

# 南 卷 汇

2016 年大一下高数数学期末试题

南洋书院学生会

制  
作

# 2009 年离散数学(A 卷)

## 一、请判断下述诸命题的正确性

1.  $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

2.  $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

3.  $(A \oplus B) \oplus B = A$



4. 如果  $R_1$  和  $R_2$  是  $A$  上的对称关系，那么  $R_1 \setminus R_2$  一定是  $A$  上的对称关系。✓

5. 如果  $R$  是  $A$  上的传递关系，那么  $R \circ R$  一定是  $A$  上的传递关系。✓

6. 如果  $f$  是单射函数，并且是  $g \circ f$  单射函数，那么  $g$  一定是单射函数。✓

7. 设  $A, B$  是两个可数集合，则  $A \cap B$  一定是可数集合。✗

8. 在阶数大于 1 的群中，除幺元外，没有其他的幂等元。✓

9. 设是环，当  $(N_m, +_m, \times_m)$  为素数时， $(N_m, +_m, \times_m)$  是域。

$(N_m, +_m, \times_m)$   
素数阶环为除环

可交换的除环为域

10. 设  $(L, \preceq, *, \oplus)$  是格，则  $\forall a, b \in L$ ，总  $a * b = a$  有或  $a \oplus b = b$ 。✗

11. 有界格一定是有限格。✗

12. 在有界格的分配格中，每个元素的补元都是唯一存在的，因而有界的分配格是布尔代数。✗

13. 求最短路的迪杰克斯算法是沿着最短路径向前推进的。✓

14. 强连通图一定是有向的哈密顿图。✗

15. 至少有两个结点的树一定是二分图。✓

## 二、设 $R_1$ 和 $R_2$ 分别是非空集合 $A$ 和 $B$ 上的半序，定义 $A \times B$ 上的关系 $R_3$ 如下：

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R_3 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in R_1 \wedge (y_1, y_2) \in R_2$$

(1) 证明： $R_3$  是  $A \times B$  上的半序关系。

(2) 设  $A = \{1, 2, 4, 8\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 6\}$ ,  $R_1$  是  $A$  上的整除关系,  $R_2$  是  $B$  上的整除关系,

请画出  $R_3$  的哈斯图。

(3) 给定的集合  $\{(2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3)\}$ ，请判断其最大值、最小值、极大元、极小元，上确界、下确界是否存在。如存在，请具体指出。

三、设  $(G, *)$  是交换群，且  $|G| = n$ 。设  $k$  是某一正整数，定义函数  $f : G \rightarrow G$  如下：

$$f(x) = x^k (\forall x \in G)$$

证明：如果  $(k, n) = 1$ ，则  $f$  是从  $(G, *)$  到  $(G, *)$  的自同构函数。

提示： $(k, n) = 1$  当且仅当同余方程  $k \cdot u \equiv 1 \pmod{n}$  有唯一的解  $u$  (在  $\text{mod } n$  的意义下)。

**四、** 已知  $(N_{12}, +_{12}, \times_{12})$  是一环。 $[3]_{12}, [9]_{12}$  是  $N_{12}$  中的两个元素，设

$$S = \{u \mid u \in N_{12} \wedge [3]_{12} \times_{12} u = [9]_{12} \times_{12} u\}.$$

那么

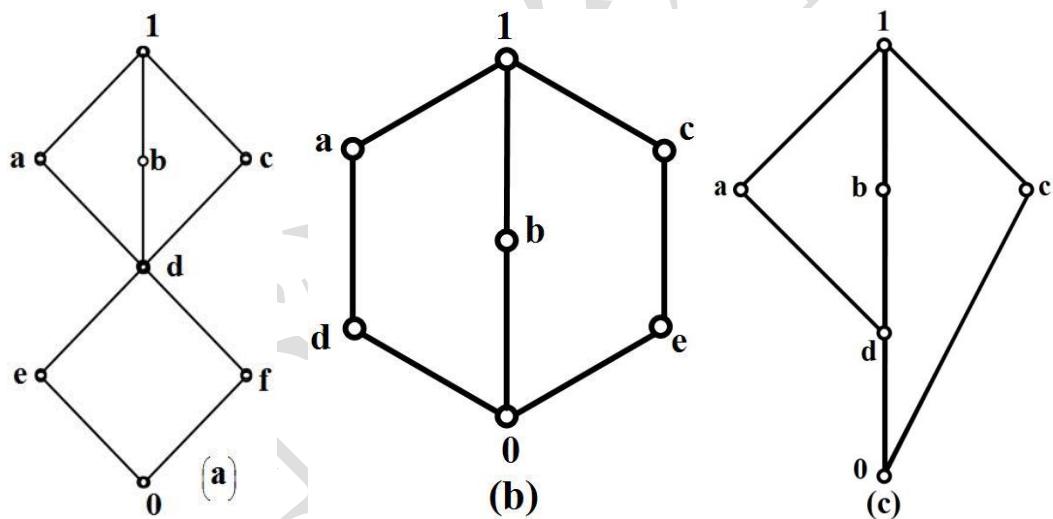
(1) 证明： $(S, +_{12}, \times_{12})$  是  $(N_{12}, +_{12}, \times_{12})$  的一个子环。

(2) 求  $S =$

(3)  $(S, +_{12}, \times_{12})$  是无零因子环吗？为什么？

(4)  $(S, +_{12}, \times_{12})$  是域吗？为什么？

**五、** 设格  $L_1, L_2, L_3$  如下图(a), (b), (c) 所示，试判别：



(1)  $L_1, L_2, L_3$  是否是分配格？为什么？

(2)  $L_1, L_2, L_3$  是否是有界格？为什么？

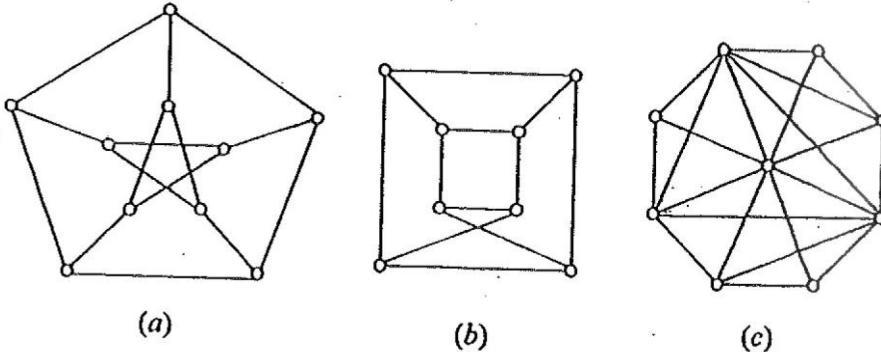
(3)  $L_1, L_2, L_3$  是否有补格？为什么？

(4)  $L_3$  是否是  $L_1$  的子格？为什么？

**六、** 给定图(a),(b),(c),画图示意：

(1) 彼得森图(a)不是欧拉图。至少增加几条边，才能使它成为一个欧拉图？

- (2) 彼得森图不是哈密顿图，至少增加几条边，才能使它成为一个哈密顿图？  
 (3) 图(b)是否是平面图？为什么？  
 (4) 图(c)是否是平面图？为什么？



七、设  $G = (V, E)$  是一无向的简单图， $|V| = 10$ 。

- (1) 如果  $\deg(v_i)$  ( $i = 1 \sim 10$ ) 均是偶数，并且  $\sum_{i=1}^{10} \deg(v_i) = 74$ ，那么  $G$  是欧拉图吗？  
 为什么？
- (2) 如果  $\sum_{i=1}^{10} \deg(v_i) = 78$ ，那么  $G$  是哈密顿图吗？为什么？

2009 年期末 (B 卷)

### 一、请判断下述诸命题的正确性

主要为 6.7.8.

- 1、 $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$   $\times$  -3 \times 2 = -6
- 2、 $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$   $\checkmark$
- 3、 $(A \oplus B) \oplus A = B$   $\checkmark$  A \neq \emptyset B \neq \emptyset \checkmark
- 4、如果  $R_1$  和  $R_2$  是  $A$  上的对称关系，那么  $R_1 \cup R_2$  一定是  $A$  上的对称关系  $\checkmark$  (3,2)(1,3)(2,1)(1,2)(1,3)
- 5、如果  $R$  是  $A$  上的反对称关系，那么  $R \circ R$  一定是  $A$  上的反对称关系  $\times$
- \* 6、如果  $g$  是单射函数，并且  $g \circ f$  是单射函数，那么  $f$  一定是单射函数  $\checkmark$  f g \circ f
- 7、设  $A$ ,  $B$  是两个可数集合，则  $A \cap B$  一定是可数集合  $\times$
- \* 8、设  $\langle S, * \rangle$  是一个含幺半群，如果运算  $*$  满足消去律，那么  $\langle S, * \rangle$  是一个群  $\times$  ~~~~~ 不定理
- \* 9、设  $(N_m, +_m, \times_m)$  是环，当  $m$  为素数时， $(N_m, +_m, \times_m)$  为除环  $\checkmark$  ——含幺半群因子环
- 10、设  $(L, \preceq, *, \oplus)$  是格，则  $\forall a, b \in L$  总有  $a * b = a$  当且仅当  $a \oplus b = b$   $\times$  \checkmark



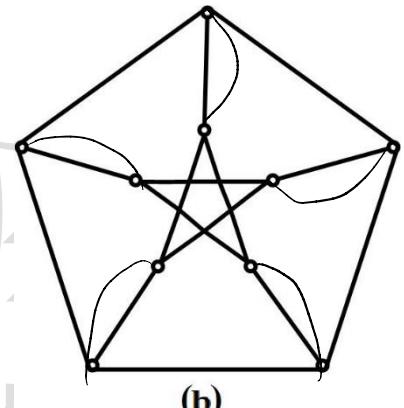
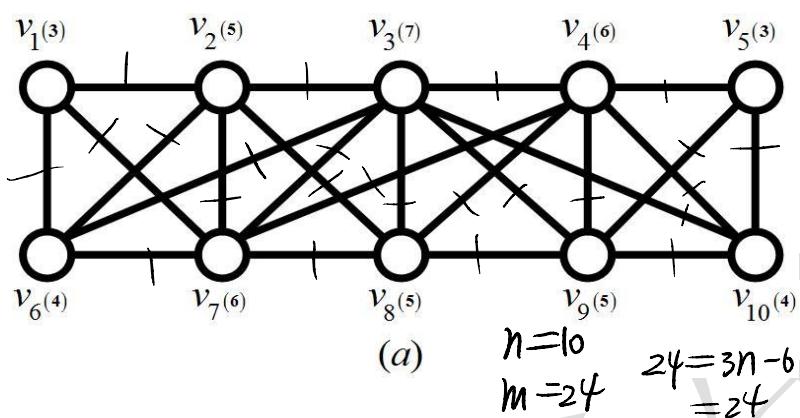
(2)  $L_1$ ,  $L_2$  是否为有界格? 为什么?  $\checkmark$  因为 1.0.

(3)  $L_1$ ,  $L_2$  是否为有补格? 为什么?  $L_1$  不是  $d$ .  
 $L_2$   $\cap$

六、给定图(a),(b), 如下图所示:

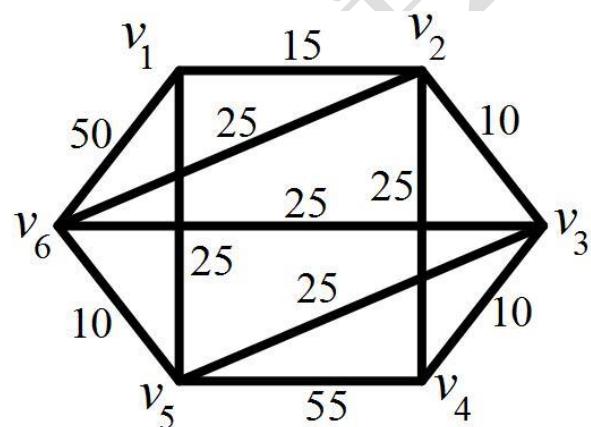
(1) 图(a)是否为平面图? 为什么? 是. 拉法

(2) 图(b)不是欧拉图, 至少增加几条边, 才能使它成为一个欧拉图?



七、带权图(网路拓扑图)如下图所示

- (1) 请用 Dijkstra 算法求出从结点到的所有最短路  
(2) 给出此图所有最优树(最小生成树)



## 离散数学(B 卷)答案

一、

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
----	---	---	---	---	---	---	---	---

结论	F	T	T	T	F	T	F	F
题号	9	10	11	12	13	14	15	
结论	T	T	F	F	F	F	T	

## 二、(1) (a) $R_2$ 是自反的

对于任何  $a \in A$ , 由  $R_1$  及  $R_2$  的自反性, 可得  $(a, a) \in R_1$  且  $(b, b) \in R_2$ , 因此由  $R_2$  的定义, 可知  $(a, b) \in R_2$ 。

### (b) $R_2$ 是反对称的

对于任何  $(a, b) \in R_2$ , 由  $R_2$  的定义, 可得  $(a, b) \in R_1$  且  $(b, a) \in R_1$ , 由  $R_2$  的定义, 可知  $(b, a) \in R_2$

### (c) $R_2$ 是传递的

对于任何  $(a, b) \in R_1$  及  $(b, c) \in R_2$ , 由  $R_2$  的定义, 可得  $(a, b) \in R_1$  且  $(b, a) \in R_1$  及  $(b, c) \in R_1$  且  $(c, b) \in R_1$ , 利用  $R_{12}$  的传递性, 可得  $(a, c) \in R_1$  及  $(c, a) \in R_1$ 。再次利用  $R_2$  的定义, 可得  $(a, c) \in R_2$

综上,  $R_2$  可知  $R_2$  是  $A$  上的等价关系

(2)  $R_1 \cup R_2$  不是  $A$  上的半序关系。 $R_1$ ,  $R_2$  是  $A$  上的自反关系,  $R_1 \cup R_2$  也是  $A$  上的自反关系,  $R_1 \cup R_2$  的反对称性无法判定,  $R_1 \cup R_2$  不是  $A$  上的传递关系。

## 三、证明:

(1)  $\forall fa \in S$ ,  $fa$  是从  $G$  到  $G$  的函数,  $\forall fa, fb \in S$ ,  $fa \circ fb = a * (b * x) \in S$  并且函数的复合满足结合律,  $\langle S, \circ \rangle$  是半群, 设  $fe(x) = e * x$ ,  $\forall x \in G$ ,

$$fe \circ fa(x) = e * (a * x) = a * x = fa \circ fe(x), \quad fe \text{ 是关于 } S \text{ 的么元},$$

$$fa \circ fa^{-1}(x) = a * (a^{-1} * x) = x = fe(x) = fa^{-1}(x) \circ fa, \quad fa^{-1} \text{ 是 } fa \text{ 的逆元}.$$

综上所述,  $\langle S, \circ \rangle$  是群。

(2) 存在从  $\langle G, * \rangle$  到  $\langle S, \circ \rangle$  的同构函数  $h: G \rightarrow S$ ,

$$\forall a, b \in G \quad h(a) = f_a(x) = a * x \quad \forall x \in G$$

(a)  $h$  是双射函数

$\forall a, b \in G$ , 若  $h(a) = h(b)$ , 有  $f_a(x) = f_b(x)$ , 即  $a * x = b * x$ ,  $\forall x \in G$

有  $a = b$ ,  $h$  是单射的。

$\forall f_a \in S$ , 有  $h(a) = f_a$ ,  $h$  是满射的。

(b)  $\forall a, b \in G$ ,  $h(a * b) = (a * b) * x = f_a \circ f_b(x) = h(a) \circ h(b)$ , 满足同态公式,

$h$  是  $\langle G, * \rangle$  到  $\langle S, \circ \rangle$  的同构函数。

**四、证明:** ① $\Rightarrow$ ② 设  $v, w$  是两个不同的右逆元,  $v \neq w$ ,  $u \otimes v = e$ ,  $u \otimes w = e$ ,

假设  $u$  可逆,  $u^{-1}$  为它的逆元,

则  $u^{-1} \otimes (u \otimes v) = u^{-1} \otimes (u \otimes w)$ , 即有  $v = w$ , 矛盾, 故  $u$  是不可逆的。

② $\Rightarrow$ ③ 设  $u$  有右逆元  $v$ ,  $u \otimes v = e$ ,  $u \neq 0$ ,  $v \neq 0$ ,

$u$  不可逆, 故  $v \otimes u \neq e$ ,  $(v \otimes u) - e \neq 0$ ,

$u \otimes ((v \otimes u) - e) = (u \otimes v \otimes u) - u = u - u = 0$ ,  $u$  是左零因子。

③ $\Rightarrow$ ①  $u$  是左零因子, 故存在  $a \in R$ ,  $a \neq 0$ , 使  $u \otimes a = 0$ ,

设  $u$  有右逆元  $v$ ,  $w = v \oplus a$ ,

$u \otimes w = u \otimes (v \oplus a) = (u \otimes v) \oplus (u \otimes a) = e \oplus 0 = e$ ,

$w$  也是  $u$  的右逆元, 并且  $v \neq w$ 。

**五、(1)  $L_1, L_2$  都不是分配格**

因为  $L_1$  含有与钻石格同构的子格,  $L_2$  含有与五角格同构的子格, 故它们都不是分配格

(2)  $L_1, L_2$  都是有界格

因为它们都有最大元 1, 最小元 0, 故它们都是有界格。

(3)  $L_1$  不是有补格,  $L_2$  是有补格

因为  $L_1$  的补元情况:

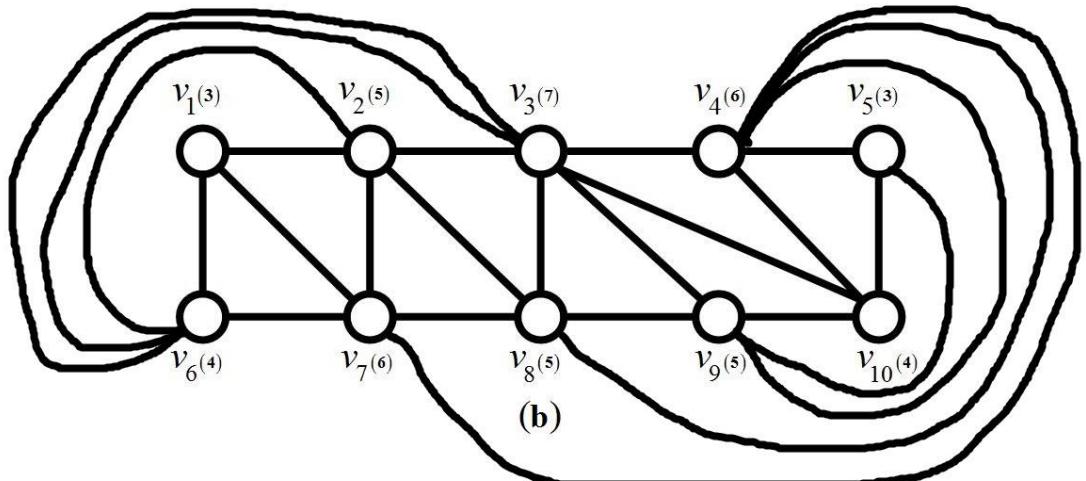
元素	0	1	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
补元	1	0	无	无	无	无	无	无

因为  $L_2$  补元的情况:

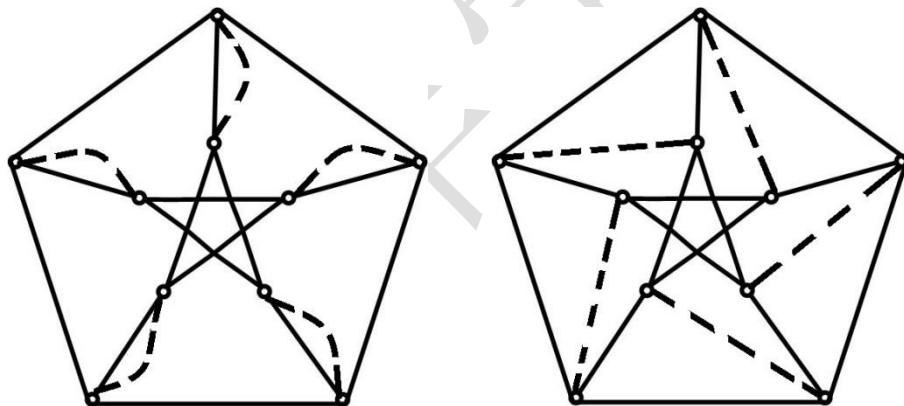
元素	0	1	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
补元	1	0	$b,c,e$	$a,c,d,e$	$a,b,d$	$b,c,e$	$a,b,d$

故  $L_1$  不是有补格,  $L_2$  是有补格

六、解: (1)图(a)是平面图, 对图(a)采用拉边法可得下图:



(2)给彼得森图(a)至少增加 5 条边, 才能使它成为一个欧拉图。



或者

七、(1)略

(2)4 棵



更多精彩，尽在南洋书院学生会微信公众号的南卷汇  
专栏，欢迎通过公众号提供题目或反馈错题信息，南卷汇  
需要您的支持。