ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

Институт компьютерных наук и технологий

Высшая школа программной инженерии

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

Решение дифференциального уравнения

по дисциплине «Математическое моделирование»

Студент гр. 3530202/90202 — А. М. Потапова

Руководитель Ст. преподаватель — Ю.Б. Сениченков

Санкт-Петербург
2022 г

Задание 1_2

Постановка задачи

Динамические системы. Обыкновенное дифференциальное уравнение и его решение. Символьное и численное решение.

1. Решить численно уравнение:

$$\frac{d^2y}{dt_2} + p_2 \cdot y = (a_2 \cdot \cos(t) + a_1 \cdot \sin(t) + a_0);\ t \in [-T, T];\ y(0) = y_0;\ y'(0) = y_0';\ \ p_2 = 1;$$

Вариант 13

N	***a*₂**	***a*₁**	***a*₀**	***T***	***x*₀**	**Уравнение**
1	1	0	0	1	–6	1.1
2	0	1	0	2	–5	1.1
3	1	1	0	3	–4	1.1
4	0	1	1	4	–3	1.1
5	1	0	1	1	–2	1.1
6	1	1	1	2	–1	1.1
7	1	0	0	3	1	1.1
8	0	1	0	4	2	1.1
9	1	1	0	1	3	1.1
10	0	1	1	2	4	1.1
11	1	0	1	3	5	1.1
12	1	1	1	4	6	1.1
N					***y*₀**	
13	1	1	0	1	6	1.2

Нарисовать графики построенных численных решений (Anydynamics) и графики абсолютной и относительной погрешностей.

Решение

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p_2\cdot y=(a_2\cdot\cos(t)+a_1\cdot\sin(t)+a_0);\quad t\in[-T,T]\ ;\ y(0)=y_0;\ y'(0)=y_0';\ p_2=1$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\cos(t)+\sin(t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

$y=e^{\lambda t}$, тогда $e^{\lambda t}(\lambda^2+1)=0$

$$\frac{d^2e^{\lambda t}}{dt^2}+e^{\lambda t}=0$$

$$\lambda^2e^{\lambda t}+e^{\lambda t}=0$$

$$y=c_1e^{it}+c_2e^{-it}$$

$$y=c_1\cos(t)+c_2\sin(t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\cos(t)+\sin(t)$$

$$2a_2\cos(t)-2a_1\sin(t)=\cos(t)+\sin(t)$$

$$a_2=\frac{1}{2},\ a_1=-\frac{1}{2}$$

$$y=-\frac{1}{2}t\cos(t)+\frac{1}{2}t\sin(t)+c_1\cos(t)+c_2\sin(t)$$

$$y(0)=6\Rightarrow y=-\frac{1}{2}t\cos(t)+\frac{1}{2}t\sin(t)+6\cos(t)+c_2\sin(t)$$

$$y'(0)=0\Rightarrow\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{2}\cos(t)+\frac{1}{2}t\cos(t)+\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{1}{2}t\sin(t)-c_1\sin(t)+c_2\cos(t)$$

$$c_1=6,\ c_2=\frac{1}{2}$$

$$y=-\frac{1}{2}t\cos(t)+\frac{1}{2}t\sin(t)+6\cos(t)+\frac{1}{2}\sin(t)$$

$$y=\frac{1}{2}((t+1)\sin(t)-(t-12)\cos(t))$$

Ответ: $y=\frac{1}{2}((t+1)\sin(t)-(t-12)\cos(t))$

Получили ответ:

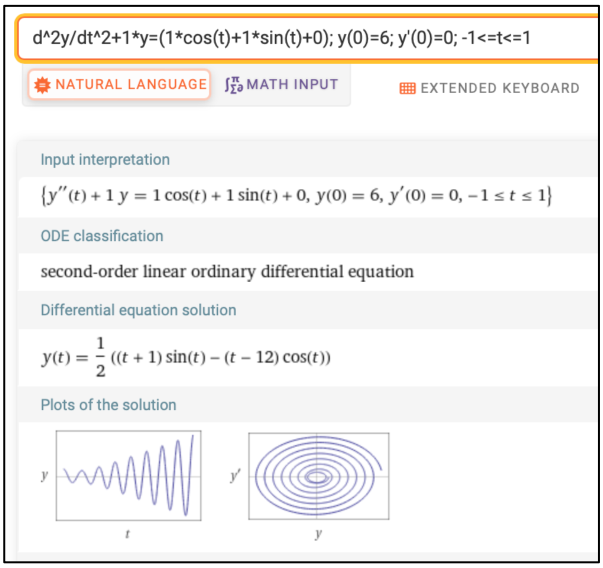
$$y(t)=\frac{1}{2}((t+1)\cdot\sin(t)-(t-12)\cdot\cos(t));$$

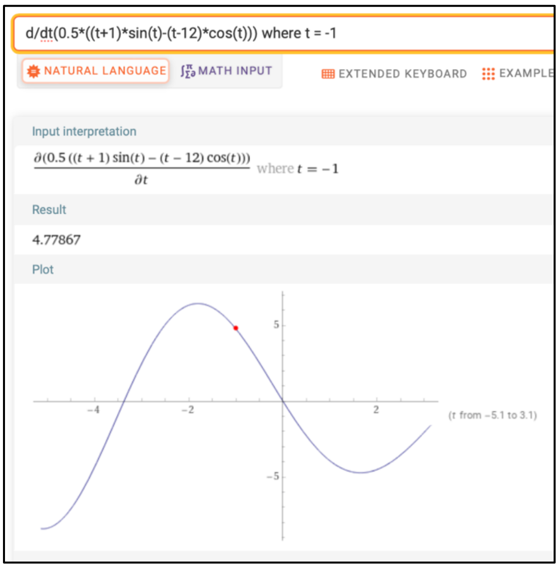
$$y(-1)=\frac{1}{2}((-1+1)\cdot\sin(-1)-(-1-12)\cdot\cos(-1))=\ 3.512;$$

$$y'(t)=\frac{1}{2}\big((t-11)\cdot\sin(t)+t\cdot\cos(t)\big);$$

$$y'(-1)=\frac{1}{2}\big((-1-11)\cdot\sin(-1)+(-1)\cdot\cos(-1)\big)=4.77867;$$

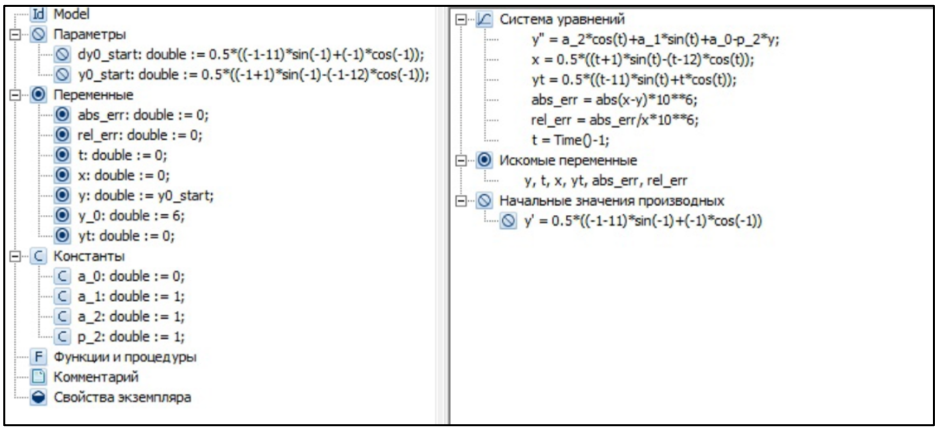
Используя WolframAlpha (тот же результат):

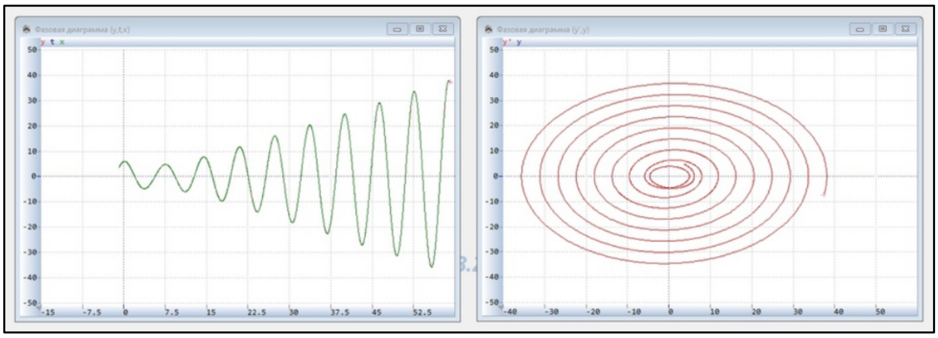




Anydynamics

x – уравнение в качестве общего решения для y;
yt – уравнение, полученное из уравнения, после взятия производной по t;
y0_start – начальное значение для точки $t = -1$;
dy0_start – значение производной в точке $t = -1$, для задания начального условия;
t – время, сдвинутое на нужные нам половину промежутка;
rel_err, abs_err – относительная и абсолютная погрешность.





Графики для заданного по условию интервалу [-1;1]

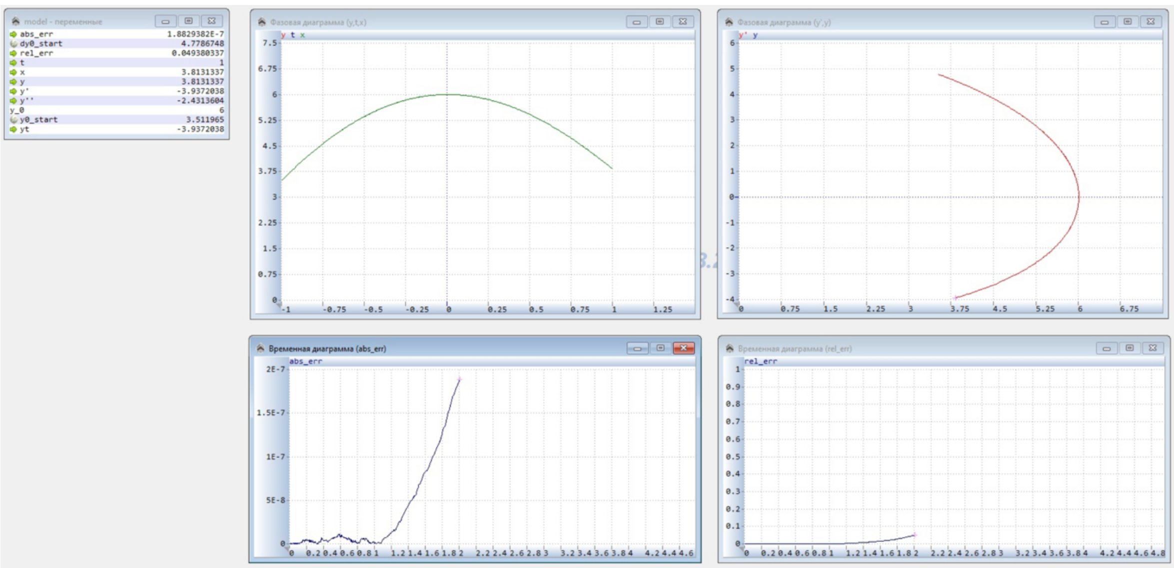
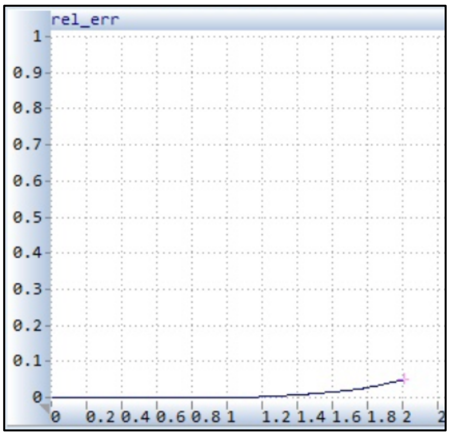


График абсолютной погрешности

График относительной погрешности



Вывод

Как можно увидеть, графики, предлагаемые Wolfram, и те, что строит AnyDinamics, совпадают. Иногда происходят выбросы, но можно увидеть, что почти весь промежуток погрешность не слишком велика, но через интервалы происходит скачек. Это обусловлено тем, что значение функции в данных точках стремится к нулю и при вычислении погрешности происходит деление на это значение.