No: W7

Date:

T12. ① $<S_1, \oplus, \otimes>$ 运算表：

$\oplus$	b	d
b	b	b
d	b	d

$\otimes$	b	d
b	b	d
d	d	d

$\oplus$、$\otimes$ 在 $S_1=\{b,d\}$ 内封闭，$<S_1,\oplus,\otimes>$ 是 $<X,\oplus,\otimes>$ 的子代数系统.

② $<S_2, \oplus, \otimes>$ 运算表：

$\oplus$	a	d
a	a	a
d	a	d

$\otimes$	a	d
a	a	d
d	d	d

$\oplus$、$\otimes$ 在 S_2 内封闭，$<S_2,\oplus,\otimes>$ 是 $<X,\oplus,\otimes>$ 的子代数系统.

③ $<S_3, \oplus, \otimes>$ 运算表：

$\oplus$	b	c
b	b	a
c	a	c

$\otimes$	b	c
b	b	d
c	d	c

$\oplus$、$\otimes$ 在 S_3 内不封闭，$<S_3,\oplus,\otimes>$ 不是 $(X,\oplus,\otimes)$ 的子代数系统.

T17. 证明：构造 $h: N \to \{0,1\}$，$\forall n \in N$，$h(2n)=0$，$h(2n+1)=1$

则 $h(2m \times 2n) = h(4mn) = 0 = 0 \times 0 = h(2m) \times h(2n)$

$h(2m \times (2n+1)) = h(2m(2n+1)) = 0 = 0 \times 1 = h(2m) \times h(2n+1)$

$h((2m+1)\times(2n+1)) = h(4mn+2(m+n)+1) = h(2(2mn+m+n)+1) = 1 = 1 \times 1$

$= h(2m+1) \times h(2n+1)$

No:
Date:

$\therefore$ h 满足同态公式，又 $\{0,1\} \subseteq N$，X,Y 同类型，且 h 为满射
故 Y 是 X 的同态象.

T19. 证明：任取 $x, y \in X$，
$h(x*y) = f_1(x*y) \oplus f_2(x*y)$
$= (f_1(x) \oplus f_1(y)) \oplus (f_2(x) \oplus f_2(y))$
$= (f_1(x) \oplus f_2(x)) \oplus (f_1(y) \oplus f_2(y))$
$= h(x) \oplus h(y)$
$\therefore$ h 满足同态公式，h 是从 $\langle X, * \rangle$ 到 $\langle Y, \oplus \rangle$ 的同态函数

任取 $x, y \in X$，
T20. 证明：$(h_2 \circ h_1)(x f_1 y) = h_2(h_1(x f_1 y))$
$= h_2(h_1(x) f_2 h_1(y))$
$= h_2(h_1(x)) f_3 h_2(h_1(y))$
$= ((h_2 \circ h_1)(x)) f_3 ((h_2 \circ h_1)(y))$
$\therefore$ $h_2 \circ h_1$ 满足同态公式，$h_2 \circ h_1$ 是 $\langle X, f_1 \rangle$ 到 $\langle Z, f_3 \rangle$ 的同态函数

T25. 证明：① $\langle S, * \rangle$ 是半群，则 $S \neq \phi$，$*$ 在 S 上封闭，且满足结合律
② $\oplus$ 的封闭性：由 $x \oplus y = x * a * y$ 和 $*$ 的封闭性可知
$\oplus$ 在 S 上封闭
③ 结合律：$\forall x, y, z \in S$，
$(x \oplus y) \oplus z = (x * a * y) \oplus z = (x * a * y) * a * z$

$= x * a * (y * a * z) = (x * a) * (y ⊕ z)$

$= x ⊕ (y ⊕ z)$

∴ ⊕ 满足结合律

综上①②③可知 $\langle S, ⊕ \rangle$ 是半群.

T25. 证明: ① $R \neq \varnothing$

② $\forall x, y \in R$, $x * y = x + y + xy \in R$, $*$ 在 R 上封闭

③ 结合律: $\forall x, y, z \in R$,

$(x * y) * z = (x + y + xy) + z + (x + y + xy) \cdot z$

$= x + xy + xz + xyz + (y + z + yz)$

$= x + (y + z + yz) + x(y + z + yz)$

$= x * (y + z + yz) = x * (y * z)$, $*$ 满足结合律

④ 含幺元: 对 $\forall x \in R$, $x * 0 = x + 0 + 0 \cdot x = x$

$0 * x = 0 + x + x \cdot 0 = x$

即 $x * 0 = 0 * x = x$, 故 0 为幺元

综上①②③④可得 $\langle R, * \rangle$ 为含幺半群.

T26. 证明: $\forall x, y \in S$, 有 $x * x = x$, $y * y = y$

$(x * y) * (x * y) = x * (y * x) * y$

$= (x * x) * (y * y)$

$= x * y$

No:

Date:

T28. 证明：$\forall x,y,z \in S$，

$$(x*y)*z = x*(y*z)$$
$$= x*(z*y)$$
$$= (x*z)*y$$
$$= (z*x)*y$$
$$= z*(x*y)$$

10.21