

# MATH

Huang Ziwen

## Contents

<b>1</b>	<b>Logique, ensembles et raisonnements</b>	<b>5</b>
1.1	Méthodes de démonstration . . . . .	5
1.1.1	Montrer $P \implies Q$ . . . . .	5
1.1.2	Montrer l'équivalence $P \iff Q$ . . . . .	5
1.1.3	Disjonction . . . . .	5
1.2	Outils de raisonnement . . . . .	5
1.3	Quantificateurs . . . . .	5
1.3.1	$\forall$ pour tout . . . . .	5
1.3.2	$\exists$ il existe . . . . .	6
1.3.3	$\exists!$ il existe un unique . . . . .	6
1.4	Ensembles . . . . .	6
1.4.1	Loi de Morgan . . . . .	6
1.4.2	Unions . . . . .	6
1.4.3	Intersections . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Trigonométrie et complexes</b>	<b>7</b>
2.1	Formules trigonométrique . . . . .	7
2.1.1	Formules de base . . . . .	7
2.1.2	Formules de duplication . . . . .	7
2.1.3	Formules de linéarisation . . . . .	7
2.1.4	Formules de factorisation . . . . .	7
2.1.5	Tangentes . . . . .	7
2.2	Équations trigonométriques . . . . .	8
2.2.1	Valeurs de l'égalité . . . . .	8
2.3	Misc trigo . . . . .	8
2.3.1	Limite . . . . .	8
2.3.2	Inégalité de convexité $ \sin x  \leq  x $ . . . . .	8
2.4	Propriétés des complexes . . . . .	8
2.4.1	L'écriture algébrique . . . . .	8
2.4.2	Conjugué . . . . .	8
2.4.3	Module . . . . .	9
2.4.4	$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} :  z  = 1\}$ . . . . .	9
2.4.5	Transformations du plan . . . . .	9
2.5	Formules des complexes . . . . .	9

2.5.1	Inégalité triangulaire . . . . .	9
2.5.2	Racines n-ième . . . . .	10
2.6	Équations du second degré . . . . .	10
2.6.1	Racines carrées . . . . .	10
2.6.2	Formule quadratique appliquée aux complexes . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Calculs algébriques</b>	<b>11</b>
3.1	Sommes . . . . .	11
3.1.1	Propriétés . . . . .	11
3.1.2	Sommes classiques . . . . .	11
3.2	Produits . . . . .	11
3.2.1	Propriétés . . . . .	11
3.2.2	Factorielle . . . . .	11
3.2.3	Coefficient binomial ( $k$ parmi $n$ ) . . . . .	12
3.3	Formules . . . . .	12
3.3.1	Formule de Bernoulli . . . . .	12
3.3.2	Sommes trigonométriques . . . . .	12
3.3.3	Développement du carré . . . . .	12
3.3.4	Formule du binôme de Newton . . . . .	12
3.3.5	Expression polynomiale de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Applications</b>	<b>14</b>
4.1	Définitions . . . . .	14
4.1.1	Vocabulaire . . . . .	14
4.1.2	Injection . . . . .	14
4.1.3	Surjection . . . . .	14
4.1.4	Bijection . . . . .	15
4.2	Applications particulières . . . . .	15
4.2.1	Application identité $\text{Id}_E$ . . . . .	15
4.2.2	Application indicatrice $\mathbb{K}_A$ . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Fonctions de la variable réelle</b>	<b>16</b>
5.1	$\mathbb{R}$ . . . . .	16
5.1.1	Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ . . . . .	16
5.2	Intervalles . . . . .	16
5.2.1	Forme des intervalles . . . . .	16
5.2.2	Paramétrisation des segments . . . . .	16
5.3	Étude d'une fonction . . . . .	17
5.3.1	Parité . . . . .	17
5.3.2	Périodicité . . . . .	17
5.3.3	Monotonie . . . . .	17
5.3.4	Extrema . . . . .	18
5.3.5	Asymptotes . . . . .	18
5.3.6	Continuité . . . . .	18
5.3.7	Dérivée . . . . .	18

<b>6</b>	<b>Fonctions usuelles</b>	<b>19</b>
6.1	Fonction exponentielle . . . . .	19
6.1.1	Relation fondamentale . . . . .	19
6.1.2	Propriétés . . . . .	19
6.1.3	Logarithme népérienne . . . . .	19
6.1.4	Logarithme de base $a$ . . . . .	19
6.2	Croissances comparées . . . . .	19
6.3	Fonctions puissances . . . . .	20
6.4	Fonctions circulaires . . . . .	20
6.4.1	Dérivées . . . . .	20
6.5	Fonctions hyperboliques . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Réels</b>	<b>22</b>
7.1	Définitions . . . . .	22
7.2	Bornes . . . . .	22
7.2.1	Borne supérieure . . . . .	22
7.2.2	Borne inférieure . . . . .	22
7.3	Partie entière . . . . .	23
7.3.1	Approximations décimales . . . . .	23
<b>8</b>	<b>Matrices et systèmes linéaires</b>	<b>24</b>
8.1	Systèmes linéaires . . . . .	24
8.1.1	Définitions . . . . .	24
8.1.2	Opérations élémentaires . . . . .	24
8.2	Matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . . . . .	24
8.2.1	Matrices remarquables . . . . .	24
8.2.2	Produit matriciel . . . . .	25
8.2.3	Transposée . . . . .	25
8.2.4	Opérations élémentaires . . . . .	26
8.2.5	Matrices inversibles . . . . .	26
8.3	Algorithme du pivot de Gauss . . . . .	27
<b>9</b>	<b>Suites</b>	<b>28</b>
9.1	Définitions . . . . .	28
9.2	Limites . . . . .	28
9.2.1	Opérations sur les limites . . . . .	29
9.2.2	Limites des suites extraites . . . . .	29
9.2.3	Théorèmes d'existence . . . . .	29
9.3	Suites adjacentes . . . . .	30
9.3.1	Propriétés . . . . .	30
9.4	Relations de comparaison . . . . .	30
9.4.1	Propriétés . . . . .	30
9.4.2	Propriétés de $\sim$ . . . . .	31
9.4.3	Équivalences usuels . . . . .	31
9.4.4	Croissances comparées . . . . .	31
9.5	Suites particulières . . . . .	31

9.5.1	Suites arithmético-géométrique . . . . .	31
9.5.2	Suites géométriques . . . . .	32
9.5.3	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 . . . . .	32
9.5.4	Suites récurrentes d'ordre 1 . . . . .	32
<b>10</b>	<b>Espaces Vectoriels</b>	<b>33</b>
10.1	Définitions . . . . .	33
10.1.1	$\mathbb{K}$ -espaces vectoriels . . . . .	33
10.1.2	Sous-espaces vectoriels . . . . .	33
10.2	Somme de ssevs . . . . .	34
10.3	Familles . . . . .	34
10.3.1	Vect . . . . .	34
10.3.2	Familles libres et liées . . . . .	34
10.3.3	Familles génératrices . . . . .	35
<b>11</b>	<b>Applications linéaires</b>	<b>36</b>
11.1	Définitions . . . . .	36
11.2	Propriétés des A.Ls . . . . .	36
11.3	Propriétés des isomorphismes . . . . .	36
11.4	Des familles et des A.Ls . . . . .	37
11.5	Endomorphismes remarquables . . . . .	37
11.5.1	Homothéties . . . . .	37
11.5.2	Projections et symétries . . . . .	37
11.6	Équations linéaires . . . . .	38

# 1 Logique, ensembles et raisonnements

## Chapitre 1

### 1.1 Méthodes de démonstration

#### 1.1.1 Montrer $P \implies Q$

Démonstration directe

- Supposer  $P$
- Montrer  $Q$

Démonstration par contraposée

- Supposer non  $P$
- Montrer non  $Q$

#### 1.1.2 Montrer l'équivalence $P \iff Q$

Démonstration par double implication

- Montrer  $P \implies Q$  (directe)
- Montrer  $Q \implies P$  (réciproque)

#### 1.1.3 Disjonction

- $P \text{ ou } Q \iff (\text{non}(P) \implies Q)$

### 1.2 Outils de raisonnement

- Disjonction de cas
- L'absurde
- Récurrence (simple, double, forte)
- Analyse-synthèse (analyse cachée)

### 1.3 Quantificateurs

#### 1.3.1 $\forall$ pour tout

Démonstration

- Soit  $x$  dans l'ensemble de définition, sans imposant aucun condition

Démonstration d'une propriété dans l'implication

- En particulier, prenons (une valeur bien choisie)

### 1.3.2 $\exists$ il existe

Démonstration

- Choisir un  $x$  qui convient

### 1.3.3 $\exists!$ il existe un unique

Démonstration

- Montrer l'unicité d'une solution sous réserve d'existence
- Montrer que l'unique solution existe (qu'elle est bien solution)

## 1.4 Ensembles

### 1.4.1 Loi de Morgan

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

### 1.4.2 Unions

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

Éléments qui appartiennent à au moins un des  $A_i$

### 1.4.3 Intersections

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

Éléments qui appartiennent à tous les ensembles  $A_i$

## 2 Trigonométrie et complexes

Chapitre 2.1, 2.2

### 2.1 Formules trigonométrique

#### 2.1.1 Formules de base

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

#### 2.1.2 Formules de duplication

Dérivable depuis les formules de base

- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- En divisant les 2 au-dessus,  $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

#### 2.1.3 Formules de linéarisation

Dérivable depuis les formules de base en cherchant le produit à droite.

- 2 cosinus pour cosinus:  $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
- 2 sinus pour cosinus:  $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
- cosinus et sinus pour sinus:  $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

#### 2.1.4 Formules de factorisation

Depuis les formules de linéarisation, prenons  $p = a + b$  et  $q = a - b$ , d'où  $a = \frac{p+q}{2}, b = \frac{p-q}{2}$

#### 2.1.5 Tangentes

Posons  $t = \tan \frac{x}{2}$

- Formules de duplication et relation  $\tan^2 + 1 = \sec^2$ :  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- Formules de duplication et relation  $\tan^2 + 1 = \sec^2$ :  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

## 2.2 Équations trigonométriques

### 2.2.1 Valeurs de l'égalité

Attention à la deuxième valeur pour sin et cos

- $\cos a = \cos b \iff (a \equiv b [2\pi] \text{ ou } a \equiv -b [2\pi])$
- $\sin a = \sin b \iff (a \equiv b [2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi - b [2\pi])$
- $\tan a = \tan b \iff a \equiv b [\pi]$

## 2.3 Misc trigo

### 2.3.1 Limite

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

### 2.3.2 Inégalité de convexité $|\sin x| \leq |x|$

Par la dérivée de sinus, d'où la convexité, et l'égalité à 0

## 2.4 Propriétés des complexes

### 2.4.1 L'écriture algébrique

$z \in \mathbb{C}$  s'écrit  $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$

- L'unicité de l'écriture algébrique
- $z = Ae^{i\theta} \iff z = A\cos\theta + iA\sin\theta$

### 2.4.2 Conjugué

$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) \iff \bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$

- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $z = -\bar{z} \iff z \in i\mathbb{R}$
- $z = e^{i\theta} \iff \bar{z} = e^{-i\theta}$
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$



### 2.4.3 Module

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

- $|z| \in \mathbb{R}_+$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

### 2.4.4 $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

- $z \in \mathbb{U} \iff \frac{1}{z} = \bar{z}$
- $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$
- Formules d'Euler -  $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  et  $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- Égalité trigonométrique -  $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$
- Formule de Moivre -  $\forall n \in \mathbb{Z}, e^{i\theta n} = (e^{i\theta})^n$  (Attention que la formule est valable seulement pour  $n \in \mathbb{Z}$ )

On déduit la factorisation par l'angle moitié avec les formules d'Euler.

$$e^{u\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} (e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} (2 \cos \frac{\theta-\theta'}{2})$$

$$e^{u\theta} - e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} (e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} - e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} (2i \sin \frac{\theta-\theta'}{2})$$

Ces formules sont utiles notamment pour  $\theta = 0$  donc  $e^{i\theta} = 1$

### 2.4.5 Transformations du plan

- Translation de vecteur  $\vec{b}$  -  $z \mapsto z + b$
- Rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$  -  $z \mapsto \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$
- Homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $k$  -  $z \mapsto \omega + k(z - \omega)$

## 2.5 Formules des complexes

### 2.5.1 Inégalité triangulaire

$$||z| - |z'||| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$$

Pour montrer  $|z \pm z'| \leq |z| + |z'|$ , on utilise une chaîne d'équivalences en élevant au carré, puis en développant pour obtenir  $\operatorname{Re}(z'\bar{z}) \leq |zz'|$ .

Pour montrer  $||z| - |z'||| \leq |z \pm z'|$ , on applique  $|z| = |z + z' - z'| \leq |z + z'| + |z'|$

On note le cas d'égalité. Les vecteurs qui représentent les affixes sont colinéaires et dans le même sens (d'où  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  positif).

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff (z = 0 \text{ ou } \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : z' = \alpha z)$$

Démonstration par double implication.

- Sens direct: Supposons  $z \neq 0$ . Chaîne d'équivalences pour montrer  $\operatorname{Re}(\bar{z}z') = |\bar{z}z'|$  donc  $\bar{z}z' \in \mathbb{R}$ . On a  $z' = \frac{z'\bar{z}z}{\bar{z}z} = \frac{z'\bar{z}}{|z|^2}z$
- Sens réciproque: Disjonction de cas

On remarque que  $(z = 0 \text{ ou } \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : z' = \alpha z) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : z' = \lambda z \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : z = \lambda z')$

## 2.5.2 Racines n-ième

Pour  $a \in \mathbb{N}^*$ , les racines n-ièmes de  $a = |a|e^{i\theta}$  sont les  $\sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$  avec  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

On remarque l'importance de l'intervalle pour que les éléments soient uniques.

On note  $\mathbb{U}_n$  les racines n-ièmes de l'unité.

- 1 est une racine
- On note  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \in \mathbb{U}_3$

## 2.6 Équations du second degré

### 2.6.1 Racines carrées

- 0 admet une unique racine carrée (0)
- Tout complexe non nul admet exactement 2 racines carrées opposées
- $\sqrt{z}$  n'a de sens que pour  $z \in \mathbb{R}_+$

Pour trouver les racines carrées de  $z = x + iy$

$$z^2 = a \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(a) \\ 2xy = \operatorname{Im}(a) \\ x^2 + y^2 = |a| \end{cases}$$

### 2.6.2 Formule quadratique appliquée aux complexes

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2}$$

où le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  et  $\delta^2 = \Delta$  une racine carrée de  $\Delta$

On remarque que  $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$  et  $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

## 3 Calculs algébriques

### Chapitre 3

#### 3.1 Sommes

##### 3.1.1 Propriétés

- Linéarité
- Relation de Chasles -  $\sum_{k=n}^q = \sum_{k=n}^p + \sum_{k=p+1}^q$
- Translation et retournement d'indice
- Somme télescopique -  $\sum_{k=n}^p (x_{k+1} - x_k) = x_{p+1} - x_n$

##### 3.1.2 Sommes classiques

- $\sum_{k=0}^n k = \frac{(n)(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{(n)^2(n+1)^2}{4}$
- Progression arithmétique -  $\sum_{k=n}^p u_k = \frac{1}{2}(u_p + u_n)(p - n + 1)$  (moyenne fois le nombre de termes)
- Suite géométrique -  $\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$

#### 3.2 Produits

##### 3.2.1 Propriétés

- Relation de Chasles
- Translation et retournement d'indice
- Produit télescopique -  $\prod_{k=n}^p \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{p+1}}{x_n}$

##### 3.2.2 Factorielle

$$n! = \begin{cases} \prod_{k=1}^n k & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

### 3.2.3 Coefficient binomial ( $k$ parmi $n$ )

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{Z}$

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ,  $\binom{n}{1} = n$  et  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- Formule de symétrie -  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Formule de Pascal (triangle de Pascal) -  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- Formule du capitaine -  $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$

## 3.3 Formules

### 3.3.1 Formule de Bernoulli

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} (a^k b^{n-1-k})$$

Démonstration - commencer par le terme à gauche

Ce formule valable pour les matrices qui commutent

### 3.3.2 Sommes trigonométriques

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \left[ \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \right]$$
$$\sum_{k=0}^n \sin(kx) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \left[ \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \right]$$

Démonstration - suite géométrique  $\sum_{k=0}^n (e^{ix})^k = \sum_{k=0}^n \cos(kx) + i \sum_{k=0}^n \sin(kx)$ .  
Il faut appliquer la factorisation par l'arc moitié. Attention au cas où  $e^{ix} = 1$ .

### 3.3.3 Développement du carré

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{(i,j) \in \llbracket n,p \rrbracket, i < j} x_i x_j$$

Concrètement -  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

### 3.3.4 Formule du binôme de Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration - par récurrence simple.

Ce formule valable pour les matrices qui commutent

### 3.3.5 Expression polynomiale de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$

$$\cos(nx) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (\cos x)^{n-2p} (\cos^2 x - 1)$$

$$\sin(nx) = \sin x \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (\cos x)^{n-2p-1} (\cos^2 x - 1)$$

Démonstration -

$$\cos(nx) + i \sin(nx) = e^{nx} = (\cos x + i \sin x)^n$$

Appliquer la formule du binôme de Newton et séparer les termes paires et impaires.

## 4 Applications

### Chapitre 4

#### 4.1 Définitions

Soit  $f, g$  des applications

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : G &\rightarrow H \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

##### 4.1.1 Vocabulaire

- $E$  et  $G$  sont les ensembles de départ
- $F$  et  $H$  sont les ensembles d'arrivée
- $f = g \iff E = G$  et  $F = H$  et  $\forall x \in E, f(x) = g(x)$  - Attention à l'égalité des ensembles d'arrivée et de départ

##### 4.1.2 Injection

$f$  est injective si tout élément de  $F$  a au plus un antécédent dans  $E$ . Plus souvent, on utilise la caractérisation suivante -

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(x') \implies x = x'$$

- Si  $f$  et  $g$  sont injectives,  $g \circ f$  est injective
- Si  $g \circ f$  est injective,  $f$  est injective (les images de  $f$ , si il y a des répétitions, ne peuvent pas être dé-répétés par  $g$ )

##### 4.1.3 Surjection

$f$  est surjective si tout élément de  $F$  a au moins un antécédent dans  $E$ . Plus souvent, on utilise la caractérisation suivante -

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$$

- Si  $f$  et  $g$  sont surjectives,  $g \circ f$  est surjective
- Si  $g \circ f$  est surjective,  $g$  est surjective (si un antécédent n'existe même par pour  $g$ ,  $f$  ne peut l'inventer de nulle part)

#### 4.1.4 Bijection

$f$  est injective si tout élément de  $F$  a un unique antécédent dans  $E$  ( $f$  est injective et surjective). Plus souvent, on utilise la caractérisation suivante -

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)$$

On peut noter la fonction qui donne les uniques antécédents  $f^{-1}$  la bijection réciproque.

Pour montrer la bijectivité, on peut:

- Analyse-Synthèse - Trouver l'unique antécédent de tout  $y \in F$  puis vérifier que cet antécédent est dans  $E$
- Montrer l'injectivité et la surjectivité
- Deviner la bijection réciproque et démontrer que les compositions donnent Id

## 4.2 Applications particulières

### 4.2.1 Application identité $\text{Id}_E$

$$\begin{aligned} \text{Id}_E : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

L'application identité est bijective.

### 4.2.2 Application indicatrice $\mathbb{I}_A$

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_A : E &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

## 5 Fonctions de la variable réelle

### Chapitre 5

#### 5.1 $\mathbb{R}$

##### 5.1.1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

- Réflexivité -  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$
- Transitivité -  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z$
- Antisymétrie -  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y$

Attention que l'inégalité stricte n'est pas une relation d'ordre.

#### 5.2 Intervalles

##### 5.2.1 Forme des intervalles

Définition d'un intervalle  $I$  -

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies [x, y] \subset I$$

L'ensemble vide  $\emptyset$  et les singletons sont des intervalles dits triviaux. Les intervalles non-triviaux sont de l'une des 9 formes suivantes -

- Segment -  $[a, b]$
- Intervalles semi-ouvert -  $]a, b]$  et  $[a, b[$
- Intervalle ouvert -  $]a, b[$
- Demi-droite fermée -  $] - \infty, b]$  et  $[a, +\infty[$
- Demi-droite ouverte -  $] - \infty, b[$  et  $]a, +\infty[$
- Droite -  $] - \infty, +\infty[$

##### 5.2.2 Paramétrisation des segments

$$[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1]\} = \{\mu a + (1 - \mu)b \mid \mu \in [0, 1]\}$$

Démonstration - double inclusion. Sens direct - poser  $\lambda = \frac{x-a}{b-a}$ . Sens réciproque - montrer  $a \leq x \leq b$  avec  $\lambda(b-a)$ .



## 5.3 Étude d'une fonction

### 5.3.1 Parité

- Paire - symétrie l'axe des ordonnées - 
$$\begin{cases} \forall x \in D, -x \in D \\ \forall x \in D, f(-x) = f(x) \end{cases}$$
- Impaire - symétrie l'origine - 
$$\begin{cases} \forall x \in D, -x \in D \\ \forall x \in D, f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Attention que la symétrie par rapport à 0 doit être respectée ( $\forall x \in D, -x \in D$ )  
La parité d'une fonction permet de restreindre son étude à  $D \cap \mathbb{R}_+$

On note que toute fonction  $f$  s'écrit comme somme une fonction paire  $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$   
et une fonction impaire  $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$

### 5.3.2 Périodicité

Soit  $T \in \mathbb{R}_+^*$  la période de  $f$   $f$  est T-périodique si 
$$\begin{cases} \forall x \in D, x+T \in D \text{ et } x-T \in D \\ \forall x \in D, f(x) = f(x+T) \end{cases}$$

Attention que la T-périodicité du domaine  $D$  doit être respectée ( $\forall x \in D, x+T \in D$  et  $x-T \in D$ )

### 5.3.3 Monotonie

- Croissance -  $\forall (x, y) \in D^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- Stricte croissance -  $\forall (x, y) \in D^2, x < y \implies f(x) < f(y)$
- Décroissance -  $\forall (x, y) \in D^2, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- Stricte décroissance -  $\forall (x, y) \in D^2, x < y \implies f(x) > f(y)$
- (stricte) Monotonie - (stricte) croissance ou décroissance

Propriétés des composées

- La composée de 2 fonctions monotones et de même sens de variations est croissante.
- La composée de 2 fonctions monotones et de sens de variations contraire est décroissante.

La bijection réciproque d'une fonction strictement monotone est bijective et aussi strictement monotone et de même sens de variation.

### 5.3.4 Extrema

- Majorée -  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in D, f(x) \leq M$  -  $M$  est un majorant de  $f$
- Maximum - le  $f(a)$  qui est un majorant
- Minorée -  $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in D, f(x) \geq m$  -  $m$  est un minorant de  $f$
- Minimum - le  $f(a)$  qui est un minorant
- Bornée -  $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in D, |f(x)| \leq C$

### 5.3.5 Asymptotes

- Asymptote verticale à  $x = a$  -  $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$
- Asymptote horizontale à  $y = b$  -  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$
- Asymptote oblique à  $y = ax + b$  -  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

Pour identifier les asymptotes obliques, on remarque -

- Condition nécessaire -  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
- Conditions suffisantes -  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$

### 5.3.6 Continuité

$f$  est continue en  $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . L'ensemble des fonctions continues sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est noté  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

- Théorème des valeurs intermédiaires - Soit  $(a, b) \in I^2$ ,  $a \leq b \implies \exists c \in [a, b] : \min(f(a), f(b)) \leq c \leq \max(f(a), f(b))$

### 5.3.7 Dérivée

$$f' : x \mapsto \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$
- $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$  si  $f'$  ne s'annule pas

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  si  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $f^{(n)}$  est continue sur  $I$  (on note  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions de classe  $n$ ).  $\mathcal{C}^\infty$  de classe si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$

Vérifier toujours la domaine de dérivabilité avant de dériver. On s'intéresse au signe de  $f'$  ce qui donne la croissance ou décroissance de  $f$ . Pour étudier le signe de  $f'$  on a parfois besoin d'étudier  $f''$  et/ou son image.

## 6 Fonctions usuelles

Chapitre 6

### 6.1 Fonction exponentielle

#### 6.1.1 Relation fondamentale

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

#### 6.1.2 Propriétés

- Continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$
- $\exp' = \exp > 0$  donc  $\exp$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$
- $\exp(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+^*$
- Inégalité de convexité -  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$

#### 6.1.3 Logarithme népérienne

On note  $\ln$  la bijection réciproque de  $\exp$ .

#### 6.1.4 Logarithme de base $a$

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln x}{\ln a} \end{aligned}$$

### 6.2 Croissances comparées

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  (Démonstration par l'inégalité de convexité avec  $e^{\frac{x}{2}}$ )
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

$e^x$  plus puissant que  $x$ ,  $x$  plus puissant que  $\ln x$

### 6.3 Fonctions puissances

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x^n &= \prod_{k=1}^n x \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \forall k \in \mathbb{Z}, x^k &= \begin{cases} \prod_{k=1}^n x & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{x^{-k}} & \text{sinon} \end{cases} \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}, x^\alpha &= e^{\alpha \ln x}\end{aligned}$$

- $(f_\alpha)^{-1} = f_{\frac{1}{\alpha}}$
- Pour  $\alpha > 0$ ,  $f_\alpha$  admet une limite finie en 0, on peut donc prolonger par continuité en posant  $0^\alpha = 0$

### 6.4 Fonctions circulaires

- Cosinus - restriction à  $[0, \pi]$  est bijective, d'où  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
- Sinus - restriction à  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  est bijective, d'où  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Tangente - restriction à  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  est bijective, d'où  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

#### 6.4.1 Dérivées

$$\begin{aligned}\forall x \in ]-1, 1[, \arccos'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \forall x \in ]-1, 1[, \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Attention aux valeurs exclus dans la domaine de dérivabilité.

Démonstration - avec la formule de la dérivée des bijections réciproques. On utilise  $\sin^2 + \cos^2 = 1$ . Possibilité de s'inspirer de la longueur des côtés du rectangle.

### 6.5 Fonctions hyperboliques

$$\begin{aligned}\text{ch} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \text{sh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

- $\text{sh}' = \text{ch} > 0$
- $\text{ch} > \text{sh}$
- $\text{ch}(0) = 1$  est un minimum

On a les formules analogues à celles de la trigonométrie

- $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$
- $\text{ch}(ix) = \cos x$
- $\text{sh}(ix) = i \sin x$

On a les formules analogues avec changement de signe lors d'un  $\text{sh}^2$

## 7 Réels

### Chapitre 7

#### 7.1 Définitions

- Majorant  $M$  de  $A$  -  $\forall a \in A, a \leq M$
- Minorant  $M$  de  $A$  -  $\forall a \in A, M \leq a$
- Bornée -  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A, |a| \leq M \iff A$  est majorée et minorée

#### 7.2 Bornes

##### 7.2.1 Borne supérieure

- Un majorant
- Le plus petit des majorants
- Condition d'existence - toute partie non-vide et majorée de  $\mathbb{R}$  possède une borne supérieure
- $\max A = \sup A \iff \sup A \in A$
- Condition d'un max - toute partie non-vide et majorée de  $\mathbb{Z}$  possède un maximum
- Si  $A$  n'est pas majorée,  $\sup A = +\infty$
- Caractérisation epsilonlesque -  $\begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ \forall \epsilon > 0, \exists a_0 \in A : m - \epsilon < a_0 \end{cases}$ 
  - Démonstration  $\implies$  - par définition de la borne supérieure
  - Démonstration  $\impliedby$  - en retrouvant la définition de la borne supérieure

##### 7.2.2 Borne inférieure

- Un minorant
- Le plus petit des minorants
- Toute partie non-vide et minorée de  $\mathbb{R}$  possède une borne inférieure
- $\min A = \inf A \iff \inf A \in A$
- Toute partie non-vide et minorée de  $\mathbb{Z}$  possède un minimum
- Si  $A$  n'est pas minorée,  $\inf A = -\infty$
- Caractérisation epsilonlesque -  $\begin{cases} \forall a \in A, a \geq m \\ \forall \epsilon > 0, \exists a_0 \in A : a_0 < m + \epsilon \end{cases}$

### 7.3 Partie entière

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

- Le plus grand entier plus petit que  $x$
- $\max \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ 
  - Démonstration de l'existence -  $A$  est une partie non-vide et majorée de  $\mathbb{Z}$ , et montrer que  $\max A$  convient
  - Démonstration de l'unicité - Par antisymétrie avec deux valeurs qui vérifie la propriété
- Partie fractionnaire ( $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$  notation non universelle)

#### 7.3.1 Approximations décimales

$$x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$

- $x_n$  est l'approximation décimale par défaut de  $x$  à la précision  $10^{-n}$
- $y_n = x_n + \frac{1}{10^n}$  est l'approximation décimale par excès de  $x$  à la précision  $10^{-n}$
- Ces suites convergent vers  $x$  [Démonstration - définition de la partie entière et théorème d'encadrement]
- $x_n$  est croissante
- $y_n$  est décroissante

## 8 Matrices et systèmes linéaires

### Chapitre 8

#### 8.1 Systèmes linéaires

Système d'équations linéaires de  $n$  équations à  $p$  inconnues, tout système de la forme noté  $(S)$

##### 8.1.1 Définitions

- Coefficients - Les scalaires  $(a_{i,j})$  le coefficient de  $x_j$  dans la  $i$ -ième équation
- Second membre - Le  $n$ -uplet des scalaires qui sont les constantes dans les équations
- Homogène - Système sans second membre
- Inconnues - Les  $(x_1 \dots x_n)$
- Ensemble des solutions  $\mathcal{S} - \{(x_1 \dots x_p) \in \mathbb{K}^p \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j = b_i\}$ 
  - Incompatible - Pas de solution  $\mathcal{S} = \emptyset$
  - Compatible - Au moins une solution

##### 8.1.2 Opérations élémentaires

Notons  $L_i$  les lignes d'un système linéaire. On a les 3 opérations linéaires qui préservent les équivalences.

- Échange de deux lignes -  $L_i \leftrightarrow L_j ((i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2)$
- Multiplication d'une ligne par un scalaire non-nul -  $L_i \leftarrow \lambda L_i (i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda \in \mathbb{K}^*)$
- Ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne -  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j ((i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, \lambda \in \mathbb{K})$

#### 8.2 Matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

##### 8.2.1 Matrices remarquables

- Matrice identité  $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  - 1 sur la diagonale
  - Symbole de Kronecker  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Matrice nulle  $0_{n,p}$  - tous les coefficients sont nuls



- Matrice élémentaire  $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq p}$  - tous les coefficients sont nuls sauf 1 en position  $(i,j)$
- Matrice nilpotente -  $\exists k \in \mathbb{N} : A^k = 0$
- Matrice symétrique -  $A^T = A \iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{j,i} = a_{i,j}$
- Matrice antisymétrique -  $A^T = -A \iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{j,i} = -a_{i,j}$
- Matrice diagonale -  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i \neq j \implies a_{i,j} = 0)$
- Matrice triangulaire supérieure -  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i > j \implies a_{i,j} = 0)$ 
  - Stable par combinaison linéaire et produit [Démonstration - par définition du produit]
- Matrice triangulaire inférieure -  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i > j \implies a_{i,j} = 0)$ 
  - La transposée d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire supérieure (et vice-versa)
  - Même stabilité que triangulaire supérieure

On remarque que toute matrice carrée s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique  $\frac{A+A^T}{2}$  et une matrice antisymétrique  $\frac{A-A^T}{2}$

### 8.2.2 Produit matriciel

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

- $E_{i,j}^{(n,p)} E_{k,l}^{(p,q)} = \delta_{j,k} E_{i,l}^{(n,q)}$  - Démonstration par définition du produit matriciel et en séparant le terme où  $i = l$

### 8.2.3 Transposée

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, [A^T]_{i,j} = [A]_{j,i}$$

- $(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$  - Attention à l'inversement
- $(A^T)^T = A$

### 8.2.4 Opérations élémentaires

- Dilatation - multiplication de la  $i$ -ième ligne par  $\lambda$ 
  - $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$
  - $D_i(\lambda)A : L_i \leftarrow \lambda L_i$
  - $AD_i(\lambda) : C_i \leftarrow \lambda C_i$
  - $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\frac{1}{\lambda})$
- Permutation - échange de la  $i$ -ième et la  $j$ -ième ligne
  - $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$
  - $P_{i,j}A : L_i \leftrightarrow L_j$
  - $AP_{i,j} : C_i \leftrightarrow C_j$
  - $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$
- Transvection -  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ 
  - $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$
  - $T_{i,j}(\lambda)A : L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
  - $AT_{i,j}(\lambda) : C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$  (!  $j$ -ième colonne modifiée et non  $i$ -ième)
  - $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$

Ces opérations correspondent aux opérations sur un système d'équations linéaires.

### 8.2.5 Matrices inversibles

$$\text{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AB = BA = I_n\}$$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m = A^{-m}$
- Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = B$$

Démonstration

- Sens direct -  $X = A^{-1}B$  est la solution unique
- Sens indirect - Décomposer  $I_n$  en colonne, cette  $I_n$  décomposée sert de second membre, la concaténation des  $X$  résultats donne  $A^{-1}$  (et vérifiée pour la multiplication à gauche). On vérifie la multiplication à droite en étudiant la différence avec  $I_n$

On peut déduire  $A^{-1}$  d'une matrice inversible en résolvant le système des équations linéaires représenté par  $AX = B$ .

Pour les matrices inversible, il faut considérer les puissance négatives

### 8.3 Algorithme du pivot de Gauss

Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$

1. Une dilatation et une permutation pour que  $a_{1,1} = 1$  [La première colonne est non-nulle]
2. Des transvections  $L_i \leftarrow L_i - a_{i,1}L_1$  pour que la 2e colonne est de la forme  $(0 \ 1 \ \dots)$
3. Itération jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure
4. Remonter l'algorithme de la gauche vers le haut, pour obtenir  $I_n$

On en déduit que une matrice triangulaire inversible a des coefficients diagonaux non nuls.

## 9 Suites

### Chapitre 9

#### 9.1 Définitions

Une fonction de  $\mathbb{N}$

- Suite extraite -  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}$  avec  $\phi(n)$  la fonction extractrice  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante ( $\forall n \in \mathbb{N}, \phi(n) \geq n$ )
- Monotonie pour les suites - ( $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \leq q \implies u_p \leq u_q$ )  $\iff$  ( $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ )
  - Si le signe de  $u_n$  est connu et constant APCR, on peut comparer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  avec 1

#### 9.2 Limites

$$u_n \longrightarrow l \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \epsilon$$

$$u_n \longrightarrow +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, u_n \geq A$$

$$u_n \longrightarrow -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, u_n \leq A$$

- La limite est unique [Démonstration -  $\forall \epsilon > 0, |l - l'| \leq \epsilon$  avec l'inégalité triangulaire, donc justifier  $l = l'$ ]
- Condition suffisante de convergence -  $v_n \longrightarrow 0$  et  $|u_n - l| \leq v_n$  APCR  $\implies u_n \longrightarrow l$
- Condition nécessaire de convergence -  $u_n \longrightarrow l \implies u_n$  est bornée [Démonstration - Par définition de la limite et inégalité triangulaire, montrer  $|u_n| = |(u_n - l) + l| \leq |l| + \epsilon$  APCR, et combiner avec la suite finie (donc bornée) pour les éléments avant ce rang]
- $u_n \longrightarrow u > 0 \implies (u_n) > 0$  APCR (attention à l'inégalité stricte [Démonstration -  $\epsilon = \frac{u}{2}$ ])
- $(u_n) \geq 0$  APCR et  $u_n \longrightarrow u \implies u \geq 0$  (attention à l'inégalité large [Démonstration - par l'absurde et le résultat au-dessus])
- Le produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0, converge vers 0
- Pour une suite complexe,  $z_n \longrightarrow l \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z_n) \longrightarrow \operatorname{Re}(l) \\ \operatorname{Im}(z_n) \longrightarrow \operatorname{Im}(l) \end{cases}$

### 9.2.1 Opérations sur les limites

Soit  $\begin{cases} u_n \rightarrow u \\ v_n \rightarrow v \end{cases}$

- $(|u_n|) \rightarrow |u|$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (u_n + \lambda v_n) \rightarrow u + \lambda v$
- $(u_n v_n) \rightarrow uv$
- $(\frac{1}{u_n}) \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ +\infty & \text{si } u = 0 \text{ et } u_n > 0 \text{ APCR} \\ -\infty & \text{si } u = 0 \text{ et } u_n < 0 \text{ APCR} \\ \text{pas de limite} & \text{si } u = 0 \text{ et signe de } u_n \text{ pas constant APCR} \end{cases}$
- $(\frac{u_n}{v_n}) \rightarrow \frac{u}{v}$
- Pour une suite complexe -  $\overline{u_n} \rightarrow \overline{u}$

### 9.2.2 Limites des suites extraites

- Toutes les suites extraites ont la même limite
- S'il existe une suite extraite divergente, alors la suite est divergente
- S'il existe deux suites extraites avec deux limites distinctes, alors la suite n'a pas de limite
- Suites extraites paires et impaires -  $(u_{2p}) \rightarrow l \text{ et } (u_{2p+1}) \rightarrow l \implies (u_n) \rightarrow l$

### 9.2.3 Théorèmes d'existence

- Encadrement -  $\begin{cases} u_n \rightarrow l \\ w_n \rightarrow l \\ u_n \leq v_n \leq w_n \text{ (APCR)} \end{cases} \implies v_n \rightarrow l$
- Divergence par minoration -  $\begin{cases} u_n \rightarrow +\infty \\ u_n \leq v_n \text{ (APCR)} \end{cases} \implies v_n \rightarrow +\infty$
- Divergence par majoration -  $\begin{cases} u_n \rightarrow -\infty \\ v_n \leq u_n \text{ (APCR)} \end{cases} \implies v_n \rightarrow -\infty$
- Limite par comparaison -  $\begin{cases} u_n \rightarrow 0 \\ |v_n| \leq |u_n| \end{cases} \implies v_n \rightarrow 0$
- Théorème de la limite monotone

- Croissante et majorée -  $u_n \longrightarrow \sup u_n$  [Démonstration - Posons  $l = \sup u_n$   $l - \epsilon$  n'est pas un majorant et  $l + \epsilon$  est un majorant ]
- Décroissante et minorée -  $u_n \longrightarrow \inf u_n$  [Démonstration -  $(-u_n)$  croissante et majorée]
- Croissante et non-majorée -  $u_n \longrightarrow +\infty$  [Démonstration - Tout  $A \in \mathbb{R}$  n'est pas un majorant]
- Décroissante et non-minorée -  $u_n \longrightarrow -\infty$  [Démonstration - Tout  $A \in \mathbb{R}$  n'est pas un minorant]

### 9.3 Suites adjacentes

Deux suites sont adjacentes si

- Une des suites est croissante
- L'autre est décroissante
- $u_n - v_n \longrightarrow 0$

Quand on a besoin de comparer deux suites monotones, il est souvent utile de fixer  $u_0$  qui est plus grand / petit que  $u_n$

#### 9.3.1 Propriétés

- $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite  $l \in \mathbb{R}$
- $u_n \leq l \leq v_n$

Il est souvent utile de chercher 2 suites extraites adjacentes pour déterminer la limite d'une suite.

### 9.4 Relations de comparaison

- $(u_n)$  négligeable devant  $(v_n)$  :  $(u_n = o(v_n)) - (\frac{u_n}{v_n}) \longrightarrow 0$
- $(u_n)$  dominée par  $(v_n)$  :  $(u_n = \mathcal{O}(v_n)) - (\frac{u_n}{v_n})$  est bornée
- $(u_n)$  équivalente à  $(v_n)$  :  $(u_n \sim v_n) - (\frac{u_n}{v_n}) \longrightarrow 1$

#### 9.4.1 Propriétés

- $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$
- $= o \implies = \mathcal{O}$
- $\sim \implies \mathcal{O}$
- Transitivité
- Produit
- Multiplication par  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  [non valable pour  $\sim$ ]
- Stabilité par somme [non valable pour  $\sim$ ]

### 9.4.2 Propriétés de $\sim$

- Conservation de limite
- Conservation de signe APCR
- Stabilité par puissance (toute puissance entier, puissances réelles si  $u_n > 0$ )
- Encadrement -  $u_n < v_n < w_n$  et  $u_n \sim a$  et  $w_n \sim a \implies v_n \sim a$

### 9.4.3 Équivalences usuels

Petit  $(u_n) \longrightarrow 0$

- $\sin(u_n) \sim u_n$
- $\tan(u_n) \sim u_n$
- $\operatorname{sh}(u_n) \sim u_n$
- $\arcsin(u_n) \sim u_n$
- $\arctan(u_n) \sim u_n$

Petit  $(u_n) \longrightarrow 0$  développement limité raccourci

- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$
- $\operatorname{ch}(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$

Wildcard  $\ln$

- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$  (pour  $u_n \longrightarrow 0$ )
- $\ln(u_n) \sim u_n - 1$  (pour  $u_n \longrightarrow 1$ )

### 9.4.4 Croissances comparées

$$(\ln n)^a \ll n^b \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

## 9.5 Suites particulières

### 9.5.1 Suites arithmético-géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

- Si  $a = 1$ ,  $(u_n)$  est une suite arithmétique
- Si  $b = 0$ ,  $(u_n)$  est une suite géométrique
- Si  $a \neq 1$  -  $u_n = u_0 a^n + b \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$  [Démonstration - posons  $l = al + b$  est soustraire de la définition pour obtenir une suite géométrique]

### 9.5.2 Suites géométriques

Pour  $q \in \mathbb{K}$ , la suite géométrique  $q^n$

- Si  $|q| < 1$ ,  $q^n \rightarrow 0$
- Si  $q = 1$ ,  $q^n = 1$
- Si  $q \in \mathbb{C}$ ,  $q^n$  diverge
- Si  $q \in \mathbb{R}$  et  $q > 1$ ,  $q^n \rightarrow +\infty$
- Si  $q \in \mathbb{R}$  et  $q \leq 1$ ,  $q^n$  n'a pas de limite

### 9.5.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

$$\epsilon_{a,b} = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + b\}$$

$$P = X^2 - aX - b$$

On cherche l'unique formule explicite de la suite étant donné les conditions initiales  $u_0, u_1$

- Si  $r$  est racine de l'équation caractéristique  $P$ ,  $(r^n) \in \epsilon_{a,b}$
- 2 racines distinctes -  $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$
- Une racine double -  $u_n = (\alpha + \beta n)r^n$
- 2 racines complexes conjuguées (suites réelles) - On note  $r = \rho e^{\pm i\theta}$  alors  $u_n = \rho^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$

### 9.5.4 Suites récurrentes d'ordre 1

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- $(u_n)$  est bien définie si  $u_0 \in D$  et  $f$  est stable par  $D$
- La signe de  $f(x) - x$  donne la monotonie de  $(u_n)$
- Croissance de  $f \implies$  monotonie de  $(u_n)$
- Décroissance de  $f \implies (u_n)$  oscillante (on peut étudier la limite en considérant les suites extraites  $u_{2n}$  et  $u_{2n+1}$  avec leurs relation de récurrence  $f \circ f$ )
- Si  $(u_n)$  converge vers  $l$  et  $f$  est continue en  $l$ ,  $f(l) = l$



## 10 Espaces Vectoriels

### 10.1 Définitions

#### 10.1.1 $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

$$(E, +, \cdot)$$

- $E$  est l'ensemble des vecteurs
- $+$  est une loi de composition interne, qui agit sur 2 éléments de  $E$
- $\cdot$  est une loi de composition externe, qui agit sur un scalaire  $\mathbb{K}$  et un élément de  $E$

$(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel si:

- $(E, +)$  est un groupe commutative
  - Commutativité
  - $+$  une loi de composition interne
  - Associativité
  - Neutre ( $0_E$ ) tel que  $x + 0_E = 0_E + x = x$
  - Symétrique ( $-x$ ) tel que  $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$
- Associativité mixte -  $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$
- Distributivité de  $+$  sur  $\cdot$  -  $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- Distributivité de  $\cdot$  sur  $+$  -  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall(x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

#### 10.1.2 Sous-espaces vectoriels

Pour  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $F$  est un sous-espace vectoriel si

1.  $0_E \in F$
  2. Stabilité par  $+$
  3. Stabilité par  $\cdot$
- Les conditions 2 et 3 sont équivalentes à la stabilité par combinaison linéaire.
  - Les ssevs d'un  $\mathbb{K}$ -ev est un  $\mathbb{K}$ -ev - on peut donc démontrer un  $\mathbb{K}$ -ev en montrant qu'il s'agit d'un ssev d'un  $\mathbb{K}$ -ev connu. [Démonstration - Propriétés héritées de  $E$ ]
  - L'intersection des ssevs est un ssev

## 10.2 Somme de ssevs

$$F + G = \{x \in E \mid \exists (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G\}$$

$$F \oplus G = \{x \in E \mid \exists! (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G\}$$

$$F \oplus G \text{ est un ssev} \iff 0_E \in F \oplus G \iff F + G = F \oplus G \iff F \cap G = \{0_E\}$$

$F \cap G = \{0_E\}$  est utile pour montrer que  $F + G$  est directe. On montre que  $x \in F \cap G \implies x = 0_E$ . Alt: On peut aussi déterminer l'unique décomposition de tout vecteur de  $E$  comme somme par analyse-synthèse.

Si  $E = F \oplus G$  alors  $F$  et  $G$  sont supplémentaires de  $E$ .

## 10.3 Familles

### 10.3.1 Vect

Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs ou une partie

$$\text{Vect}(a_1, \dots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \mid n \in \mathbb{N}, (a_1, \dots, a_n) \in A^n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

- $\text{Vect}(A)$  est un ssev de  $E$  [Démonstration -  $\text{Vect}(A) \in E, 0_E \in \text{Vect}(A)$ , et stabilité par combinaison linéaire] - on peut donc montrer que  $F$  est un ssev de  $E$  en écrivant  $F$  sous forme d'un  $\text{Vect}$
- $\text{Vect}(A)$  est le plus petit ssev de  $E$  qui contient  $A$  (Pour tout  $F$  un ssev de  $E$ ,  $\text{Vect}(A) \subset F$ ) [Démonstration -  $x \in \text{Vect}(A)$  est une combinaison linéaire des éléments de  $A$  donc de  $F$  et  $F$  est stable par combinaison linéaire]
- $\text{Vect}(A)$  est l'intersection de tous les ssevs de  $E$  qui contiennent  $A$  [Démonstration - l'intersection est aussi un ssev contenant  $A$  puis double inclusion]
- $\text{Vect}$  d'un vecteur -  $\text{Vect}(0_E) = \{0_E\}$  et  $\text{Vect}(x \neq 0_E) = \mathbb{K}x$  droite vectorielle
- $\text{Vect}$  de 2 vecteurs -  $\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(x) = \text{Vect}(y)$  si  $x$  et  $y$  sont colinéaires - sinon on a un plan vectoriel

### 10.3.2 Familles libres et liées

- Libre (linéairement indépendant) -  $\sum_i \alpha_i x_i = 0 \implies \forall i, \alpha_i = 0$
- Liée - non-libre - au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres dans la famille

Une famille est libre  $\iff \forall x \in \text{Vect}(E), x$  s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de  $E$

### 10.3.3 Familles génératrices

$$E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

Il suffit de montrer  $E \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  car le réciproque est automatique par stabilité par C.L. des ssevs.

En particulier, les bases:

- Une famille libre et génératrice.
- Tout vecteur de  $E$  s'écrit de manière unique comme C.L. des vecteurs de la famille
- Si  $\mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}_G$  sont des bases de  $F$  et  $G$  et  $E = F \oplus G$ , alors  $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$  est une base de  $E$  adaptée.
- Si  $x_1, \dots, x_n$  est une base de  $E$ , on peut 'scinder' la base pour obtenir des supplémentaires  $E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p) \oplus \text{Vect}(x_{p+1}, \dots, x_n)$

## 11 Applications linéaires

Pour  $u : E \rightarrow F$ ,

$$u \in \mathcal{L}(E, F) \iff \forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$$

### 11.1 Définitions

- $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$  un endomorphisme de  $E$
- $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$  une forme linéaire sur  $E$
- $u \in \mathcal{L}(E, F)$  bijective - un isomorphisme de  $E$  dans  $F$
- $u \in \mathcal{L}(E)$  bijective - un automorphisme de  $E$
- $\text{Ker } u = x \in E \mid u(x) = 0_F = u^{-1}(\{0_F\})$

### 11.2 Propriétés des A.Ls

- $u(0_E) = 0_F$
- $\mathcal{L}(E, F)$  est stable par C.L. -  $\mathcal{L}(E, F)$  est un ssev de  $F^E$
- $\mathcal{L}(E, F)$  est stable par composition
- Pour  $\tilde{E}$  un ssev de  $E$ ,  $u(\tilde{E})$  est un ssev de  $F$
- Pour  $\tilde{F}$  un ssev de  $F$ ,  $u^{-1}(\tilde{F})$  est un ssev de  $E$
- $\text{Ker } u$  est un ssev de  $E$
- $\text{Im } u$  est un ssev de  $F$
- $u$  est injective  $\iff \text{Ker } u = \{0_E\} \iff (u(x) = 0_F \implies x = 0_E)$
- $u$  est bijective  $\iff \text{Ker } u = \{0_E\}$  et  $\text{Im } u = F$
- Pour  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base, et des vecteurs  $f_1, \dots, f_n$ , on caractérise une unique application linéaire -  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i$
- Pour  $E = E_1 \oplus E_2, u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F), u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ , on peut caractériser une unique application linéaire -  $\forall x \in E_1, u(x) = u_1(x)$  et  $\forall x \in E_2, u(x) = u_2(x)$

### 11.3 Propriétés des isomorphismes

- Stable par composition
- La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme
- $\text{Im}(v \circ u) = \text{Im } v$
- $\text{Ker}(v \circ u) = \text{Ker } u$

## 11.4 Des familles et des A.L.s

Uniquement dans cette section,  $[x_i] = (x_1, \dots, x_n)$ .  $u \in \mathcal{L}(E, F)$

- $u(\text{Vect}([x_i])) = \text{Vect}([u(x_i)])$
- Pour  $[x_i]$  une famille génératrice -  $[u(x_i)]$  est génératrice de  $\text{Im } u$ 
  - En particulier, pour  $u$  surjective,  $[u(x_i)]$  est génératrice de  $\text{Im } u = F$
- Pour  $u$  injective,  $[u(x_i)]$  est libre
- Pour  $u$  bijective,  $[u(x_i)]$  est une base de  $F$
- Si  $[x_i]$  liée, alors  $[u(x_i)]$  liée

## 11.5 Endomorphismes remarquables

### 11.5.1 Homothéties

$$h_\lambda = x \mapsto \lambda x$$

- $h_1 = \text{Id}$
- Pour  $\lambda \neq 0$ ,  $h_\lambda \in \text{GL}(E)$  et  $h_\lambda^{-1} = h_{\frac{1}{\lambda}}$

### 11.5.2 Projections et symétries

Pour  $x \in E = E_1 \oplus E_2$ ,

1. La projection sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$ ,  $p : x = x_1 + x_2 \mapsto x_1$ 
  - $p \in \mathcal{L}(E)$
  - $p^2 = p$
  - $E_1 = \text{Im } p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$
  - $E_2 = \text{Ker } p$
  - On peut caractériser  $u$  un projecteur si  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $u^2 = u$  - dans ce cas il est projecteur sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker } p$  [Démonstration -  $x = (u(x)) + (x - u(x))$  décomposition unique]
2. La symétrie par rapport à  $E_1$  parallèlement à  $E_2$ ,  $s : x = x_1 + x_2 \mapsto x_1 - x_2$ 
  - $s \in \mathcal{L}$
  - $s^2 = \text{Id}$  -  $s \in \text{GL}(E)$  et  $s^{-1} = s$
  - $E_1 = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \text{Ker}(s - \text{Id})$
  - $E_2 = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \text{Ker}(s + \text{Id})$
  - On peut caractériser  $u$  une symétrie si  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $u^2 = \text{Id}_E$  - dans ce cas il est projecteur sur  $\text{Ker}(s - \text{Id})$  parallèlement à  $\text{Ker}(s + \text{Id})$  [Démonstration -  $x = \frac{1}{2}(x + u(x)) + \frac{1}{2}(x - u(x))$  décomposition unique]
3.  $s = 2p - \text{Id}$

## 11.6 Équations linéaires

Pour l'équation  $u(x) = b$ , s'il existe au moins une solution particulière  $x_p$  ( $u(x_p) = b$ ), alors

$$\mathcal{S} = x_p + \text{Ker}u$$

$\text{Ker}u$  est l'ensemble des solutions à l'équation homogène ( $u(x) = 0$ )