Simulasi Estimasi *Average Paid Losses* Menggunakan *Pseudorandom Numbers*

Problem 19.21

Sebagai salah satu penilaian
Kuliah AK3251 Simulasi dan Pemodelan Aktuaria

Oleh

10820033 Pamella Cathryn

Program Studi Aktuaria
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung
2023

Daftar Isi

Halaman

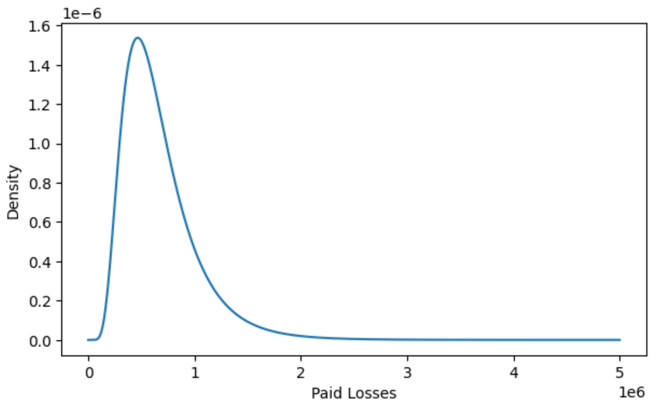
1 Pendahuluan

1.1 Masalah

Problem 19.21 Paid losses have a lognormal distribution with parameters $\mu = 13.294$ and $\sigma = 0.494$. The ratio, y, of unpaid losses is $y = 0.801x^{0.851}e^{-0.747x}$, where $x = 2006$ minus the contract purchase year. The inversion method is used, with the uniform random numbers 0.2877, 0.1210, 0.8238, and 0.6179 to simulate paid losses. Estimate the unpaid losses for purchase year 2005.

1.2 Analisis Masalah

Diketahui bahwa *paid losses* berdistribusi lognormal dengan parameter $\mu = 13.294$ dan $\sigma = 0.494$. Hal ini disebabkan oleh nilai *paid losses* yang nonnegatif dan cenderung berbentuk *skew* kanan (tersebar di nilai yang kecil). Berikut merupakan visualisasi grafik distribusi $\mathcal{L}(\mu = 13.294, \sigma = 0.494)$:

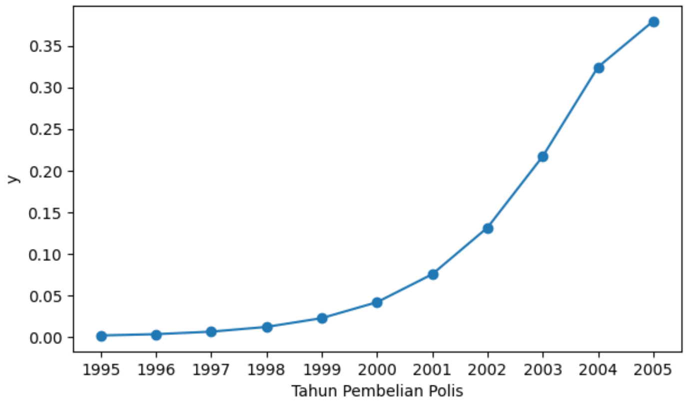


Gambar 1.1. Visualisasi Distribusi $\mathcal{L}(13.294, 0.494)$

Setelah itu, diketahui bahwa rasio perbandingan *unpaid losses* terhadap *paid losses*, y, adalah:

$$y = 0.801x^{0.851}e^{-0.747x}$$

yang mana $x = 2006 -$ Tahun Pembelian Polis. Berikut merupakan visualisasi rasio y untuk tahun pembelian yang berbeda-beda:



Gambar 1.2. Visualisasi Rasio y Terhadap Tahun Pembelian Polis

Perhatikan Gambar 1.2, untuk semakin lama tahun pembelian polis, maka semakin kecil rasio perbandingan *unpaid losses* terhadap *paid losses*. Hal ini menunjukkan bahwa *losses* untuk tahun pembelian polis yang lebih lama sudah lebih banyak dibayar daripada tahun-tahun setelahnya.

1.3 Dugaan Jawaban Secara Matematis

Misalkan, $X \sim \mathcal{L}(\mu, \sigma)$,
maka $E[X] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$ dan $Var(X) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) \exp\left(2\mu + \sigma^2\right)$.
Sehingga, untuk $Y = \alpha X$, dengan α sebuah konstanta, akan didapatkan:

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[\alpha X] \\ &= \alpha E[X] \\ &= \alpha \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Sebagai tambahan, dapat diperoleh bahwa Y akan berdistribusi lognormal dengan parameter $\mu' = \mu + \ln \alpha$ dan $\sigma' = \sigma$.

2 Simulasi

2.1 Metode *Inverse*

Simulai dimulai dengan membangkitkan terlebih dahulu nilai-nilai *random uniform* (U) sebanyak 10.000 buah. Karena nilai-nilai *paid losses* (G) berdistribusi lognormal dengan parameter $\mu = 13.294$ dan $\sigma = 0.494$, maka persamaan metode *inverse*-nya adalah:

$$\begin{aligned}
u &= F(g) \\
&= P(G \leq g) \\
&= P(e^H \leq g) \\
&= P(H \leq \ln(g)) \\
&= P\left(Z \leq \frac{\ln(g) - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{\ln(g)-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= \frac{1}{2} + \int_{0}^{\frac{\ln(g)-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz
\end{aligned}$$

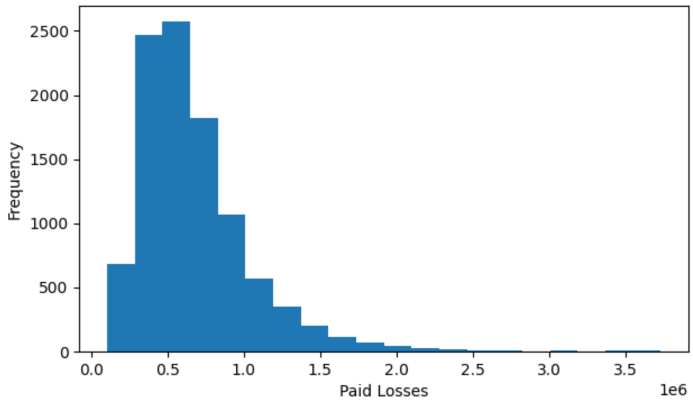
yang mana $H \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dan $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Selesaikan secara matematis dengan memisalkan $t = \frac{1}{\sqrt{2}} z$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2} + \int_{0}^{\frac{\ln(g)-\mu}{\sigma\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \sqrt{2} dt \\
&= \frac{1}{2} + \int_{0}^{\frac{\ln(g)-\mu}{\sigma\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{\ln(g)-\mu}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{\ln(g) - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, lakukan *inverse* pada persamaan di atas sehingga didapatkan nilai-nilai :

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}\left(\frac{\ln(g) - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \\
\Leftrightarrow 2u &= 1 + \text{erf}\left(\frac{\ln(g) - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \\
\Leftrightarrow 2u - 1 &= \text{erf}\left(\frac{\ln(g) - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \\
\Leftrightarrow \text{erf}^{-1}(2u - 1) &= \frac{\ln(g) - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow \sigma\sqrt{2}\ \text{erf}^{-1}(2u - 1) + \mu &= \ln(g) \\
\Leftrightarrow g &= \exp\left(\sigma\sqrt{2}\ \text{erf}^{-1}(2u - 1) + \mu\right)
\end{aligned}
$$

Jadi, dengan menggunakan metode *inverse*, diperoleh nilai-nilai *paid losses* dari 10.000 nilai *random uniform* yang terbangkitkan. Berikut adalah visualisasinya:



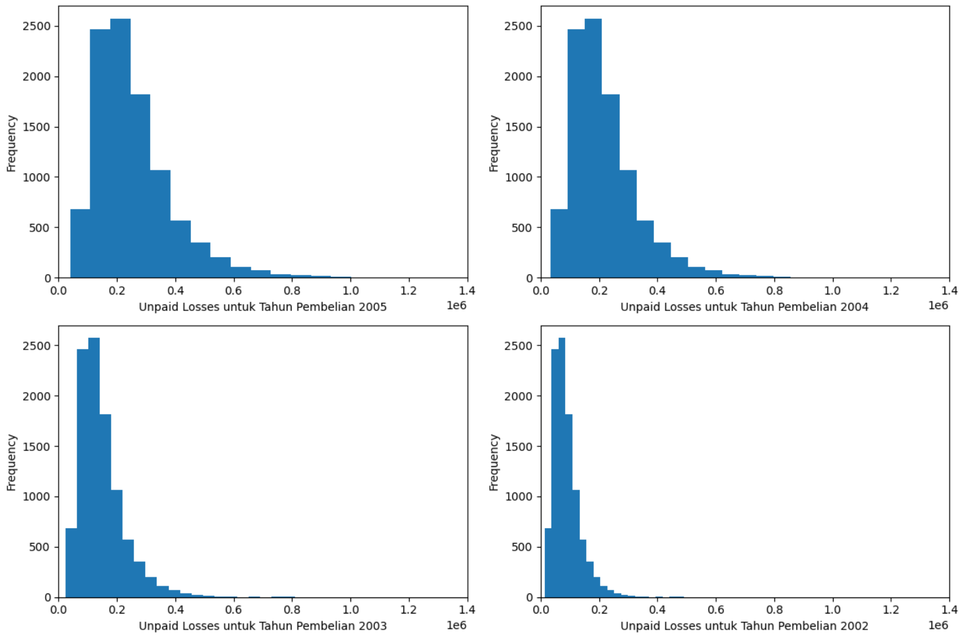
Gambar 2.1. Visualisasi Hasil Membangkitkan 10.000 Nilai *Paid Losses*

2.2 Rasio y

Selanjutnya, akan digunakan rasio y untuk memperoleh nilai-nilai *unpaid losses*. Rasio y didefinisikan sebagai:

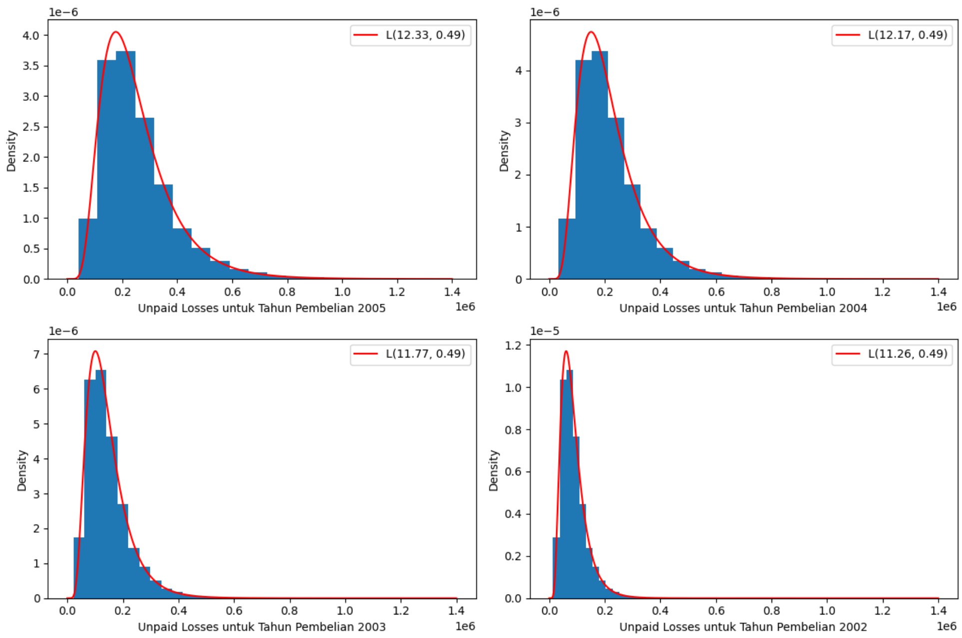
$$y = \frac{\text{unpaid losses}}{\text{paid losses}} = 0.801x^{0.851}e^{-0.747x}$$

yang mana $x = 2006 -$ Tahun Pembelian Polis. Sehingga, dari nilai-nilai *paid losses* sebelumnya, diperoleh diperoleh 10.000 nilai *unpaid losses* dengan visualisasi sebagai berikut:



Gambar 2.2. Visualisasi 10.000 Nilai *Unpaid Losses* untuk Tahun Pembelian Polis 2005, 2004, 2003, dan 2002

Untuk tahun pembelian polis 2005, diperoleh nilai rata-rata *unpaid losses* sebesar 255656.884. Nilai yang didapatkan ini tidak terlalu jauh dari nilai dugaan matematisnya, yaitu sebesar 254517.193. Berikut visualisasi dari Gambar 2.3 yang telah dibobotkan dengan garis fungsi peluangnya:



Gambar 2.3. Visualisasi Histogram Peluang *Unpaid Losses* untuk Tahun Pembelian Polis 2005, 2004, 2003, dan 2002 Beserta Garis Fungsi Peluangnya

Daftar Pustaka

Klugman, S. A. (2019). Loss Models: From Data to Decisions, Book + Solutions Manual Set. Wiley.

A Lampiran

Berikut merupakan *code* pemrograman Python yang digunakan dalam penyusunan karya tulis ini: Link Google Colab