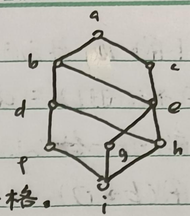
No: W12

Date:

250



T9. $1=a,\ 0=i$

(1) 元素 $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i$

补元 i 无 f 无 无 c 无 无 a

(2) 由(1)可知格中有元素无补元，此格不是有补格。

(3) 此格不是分配格，取反例 f, g, h:

$f \oplus (g * h) = f \oplus i = f \neq d = b * d = (f \oplus g) * (f \oplus h)$

$h * (f \oplus g) = h * b = h \neq i = i \oplus i = (h * f) \oplus (h * g)$

不满足分配律.

T10. 证明: (1) $\forall x, y \in L,\ x \oplus y = 0$，有

$x = x * (x \oplus y)$ (吸收律)

$= x * 0$

$= 0$

同理，$y = y * (y \oplus x) = y * 0 = 0$

(2) $\forall x, y \in L,\ x * y = 1$，有

$x = x \oplus (x * y) = x \oplus 1 = 1$;

$y = y \oplus (y * x) = y \oplus 1 = 1$.

T11. 证明: ① 互为补元:

$0 \oplus 1 = 1,\ 0 * 1 = 0$，0和1互为补元

② 唯一性:

No:

Date:

(i) 0是1的唯一补元：设$a\in L$，a为1的补元，则

$a=a*(a\oplus 1)=a*1=0$

(ii) 1是0的唯一补元：设$b\in L$，b为0的补元，则

$b=b\oplus(b*0)=b\oplus 0=1$

综上①②，有界格中0，1互为对方唯一补元.

T12. 证明：(反证法) 假设 $a\in L$，$a'=a$，则

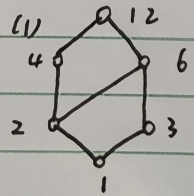
$a\oplus a=1$，$a*a=0$，由幂等律，

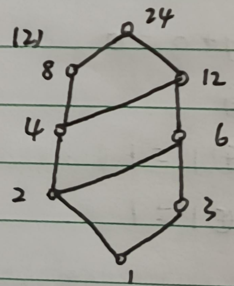
$a=a*a=0$，$a=a\oplus a=1$. 故 $0=a=1$. 即$0=1$

此时$|L|=1$，与$|L|\geq 2$矛盾！

所以L中不存在以自己为补元的元素。

T19. 画出(1)(2)所给条件的Hasse图：





(1) 不是布尔代数，元素2，6无补元. (且$|L|=6\neq 2^n, n\in N$)

(2) 不是布尔代数，元素2，4，6，12无补元.

No:

Date:

3. 证明：$\forall a\in A$，$\exists \bar{a}\in A$，s.t.

$0_A = a\wedge\bar{a}$，$1_A = a\vee\bar{a}$，又 $f:A\to B$ 为满同态函数，故

$f(\bar{a}) = (f(a))'$，则

$f(0_A) = f(a\wedge\bar{a})$

$= f(a)\wedge f(\bar{a})$

$= f(a)\wedge(f(a))'$

$= 0_B$

$f(1_A) = f(a\vee\bar{a})$

$= f(a)\cup f(\bar{a})$

$= f(a)\cup(f(a))'$

$= 1_B$

E4. 证明：①充分性：若 $\exists i_0$，$1\le i_0\le r$，$a = b_{i_0}$，由上确界定义可知

$a\le b_1\oplus b_2\oplus\cdots\oplus b_{i_0-1}\oplus b_{i_0}\oplus\cdots\oplus b_r$

$= b_1\oplus b_2\oplus\cdots\oplus b_r$

②必要性：(反证法) 假设 $\forall i$，$1\le i\le r$，均有 $a\ne b_i$，则由于 a, b_i 为原子，有 $a * b_i = 0$，则

$a*(b_1\oplus b_2\oplus\cdots\oplus b_r) = (a*b_1)\oplus(a*b_2)\oplus\cdots\oplus(a*b_r)$

$= 0\oplus 0\oplus\cdots\oplus 0$

$= 0$

但由 $a\le b_1\oplus b_2\oplus\cdots\oplus b_r$ 可知 $a*(b_1\oplus\cdots\oplus b_r) = a$，

No:

Date:

$a=0$. 与 a 为原子矛盾!

综上①②, $a \le b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots \oplus b_r \Leftrightarrow \exists i, (1 \le i \le r)$ 使 $a=b_i$.

T25. 证明: ① 必要性:

$\because y=0 \quad \therefore y * b_i \ (1 \le i \le r) = 0 * b_i = 0$ 恒成立

② 充分性: 由布尔代数原子的性质可得

$y = \bigoplus_{b_i \in S(y)} b_i$, $S(y) = \{ b_i \mid (1 \le i \le r) \wedge b_i \le y \}$, 故

$$
\begin{aligned}
y &= y * y \\
&= y * \bigoplus_{b_i \in S(y)} b_i \\
&= \bigoplus_{b_i \in S_y} (y * b_i) = \bigoplus_{b_i \in S_y} 0 = 0
\end{aligned}
$$

综上①②. $y=0 \Leftrightarrow \forall i (1 \le i \le r)$, $y b_i = 0$.