

天津大学《数值计算方法与 Matlab》

2010-2011 学年第二学期考试试卷及答案 A 卷

一、填空题：(共 42 分，每空 3 分) 按要求把正确的答案填在每题中的横线上方。

1. 这些误差的来源主要有：观测误差、舍入误差、截断误差、模型误差。(至少三种)

2. $cond_{\infty}(A) = \underline{3}$, $\frac{\| \delta x \|_{\infty}}{\| x \|_{\infty}}$ 的上界为 $\underline{3\varepsilon}$ 。

3. $S(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上还满足：在每一子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ ($k=0, 1, \dots, n$) 上是次数不超过 3 的多项式。

4. 几何意义是： $S'_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 Φ 中的正交投影。

5. $f'(1.0) = \underline{3.52}$, $f''(1.0) = \underline{11.00}$ 。

6. 差商 $p[2^0, 2^1] = \underline{148}$, 和 $p[2^0, 2^1, \dots, 2^7] = \underline{1}$ 。

7. 建立常微分方程初值问题数值解计算格式的三种基本方法是：数值微分法、Taylor 展开法、数值积分法；Runge-Kutta 法的基本思想是：利用 $f(x, y)$ 在某些点处函数值的线性组合构造差分方程，从而避免了高阶导数的计算。

8. Gauss 求积公式

具有 $\underline{2n+1}$ 次代数精度，相应的求积节点 x_k 称为 Gauss 点

。计算积分 $\int_{-1}^1 e^x \sin x dx$ 的三点 Gauss-Legendre 数值计算公式为：

$$\approx \frac{5}{9} e^{(-\sqrt{0.6+2})} \sin(-\sqrt{0.6+2}) + \frac{8}{9} e^2 \sin(2) + \frac{5}{9} e^{(\sqrt{0.6+2})} \sin(\sqrt{0.6+2})。$$

二、解下列各题：(共 36 分，每小题 9 分)

1. 求出 A, B, C 使得如下数值求积公式

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx \approx Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

代数精度尽可能地高，并指出代数精度是多少？

解：首先令 $f(x) = 1, x, x^2$ ，分别代入求积公式中，使其精确地成立，得关于系数 A, B, C 的方程：

$$0 = A + B + C$$

$$\frac{2}{3} = -A + 0 + C$$

$$0 = A + 0 + C$$

(5 分)

解得 $A = -\frac{1}{3}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{3}$ 。将 A, B, C 的上述值代回积分公式，得

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx \approx -\frac{1}{3}f(-1) + \frac{1}{3}f(1)。(7 分)$$

再令 $f(x) = x^3$ ，代入积分公式得：左边 $= 2/5$ ，右边 $= \frac{2}{3}$ ，左边不等于右边，所以最大次数

是 2。(9 分)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 1.8 \end{cases}$$

(1) 写出 $\omega = 1.4$ 的 SOR 法迭代公式；

(2) 取初始向量 $x^{(0)} = [1, 1, 1]^T$ ，求出第一次近似解 (保留 4 位小数)。

解：(1) SOR 迭代公式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{\omega}{2}(1 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)}) = (1 - \omega)x_1^{(k)} + \frac{\omega}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{\omega}{2}(x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) = (1 - \omega)x_2^{(k)} + \frac{\omega}{2}(x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}), k = 1, 2, 3, \dots \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \frac{\omega}{2}(1.8 + x_2^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}) = (1 - \omega)x_3^{(k)} + \frac{\omega}{2}(1.8 + x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

当 $\omega = 1.4$ 的 SOR 迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.7 - 0.4x_1^{(k)} + 1.4x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 0.7x_1^{(k+1)} - 0.4x_2^{(k)} + 0.7x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0.7 \times 1.8 + 0.7x_2^{(k+1)} - 0.4x_3^{(k)} \end{cases} (7 分)$$

(2) 以 $x^{(0)} = [1, 1, 1]^T$ 为初始向量，得到第一次迭代近似解为 $x^{(1)} = (1, 1, 1.56)^T$ 。(9 分)

3. 用积分 $\int_2^8 x^{-1} dx = 2 \ln 2$ 计算 $\ln 2$ ，为使误差不超过 10^{-3} ，估计用复化 Simpson 公式计算，需要取多少个节点？并计算此 $\ln 2$ 的近似值。

解：依题意 $\ln 2 = \frac{1}{2} \int_2^8 x^{-1} dx$ ，被积函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 。(2 分)

设将区间 $[2, 8]$ N 等分，步长 $h = 6/N$ 。

用复化 simpson 公式计算时, 余项 $R_s(f) = -\frac{b-a}{180} \frac{h^4}{2} f^{(4)}(\xi)$ 。令:

$$|R_s(f)| = \frac{6}{180} \left(\frac{3}{N}\right)^4 |12\xi^{-5}| \leq \frac{2 \cdot 3^4}{5N^4} \cdot \max_{2 \leq x \leq 8} |x^{-5}| \leq \frac{1}{5} \left(\frac{3}{2N}\right)^4 \leq 10^{-3}$$

解得 $N \geq [15/\sqrt[4]{50}] \approx 5.6$, 亦即, 利用复化 simpson 公式计算时至少需要将区间 $[2, 8]$ 6 等分,

计算时需要 13 个节点的函数值。

(5分)

此时, 步长 $h=1$, 节点 $x_k = 2+k \cdot 1 = k+2$, 中点 $x_{k+\frac{1}{2}} = 2 + (k+\frac{1}{2}) \cdot 1 = k + \frac{5}{2}$ 。由复化

simpson 公式, 有:

$$\begin{aligned} \ln 2 &\approx S_6 = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{N-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + f(b) \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[f(2) + 4 \sum_{k=0}^5 f\left(k + \frac{5}{2}\right) + 2 \sum_{k=1}^5 f(k+2) + f(8) \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{4} + 4 \sum_{k=0}^5 \frac{1}{2k+5} + 2 \sum_{k=1}^5 \frac{1}{2k+4} + \frac{1}{16} \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{4} + 4 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} \right) + 2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} \right) + \frac{1}{16} \right] \\ &\approx 0.69320 \end{aligned}$$

(9分)

4. 设 $y = \cos x$ 的函数数据表如下:

x_k	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_k	1.00000	0.99500	0.98007	0.95534	0.92106	0.87758	0.82534

利用适当的四次牛顿插值公式计算 $\cos(0.575)$ 的近似值 (保留 5 位小数)。

解: 首先构造差分表如下:

从差分表中可以看出四阶差分近似为常数, 所以可取四次插值的结果作为近似值。因 $x=0.575$ 位于表末, 故取 $x_n = x_6 = 0.6$, 此时 $h=0.1$, $t=(x-x_n)/h=(0.575-0.6)/0.1=-0.25$ 。利用四次 Newton 后插公式有:

$$\begin{aligned} \cos 0.575 &\approx N_4(0.6+th) = f_n + t \nabla f_n + \frac{t(t+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \nabla^3 f_n \\ &\quad + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!} \nabla^4 f_n \end{aligned}$$

x_k	y_k	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.0	1.00000	-0.00500	-0.00993	0.00013	0.00012
0.1	0.99500	-0.01493	-0.00980	0.00025	0.00010
0.2	0.98007	-0.02473	-0.00955	0.00035	0.00009
0.3	0.95534	-0.03428	-0.00920	0.00044	
0.4	0.92106	-0.04348	-0.00876		
0.5	0.87758	-0.05224			
0.6	0.82534				

(4分)

$$\begin{aligned} &= 0.82534 + (-0.25)(-0.05224) + \frac{(-0.25) \times (-0.25 + 1)}{2!} \times (-0.00876) \\ &\quad + \frac{(-0.25) \times (-0.25 + 1) \times (-0.25 + 2)}{3!} \times (-0.00044) \\ &\quad + \frac{(-0.25) \times (-0.25 + 1) \times (-0.25 + 2) \times (-0.25 + 3)}{4!} \times (-0.00009) \\ &\approx 0.83915 \end{aligned}$$

(9分)

三、应用题: (共 22 分, 每小题 11 分)

1. 下面表格中的数据反映了在六个星期时间中果蝇群体的增长。用最小二乘法, 估计模型

$P = a e^{bt}$ 中参数 a, b (结果保留 3 位小数)。

(天数) t	7	14	21	28	35	42
(观测到的果蝇数目) P	8	41	133	250	280	297

解: 对 $y = a e^{bt}$ 两边取自然对数, 得 $\ln y = \ln a + b/t$ 。令 $u = \ln y$, $x = 1/t$, $A = \ln a$, $B = b$

则: 用 $u = A + Bx$ 来拟合原始数据。 (2分)

首先, 由 $u_k = \ln y_k$, $x_k = 1/t_k$ 得到新的数据关系表如下:

x_k	0.1429	0.0714	0.0476	0.0357	0.0286	0.0238
u_k	2.0794	3.7136	4.8903	5.5215	5.6348	5.6937

即在 $\Phi = \text{span}\{1, x\}$ 中求函数 u 。此时 $n=1$, $m=5$, 权函数 $\omega(x) \equiv 1$, $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = x$ 。法

方程形如:

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u, \varphi_0) \\ (u, \varphi_1) \end{pmatrix}$$

$$\text{这里 } (\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=0}^5 1 = 6, (\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_0) = \sum_{i=0}^5 x_i = 0.3500, (\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=0}^5 x_i^2 = 0.0304,$$

$$(u, \varphi_0) = \sum_{i=0}^5 u_i = 27.5333 \text{ 和 } (u, \varphi_1) = \sum_{i=0}^5 u_i x_i = 1.2889. \text{ 故有}$$

$$\begin{cases} 6A + 0.3500B = 27.5333 \\ 0.3500A + 0.0304B = 1.2889 \end{cases} \quad (9 \text{ 分})$$

解得 $A = 6.4354, B = -31.6538$, 由此 $a = 623.5075, b = -31.6538$, 所以最小二乘解为

$$y = 623.5075 e^{-31.6538/t} \approx 623.508 e^{-31.654/t}. \quad (11 \text{ 分})$$

2. 对于第二类椭圆积分 $y(x) = \int_0^x \sqrt{1 - a \sin^2 t} dt \quad (a \in (0, 1)) \quad x \in [0, \pi/2]$, 利用求解常微分

方程初值问题数值解的标准四阶 Runge-Kutta 法, 构造一个求解函数 $y(x)$ 的数值解的计算公式。

解: 求解 $y(x) = \int_0^x \sqrt{1 - a \sin^2 t} dt$ 等价于求解常微分方程初值问题

$$y'(x) = \sqrt{1 - a \sin^2 x}, y(0) = 0. \quad (3 \text{ 分})$$

设积分结点为 x_n , 步长为 h , 记 y_n 为精确解 $y(x_n)$ 的数值近似。由标准四阶 Runge-Kutta 公式,

得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = \sqrt{1 - a \sin^2 x_n},$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) = \sqrt{1 - a \sin^2(x_n + 0.5h)},$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) = \sqrt{1 - a \sin^2(x_n + 0.5h)},$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) = \sqrt{1 - a \sin^2(x_n + h)}.$$

将初值 $y(0) = y_0 = 0, n = 0, x_0 = 0$ 代入上面各式, 可依次计算出函数 $y(x)$ 数值解 $y_1, y_2,$

y_3, y_4, \dots 。 (11 分)