



# 南 卷 汇

2016 年大一下离散数学期末试题

南洋书院学生会

制作

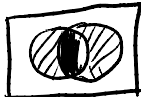
## 2009 年离散数学(A 卷)

### 一、请判断下述诸命题的正确性

$$1. (A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D) \quad \times$$

$$2. (A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D) \quad \times$$

$$3. (A \oplus B) \oplus B = A \quad \checkmark$$



4. 如果  $R_1$  和  $R_2$  是  $A$  上的对称关系, 那么  $R_1 \setminus R_2$  一定是  $A$  上的对称关系。✓

5. 如果  $R$  是  $A$  上的传递关系, 那么  $R \circ R$  一定是  $A$  上的传递关系。✓

6. 如果  $f$  是单射函数, 并且是  $g \circ f$  单射函数, 那么  $g$  一定是单射函数。✓

7. 设  $A, B$  是两个可数集合, 则  $A \cap B$  一定是可数集合。✗

8. 在阶数大于 1 的群中, 除幺元外, 没有其他的幂等元。✓

9. 设是环, 当  $(N_m, +_m, \times_m)$  为素数时,  $(N_m, +_m, \times_m)$  是域。✗

$(N_m, +_m, \times_m)$   
素数阶环为除环  
可交换的除环为域

10. 设  $(L, \preceq, *, \oplus)$  是格, 则  $\forall a, b \in L$ , 总  $a * b = a$  有或  $a \oplus b = b$ 。✗

11. 有界格一定是有限格。✗

12. 在有界格的分配格中, 每个元素的补元都是唯一存在的, 因而有界的分配格是布尔代数。✗

13. 求最短路的迪杰克斯算法是沿着最短路径向前推进的。✓

14. 强连通图一定是有向的哈密顿图。✗

15. 至少有两个结点的树一定是二分图。✓

二、设  $R_1$  和  $R_2$  分别是非空集合  $A$  和  $B$  上的半序, 定义  $A \times B$  上的关系  $R_3$  如下:

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R_3 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in R_1 \wedge (y_1, y_2) \in R_2$$

(1) 证明:  $R_3$  是  $A \times B$  上的半序关系。

(2) 设  $A = \{1, 2, 4, 8\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 6\}$ ,  $R_1$  是  $A$  上的整除关系,  $R_2$  是  $B$  上的整除关系,

请画出  $R_3$  的哈斯图。

(3) 给定的集合  $\{(2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3)\}$ , 请判断其最大值、最小值、极大元、极小元, 上确界、下确界是否存在。如存在, 请具体指出。

三、设  $(G, *)$  是交换群, 且  $|G| = n$ 。设  $k$  是某一正整数, 定义函数  $f: G \rightarrow G$  如下:

$$f(x) = x^k \quad (\forall x \in G)$$

证明：如果  $(k, n) = 1$ ，则  $f$  是从  $(G, *)$  到  $(G, *)$  的自同构函数。

提示：  $(k, n) = 1$  当且仅当同余方程  $k \cdot u \equiv 1 \pmod{n}$  有唯一的解  $u$  (在  $\pmod{n}$  的意义下)。

四、 已知  $(N_{12}, +_{12}, \times_{12})$  是一环。  $[3]_{12}, [9]_{12}$  是  $N_{12}$  中的两个元素， 设

$$S = \{u \mid u \in N_{12} \wedge [3]_{12} \times_{12} u = [9]_{12} \times_{12} u\}。$$

那么

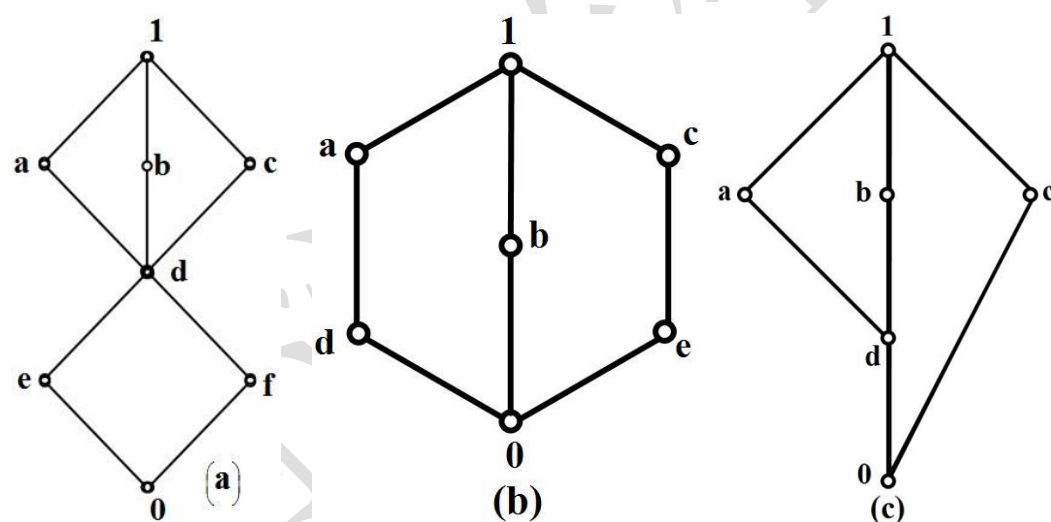
(1) 证明：  $(S, +_{12}, \times_{12})$  是  $(N_{12}, +_{12}, \times_{12})$  的一个子环。

(2) 求  $S =$

(3)  $(S, +_{12}, \times_{12})$  是无零因子环吗？为什么？

(4)  $(S, +_{12}, \times_{12})$  是域吗？为什么？

五、 设格  $L_1, L_2, L_3$  如下图 (a), (b), (c) 所示， 试判别：



(1)  $L_1, L_2, L_3$  是否是分配格？为什么？

(2)  $L_1, L_2, L_3$  是否是有界格？为什么？

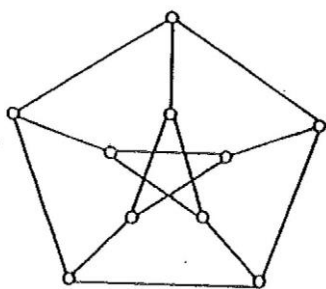
(3)  $L_1, L_2, L_3$  是否有补格？为什么？

(4)  $L_3$  是否是  $L_1$  的子格？为什么？

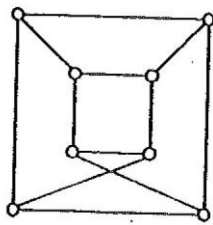
六、 给定图(a),(b),(c),画图示意：

(1) 彼得森图(a)不是欧拉图。至少增加几条边，才能使它成为一个欧拉图？

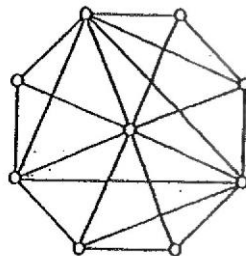
- (2) 彼得森图不是哈密顿图，至少增加几条边，才能使它成为一个哈密顿图？  
 (3) 图(b)是否是平面图？为什么？  
 (4) 图(c)是否是平面图？为什么？



(a)



(b)



(c)

七、设  $G=(V,E)$  是一无向的简单图， $|V|=10$ 。

- (1) 如果  $\deg(v_i) (i=1 \sim 10)$  均是偶数，并且  $\sum_{i=1}^{10} \deg(v_i) = 74$ ，那么  $G$  是欧拉图吗？为什么？

- (2) 如果  $\sum_{i=1}^{10} \deg(v_i) = 78$ ，那么  $G$  是哈密顿图吗？为什么？

2009 年期末 (B 卷)

一、请判断下述诸命题的正确性

主要为 6.7.8.

1、 $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$  ✗

$-3 \times 2 = -6$

2、 $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$  ✓

3、 $(A \oplus B) \oplus A = B$  ✓

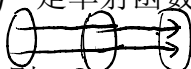
$A = \emptyset$   
 $B = \emptyset$

4、如果  $R_1$  和  $R_2$  是  $A$  上的对称关系，那么  $R_1 \cup R_2$  一定是  $A$  上的对称关系 ✓

$(3,2) (1,3) (2,1) (1,2) (1,3)$

5、如果  $R$  是  $A$  上的反对称关系，那么  $R \circ R$  一定是  $A$  上的反对称关系 ✗

✗ ⑥ 如果  $g$  是单射函数，并且  $g \circ f$  是单射函数，那么  $f$  一定是单射函数 ✓



$g \circ f$

7、设  $A, B$  是两个可数集合，则  $A \cap B$  一定是可数集合 ✗

✗ ⑧ 设  $\langle S, * \rangle$  是一个含么半群，如果运算  $*$  满足消去律，那么  $\langle S, * \rangle$  是一个群 ✗

不一定

不一定

✗ ⑨ 设  $(N_m, +_m, \times_m)$  是环，当  $m$  为素数时， $(N_m, +_m, \times_m)$  为除环 ✓

含幺环零因子环

10、设  $(L, \preceq, *, \oplus)$  是格，则  $\forall a, b \in L$  总有  $a * b = a$  当且仅当  $a \oplus b = b$  ✗ ✓

11、有界格一定是有限格  $\times$

12、在有界的分配格中，每个元素的补元都是惟一存在的；因而有界的分配格是布尔代数  $\checkmark \times$  并不是每个元素都有补元

13、设  $G=(V,E)$  是二分图，存在着  $V$  上的一个划分  $\{V_1, V_2\}$ ，如果  $|V_1|=|V_2|$ ，那

么  $G$  中一定有 Hamilton 路  $\checkmark \times$

14、强连通图  $\checkmark$  定是有向的欧拉图  $\times$

15、至少有两个结点的树一定是二分图  $\checkmark$ 。

二、设集合  $A$  是非空集合， $R_1$  和  $R_2$  是  $A$  上的二元关系，是自反的和传递的，

并且  $R_2$  满足： $(x,y) \in R_2 \Leftrightarrow (x,y) \in R_1 \wedge (y,x) \in R_1$

证明=1) 对称的

$\forall (x,y) \in R_2$

$\Rightarrow (x,y) \in R_1 \wedge (y,x) \in R_1$

$\Rightarrow (y,x) \in R_1 \wedge (x,y) \in R_1$

$\Rightarrow (y,x) \in R_2$

故得证

2) 不是的

因为不满足对称性

例如  $A=\{1,2,3\}$

$R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3), (2,1),(1,2)\}$

$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

(1) 证明： $R_2$  是  $A$  上的等价关系。

(2)  $R_1 \cup R_2$  是  $A$  上的半序关系吗？请说明理由。

三、设是  $\langle G, * \rangle$  群， $\forall a \in G$  定义  $f_a: G \rightarrow G, f_a(x) = a * x, \forall x \in G, S = \{f_a \mid a \in G\}$

(1) 证明是  $\langle S, \circ \rangle$  群，其中  $\circ$  是函数的复合。

证明=1) ①  $f_a \neq \emptyset$

$G \neq \emptyset$  且  $S \neq \emptyset$

② 运算封闭

$f_a(x) = a * x$

$f_a(x) = b * x$

$f_a \circ f_b(x) = b * a * x$

$\forall b * x \in G$

故...

③ 结合律

④ 有么元

显然  $f_e = x * x = x$

...

⑤ 可逆

$f_a(x) = a * x$

$f_a(x) = \frac{1}{a} * x$

则  $f_a(x) * \frac{1}{a} = 1$

且  $a \in G$

$a \neq 0$

(2) 存在从  $\langle G, * \rangle$  到  $\langle S, \circ \rangle$  的同构函数吗？请给出理由。

要证明双射

四、设  $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$  是含么环， $\exists u \in R, u$  有右逆元  $v$ ，下面几个说法是等价的：

①  $u$  的右逆元多于一个；

②  $u$  是不可逆的；

③  $u$  是左零因子。

由题  $u \otimes v = 1$

①  $\Rightarrow$  ② 假设有两个右逆元  $v, w$

$v \neq w, u \otimes v = u \otimes w = 1$

设  $u$  可逆则  $u \otimes u^{-1} = u^{-1} \otimes u = 1$

故  $u^{-1} = v = w$

矛盾，故不可逆

②  $\Rightarrow$  ③  $u$  不可逆， $u \otimes v = 1$

故  $u \neq 0, v \neq 0$

$(u \otimes v - 1) = 0$

$u \otimes v - 1 = 0$

④ 存在

假若存在  $h: G \rightarrow S$

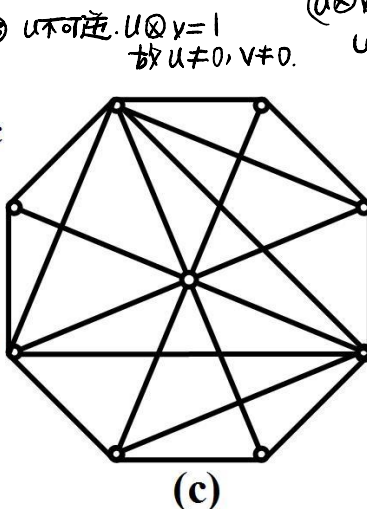
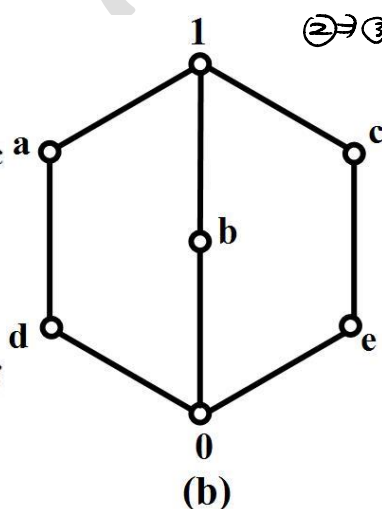
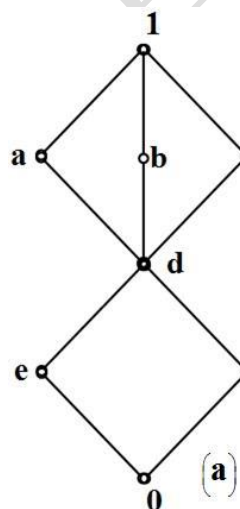
则  $h(a * b)$

$= h(a) \circ h(b)$

$= (a * x) \circ (b * x)$

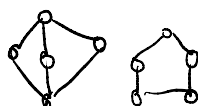
$= a * b * x$

五、设格  $L_1, L_2$  如右图(a), (b)所示，试判别：



(1)  $L_1, L_2$  是否是分配格？为什么？

$\times \times$



$a * (b \oplus c)$

$= a * 1$

$= a$

$a * b = d$

$a * c = d$

$d \oplus d = d$

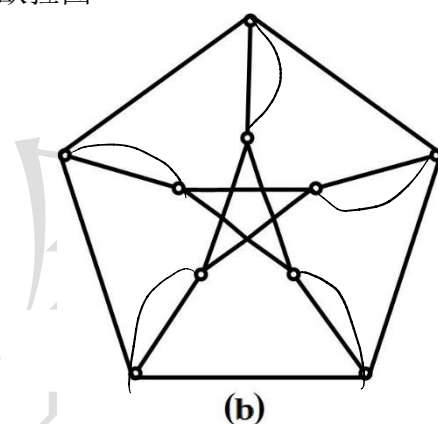
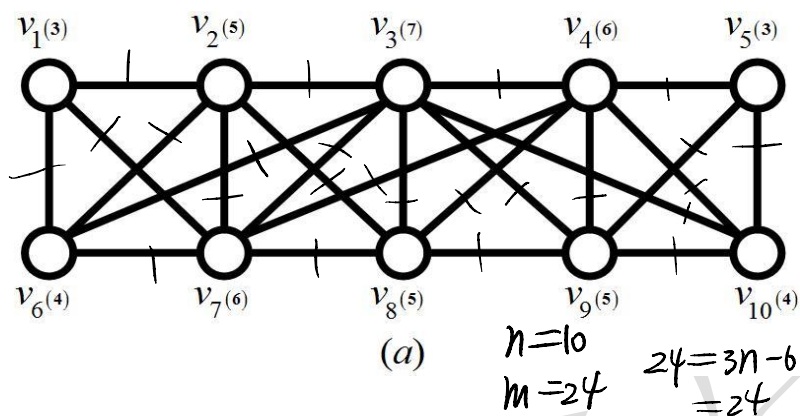
(2)  $L_1, L_2$  是否为有界格? 为什么?  $\checkmark$  因为  $\underline{1.0}$ .

(3)  $L_1, L_2$  是否为有补格? 为什么?  $L_1$  不是  $d$ ,  $L_2$  是

六、给定图(a),(b), 如下图所示:

(1) 图(a)是否为平面图? 为什么? 是, 拉边法

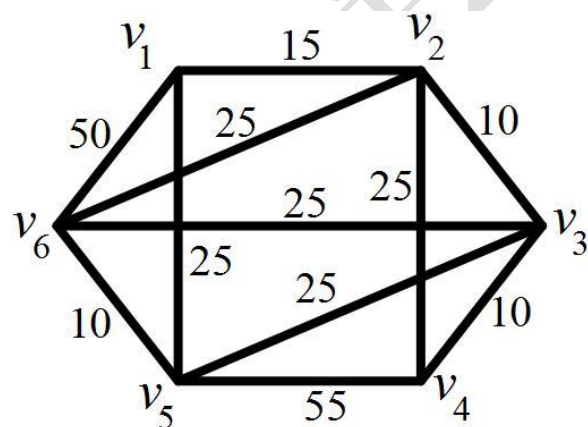
(2) 图(b)不是欧拉图, 至少增加几条边, 才能使它成为一个欧拉图?



七、带权图(网路拓扑图)如下图所示

(1) 请用 *Dijkstra* 算法求出从结点到的所有最短路

(2) 给出此图所有最优树(最小生成树)



## 离散数学(B 卷)答案

一、

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
----	---	---	---	---	---	---	---	---

结论	F	T	T	T	F	T	F	F
题号	9	10	11	12	13	14	15	
结论	T	T	F	F	F	F	T	

## 二、(1) $(a)R_2$ 是自反的

对于任何  $a \in A$ ，由  $R_1$  及  $R_2$  的自反性，可得  $(a, a) \in R_1$  且  $(b, b) \in R_2$ ，因此由  $R_2$  的定义，可知  $(a, b) \in R_2$ 。

## (b) $R_2$ 是反对称的

对于任何  $(a, b) \in R_2$ ，由  $R_2$  的定义，可得  $(a, b) \in R_1$  且  $(b, a) \in R_1$ ，由  $R_2$  的定义，可知  $(b, a) \in R_2$

## (c) $R_2$ 是传递的

对于任何  $(a, b) \in R_2$  及  $(b, c) \in R_2$ ，由  $R_2$  的定义，可得  $(a, b) \in R_1$  且  $(b, a) \in R_1$  及  $(b, c) \in R_1$  且  $(c, b) \in R_1$ ，利用  $R_{12}$  的传递性，可得  $(a, c) \in R_1$  及  $(c, a) \in R_1$ 。再次利用  $R_2$  的定义，可得  $(a, c) \in R_2$

综上， $R_2$  可知  $R_2$  是  $A$  上的等价关系

(2)  $R_1 \cup R_2$  不是  $A$  上的半序关系。 $R_1$ ， $R_2$  是  $A$  上的自反关系， $R_1 \cup R_2$  也是  $A$  上的自反关系， $R_1 \cup R_2$  的反对称性无法判定， $R_1 \cup R_2$  不是  $A$  上的传递关系。

## 三、证明：

(1)  $\forall fa \in S$ ， $fa$  是从  $G$  到  $G$  的函数， $\forall fa, fb \in S$ ， $fa \circ fb = a * (b * x) \in S$  并且函

数的复合满足结合律， $\langle S, \circ \rangle$  是半群，设  $fe(x) = e * x$ ， $\forall x \in G$ ，

$$fe \circ fa(x) = e * (a * x) = a * x = fa \circ fe(x)，fe \text{ 是关于 } S \text{ 的么元，}$$

$$fa \circ fa^{-1}(x) = a * (a^{-1} * x) = x = fe(x) = fa^{-1}(x) \circ fa，fa^{-1} \text{ 是 } fa \text{ 的逆元。}$$

综上所述， $\langle S, \circ \rangle$  是群。

(2) 存在从  $\langle G, * \rangle$  到  $\langle S, \circ \rangle$  的同构函数  $h: G \rightarrow S$ ，

$$\forall a, b \in G \quad h(a) = f_a(x) = a * x \quad \forall x \in G$$

(a)  $h$  是双射函数

$\forall a, b \in G$ , 若  $h(a) = h(b)$ , 有  $f_a(x) = f_b(x)$ , 即  $a * x = b * x$ ,  $\forall x \in G$   
有  $a = b$ ,  $h$  是单射的。

$\forall f_a \in S$ , 有  $h(a) = f_a$ ,  $h$  是满射的。

(b)  $\forall a, b \in G$ ,  $h(a * b) = (a * b) * x = f_a \circ f_b(x) = h(a) \circ h(b)$ , 满足同态公式,

$h$  是  $\langle G, * \rangle$  到  $\langle S, \circ \rangle$  的同构函数。

四、证明: ①  $\Rightarrow$  ② 设  $v, w$  是两个不同的右逆元,  $v \neq w$ ,  $u \otimes v = e$ ,  $u \otimes w = e$ ,

假设  $u$  可逆,  $u^{-1}$  为它的逆元,

则  $u^{-1} \otimes (u \otimes v) = u^{-1} \otimes (u \otimes w)$ , 即有  $v = w$ , 矛盾, 故  $u$  是不可逆的。

②  $\Rightarrow$  ③ 设  $u$  有右逆元  $v$ ,  $u \otimes v = e$ ,  $u \neq 0$ ,  $v \neq 0$ ,

$u$  不可逆, 故  $v \otimes u \neq e$ ,  $(v \otimes u) - e \neq 0$ ,

$u \otimes ((v \otimes u) - e) = (u \otimes v \otimes u) - u = u - u = 0$ ,  $u$  是左零因子。

③  $\Rightarrow$  ①  $u$  是左零因子, 故存在  $a \in R$ ,  $a \neq 0$ , 使  $u \otimes a = 0$ ,

设  $u$  有右逆元  $v$ ,  $w = v \oplus a$ ,

$u \otimes w = u \otimes (v \oplus a) = (u \otimes v) \oplus (u \otimes a) = e \oplus 0 = e$ ,

$w$  也是  $u$  的右逆元, 并且  $v \neq w$ 。

五、(1)  $L_1, L_2$  都不是分配格

因为  $L_1$  含有与钻石格同构的子格,  $L_2$  含有与五角格同构的子格, 故它们都不是分配格

(2)  $L_1, L_2$  都是有界格

因为它们都有最大元 1, 最小元 0, 故它们都是有界格。

(3)  $L_1$  不是有补格,  $L_2$  是有补格

因为  $L_1$  的补元情况:

元素	0	1	a	b	c	d	e	f
补元	1	0	无	无	无	无	无	无

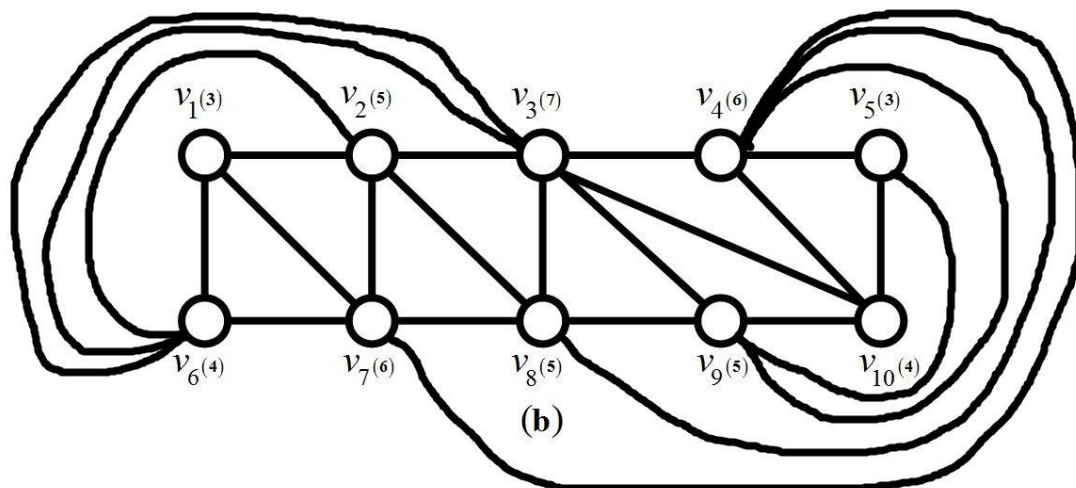
因为  $L_2$  补元的情况:



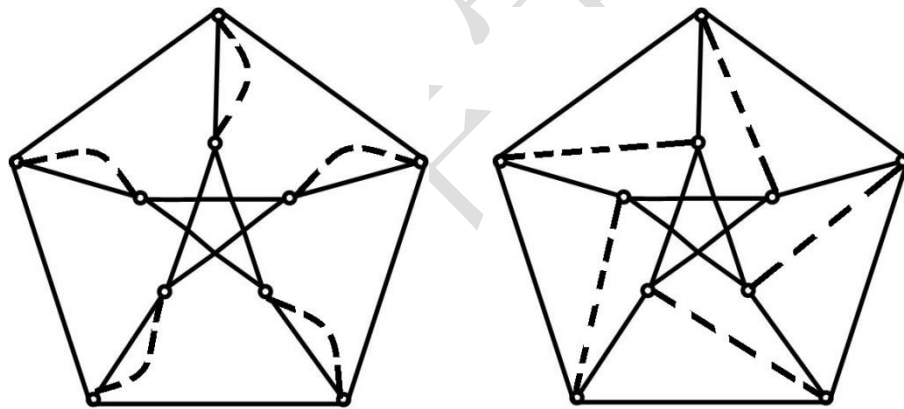
元素	0	1	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
补元	1	0	$b,c,e$	$a,c,d,e$	$a,b,d$	$b,c,e$	$a,b,d$

故 $L_1$ 不是有补格， $L_2$ 是有补格

六、解：(1)图(a) 是平面图，对图(a) 采用拉边法可得下图：



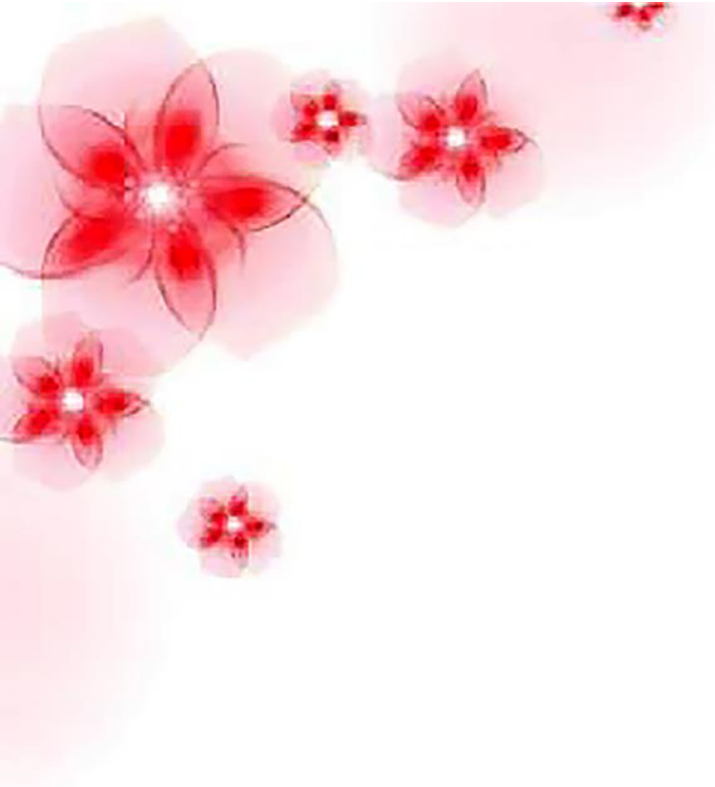
(2)给彼得森图(a) 至少增加 5 条边，才能使它成为一个欧拉图。



或者

七、(1)略

(2)4 棵



更多精彩，尽在南洋书院学生会微信公众号的南卷汇专栏，欢迎通过公众号提供题目或反馈错题信息，南卷汇需要您的支持。

