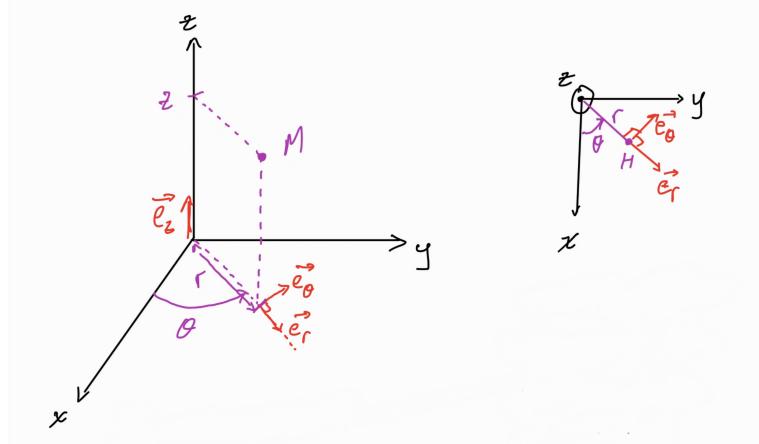
Les 3 vecteurs de la base sont fixes

Le mouvement en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\overrightarrow{OM} &= \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z \\ \vec{v}_{|R} &= \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \\ \vec{a}_{|R} &= \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z\end{aligned}$$

5.2.3 Coordonnées cylindriques

$$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$$



$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

En cartésiennes,

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z$$

\vec{e}_z est fixe, $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ sont mobiles

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} \Big|_R = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \Big|_R = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

Le mouvement en coordonnées cylindriques

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

$$\vec{v}_{|R} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$$

$$\vec{a}_{|R} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\theta} + r \dot{\theta}^2) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z$$

5.2.4 Mouvement circulaire en coordonnées cylindriques

Pour un mouvement autour de l'axe $\Delta = \vec{e}_z$, on a $\dot{r} = 0$ et $\dot{z} = 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r\vec{e}_r \\ \vec{v}_{|R} &= r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{a}_{|R} &= r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = -\frac{\|\vec{v}_{|R}\|^2}{r}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

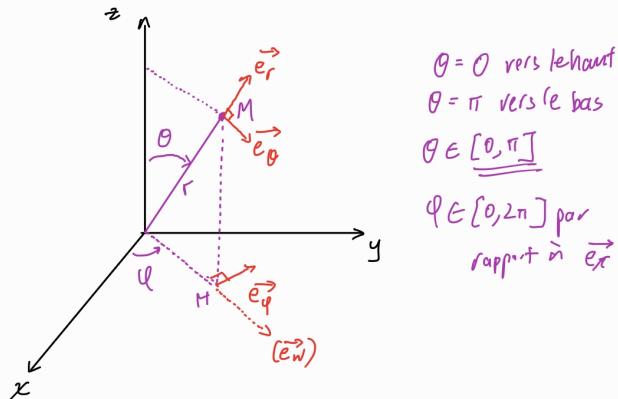
On définit le vecteur rotation

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z$$

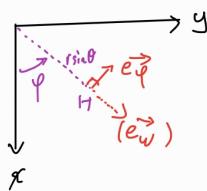
Avec $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire

5.2.5 Coordonnées sphériques

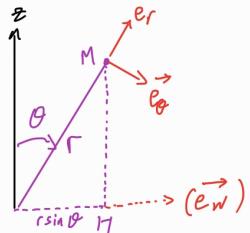
$$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$$



Plan (xOy)



Plan (OMH)



$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

En cartésiennes,

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y$$

Les 3 vecteurs de la base sont mobiles

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} |_R = \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi$$

Le mouvement en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{OM} &= dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi \\ \vec{v}_{|R} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

5.3 Dynamique

5.3.1 Quantité de mouvement

$$\vec{p}_{|R}(M) = m \vec{v}_{|R}(M)$$

Pour un centre de gravité G du système S défini: $(\sum_i) \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i \iff \sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = 0$

$$\vec{p}_{|R}(S) = \sum_i \vec{p}_{|R}(M_i) = \vec{p}_{|R}(G) = m_{tot} \vec{v}_{|R}(G)$$

5.4 Forces

Grandeur vectorielle décrivant l'interaction capable de modifier et/ou de produire un mouvement ou une déformation du système

5.4.1 Forces à distance

- Force gravitationnelle - $\vec{F}_G = -\frac{Gm_1m_2}{\|\vec{M}_1\vec{M}_2\|^2} \vec{u}_{12} = -Gm_1m_2 \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\vec{M}_1\vec{M}_2\|^3}$
- Force colombienne - $\vec{F}_q = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{M}_1\vec{M}_2\|^2} \vec{u}_{12} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\vec{M}_1\vec{M}_2\|^3}$

5.4.2 Forces de contact

- Réaction normale d'un support $\|\vec{R}_N\|$ - perpendiculaire au support, dirigé vers l'extérieur du support, contact avec le support tant que $\|\vec{R}_N\| > 0$
- Tension d'un fil \vec{T} - selon le fils, dirigé vers le point fixe, fil tendu tant que $\|\vec{T}\| > 0$, $\vec{T} = \vec{0}$ si le fil est distendu
- Force d'un ressort du type élastique $\|\vec{F}_r\| = |k(l - l_v)|$ avec k le constant de raideur et $l - l_v$ l'allongement du ressort

6 Annexe

6.1 Formules mathématiques

- Pythagore généralisé - $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$
- Factorisation de cosinus - $\cos p + \cos q = \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
-

6.2 Équations différentielles - solutions générales

6.2.1 1er ordre - Solution exponentielle

$$\dot{s}(t) + \frac{s(t)}{\tau} = f(t)$$

- τ le temps caractéristique - attention au signe!

Solution -

$$s(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + s_p(t)$$

6.2.2 2nd ordre sans terme à \dot{s} - Oscillateur harmonique

$$\ddot{s}(t) + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s_{eq}$$

- ω_0 la pulsion propre
- s_{eq} la position d'équilibre

Solution -

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + s_{eq} = D \cos(\omega_0 t + \phi) + s_{eq}$$

6.2.3 2nd ordre - Oscillateur amorti

$$\ddot{s}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = f(t)$$

- ω_0 la pulsion propre
- Q le facteur de qualité

Solution - une forme avec e^{rt} d'où l'on trouve l'équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

- Régime apériodique ($Q < \frac{1}{2}$)

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2}$$

$$s(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

Attention aux grandeurs relatives de r_1 et r_2 , et que $r < 0$

- Régime critique ($Q = \frac{1}{2}$)

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

$$s(t) = (A + Bt)e^{\omega_0 t}$$

- Régime pseudo-périodique ($Q > \frac{1}{2}$)

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

- $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ le temps caractéristique
- $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} < \omega_0$ la pseudo-pulsation

$$s(t) = (A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Le décrément logarithmique - $\delta = |\ln \frac{u(t)-u(t \rightarrow +\infty)}{u(t+T)-u(t \rightarrow +\infty)}| = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}$ - le décrément d'amplitude entre 2 pseudo-périodes - cette valeur est utile en TP pour trouver Q

6.3 Équations différentielles - Solutions particulières

6.3.1 Solution particulière constante

$s_p(t)$ est la solution particulière qui dépend du second membre ($f(t)$)

- Pour $f(t) = 0$, il n'y a pas de second membre, $s_p(t) = 0$
- Pour $f(t)$ constante, on cherche $s_p(t)$ constante qui satisfait l'équation différentielle quand les dérivées de s valent 0

6.3.2 Solution particulière - régime sinusoïdal forcé

Pour une équation différentielle de 2nd ordre avec $f(t)$ sinusoïdal de pulsation ω et S_0, \dot{S}_0 les amplitudes maximales qui dépendent des spécificités du système étudié, on a les amplitudes complexes en fonction de ω suivantes:

$$\underline{S}(\omega) = S_0 \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

On obtient une pulsation de résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, et $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$
[Démonstration - On étudie la fonction $f(x) = (1 - x^2)^2 + (\frac{1}{Q}x)^2$ dont les variations sont les inverses des variations de $|\underline{S}(\omega)|$. En pratique ces variations corresponds à la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC-série, où le déplacement en mécanique.

La dérivée, qui en pratique représente l'intensité (ou la tension aux bornes de la résistance) en RLC-série, ou la vitesse en mécanique, s'exprime sous la forme:

$$\underline{\dot{S}}(\omega) = S_0 Q \omega_0 \frac{j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} = \dot{S}_0 \frac{1}{1 + j Q (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

On observe une résonance évidente à $\omega = \omega_0$

Puissances (proportionnelles à $S \dot{S} \propto \dot{S}^2$, que l'on ne peut pas exprimer en notation complexe directement)

$$P_{\text{moyenne}}(\omega) = P_{\max} \frac{1}{1 + Q^2 (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}$$

On observe la même résonance à $\omega = \omega_0$

On définit la bande passante à -3 dB comme $P_{\text{moyenne}}(\omega) \geq \frac{P_{\max}}{2}$ ou $\dot{S}(\omega) = \frac{\dot{S}_{\max}}{\sqrt{2}}$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

6.4 Approximations

- Approximation nulle

$$a \pm b = a$$

Si $b \ll a$

Cette approximation doit être utilisée seulement si le résultat ne vaut pas 0.

- Approximation ϵ

$$(1 + \epsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\epsilon$$

Si $\epsilon \ll 1$

ϵ devrait être sans dimension

On peut parfois utiliser simplement = 1

- Temps longs, temps courts

$$s(t) = A e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

Si $\tau_1 \ll \tau_2$, On peut traiter la partie $B e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ constante au début, et la partie $A e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ à la suite

6.5 Misc

- Vitesse de son dans l'air 340 m s^{-1}
- Vitesse de son dans l'eau 1500 m s^{-1}
- Rotation de la Terre sur son axe Nord-Sud $\Omega_T = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} = 7,2921 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$