|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» | | |
|  | | |
| Кафедра прикладной математики | | |
| Курсовой проект | | |
| по дисциплине«Компьютерные технологии моделирования и анализа данных» | | |
| **Решение трехмерной нестационарной задачи расчета температурного поля** | | |
|  | | |
|  | Студент | Спирин Александр |
| Группа ПММ-22 |  |
| Преподаватели | Вагин денис владимирович |
|  | Киселев Дмитрий Сергеевич |
|  |  | Кошкина Юлия игоревна |
| Новосибирск,2023 | | |

1. **Постановка задачи**

Написать программу, реализующую решение трехмерной нестационарной краевой задачи в декартовой (x, y, z) системе координат методом конечных элементов. Базисные функции трилинейные. Использовать неявную двухслойную схему аппроксимации параболического уравнения. Краевые условия 1 и 2 рода. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать ЛОС с LU факторизацией.

1. **Вариационная постановка**

Выпишем задачу. Параболическая краевая задача для функции определяется дифференциальным уравнением:

заданным в области с границей и краевыми условиями

При построении дискретных аналогов для исходного дифференциального уравнения следует полагать, что ось времени разбита на временные слои значениями , а значения искомой функции и на -м временном слое будем обозначать через , которая уже не зависит от времени , но остается функцией пространственных координат. Помимо краевых условий, начально-краевая задача должна включать в себя начальное условие

Аппроксимацию исходного дифференциального уравнения по времени с использованием следующей схемы:

где . Пусть

Перепишем дифференциальное уравнение в декартовых координатах:

Запишем эквивалентную исходной задаче подстановку Галеркина. Для этого обозначим невязку исходного уравнения

и потребуем, чтобы невязка была ортогональна пространству пробных функций , т.е.

Преобразуем интеграл с использованием формулы Грина, распишем интеграл по границе с учетом краевых условий и, для исключения из суммы интеграла по , потребуем, чтобы , т.е. чтобы пробные функции были из пространства функций, имеющих суммируемые с квадратом производные, и равных нулю на границе . Решение задачи u будет принадлежать пространству . Перепишем получившееся выражение:

1. Конечноэлементная дискретизация и переход к локальным матрицам

Получим аппроксимацию уравнения Галеркина. Для этого возьмем конечноэлементные пространства , , которые аппроксимируют и соответственно. Для этого заменим на аппроксимирующую и на :

Пусть – базис (пространство, аппроксимирующее ). Тогда может быть представлено в виде:

где – множество индексов таких, что являются базисными функциями пространств , .

И уравнение Галеркина эквивалентно следующей СЛАУ для компонент вектора с индексами :

Недостающие уравнений для компонент вектора с индексами могут быть получены из условия :

Так как мы решаем задачу на сетке из прямоугольных параллелепипедов и в декартовых координатах, ячейками дискретизации являются прямоугольные параллелепипеды .

Выпишем трилинейные базисные функции в декартовых координатах. Для этого сперва построим одномерные линейные функции на :

И локальные базисные функции:

где – остаток от деления на *b*, [*a*] – целая часть числа *a.*

Компоненты локальных матриц жесткости и массы имеют вид:

При этом – осредненное значение , разложим по базисным функциям: .

1. Аналитические выражения для вычисления локальных матриц

Обозначим через , и локальные матрицы жёсткости, а через , и – локальные матрицы массы соответствующих одномерных линейных элементов, т.е.

где

Тогда

Локальный вектор правой части найдем при помощи разложения f в виде билинейного интерполянта

где равна матрица массы при

1. Структуры данных для задания расчетной области и конечноэлементной сетки

Рисунок расчетной области:

0

1

2

3

4

5

6

7

0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

0

1

2

3

1

1

1

- глобальная нумерация элементов

- локальная нумерация узлов элемента

- глобальная нумерация узлов

x

y

z

Формат входных данных:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Имя файла | Описание | Пример |
| data.txt | n строк, по 4 числа в каждой строке: первые 3 отвечают за координату конца области (x, y, z соответственно), последние два числа указывают параметры материала и | 100 200 -100 0.01 10  100 200 -500 0.1 100  100 200 -1000 1 1 |

Сетка строится в разработанной программе с разрядкой. Программой предусмотрено изменение начального шага и коэффициента разрядки.

1. Структура основных модулей программы

double k\_razr, h\_start; //значения для построения сетки с разрежением

List<Element> \_elements = new List<Element>(); //экземпляр класса, который хранит в себе все элементы

List<Data> \_data = new List<Data>(); //входные данные

List<Mesh> \_meshX = new List<Mesh>(); //вспомогательный экземпляр класса для построения сетки по оси X

List<Mesh> \_meshY = new List<Mesh>(); //вспомогательный экземпляр класса для построения сетки по оси Y

List<Mesh> \_meshZ = new List<Mesh>(); //вспомогательный экземпляр класса для построения сетки по оси Z

List<double> di = new List<double>(); //вектор для хранения диагональных элементов глобальной матрицы левой части

List<double> ggl = new List<double>(); //вектор для элементов матрицы нижнего треугольника

List<double> ggu = new List<double>(); //вектор для элементов матрицы верхнего треугольника

List<double> b = new List<double>(); //вектор для хранения элементов вектора левой части

int[] ig, jg; //элементы для хранения портрета матрицы

private List<Mesh> getS1(List<Mesh> MeshX, List<Mesh> MeshY, List<Mesh> MeshZ, int N\_gran, double t)//служит для получения пар точек с заданным первым краевым условием

private void setS2(List<Element> elemets2D, double tetaS2, int N\_gran) //реализует учет вторых краевых условий

private void setS1(List<Mesh> Mesh) //реализует учет первых краевых условий

private void insert\_local(List<List<double>> A\_loc, int el\_id, List<Element> elements)//функция для внесения локальных элементов матрицы в глобальную

private List<Mesh> calculate\_Mesh\_xy(double coord\_end)//функция реализует разбиение сетки по осям x и y

private List<Mesh> calculate\_Mesh\_z(double coord\_end, List<Mesh> meshList)//функция реализует разбиение сетки по оси z

private int mu(int i)//вспомогательная функция для расчета локального элемента

private int nu(int i)//вспомогательная функция для расчета локального элемента

private int teta(int i)//вспомогательная функция для расчета локального элемента

private double[,] G(double h)//вспомогательная функция для расчета локального элемента

private double[,] M(double h)//вспомогательная функция для расчета локального элемента

private void BuildElemetnts2D(int N\_gran, List<Element> elements) //вспомогательная функция для расчета локального элемента грани

private double[] ReadQ(string path, string q\_name) // вспомогательная функция для чтения q на временном шаге

private void SaveQ(string path, string q\_name, double[] q) // вспомогательная функция для сохранение q на временном шаге

private List<Data> readData(string filename) //реализует чтение данных из файла

private void BuildGlobalMatrixOnTimeStep(double dT) //сборка глобальной матрицы на временном шаге

private void BuildVectOnTimeStep(double dT, double [] q) // сборка вектора правой части на временном шаге

public class Coord\_Node //класс для хранения координат

{

public double X { get; set; }

public double Y { get; set; }

public double Z { get; set; }

}

public class Element //класс описывающий элемент

{

public List<int> Node\_global { get; set; }

public List<Coord\_Node> coord\_Nodes\_In\_Elemet { get; set; }

public double W { get; set; }

}

public class Mesh //класс описывающий одномерную сетку

{

public int Node { get; set; }

public double coord\_Nodes { get; set; }

}

public class Data //вспомогательный класс для чтения и хранения данных

{

public double X { get; set; }

public double Y { get; set; }

public double Z { get; set; }

public double W { get; set; }

}

public class SLAE //класс для решения СЛАУ

1. Тестирование

1. Тестирование работоспособности. Область . Равномерная сетка строится из начала координат, начальный шаг h = 1, шаг по времени dT = 1, коэффициент разрядки k = 1. Заданы первые краевые с известным значением функции на узлах 6 граней. Значения коэффициентов равны 1.

а) Истинное значение функции: u\* = 5. Результаты вычислений представлены в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | u\* | u0 | u1 | u2 | u1-u\* |
| 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 0 | 2 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5,000000000000001 | 5,000000000000001 | 1E-15 |
| 2 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 0 | 2 | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |

б) Истинное значение функции: u\* = x+y+z. Результаты вычислений представлены в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | u\* | u0 | u1 | u2 | u1-u\* |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1,0000000000000002 | 1,0000000000000002 | 2Е-16 |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2,0000000000000004 | 2,0000000000000004 | 4Е-16 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1,0000000000000002 | 1,0000000000000002 | 2Е-16 |
| 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2,0000000000000004 | 2,0000000000000004 | 4Е-16 |
| 2 | 1 | 0 | 3 | 3 | 3,000000000000001 | 3,000000000000001 | 1Е-15 |
| 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | 2,0000000000000004 | 2,0000000000000004 | 4Е-16 |
| 1 | 2 | 0 | 3 | 3 | 3,000000000000001 | 3,000000000000001 | 1Е-15 |
| 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 4,000000000000001 | 4,000000000000001 | 1Е-15 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1,0000000000000002 | 1,0000000000000002 | 2Е-16 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2,0000000000000004 | 2,0000000000000004 | 4Е-16 |
| 2 | 0 | 1 | 3 | 3 | 3,000000000000001 | 3,000000000000001 | 1Е-15 |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2,0000000000000004 | 2,0000000000000004 | 4Е-16 |
| 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3,000000000000002 | 3,000000000000002 | 2Е-15 |
| 2 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4,000000000000001 | 4,000000000000001 | 1Е-15 |
| 0 | 2 | 1 | 3 | 3 | 3,000000000000001 | 3,000000000000001 | 1Е-15 |
| 1 | 2 | 1 | 4 | 4 | 4,000000000000001 | 4,000000000000001 | 1Е-15 |
| 2 | 2 | 1 | 5 | 5 | 5,000000000000001 | 5,000000000000001 | 1Е-15 |

в) Истинное значение функции: u\* = t. Результаты вычислений представлены в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | u1\* | u1 | u2\* | u2 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |

2. Тестирование на порядок аппроксимации. Область . Равномерная сетка строится из начала координат, начальный шаг h = 1, шаг по времени dT = 1, коэффициент разрядки k = 1. Заданы первые краевые с известным значением функции на узлах 6 граней. Значения коэффициентов равны 1.

а) Истинное значение функции: u\* = x+2y+3z. Результаты вычислений представлены в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | u1\* | u1 | u2 | u2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 3 | 3 | 3 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 4 | 4 | 4 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 3 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 4 | 4 | 4 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 6 | 6 | 6 | 0 |
| 0 | 2 | 0 | 4 | 4 | 4 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 6 | 6 | 6 | 0 |
| 3 | 2 | 0 | 7 | 7 | 7 | 0 |
| 4 | 2 | 0 | 8 | 8 | 8 | 0 |
| 0 | 3 | 0 | 6 | 6 | 6 | 0 |
| 1 | 3 | 0 | 7 | 7 | 7 | 0 |
| 2 | 3 | 0 | 8 | 8 | 8 | 0 |
| 3 | 3 | 0 | 9 | 9 | 9 | 0 |
| 4 | 3 | 0 | 10 | 10 | 10 | 0 |
| 0 | 4 | 0 | 8 | 8 | 8 | 0 |
| 1 | 4 | 0 | 9 | 9 | 9 | 0 |
| 2 | 4 | 0 | 10 | 10 | 10 | 0 |
| 3 | 4 | 0 | 11 | 11 | 11 | 0 |
| 4 | 4 | 0 | 12 | 12 | 12 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 3 | 3 | 3 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 4 | 4 | 4 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 6 | 6 | 6 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 7 | 7 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 6 | 6 | 6 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 7 | 7 | 7 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 8 | 8 | 8 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 9 | 9 | 9 | 0 |

б) Истинное значение функции: u\* = x2+2y2+3z2. Результаты вычислений представлены в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | u1\* | u1 | u1-u\* | u2 | u2-u\* |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 4 | 4 | 0 | 4 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 9 | 9 | 0 | 9 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 16 | 16 | 0 | 16 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 0 | 3 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 6 | 6 | 0 | 6 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 11 | 11 | 0 | 11 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 18 | 18 | 0 | 18 | 0 |
| 0 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 | 8 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 9 | 9 | 0 | 9 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 12 | 12 | 0 | 12 | 0 |
| 3 | 2 | 0 | 17 | 17 | 0 | 17 | 0 |
| 4 | 2 | 0 | 24 | 24 | 0 | 24 | 0 |
| 0 | 3 | 0 | 18 | 18 | 0 | 18 | 0 |
| 1 | 3 | 0 | 19 | 19 | 0 | 19 | 0 |
| 2 | 3 | 0 | 22 | 22 | 0 | 22 | 0 |
| 3 | 3 | 0 | 27 | 27 | 0 | 27 | 0 |
| 4 | 3 | 0 | 34 | 34 | 0 | 34 | 0 |
| 0 | 4 | 0 | 32 | 32 | 0 | 32 | 0 |
| 1 | 4 | 0 | 33 | 33 | 0 | 33 | 0 |
| 2 | 4 | 0 | 36 | 36 | 0 | 36 | 0 |
| 3 | 4 | 0 | 41 | 41 | 0 | 41 | 0 |
| 4 | 4 | 0 | 48 | 48 | 0 | 48 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 3 | 3 | 0 | 3 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 4 | 4 | 0 | 4 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 7 | 7 | 0 | 7 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 12 | 12 | 0 | 12 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 19 | 19 | 0 | 19 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 6 | 11,41982 | 5,419819 | 13,26233 | 7,262328 |
| 2 | 1 | 1 | 9 | 14,53416 | 5,534161 | 16,44659 | 7,446588 |
| 3 | 1 | 1 | 14 | 19,41982 | 5,419819 | 21,26233 | 7,262328 |
| 4 | 1 | 1 | 21 | 21 | 0 | 21 | 0 |
| 0 | 2 | 1 | 11 | 11 | 0 | 11 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 12 | 17,53416 | 5,534161 | 19,44659 | 7,446588 |
| 2 | 2 | 1 | 15 | 20,93055 | 5,930548 | 23,10937 | 8,109367 |
| 3 | 2 | 1 | 20 | 25,53416 | 5,534161 | 27,44659 | 7,446588 |
| 4 | 2 | 1 | 27 | 27 | 0 | 27 | 0 |
| 0 | 3 | 1 | 21 | 21 | 0 | 21 | 0 |
| 1 | 3 | 1 | 22 | 27,41982 | 5,419819 | 29,26233 | 7,262328 |
| 2 | 3 | 1 | 25 | 30,53416 | 5,534161 | 32,44659 | 7,446588 |
| 3 | 3 | 1 | 30 | 35,41982 | 5,419819 | 37,26233 | 7,262328 |
| 4 | 3 | 1 | 37 | 37 | 0 | 37 | 0 |
| 0 | 4 | 1 | 35 | 35 | 0 | 35 | 0 |
| 1 | 4 | 1 | 36 | 36 | 0 | 36 | 0 |

Так как отличия между истинными и рассчитанными значениями во внутренних узлах для полинома 2 степени достаточно велики, то можно сделать вывод, что порядок аппроксимации по пространству равен 1.

в) Истинное значение функции: u\* = 2t. Результаты вычислений представлены в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | u1\* | u1 | u1-u1\* | u2\* | u2 | u2-u2\* |
| 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 3 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 4 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 0 | 3 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 1 | 3 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 2 | 3 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 3 | 3 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 4 | 3 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 0 | 4 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 1 | 4 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 2 | 4 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 3 | 4 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 4 | 4 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 4 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 0 | 3 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 4 | 3 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 0 | 4 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 1 | 4 | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |

г) Истинное значение функции: u\* = 2t2. Результаты вычислений представлены в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | u1\* | u1 | u1-u1\* | u2\* | u2 | u2-u2\* |
| 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 3 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 4 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 0 | 3 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 1 | 3 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 2 | 3 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 3 | 3 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 4 | 3 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 0 | 4 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 1 | 4 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 2 | 4 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 3 | 4 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 4 | 4 | 0 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2,677477 | 0,677477 | 8 | 8,907791 | 0,907791 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2,69177 | 0,69177 | 8 | 8,930823 | 0,930823 |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 2,677477 | 0,677477 | 8 | 8,907791 | 0,907791 |
| 4 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 2,69177 | 0,69177 | 8 | 8,930823 | 0,930823 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2,741318 | 0,741318 | 8 | 9,013671 | 1,013671 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 2,69177 | 0,69177 | 8 | 8,930823 | 0,930823 |
| 4 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 0 | 3 | 1 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 2,677477 | 0,677477 | 8 | 8,907791 | 0,907791 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 2,69177 | 0,69177 | 8 | 8,930823 | 0,930823 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 2,677477 | 0,677477 | 8 | 8,907791 | 0,907791 |
| 4 | 3 | 1 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 0 | 4 | 1 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |
| 1 | 4 | 1 | 2 | 2 | 0 | 8 | 8 | 0 |

Так как отличия между истинными и рассчитанными значениями во внутренних узлах для полинома 2 степени достаточно велики, то можно сделать вывод, что порядок аппроксимации по времени равен 1.

3. Тестирование на порядок сходимости. Область . Равномерная сетка строится из начала координат, коэффициент разрядки k = 1. Заданы первые краевые с известным значением функции на узлах 6 граней. Значения коэффициентов равны 1. Порядок сходимости будем находить по формуле:

а) Истинное значение функции: u\* = ex+y+z

- шаг h = 1, шаг по времени dT = 1.

- шаг h = 0,5, шаг по времени dT = 1.

Порядок сходимости

б) Истинное значение функции: u\* = et

- шаг h = 1, шаг по времени dT = 1.

- шаг h = 1, шаг по времени dT = 0,5.

Порядок сходимости

1. **Вывод**

В проделанной работе был реализован алгоритм решения параболической задачи методом конечных элементов, описываемой уравнением , заданным в трехмерной области с границей и краевыми условиями первого и второго рода.

Результаты тестирования показывают достаточно точное решение при тестировании на трилинейных аналитических функциях по пространству и линейных аналитических функциях по времени, так как порядок аппроксимации у рассмотренной схемы равен 1.

Порядок сходимости равен 1, что означает уменьшение точности в 2 раза при дроблении сетки в 2 раза.

Основными трудностями при численном решении подобных задач являются большие затраты вычислительных ресурсов, которые можно значительно снизить, используя разреженный формат хранения данных и применяя итерационные методы решения СЛАУ. Кроме того, аппроксимация исходного дифференциального уравнения с использованием двухслойной неявной схемы по времени предполагает использование решение на предыдущей итерации, в связи с чем затраты оперативной памяти также могут возрасти. Эту проблему можно решить, сохраняя на жестком диске полученное решение на каждой итерации.