No: W8

Date:

P246

T33. 证明：$\exists$幂等元 $x\in X$，故 $f(x)\oplus f(x)=f(x*x)=f(x)\in Y$

故 $f(x)$ 是 Y 中的幂等元，Y 中存在幂等元。

T37. ① $\forall x\in S_1$，$x\in S$，故 $S_1\subseteq S$

② $e*e=e$，故 $e\in S_1$，$S_1\neq\phi$

③ 封闭性：任意 $x_1,x_2\in S_1$，$x_1,x_2\in S$ 且 $\exists y_1,y_2$ 使得 $y_1*x_1=e$，

$y_2*x_2=e$、$x_1*x_2\in S$，且 $\exists z\in S$，$z=y_2*y_1$，

$$\begin{aligned} z*(x_1*x_2) &= (y_2*y_1)*(x_1*x_2) \\ &= y_2*(y_1*x_1)*x_2 \\ &= y_2*e*x_2 \\ &= y_2*x_2=e \end{aligned}$$

故 $x_1*x_2\in S_1$，$*$ 在 S_1 上封闭

④ 幺元：由②可知 $\langle S_1,*\rangle$ 的幺元为 e.

综上①②③④，$\langle S_1,*\rangle$ 是 $\langle S,*\rangle$ 的子含幺半群.

T39. 证明：(1) ①存在性：$\forall a\in G$，$\exists a^{-1}\in G$，$\therefore \exists x=a^{-1}*b\in G$，则

$$a*x=a*(a^{-1}*b)=(a*a^{-1})*b=e*b=b$$

$\therefore \exists x=a^{-1}*b$ 满足 $a*x=b$

②唯一性：设 $x_1,x_2\in G$ 满足 $a*x=b$，由于群中运算满足消去律，

则 $a*x_1=b\wedge a*x_2=b \Rightarrow a*x_1=a*x_2 \Rightarrow x_1=x_2$

$\therefore a*x=b$ 的解 x 唯一.

No:

Date:

(2) 存在性: $\forall a \in G$, $a^{-1} \in G$, $\therefore \exists y = b*a^{-1} \in G$, 使得

$y*a = (b*a)*a^{-1} = b*(a*a^{-1}) = b*e = b$.

$\therefore \exists y = b*a^{-1}$ 满足 $y*a=b$

② 唯一性: 设 $y_1, y_2 \in G$ 满足 $y*a=b$, 由于群中运算满足消去律, 故

$y_1*a=b \land y_2*a=b \Rightarrow y_1*a = y_2*a \Rightarrow y_1=y_2$

$\therefore$ $y*a=b$ 的解 y 唯一.

T43. 证明: 已知 $\langle S,*\rangle$ 为含幺半群, 故只需证明 $\langle S,*\rangle$ 中任一元素有逆元且满足交换律即可。

① 有逆元: 对任一 $x\in S$, $x*x=e \Rightarrow x^{-1}=x$

② 交换律: $\forall x,y \in S$, 群满足鞋袜律, 故

$x*y = x^{-1}*y^{-1} = (y*x)^{-1} = y*x$ 满足交换律

综上, $\langle S,*\rangle$ 是交换群

T45. 证明: 假设存在 $x\in G$ 是幂等元且 $x \neq e$, 则

$x*x = x$, 又 $x = e*x = (x^{-1}*x)*x = x^{-1}*(x*x)$

$= x^{-1}*x = e$, 矛盾!

故幺元是唯一的幂等元.

T55. 证明: ① f 单射: $\forall x,y \in G$, 群满足消去律, 则

$f(x)=f(y) \Rightarrow a*x*a^{-1} = a*y*a^{-1} \Rightarrow x=y$, f 单射

No:

Date:

② f满射：$\forall y\in G$，$\exists x=a^{-1}*y*a\in G$，$f(x)=a*x*a^{-1}$

$=a*(a^{-1}*y*a)*a^{-1}=y$，故f满射.

③ f是同态函数：$\forall x,y\in G$，$f(x*y)=a*(x*y)*a^{-1}$

$=a*(x*(a^{-1}*a)*y)*a^{-1}=(a*x*a^{-1})*(a*y*a^{-1})$

$=f(x)*f(y)$，f满足同态公式，f是同态函数.

综上①②③，f是从$\langle G,*\rangle$到$\langle G,*\rangle$的自同构函数.

T57. 证明：①自反性：$\langle G,*\rangle$是群，存在幺元e，则$\forall x\in G$，

$\exists z=e$，使得 $x=e*x*e^{-1}$，故$(x,x)\in R$，R是自反的；

②对称性：$\forall (x,y)\in R$，则$x,y\in G$，$\exists z\in G\,(y=z*x*z^{-1})$，取$z'=z^{-1}$，有

$x=z^{-1}*y*(z^{-1})^{-1}$，故$(y,x)\in R$，R是对称的；

③传递性：$\forall (a,b)\in R\wedge(b,c)\in R$，则$\exists z_1,z_2\in G$，$b=z_1*x*z_1^{-1}$，

$c=z_2*b*z_2^{-1}$，$\exists z=z_2*z_1\in G$，使得

故 $c=z_2*(z_1*a*z_1^{-1})*z_2^{-1}$

$=(z_2*z_1)*a*(z_1^{-1}*z_2^{-1})$

$=(z_2*z_1)*a*(z_2*z_1)^{-1}$

故$(a,c)\in R$. R是传递的.

综上①②③，R是G上的等价关系.