MATH

Huang Ziwen

Contents

1 Logique, ensembles et raisonnements

Chapitre 1

1.1 Méthodes de démonstration

1.1.1 Montrer $P \implies Q$

Démonstration directe

- Supposer P
- Montrer Q

Démonstration par contraposée

- Supposer non P
- Montrer non Q

1.1.2 Montrer l'équivalence $P \iff Q$

Démonstration par double implication

- Montrer $P \implies Q$ (directe)
- Montrer $Q \implies P$ (réciproque)

1.1.3 Disjonction

- $P \ ou \ Q \iff (non(P) \implies Q)$

1.2 Outils de raisonnement

- Disjonction de cas
- L'absurde
- Récurrence (simple, double, forte)
- Analyse-synthèse (analyse cachée)

1.3 Quantificateurs

1.3.1 $\forall$ pour tout

Démonstration

- Soit x dans l'ensemble de définition, sans imposant aucun condition

Démonstration d'une propriété dans l'implication

- En particulier, prenons (une valeur bien choisie)

1.3.2 $\exists$ il existe

Démonstration

- Choisir un x qui convient

1.3.3 $\exists!$ il existe un unique

Démonstration

- Montrer l'unicité d'une solution sous réserve d'existence
- Montrer que l'unique solution existe (qu'elle est bien solution)

1.4 Ensembles

1.4.1 Loi de Morgan

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

1.4.2 Unions

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E | \exists i \in I, x \in A_i\}$$

Éléments qui appartiennent à au moins un des A_i

1.4.3 Intersections

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E | \forall i \in I, x \in A_i\}$$

Éléments qui appartiennent à tous les ensembles A_i

2 Trigonométrie et complexes

Chapitre 2.1, 2.2

2.1 Formules trigonométrique

2.1.1 Formules de base

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

2.1.2 Formules de duplication

Dérivable depuis les formules de base

- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- En divisant les 2 au-dessus, $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

2.1.3 Formules de linéarisation

Dérivable depuis les formules de base en cherchant le produit à droite.

- 2 cosinus pour cosinus: $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
- 2 sinus pour cosinus: $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
- cosinus et sinus pour sinus: $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

2.1.4 Formules de factorisation

Depuis les formules de linéarisation, prenons $p = a + b$ et $q = a - b$, d'où $a = \frac{p+q}{2}, b = \frac{p-q}{2}$

2.1.5 Tangentes

Posons $t = \tan \frac{x}{2}$

- Formules de duplication et relation $\tan^2 + 1 = \sec^2$: $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- Formules de duplication et relation $\tan^2 + 1 = \sec^2$: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

2.2 Équations trigonométriques

2.2.1 Valeurs de l'égalité

Attention à la deuxième valeur pour sin et cos

- $\cos a = \cos b \iff (a \equiv b\ [2\pi]\ ou\ a \equiv -b\ [2\pi])$
- $\sin a = \sin b \iff (a \equiv b\ [2\pi]\ ou\ a \equiv \pi - b\ [2\pi])$
- $\tan a = \tan b \iff a \equiv b\ [\pi]$

2.3 Misc trigo

2.3.1 Limite

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

2.3.2 Inégalité de convexité $|\sin x| \leq |x|$

Par la dérivée de sinus, d'où la convexité, et l'égalité à 0

2.4 Propriétés des complexes

2.4.1 L'écriture algébrique

$z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$

- L'unicité de l'écriture algébrique
- $z = Ae^{i\theta} \iff z = Acos\theta + iA\sin\theta$

2.4.2 Conjugué

$z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) \iff \overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$

- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$
- $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
- $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $z = -\overline{z} \iff z \in i\mathbb{R}$
- $z = e^{i\theta} \iff \overline{z} = e^{-i\theta}$
- $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

2.4.3 Module

$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$

- $|z| \in \mathbb{R}_+$
- $|z|^2 = z\overline{z}$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z| = |\overline{z}| = |-z|$

2.4.4 $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

- $z \in \mathbb{U} \iff \frac{1}{z} = \overline{z}$
- $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$
- Formules d'Euler - $cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
- Égalité trigonométrique - $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta'[2\pi]$
- Formule de Moivre - $\forall n \in \mathbb{Z}, e^{i\theta n} = (e^{i\theta})^n$ (Attention que la formule est valable seulement pour $n \in \mathbb{Z}$

On déduit la factorisation par l'angle moitié avec les formules d'Euler.

$$e^{u\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}(2\cos\frac{\theta-\theta'}{2})$$

$$e^{u\theta} - e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} - e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}(2i\sin\frac{\theta-\theta'}{2})$$

Ces formules sont utiles notamment pour $\theta = 0$ donc $e^{i\theta} = 1$

2.4.5 Transformations du plan

- Translation de vecteur $\vec{b}$ - $z \mapsto z + b$
- Rotation de centre Ω et d'angle θ - $z \mapsto \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$
- Homothétie de centre Ω et de rapport k - $z \mapsto \omega + k(z - \omega)$

2.5 Formules des complexes

2.5.1 Inégalité triangulaire

$$||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$$

Pour montrer $|z \pm z'| \leq |z| + |z'|$, on utilise une chaîne d'équivalences en élevant au carré, puis en développant pour obtenir $\mathrm{Re}(z'\overline{z}) \leq |zz'|$.

Pour montrer $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'|$, on applique $|z| = |z + z' - z'| \leq |z + z'| + |z'|$

On note le cas d'égalité. Les vecteurs qui représentent les affixes sont colinéaires et dans le même sens (d'où $\alpha \in \mathbb{R}_+$ positif).

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff (z = 0 \text{ ou } \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : z' = \alpha z)$$

Démonstration par double implication.

- Sens direct: Supposons $z \neq 0$. Chaîne d'équivalences pour montrer $\mathrm{Re}(\overline{z}z') = |\overline{z}z'|$ donc $\overline{z}z' \in \mathbb{R}$. On a $z' = \frac{z'\overline{z}z}{\overline{z}z} = \frac{z'\overline{z}}{|z|^2}z$
- Sens réciproque: Disjonction de cas

On remarque que $(z = 0 \text{ ou } \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : z' = \alpha z) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : z' = \lambda z \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : z = \lambda z')$

2.5.2 Racines n-ième

Pour $a \in \mathbb{N}^*$, les racines n-ièmes de $a = |a|e^{i\theta}$ sont les $\sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$

On remarque l'importance de l'intervalle pour que les éléments soient uniques.

On note $\mathbb{U}_n$ les racines n-ièmes de l'unité.

- 1 est une racine
- On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \in \mathbb{U}_3$

2.6 Équations du second degré

2.6.1 Racines carrées

- 0 admet une unique racine carrée (0)
- Tout complexe non nul admet exactement 2 racines carrées opposées
- $\sqrt{z}$ n'a de sens que pour $z \in \mathbb{R}_+$

Pour trouver les racines carrées de $z = x + iy$

$$z^2 = a \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(a) \\ 2xy = \mathrm{Im}(a) \\ x^2 + y^2 = |a| \end{cases}$$

2.6.2 Formule quadratique appliquée aux complexes

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2}$$

où le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\delta^2 = \Delta$ une racine carrée de Δ

On remarque que $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

3 Calculs algébriques

Chapitre 3

3.1 Sommes

3.1.1 Propriétés

- Linéarité
- Relation de Chasles - $\sum_{k=n}^{q} = \sum_{k=n}^{p} + \sum_{k=p+1}^{q}$
- Translation et retournement d'indice
- Somme télescopique - $\sum_{k=n}^{p}(x_{k+1} - x_k) = x_{p+1} - x_n$

3.1.2 Sommes classiques

- $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{(n)(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{(n)^2(n+1)^2}{4}$
- Progression arithmétique - $\sum_{k=n}^{p} u_k = \frac{1}{2}(u_p + u_n)(p - n + 1)$ (moyenne fois le nombre de termes)
- Suite géométrique - $\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$

3.2 Produits

3.2.1 Propriétés

- Relation de Chasles
- Translation et retournement d'indice
- Produit télescopique - $\prod_{k=n}^{p} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{p+1}}{x_n}$

3.2.2 Factorielle

$$n! = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} k & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

3.2.3 Coefficient binomial (k parmi n)

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- Formule de symétrie - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Formule de Pascal (triangle de Pascal) - $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- Formule du capitaine - $\binom{n}{k} = \frac{n}{n}\binom{n-1}{k-1}$

3.3 Formules

3.3.1 Formule de Bernoulli

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1}(a^k b^{n-1-k})$$

Démonstration - commencer par le terme à gauche
Ce formule valable pour les matrices qui commutent

3.3.2 Sommes trigonométriques

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos(\frac{nx}{2})[\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}]$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sin(\frac{nx}{2})[\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}]$$

Démonstration - suite géométrique $\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx) + i\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.
Il faut appliquer la factorisation par l'arc moitié. Attention au cas où $e^{ix} = 1$.

3.3.3 Développement du carré

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{(i,j)\in[\![n,p]\!], i<j} x_i x_j$$

Concrètement - $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

3.3.4 Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration - par récurrence simple.
Ce formule valable pour les matrices qui commutent

3.3.5 Expression polynomiale de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$

$$\cos(nx) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (\cos x)^{n-2p} (\cos^2 x - 1)^p$$

$$\sin(nx) = \sin x \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (\cos x)^{n-2p-1} (\cos^2 x - 1)^p$$

Démonstration -

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = e^{nx} = (\cos x + i\sin x)^n$$

Appliquer la formule du binôme de Newton et séparer les termes paires et impaires.

4 Applications

Chapitre 4

4.1 Définitions

Soit f, g des applications

$$\begin{aligned} f :& E \to F \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g :& G \to H \\ & x \mapsto g(x) \end{aligned}$$

4.1.1 Vocabulaire

- E et G sont les ensembles de départ
- F et H sont les ensembles d'arrivée
- $f = g \iff E = G$ et $F = H$ et $\forall x \in E, f(x) = g(x)$ - Attention à l'égalité des ensembles d'arrivée et de départ

4.1.2 Injection

f est injective si tout élément de F a au plus un antécédent dans E. Plus souvent, on utilise la caractérisation suivante -

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(x') \implies x = x'$$

- Si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective
- Si $g \circ f$ est injective, f est injective (les images de f, si il y a des répétitions, ne peuvent pas être dé-répétés par g)

4.1.3 Surjection

f est injective si tout élément de F a au moins un antécédent dans E. Plus souvent, on utilise la caractérisation suivante -

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$$

- Si f et g sont surjectives, $g \circ f$ est surjective
- Si $g \circ f$ est surjective, g est surjective (si un antécédent n'existe même par pour g, f ne peut l'inventer de nulle part)

4.1.4 Bijection

f est injective si tout élément de F a un unique antécédent dans E (f est injective et surjective). Plus souvent, on utilise la caractérisation suivante -

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)$$

On peut noter la fonction qui donne les uniques antécédents f^{-1} la bijection réciproque.

Pour montrer la bijectivité, on peut:

- Analyse-Synthèse - Trouver l'unique antécédent de tout $y \in F$ puis vérifier que cet antécédent est dans E
- Montrer l'injectivité et la surjectivité
- Deviner la bijection réciproque et démontrer que les compositions donnent Id

4.2 Applications particulières

4.2.1 Application identité Id_E

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_E : & E \to E \\ & x \mapsto x \end{aligned}$$

L'application identité est bijective.

4.2.2 Application indicatrice $\nVdash_A$

$$\begin{aligned} \nVdash_A : & E \to \{0, 1\} \\ & x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

5 Fonctions de la variable réelle

Chapitre 5

5.1 $\mathbb{R}$

5.1.1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

- Réflexivité - $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$
- Transitivité - $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z$
- Antisymétrie - $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y$

Attention que l'inégalité stricte n'est pas une relation d'ordre.

5.2 Intervalles

5.2.1 Forme des intervalles

Définition d'un intervalle I -

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies [x, y] \subset I$$

L'ensemble vide $\emptyset$ et les singletons sont des intervalles dits triviaux. Les intervalles non-triviaux sont de l'une des 9 formes suivantes -

- Segment - $[a, b]$
- Intervalles semi-ouvert - $]a, b]$ et $[a, b[$
- Intervalle ouvert - $]a, b[$
- Demi-droite fermée - $]-\infty, b]$ et $[a, +\infty[$
- Demi-droite ouverte - $]-\infty, b[$ et $]a, +\infty[$
- Droite - $]-\infty, +\infty[$

5.2.2 Paramétrisation des segments

$$[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1]\} = \{\mu a + (1 - \mu)b \mid \mu \in [0, 1]\}$$

Démonstration - double inclusion. Sens direct - poser $\lambda = \frac{x-a}{b-a}$. Sens réciproque - montrer $a \leq x \leq b$ avec $\lambda(b - a)$.

5.3 Étude d'une fonction

5.3.1 Parité

- Paire - symétrie l'axe des ordonnées - $\begin{cases} \forall x \in D, -x \in D \\ \forall x \in D, f(-x) = f(x) \end{cases}$
- Impaire - symétrie l'origine - $\begin{cases} \forall x \in D, -x \in D \\ \forall x \in D, f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Attention que la symétrie par rapport à 0 doit être respecté ($\forall x \in D, -x \in D$)
La parité d'une fonction permet de restreindre son étude à $D \cap \mathbb{R}_+$

On note que toute fonction f s'écrit comme somme une fonction paire $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et une fonction impaire $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$

5.3.2 Périodicité

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ la période de f f est T-périodique si $\begin{cases} \forall x \in D, x+T \in D \text{ et } x-T \in D \\ \forall x \in D, f(x) = f(x+T) \end{cases}$
Attention que la T-périodicité du domaine D doit être respecté ($\forall x \in D, x+T \in D$ et $x - T \in D$)

5.3.3 Monotonie

- Croissance - $\forall (x,y) \in D^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- Stricte croissance - $\forall (x,y) \in D^2, x < y \implies f(x) < f(y)$
- Décroissance - $\forall (x,y) \in D^2, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- Stricte décroissance - $\forall (x,y) \in D^2, x < y \implies f(x) > f(y)$
- (stricte) Monotonie - (stricte) croissance ou décroissance

Propriétés des composées

- La composée de 2 fonctions monotones et de même sens de variations est croissante.
- La composée de 2 fonctions monotones et de sens de variations contraire est décroissante.

La bijection réciproque d'une fonction strictement monotone et bijective et aussi strictement monotone et de même sens de variation.

5.3.4 Extrema

- Majorée - $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in D, f(x) \leq M$ - M est un majorant de f
- Maximum - le $f(a)$ qui est un majorant
- Minorée - $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in D, f(x) \geq m$ - m est un minorant de f
- Minimum - le $f(a)$ qui est un minorant
- Bornée - $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in D, |f(x)| \leq C$

5.3.5 Asymptotes

- Asymptote verticale à $x = a$ - $\lim_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$
- Asymptote horizontale à $y = b$ - $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$
- Asymptote oblique à $y = ax + b$ - $\lim_{x \to \pm\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$

Pour identifier les asymptotes obliques, on remarque -

- Condition nécessaire - $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
- Conditions suffisantes - $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \to \pm\infty}(f(x) - ax) = b$

5.3.6 Continuité

f est continue en $a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

- Théorème des valeurs intermédiaires - Soit $(a, b) \in I^2$, $a \leq b \implies \exists c \in [a, b] : \min(f(a), f(b)) \leq c \leq \max(f(a), f(b))$

5.3.7 Dérivée

$$f' : x \mapsto \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$
- $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ si f' ne s'annule pas

f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I (on note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe n). $\mathcal{C}^\infty$ de classe si $\forall n \in \mathbb{N}, f$ est de classe $\mathcal{C}^n$
Vérifier toujours la domaine de dérivabilité avant de dériver. On s'intéresse au signe de f' ce qui donne la croissance ou décroissance de f. Pour étudier le signe de f' on a parfois besoin d'étudier f'' et/ou son image.

6 Fonctions usuelles

Chapitre 6

6.1 Fonction exponentielle

6.1.1 Relation fondamentale

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$

6.1.2 Propriétés

- Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $\exp' = \exp > 0$ donc exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $\exp(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+^*$
- Inégalité de convexité - $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$

6.1.3 Logarithme népérienne

On note ln la bijection réciproque de exp.

6.1.4 Logarithme de base a

$$\begin{aligned}\log_a : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln x}{\ln a}\end{aligned}$$

6.2 Croissances comparées

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (Démonstration par l'inégalité de convexité avec $e^{\frac{x}{2}}$)
- $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

e^x plus puissant que x, x plus puissant que $\ln x$

6.3 Fonctions puissances

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x^n = \prod_{k=1}^{n} x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall k \in \mathbb{Z}, x^k = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} x & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{x^{-k}} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}, x^n = e^{\alpha \ln x}$$

- $(f_\alpha)^{-1} = f_{\frac{1}{\alpha}}$
- Pour $\alpha > 0$, f_α admet une limite finie en 0, on peut donc prolonger par continuité en posant $0^\alpha = 0$

6.4 Fonctions circulaires

- Cosinus - restriction à $[0, \pi]$ est bijective, d'où arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$
- Sinus - restriction à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est bijective, d'où arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Tangente - restriction à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est bijective, d'où arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

6.4.1 Dérivées

$$\forall x \in]-1, 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Attention aux valeurs exclus dans la domaine de dérivabilité.

Démonstration - avec la formule de la dérivée des bijections réciproques. On utilise $\sin^2 + \cos^2 = 1$. Possibilité de s'inspirer de la longueur des côtés du rectangle.

6.5 Fonctions hyperboliques

$$\begin{aligned} \mathrm{ch} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \mathrm{sh} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

- $\text{sh}' = \text{ch} > 0$
- $\text{ch} > \text{sh}$
- $\text{ch}(0) = 1$ est un minimum

On a les formules analogues à celles de la trigonométrie

- $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$
- $\text{ch}(ix) = \cos x$
- $\text{sh}(ix) = i \sin x$

On a les formules analogues avec changement de signe lors d'un sh^2

7 Réels

Chapitre 7

7.1 Définitions

- Majorant M de A - $\forall a \in A, a \leq M$
- Minorant M de A - $\forall a \in A, M \leq a$
- Bornée - $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A, |a| \leq M \iff A$ est majorée et minorée

7.2 Bornes

7.2.1 Borne supérieure

- Un majorant
- Le plus petit des majorants
- Condition d'existence - toute partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure
- $\max A = \sup A \iff \sup A \in A$
- Condition d'un max - toute partie non-vide et majorée de $\mathbb{Z}$ possède un maximum
- Si A n'est pas majorée, $\sup A = +\infty$
- Caractérisation epsilonesque - $\begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ \forall \epsilon > 0, \exists a_0 \in A : m - \epsilon < a_0 \end{cases}$
  - Démonstration $\implies$ - par définition de la borne supérieure
  - Démonstration $\impliedby$ - en retrouvant la définition de la borne supérieure

7.2.2 Borne inférieure

- Un minorant
- Le plus petit des minorants
- Toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure
- $\min A = \inf A \iff \inf A \in A$
- Toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{Z}$ possède un minimum
- Si A n'est pas minorée, $\inf A = -\infty$
- Caractérisation epsilonesque - $\begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ \forall \epsilon > 0, \exists a_0 \in A : a_0 < m - \epsilon \end{cases}$

7.3 Partie entière

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

- Le plus grand entier plus petit que x
- $\max \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$
  - Démonstration de l'existence - A est une partie non-vide et majorée de $\mathbb{Z}$, et montrer que $\max A$ convient
  - Démonstration de l'unicité - Par antisymétrie avec deux valeurs qui vérifie la propriété
- Partie fractionnaire ($\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ notation non universelle)

7.3.1 Approximations décimales

$$x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$

- x_n est l'approximation décimale par défaut de x à la précision 10^{-n}
- $y_n = x_n + \frac{1}{10^n}$ est l'approximation décimale par excès de x à la précision 10^{-n}
- Ces suites convergent vers x [Démonstration - définition de la partie entère et théorème d'encadrement]
- x_n est croissante
- y_n est décroissante

8 Matrices et systèmes linéaires

Chapitre 8

8.1 Systèmes linéaires

Système d'équations linéaires de n équations à p inconnues, tout système de la forme noté (S)

8.1.1 Définitions

- Coefficients - Les scalaires $(a_{i,j})$ le coefficient de x_j dans la i-ième équation
- Second membre - Le n-uplet des scalaires qui sont les constantes dans les équations
- Homogène - Système sans second membre
- Inconnues - Les $(x_1 ... x_n)$
- Ensemble des solutions $\mathcal{S}$ - $\{(x_1 ... x_p) \in \mathbb{K}^p \mid \forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j = b_i\}$
  - Incompatible - Pas de solution $\mathcal{S} = \emptyset$
  - Compatible - Au moins une solution

8.1.2 Opérations élémentaires

Notons L_i les lignes d'un système linéaire. On a les 3 opérations linéaires qui préservent les équivalences.

- Échange de deux lignes - $L_i \leftrightarrow L_j((i, j) \in [\![1, n]\!]^2)$
- Multiplication d'une ligne par un scalaire non-nul - $L_i \leftarrow \lambda L_i (i \in [\![1, n]\!], \lambda \in \mathbb{K}^*)$
- Ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne - $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j((i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j, \lambda \in \mathbb{K})$

8.2 Matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Matrice à n lignes et p colonnes.

8.2.1 Matrices remarquables

- Matrice identité $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ - 1 sur la diagonale
  - Symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si i = j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Matrice nulle $0_{n,p}$ - tous les coefficients sont nuls

- Matrice élémentaire $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{1\leq k\leq n\ ,\ 1\leq l\leq p}$ - tous les coefficients sont nuls sauf 1 en position (i,j)
- Matrice nilpotente - $\exists k \in \mathbb{N} : A^k = 0$
- Matrice symétrique - $A^T = A \iff \forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{j,i} = a_{i,j}$
- Matrice antisymétrique - $A^T = -A \iff \forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{j,i} = -a_{i,j}$
- Matrice diagonale - $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i \neq j \implies a_{i,j} = 0)$
- Matrice triangulaire supérieure - $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i > j \implies a_{i,j} = 0)$
  - Stable par combinaison linéaire et produit [Démonstration - par définition du produit]
- Matrice triangulaire inférieure - $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i > j \implies a_{i,j} = 0)$
  - La transposée d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire supérieure (et vice-versa)
  - Même stabilité que triangulaire supérieure

On remarque que toute matrice carrée s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique $\frac{A+A^T}{2}$ et une matrice antisymétrique $\frac{A-A^T}{2}$

8.2.2 Produit matriciel

$$\forall(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

- $E_{i,j}^{(n,p)} E_{k,l}^{(p,q)} = \delta_{j,k} E_{i,l}^{(n,q)}$ - Démonstration par définition du produit matriciel et en séparant le terme où $i = l$

8.2.3 Transposée

$$\forall(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], [A^T]_{i,j} = [A]j_i$$

- $(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$ - Attention à l'inversement
- $(A^T)^T = A$

8.2.4 Opérations élémentaires

- Dilatation - multiplication de la i-ième ligne par λ
  - $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$
  - $D_i(\lambda)A : L_i \leftarrow \lambda L_i$
  - $AD_i(\lambda) : C_i \leftarrow \lambda C_i$
  - $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\frac{1}{\lambda})$
- Permutation - échange de la i-ième et la j-ième ligne
  - $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$
  - $P_{i,j}A : L_i \leftrightarrow L_j$
  - $AP_{i,j} : C_i \leftrightarrow C_j$
  - $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$
- Transvection - $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
  - $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$
  - $T_{i,j}(\lambda)A : L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
  - $AT_{i,j}(\lambda) : C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ (! j-ième colonne modifiée et non i-ième)
  - $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$

Ces opérations correspondent aux opérations sur un système d'équations linéaires.

8.2.5 Matrices inversibles

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AB = BA = I_n\}$$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m = A^{-m}$
- Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = B$$

Démonstration

- Sens direct - $X = A^{-1}B$ est la solution unique
- Sens indirect - Décomposer I_n en colonne, cette I_n décomposée sert de second membre, la concaténation des X résultats donne A^{-1} (et vérifiée pour la multiplication à gauche). On vérifie la multiplication à droite en étudiant la différence avec I_n

On peut déduire A^{-1} d'une matrice inversible en résolvant le système des équations linéaires représenté par $AX = B$.

Pour les matrices inversible, il faut considérer les puissance négatives

8.3 Algorithme du pivot de Gauss

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

1. Une dilatation et une permutation pour que $a_{1,1} = 1$ [La première colonne est non-nulle]
2. Des transvections $L_i \leftarrow L_i - a_{1,1} L_1$ pour que la 2e colonne est de la forme (0 1 ...)
3. Itération jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure
4. Remonter l'algorithme de la gauche vers le haut, pour obtenir I_n

On en déduit que une matrice triangulaire inversible a des coefficients diagonaux non nuls.

9 Suites

Chapitre 9

9.1 Définitions

Une fonction de $\mathbb{N}$

- Suite extraite - $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}$ avec $\phi(n)$ la fonction extractrice $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante ($\forall n \in \mathbb{N}, \phi(n) \geq n$)
- Monotonie pour les suites - $(\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \leq q \implies u_p \leq u_q) \iff (\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1})$
  - Si le signe de u_n est connu et constant APCR, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1

9.2 Limites

$$u_n \longrightarrow l \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \epsilon$$
$$u_n \longrightarrow +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, u_n \geq A$$
$$u_n \longrightarrow -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, u_n \leq A$$

- La limite est unique [Démonstration - $\forall \epsilon > 0, |l - l'| \leq \epsilon$ avec l'inégalité triangulaire, donc justifier $l = l'$]
- Condition suffisante de convergence - $v_n \longrightarrow 0$ et $|u_n - l| \leq v_n$ APCR $\implies u_n \longrightarrow l$
- Condition nécessaire de convergence - $u_n \longrightarrow l \implies u_n$ est bornée [Démonstration - Par définition de la limite et inégalité triangulaire, montrer $|u_n| = |(u_n - l) + l| \leq |l| + \epsilon$ APCR, et combiner avec la suite finie (donc bornée) pour les éléments avant ce rang]
- $u_n \longrightarrow u > 0 \implies (u_n) > 0$ APCR (attention à l'inégalité stricte [Démonstration - $\epsilon = \frac{u}{2}$]
- $(u_n) \geq 0$ APCR et $u_n \longrightarrow u \implies u \geq 0$ (attention à l'inégalité large) [Démonstration - par l'absurde et le résultat au-dessus]
- Le produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0, converge vers 0
- Pour une suite complexe, $z_n \longrightarrow l \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z_n) \longrightarrow \mathrm{Re}(l) \\ \mathrm{Im}(z_n) \longrightarrow \mathrm{Im}(l) \end{cases}$

9.2.1 Opérations sur les limites

Soit $\begin{cases} u_n \longrightarrow u \\ v_n \longrightarrow v \end{cases}$

- $(|u_n|) \longrightarrow |u|$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (u_n + \lambda v_n) \longrightarrow u + \lambda v$
- $(u_n v_n) \longrightarrow uv$
- $(\frac{1}{u_n}) \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ +\infty & \text{si } u = 0 \text{ et } u_n > 0 \text{ APCR} \\ -\infty & \text{si } u = 0 \text{ et } u_n < 0 \text{ APCR} \\ \text{pas de limite} & \text{si } u = 0 \text{ et signe de } u_n \text{ pas constant APCR} \end{cases}$
- $(\frac{u_n}{v_n}) \longrightarrow \frac{u}{v}$
- Pour une suite complexe - $\overline{u_n} \longrightarrow \overline{u}$

9.2.2 Limites des suites extraites

- Toutes les suites extraites ont la même limite
- S'il existe une suite extraite divergente, alors la suite est divergente
- S'il existe deux suites extraites avec deux limites distinctes, alors la suite n'a pas de limite
- Suites extraites paires et impaires - $(u_{2p}) \longrightarrow l$ et $(u_{2p+1}) \longrightarrow l \implies (u_n) \longrightarrow l$

9.2.3 Théorèmes d'existence

- Encadrement - $\begin{cases} u_n \longrightarrow l \\ w_n \longrightarrow l \\ u_n \leq v_n \leq w_n \text{ (APCR)} \end{cases} \implies v_n \longrightarrow l$
- Divergence par minoration - $\begin{cases} u_n \longrightarrow +\infty \\ u_n \leq v_n \text{ (APCR)} \end{cases} \implies v_n + \infty$
- Divergence par majoration - $\begin{cases} u_n \longrightarrow -\infty \\ v_n \leq u_n \text{ (APCR)} \end{cases} \implies v_n - \infty$
- Limite par comparaison - $\begin{cases} u_n \longrightarrow 0 \\ |v_n| \leq |u_n| \end{cases} \implies u_n \longrightarrow 0$
- Théorème de la limite monotone

– Croissante et majorée - $u_n \longrightarrow \sup u_n$ [Démonstration - Posons $l = \sup u_n$ $l - \epsilon$ n'est pas un majorant et $l + \epsilon$ est un majorant]
– Décroissante et minorée - $u_n \longrightarrow \inf u_n$ [Démonstration - $(-u_n)$ croissante et majorée]
– Croissante et non-majorée - $u_n \longrightarrow +\infty$ [Démonstration - Tout $A \in \mathbb{R}$ n'est pas un majorant]
– Décroissante et non-minorée - $u_n \longrightarrow -\infty$ [Démonstration - Tout $A \in \mathbb{R}$ n'est pas un minorant]

9.3 Suites adjacents

Deux suites sont adjacentes si

- Une des suites est croissante
- L'autre est décroissante
- $u_n - v_n \longrightarrow 0$

Quand on a besoin de comparer deux suites monotones, il est souvent utile de fixer u_0 qui est plus grand / petit que u_n

9.3.1 Propriétés

- (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$
- $u_n \leq l \leq v_n$

Il est souvent utile de chercher 2 suites extraites adjacentes pour déterminer la limite d'une suite.

9.4 Relations de comparaison

- (u_n) négligeable devant (v_n) : $(u_n = o(v_n))$ - $(\frac{u_n}{v_n}) \longrightarrow 0$
- (u_n) dominée par (v_n) : $(u_n = \mathcal{O}(v_n))$ - $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée
- (u_n) équivalente à (v_n) : $(u_n \sim v_n)$ - $(\frac{u_n}{v_n}) \longrightarrow 1$

9.4.1 Propriétés

- $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$
- $= o \implies = \mathcal{O}$
- $\sim \implies \mathcal{O}$
- Transitivité
- Produit
- Multiplication par $\lambda \in \mathbb{R}^*$ [non valable pour $\sim$]
- Stabilité par somme [non valable pour $\sim$]

9.4.2 Propriétés de $\sim$

- Conservation de limite
- Conservation de signe APCR
- Stabilité par puissance (toute puissance entier, puissances réelles si $u_n > 0$)
- Encadrement - $u_n < v_n < w_n$ et $u_n \sim a$ et $w_n \sim a \implies v_n \sim a$

9.4.3 Équivalences usuels

Petit $(u_n) \longrightarrow 0$

- $\sin(u_n) \sim u_n$
- $\tan(u_n) \sim u_n$
- $\text{sh}(u_n) \sim u_n$
- $\arcsin(u_n) \sim u_n$
- $\arctan(u_n) \sim u_n$

Petit $(u_n) \longrightarrow 0$ développement limité raccourci

- $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$
- $\text{ch}(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$

Wildcard ln

- $\ln(1+u_n) \sim u_n$ (pour $u_n \longrightarrow 0$)
- $\ln(u_n) \sim u_n - 1$ (pour $u_n \longrightarrow 1$)

9.4.4 Croissances comparées

$$(\ln n)^a \ll n^b \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

9.5 Suites particulières

9.5.1 Suites arithmético-géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

- Si $a = 1$, (u_n) est une suite arithmétique
- Si $b = 0$, (u_n) est une suite géométrique
- Si $a \neq 1$ - $u_n = u_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a}$ [Démonstration - posons $l = al + b$ est soustraire de la définition pour obtenir une suite géométrique]

9.5.2 Suites géométriques

Pour $q \in \mathbb{K}$, la suite géométrique q^n

- Si $|q| < 1$, $q^n \longrightarrow 0$
- Si $q = 1$, $q^n = 1$
- Si $q \in \mathbb{C}$, q^n diverge
- Si $q \in \mathbb{R}$ et $q > 1$, $q^n \longrightarrow +\infty$
- Si $q \in \mathbb{R}$ et $q \leq 1$, q^n n'a pas de limite

9.5.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

$$\epsilon_{a,b} = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + b\}$$
$$P = X^2 - aX - b$$

On cherche l'unique formule explicite de la suite étant donné les conditions initiales u_0 u_1

- Si r est racine de l'équation caractéristique P, $(r^n) \in \epsilon_{a,b}$
- 2 racines distinctes - $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$
- Une racine double - $u_n = (\alpha + \beta n)r^n$
- 2 racines complexes conjuguées (suites réelles) - On note $r = \rho e^{\pm i\theta}$ alors $u_n = \rho^n(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$

9.5.4 Suites récurrentes d'ordre 1

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- (u_n) est bien définie si $u_0 \in D$ et f est stable par D
- La signe de $f(x) - x$ donne la monotonie de (u_n)
- Croissance de $f \implies$ monotonie de (u_n)
- Décroissance de $f \implies (u_n)$ oscillante (on peut étudier la limite en considérant les suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} avec leurs relation de récurrence $f \circ f$
- Si (u_n) converge vers l et f est continue en l, $f(l) = l$

10 Espaces Vectoriels

10.1 Définitions

10.1.1 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

$$(E, +, \cdot)$$

- E est l'ensemble des vecteurs
- $+$ est une loi de composition interne, qui agit sur 2 éléments de E
- $\cdot$ est une loi de composition externe, qui agit sur un scalaire $\mathbb{K}$ et un élément de E

$(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si:

- $(E, +)$ est un groupe commutative
  - Commutativité
  - $+$ une loi de composition interne
  - Associativité
  - Neutre (0_E) tel que $x + 0_E = 0_E + x = x$
  - Symétrique $(-x)$ tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$
- Associativité mixte - $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$
- Distributivité de $+$ sur $\cdot$ - $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- Distributivité de $\cdot$ sur $+$ - $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall(x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

10.1.2 Sous-espaces vectoriels

Pour $(E, +, \cdot)$ un K-ev, F est un sous-espace vectoriel si

1. $0_E \in F$
2. Stabilité par $+$
3. Stabilité par $\cdot$

- Les conditions 2 et 3 sont équivalentes à la stabilité par combinaison linéaire.
- Les ssevs d'un K-ev est un K-ev - on peut donc démontrer un K-ev en montrant qu'il s'agit d'un ssev d'un K-ev connu. [Démonstration - Propriétés héritées de E]
- L'intersection des ssevs est un ssev

10.2 Somme de ssevs

$$F + G = \{x \in E \mid \exists (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G\}$$
$$F \oplus G = \{x \in E \mid \exists ! (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G\}$$

$F \oplus G$ est un ssev $\iff$ $0_E \in F \oplus G$ $\iff$ $F + G = F \oplus G$ $\iff$ $F \cap G = \{0_E\}$

$F \cap G = 0_E$ est utile pour montrer que $F + G$ est directe. On montre que $x \in F \cap G \implies x = 0_E$. Alt: On peut aussi déterminer l'unique décomposition de tout vecteur de E comme somme par analye-synthèse.
Si $E = F \oplus G$ alors F et G son supplémentaires de E.

10.3 Familles

10.3.1 Vect

Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs ou une partie

$$\text{Vect}(a_1, ..., a_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \mid (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

$$\text{Vect}(A) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \mid n \in \mathbb{N}, (a_1, ..., a_n) \in A^n, (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

- Vect(A) est un ssev de E [Démonstration - Vect$(A) \in E, 0_E \in$ Vect(A), et stabilité par combinaison linéaire] - on peut donc montrer que F est un ssev de E en écrivant F sous forme d'un Vect
- Vect(A) est le plus petit ssev de E qui contient A (Pour tout F un ssev de E, Vect$(A) \subset F$) [Démonstration - $x \in$ Vect(A) est une combinaison linéaire des élements de A donc de F et F est stable par combinaison linéaire]
- Vect(A) est l'intersection de tous les ssevs de E qui contiennent A [Démonstraiton - l'intersection est aussi un ssev contenant A puis double inclusion]
- Vect d'un vecteur - Vect$(0_E) = 0_E$ et Vect$(x \neq 0_E) = \mathbb{K}x$ droite vectorielle
- Vect de 2 vecteurs - Vect(x, y) = Vect(x) = Vect(y) si x et y sont colinéaires - sinon on a un plan vectoriel

10.3.2 Familles libres et liées

- Libre (linéairement indépendant) - $\sum_i \alpha_i x_i = 0 \implies \forall i, \alpha_i = 0$
- Liée - non-libre - au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres dans la famille

Une famille est libre $\iff$ $\forall x \in$ Vect$(E), x$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de E

10.3.3 Familles génératrices

$$E = \text{Vect}(x_1, ..., x_n)$$

Il suffit de montrer $E \subset \text{Vect}(x_1, ...x_n)$ car le réciproque est automatique par stabilité par C.L. des ssevs.

En particulier, les bases:

- Une famille libre et génératrice.
- Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme C.L. des vecteurs de la famille
- Si $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ sont des bases de F et G et $E = F \oplus G$, alors $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E adaptée.
- Si $x_1, ...x_n$ est une base de E, on peut 'scinder' la base pour obtenir des supplémentaires $E = \text{Vect}(x_1, ..., x_p) \oplus \text{Vect}(x_{p+1}, ..., x_n)$

11 Applications linéaires

Pour $u : E \to F$,

$$u \in \mathcal{L}(E, F) \iff \forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$$

11.1 Définitions

- $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme de E
- $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$ une forme linéaire sur E
- $u \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective - un isomorphisme de E dans F
- $u \in \mathcal{L}(E)$ bijective - un automorphisme de E
- Ker $u = x \in E \mid u(x) = 0_F = u^{-1}(\{0_F\})$

11.2 Propriétés des A.Ls

- $u(0_E) = 0_F$
- $\mathcal{L}(E, F)$ est stable par C.L. - $\mathcal{L}(E, F)$ est un ssev de F^E
- $\mathcal{L}(E, F)$ est stable par composition
- Pour $\tilde{E}$ un ssev de E, $u(\tilde{E})$ est un ssev de F
- Pour $\tilde{F}$ un ssev de F, $u^{-1}(\tilde{F})$ est un ssev de E
- Ker u est un ssev de E
- Im u est un ssev de E
- u est injective $\iff$ Ker $u = \{0_E\} \iff (u(x) = 0_F \implies x = 0_E)$
- u est bijective $\iff$ Ker $u = \{0_E\}$ et Im $u = F$
- Pour $B = (e_1, ..., e_n)$ une base, et des vecteurs $f_1, ..., f_n$, on caractérise une unique application linéaire - $\forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = f_i$
- Pour $E = E_1 \oplus E_2, u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F), u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, on peut caractériser une unique application linéaire - $\forall x \in E_1, u(x) = u_1(x)$ et $\forall x \in E_2, u(x) = u_2(x)$

11.3 Propriétés des isomorphismes

- Stable par composition
- La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme
- Im$(v \circ u) =$ Im v
- Ker$(v \circ u) =$ Ker u

11.4 Des familles et des A.L.s

Uniquement dans cette section, $[x_i] = (x_1, ..., x_n)$. $u \in \mathcal{L}(E, F)$

- $u(\text{Vect}([x_i])) = \text{Vect}([u(x_i)])$
- Pour $[x_i]$ une famille génératrice - $[u(x_i)]$ est génératrice de Im u
  - En particulier, pour u surjective, $[u(x_i)]$ est génératrice de Im $u = F$
- Pour u injective, $[u(x_i)]$ est libre
- Pour u bijective, $[u(x_i)]$ est une base de F
- Si $[x_i]$ liée, alors $[u(x_i)]$ liée

11.5 Endomorphismes remarqueables

11.5.1 Homothéties

$$h_\lambda = x \mapsto \lambda x$$

- $h_1 = \text{Id}$
- Pour $\lambda \neq 0$, $h_\lambda \in \text{GL}(E)$ et $h_\lambda^{-1} = h_{\frac{1}{\lambda}}$

11.5.2 Projections et symétries

Pour $x \in E = E_1 \oplus E_2$,

1. La projection sur E_1 parallèlement à E_2, $p : x = x_1 + x_2 \mapsto x_1$
   - $p \in \mathcal{L}(E)$
   - $p^2 = p$
   - $E_1 = \text{Im } p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$
   - $E_2 = \text{Ker } p$
   - On peut caractériser u un projecteur si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u^2 = u$ - dans ce cas il est projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à Ker$p$ [Démonstration - $x = (u(x)) + (x - u(x))$ décomposition unique]
2. La symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2, $s : x = x_1 + x_2 \mapsto x_1 - x_2$
   - $s \in \mathcal{L}$
   - $s^2 = \text{Id}$ - $s \in \text{GL}(E)$ et $s^{-1} = s$
   - $E_1 = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \text{Ker}(s - \text{Id})$
   - $E_2 = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \text{Ker}(s + \text{Id})$
   - On peut caractériser u une symétrie si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u^2 = \text{Id}_E$ - dans ce cas il est projecteur sur $\text{Ker}(s - \text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id})$ [Démonstration - $x = \frac{1}{2}(x + u(x)) + \frac{1}{2}(x - u(x))$ décomposition unique]
3. $s = 2p - \text{Id}$

11.6 Équations linéaires

Pour l'équation $u(x) = b$, s'il existe au moins une solution particulière $x_p(u(x_p) = b)$, alors

$$\mathcal{S} = x_p + \mathrm{Ker}u$$

$\mathrm{Ker}u$ est l'ensemble des solutions à l'équation homogène $(u(x) = 0)$