	半序集	线性集	良序集
P135 T37. (1) $(2^N, \subseteq)$	✓	✗	✗
(2) $(2^{\{a\}}, \subseteq)$	✓	✓	✓
(3) $(2^{\emptyset}, \subseteq)$	✓	✓	✓

P157. T3. (1) 单射，不满射：$\forall n_1, n_2 \in N$; $f(n_1)=f(n_2) \Rightarrow n_1^2 = n_2^2$
$\Rightarrow n_1 = n_2$; $f(n)=3 \in N$, $n=\sqrt{2} \notin N$;

(2) 满射，不单射：0, 1 均能取到；$n=2k+1$ $(k \in N)$ 时 $f(n)=0$;

(3) 不单射，不满射：$n=2k+1$ 时 $f(n)=0$；$f(n)=0$ 或 1，不能取到N上所有；

(4) 满射，不单射：$\forall k \in N$，令 $m=k, n=1$，$f(m,n)=k$；$f(4,2)=f(2,4)=16$;

(5) 双射：$\forall x_1, x_2 \in R$，$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 17 = 3x_2 - 17 \Rightarrow x_1 = x_2$;

$\forall y \in R$，有 $x=\frac{y+17}{3} \in R$ 使得 $f(x)=y$;

(6) 单射：$\forall n_1, n_2 \in N \setminus \{0\}$，$f(n_1)=f(n_2) \Rightarrow \log_{10} n_1 = \log_{10} n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$;

$\cancel{\log}$ $\because n \geq 1$，$\therefore \log_{10} n \geq \log_{10} 1 = 0$，$\cancel{f(x)}$ $R(f) = R^+ \cup \{0\} \neq R$;

(7) 不单射，不满射：取 $A, B \in 2^A$，则 $f(A, \phi) = (A \cup \phi, A \cap \phi) = (A, \phi)$

$= (B \cup B', B \cap B') = f(B, B')$，不单射；

取 $A_1, A_2 \in 2^X$，$f(A_1, A_2) = (A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2)$，又 $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1 \cup A_2$

故无法取到前者是后者真子集的情况，不满射。

T6. 证明：已知 $f \subseteq g$，只需证 $g \subseteq f$ 即可。

任取 $(x, y) \in g$，$x \in D(g)$

$\Rightarrow x \in D(f)$ $(D(g) \subseteq D(f))$

$\Rightarrow (x,y)\in f$ $(f\subseteq g)$

故 $g\subseteq f$，又已知 $f\subseteq g$，所以 $f=g$.

T9. (1) $f\circ g: R\to R$. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=(x+2)^2-1=x^2+4x+3$.

$g\circ f: R\to R$. $(g\circ f)(x)=g(f(x))=(x^2-1)+2=x^2+1$.

(2) ① f 不单射、不满射：(1) 当 $x_1=-x_2$ 时，$f(x_1)=f(x_2)=x_1^2-1$；

(2) $f(x)\geqslant -1$，$R(f)\neq R$.

② g 双射：(1) $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1+2=x_2+2\Rightarrow x_1=x_2$；

(2) $\forall y\in R$，$\exists x=y-2\in R$ s.t. $g(x)=y$，$R(g)=R$.

③ $f\circ g$ 不单射、不满射：(1) 当 $x\neq -2$ 时，$(f\circ g)(-(x+4))=x^2+4x+3=(f\circ g)(x)$

而 $-(x+4)\neq x$；

(2) $(f\circ g)(x)=(x+2)^2-1\geqslant -1$，$R(f\circ g)=[-1,+\infty)\neq R$；

④ $g\circ f$ 不单射，不满射：(1) 当 $x_1=-x_2$ 时，$(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)=x_1^2+1$；

(2) $(g\circ f)(x)=x^2+1\geqslant 1$，$R(g\circ f)=[1,+\infty)\neq R$.

T10. (1) 取 $f: A\to A$，$f=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$. $f(x)=5-x$

则 $f\neq I_A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$，

$f^2(x)=f(5-x)=5-(5-x)=x=I_A(x)$；

$f^3(x)=f(f^2(x))=5-x$；

$f^{-1}(x)=5-x$；

$(f\circ f^{-1})(x)=x=I_A(x)$.

(2) 存在. 如(1)中所举例 $f(x)=5-x$ 即满足 $f^2=I_A$.

T11. $p^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}$, $p\diamond p^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}\diamond\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}=I_X$.

T12. (1) 不是. $A\cap B\subseteq B$, B是有限集合, 故$A\cap B$是有限集合;

(2) 是. $A\subseteq A\cup B$, A是无限集合, 故$A\cup B$是无限集合;

(3) 是. 假设$A\setminus B$不是无限集合, 则$(A\setminus B)\cup B=A$ 为两个有限集合的并集也为有限集, 与已知矛盾! 故$A\setminus B$是无限集.

P213 第六章

T7. ① 满足结合律:

$\forall x,y,z\in X$, $x*(y*z)=x*y=x=x*y=(x*y)*z$;

② 不满足交换律:

$\forall x,y\in X$ 且 $x\neq y$, $x*y=x\neq y=y*x$;

③ 无幺元:

假设存在幺元$e\in X$, 则有$\forall x\in X$, $e*x=x*e=e$, 但 $x*e=x\neq e$

故当X中元素个数>1时则不存在幺元.

④ 无零元:

假设存在零元$x_0\in X$, 则$\forall x\in X$, 有 $x_0*x=x*x_0=x_0$,

又$x*x_0=x\neq x_0$, 当X中元素多于1个时 不存在零元.

⑤ 无逆元: 不存在幺元, 故X中元素均无逆元.

No:

Date:

T9. 证明：$\forall x \in X$，$(x*x)*x = x*(x*x)$ （*可结合）

令 $y = x*x$，则 $y*x = x*y$

$\Rightarrow$ $x = y = x*x$

$\Rightarrow$ x是幂等元

故 X 中任一元素均为幂等元.

10.14