Simulador de una Cadena de Markov.

Introducción

El presente trabajo desarrolla el proceso de un simulador realizado a través de Python 3.7, sobre tres modelos que emulan un proceso de Cadenas de Markov, con la finalidad de acercar al estudiante de la licenciatura en psicología a comprender los conceptos y principios de procesos básicos del comportamiento, así como a términos relacionados con la inteligencia artificial y al lenguaje de programación Python.

Desarrollo

Andrei A. Markov (1856-1922) realizó estudios sobre los procesos estocásticos y sus aplicaciones en diversas áreas, desarrollando así lo que se conoce hoy en día como Cadenas de Markov; las cuales modelan una secuencia de variables aleatorias que corresponden a los estados de un sistema de tal forma que el estado en un momento dado depende únicamente del estado en el tiempo anterior. Por lo que las probabilidades de eventos futuros se encuentran determinadas por el estado del proceso presente y las probabilidades de su comportamiento a partir del punto de partida actual (Ching, Huang, Ng & Siu, 2013 & Harris, 2013).

De igual forma, el comportamiento final de la cadena está dado por la ubicación y el tamaño relativo de las entradas en la matriz de transición de un solo paso y dichas probabilidades definen los estados que se pueden alcanzar a partir de otros y cuánto tiempo se tarda en hacer dichas transiciones (Harris, 2013).

Dado lo anterior, se tiene en cuenta que un proceso estático es aquel proceso aleatorio que evoluciona conforme a un parámetro que usualmente es el tiempo, definiendo entonces a este como una colección de variables aleatorias, en donde por cada valor del parámetro t (tiempo) del proceso, existe una variable aleatoria. En el caso de las Cadenas de Markov, dichas variables aleatorias y el parámetro t son consideradas como variables discretas. Por lo que entonces en las Cadenas de Mrkov, se tienen a una herramienta que permite determinar la probabilidad con la cual el proceso es capaz de entrar en un estado y después de ocurridas varias transiciones, estas probabilidades convergen en valores particulares (Bedoya, 2006).

Teniendo en cuenta la definición de convergencia, se tiene entonces que un conjunto de valores propios de la matriz escolástica siempre existe por lo menos un valor propio igual a la unidad aunada. Que los demás valores se encuentran dentro de un circulo unitario complejo de forma que a medida que aumenta n en su valor; es decir, cuando han ocurrido suficientes transiciones, el resultado se reduce únicamente a que término asociado al valor propio unitario ya que los demás sumandos tienden a desaparecer por ser de magnitud menor a la unidad. Dicha convergencia en la Cadena de Markov, considera que el valor de un tiempo grande n del estado se distribuye según la distribución estacionaria y la calidad de dicha muestra se mide en términos de distancia de variación entre su distribución y la distribución estacionaria (Bedoya, 2006 & Brémaud, 2020).

A continuación se expone un ejemplo de los procesos mencionados anteriormente en una Cadena de Markov:

Para lo cual, se considera un proceso estocástico con un conjunto de número finitos definidos como M

$$\{X^{(n)}, n = 0,1,2, \dots\}$$

En donde en la ecuación anterior se considera a $X^{(n)}$ como las estaciones del año. Asumiendo entonces que el espacio de estados es M. En donde cada elemento de M es nombrado como estado del proceso

M = {primavera, otoño, verano, invierno}

Por lo que entonces se podría obtener la siguiente realización:

X(o) = primavera, X(1) = otoño, X(2) = verano, X(3) = primavera, X(4) = invierno,…

Además, se asume que se tiene una probabilidad fija P_{ij} independiente al tiempo tal que

$$P\left(X^{(n+1)} = i \middle| X^{(n)} = j, X^{(n-1)} = i_0\right) = P_{ij}\ n \geq 0$$

Donde

$$i, j, i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in M$$

Denominando a lo anterior el proceso de cadena de Markov

Por lo que se puede interpretar la probabilidad anterior como la distribución condicional de cualquier estado futuro $X^{(n+1)}$ dados los estados anteriores. En donde el estado actual X^n es independiente de los últimos estados y depende únicamente del estado actual

$$X^{(0)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n-1)}$$

Así pues, dicha probabilidad representa la probabilidad de que el proceso realice una transición al estado *i* dado que el proceso actual está en el estado *j* se obtiene:

$$P_{ij} \geq O, \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} = 1,\ \ j = 0,1 \dots$$

Lo anterior se puede representar en una matriz de P_{ij} de probabilidad de transición de un paso del proceso, la cual contiene dadas las probabilidades de transición

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Simulador

La siguiente descripción toma en cuenta al modelo 1 para definir y desarrollar lo representado en el código de python, definiendo paso a paso cada una de las ecuaciones realizadas para cada proceso de la definición de las probabilidades en las transiciones de un nodo a otro. Por lo que se asume que se realiza el mismo procedimiento para los modelos 2 y 3 con la excepción de las representaciones matriciales, las cuales son explicadas en cada apartado.

Modelo 1

Para definir la primera Cadena de Markov, se describe el siguiente escenario:
Un robot de servicio se encuentra en un hotel como ayudante general, para lo cual se precisa conocer la ubicación de este cada minuto, lo cual está definido en este primer modelo únicamente con las siguientes localidades:

a = Lobby
b = Cocina

Lo anterior se representa gráficamente en la Fig 1.

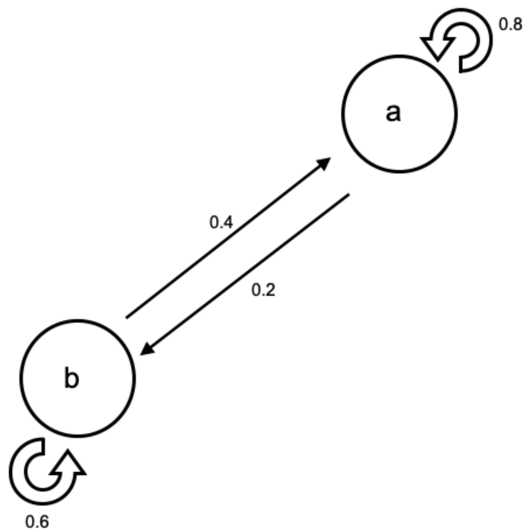

Fig 1. Los nodos representan las posibles ubicaciones, así como las transiciones correspondientes, junto con la probabilidad de cada una de estas.

La representación de la Fig 1., representa que el robot de servicio en el momento t+1 se encuentre en la cocina, dado que en el estado inicial se encuentra en la cocina, es de 0.6. Es decir, si el robot se encuentra en la cocina, la probabilidad de que en el siguiente minuto continue su ubicación en la cocina, es igual a 0.6.

No obstante, también se puede generar la posibilidad de que el robot transite de la cocina al lobby, con probabilidad de 0.4

Dichas probabilidades de transición, al representarlas de forma matricial, se obtiene lo siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

En donde las probabilidades de la matriz, se describen como:

$$P(X_{t+1}) = TP(X_t)$$

$$\begin{bmatrix} P(X_{t+1} = a) \\ P(X_{t+1} = b) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} P(X_t = a) \\ P(X_t = b) \end{bmatrix}$$

Teniendo entonces en la probabilidad de las entradas lo siguiente:

$$p_{i,j} \equiv P(X_{t+1} = i | X_t = j)$$

Para ejemplificar lo anterior, se considera al nodo de origen como las columnas y al nodo destino por los renglones, en la siguiente tabla

		Nodos de destino	
		a	b
Nodos de origen	a	0.8	0.4
	b	0.2	0.6

Fig 2. Las celdas de color verde representan la probabilidad de que el agente, en el siguiente tiempo (t+1) permanezca en la misma ubicación; es decir, el mismo nodo de destino.

Así pues, en la figura 2 y las probabilidades representadas en forma matricial, refieren lo siguiente: La columna 1 en conjunto con la fila 1, representan que con probabilidad de 0.8, el robot se encuentra en el siguiente momento en el lobby (a), la columna 1 con la fila 2 nos dicen que el robot, con probabilidad de 0.2 ha transitado del estado Lobby (a) a la cocina (b). Así, la columna 2, fila 1 representa que el robot se trasladó, con probabilidad de 0.4 de la cocina (b), al Lobby (a) y la columna 2 con la fila 2, representa que con una probabilidad de 0.6, al momento posterior, el robot permaneció en la cocina

De esta forma, para predecir la probabilidad de las ubicaciones en los siguientes tiempos, sabiendo con certidumbre que el robot se encuentra en la cocina; es decir, en el estado 2 en la representación matricial, al representarlo vectorialmente, se define la distribución de probabilidad [0,1] de la siguiente forma:

$$P(X_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv P_0$$

Por lo que para calcular el tiempo en la siguiente distribución, se considera que:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

En la segunda Cadena de Markov, se describe el siguiente escenario:

$$P(X_t) = MP(X_{t-1}) \equiv P_t$$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= MP_0 \\
P_2 &= MP_1
\end{aligned}
$$

$$
P_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0.56 \\ 0.44 \end{bmatrix}
$$

$$
= MMP_0 = M^2 P_0
$$

Así pues, para conocer las distribuciones de probabilidad en tiempos futuros, la matriz M es elevada al tiempo t:

$$
P_t = M^t P_0
$$

$$
\begin{aligned}
P_t &= M^t P_0 \\
P_1 &= [0.4 \quad 0.6]^{M} \\
P_2 &= [0.56 \quad 0.44]^{M} \\
P_3 &= [0.62 \quad 0.37]^{M} \\
P_4 &= [0.64 \quad 0.35]^{M} \\
P_{t\geq 5} &= [0.65 \quad 0.34]^{M}
\end{aligned}
$$

De esta forma, conforme se avance en el tiempo, se observará que el vector ya no cambia de manera significativa para tiempos iguales o mayores a t = 5, teniendo aquí como resultado una distribución de estado estable, la cual no es dependiente de la condición inicial. Por lo que se concluye que la cadena ha tenido una convergencia en el t =5

Modelo 2

Ahora el robot de servicio se encuentra en este modelo dada por las siguientes localidades:

a = Lobby
b = Cocina
c = Estacionamiento

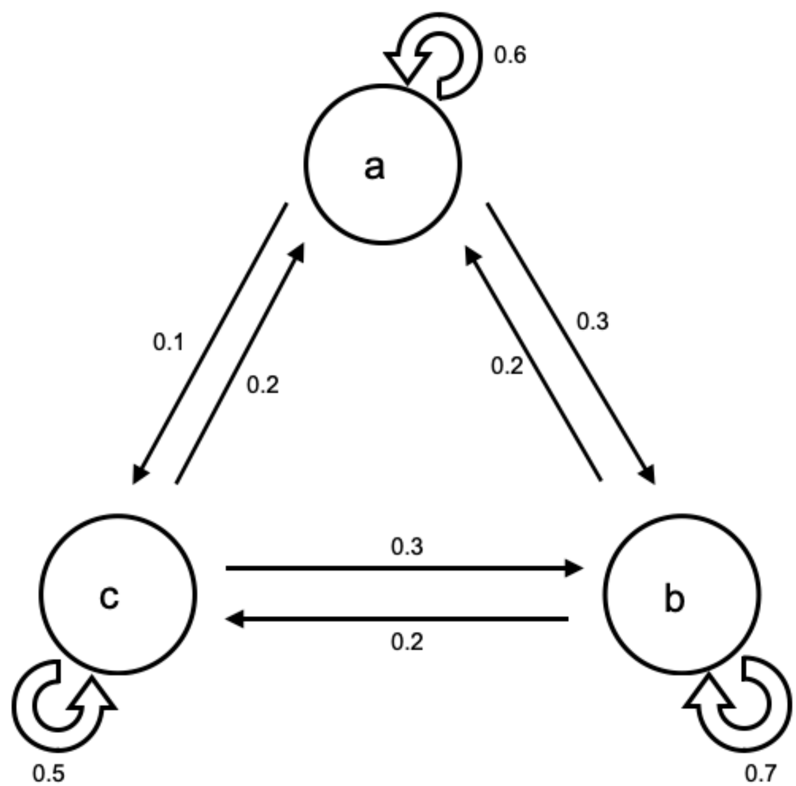

Fig 3. Representación gráfica de los vectores y las probabilidades de transición del modelo 2.

En donde las probabilidades de la matriz, se describen como:

$$P(X_{t+1}) = TP(X_t)$$

$$\begin{bmatrix} P(X_{t+1} = a) \\ P(X_{t+1} = b) \\ P(X_{t+1} = c) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} P(X_t = a) \\ P(X_t = b) \\ P(X_t = c) \end{bmatrix}$$

Modelo 3

En el tercer modelo, se precisa conocer la ubicación del robot de servicio, dadas las siguientes localidades:

a = Lobby
b = Cocina
c = Estacionamiento
d = Restaurante

A continuación se representa su forma gráfica:

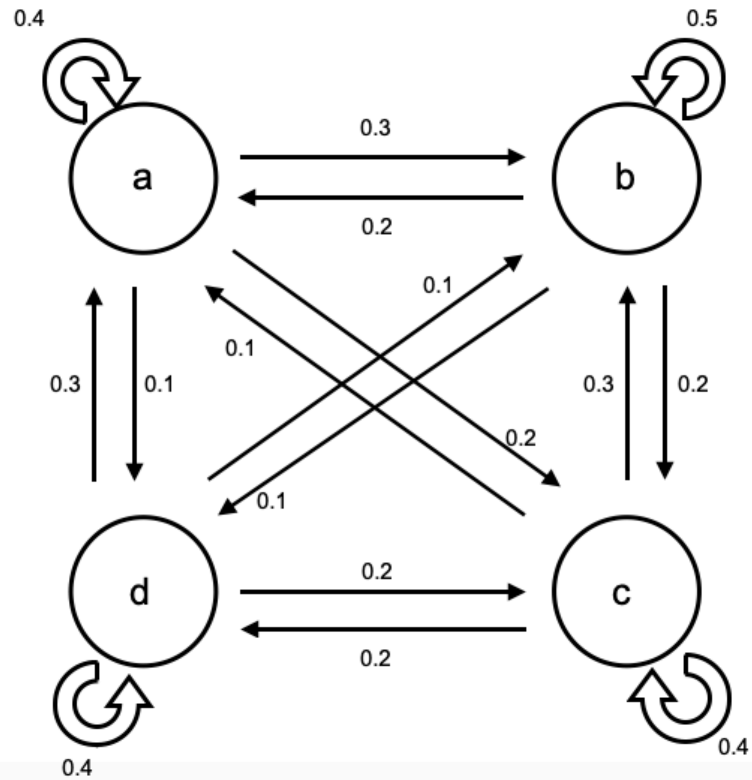

Fig 4. Representación gráfica de los vectores y las probabilidades de transición del modelo 3.

En donde las probabilidades de la matriz, se describen como:

$$\begin{bmatrix} P(X_{t+1} = a) \\ P(X_{t+1} = b) \\ P(X_{t+1} = c) \\ P(X_{t+1} = d) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} P(X_t = a) \\ P(X_t = b) \\ P(X_t = c) \\ P(X_t = d) \end{bmatrix}$$

Referencias

Bedoya, J. C., & Barrera, M. (2006). Convergencia de las cadenas de Markov. *Scientia et technica*, *3*(32).

Brémaud P. (2020) Convergence Rates. In: Markov Chains. Texts in Applied Mathematics, vol 31. Springer, Cham.

Ching WK., Huang X., Ng M.K., Siu TK. (2013) Introduction. In: Markov Chains. International Series in Operations Research & Management Science, vol 189. Springer, Boston, MA.

Harris C.M. (2013) Markov Chains. In: Gass S.I., Fu M.C. (eds) Encyclopedia of Operations Research and Management Science. Springer, Boston, MA.

Muñoz, Stalin. Coursera. Razonamiento artificial. (Universidad Nacional Autónoma de México).