No: W4

Date:

T46. 证明：

① $H_1 \cap H_2 \subseteq G$：$H_1 \subseteq G, H_2 \subseteq G \Rightarrow H_1 \cap H_2 \subseteq G$

② $H_1 \cap H_2 \neq \phi$：$e \in H_1 \wedge e \in H_2 \Rightarrow e \in H_1 \cap H_2$

③混合封闭性($\forall a, \forall b \in H_1 \cap H_2$ $(a * b^{-1} \in H_1 \cap H_2)$)：

$a, b \in H_1 \wedge a, b \in H_2$

$\Rightarrow a, b^{-1} \in H_1 \wedge a, b^{-1} \in H_2$

$\Rightarrow a * b^{-1} \in H_1 \wedge a * b^{-1} \in H_2$

$\Rightarrow a * b^{-1} \in H_1 \cap H_2$，得证

综上①②③可知 $\langle H_1 \cap H_2, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群.

G显然非空.

T50. (1)证明：①封闭性：$f_1 \circ f_2$ 结果唯一，$\forall x$，取

$f_1(x) = a_1x + b$，$f_2(x) = a_2x + b$，$a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$，$a_1 \neq 0$，$a_2 \neq 0$，则

$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(a_2x + b_2) = a_1(a_2x + b_2) + b_1$

$= a_1a_2x + (a_1b_2 + b_1)$

$a_1a_2, a_1b_2 + b_1 \in R$ 且 $a_1a_2 \neq 0$，故 $f_1 \circ f_2 \in G$；

②结合律：由于函数的复合运算均满足结合律，故 $\circ$ 在G上满足结合律

③有幺元：幺元为幺函数 $I(x) = x \in G$，证明如下：对 $\forall f \in G$，

$(I \circ f)(x) = I(f(x)) = I(ax+b) = ax + b = f(x)$，

$(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x)$，$I \circ f = f \circ I = f$，$I$ 为 G 的幺元；

④有逆元：$\forall f \in G$，$f = ax + b$，$a, b \in R$ 且 $a \neq 0$ 的逆元 $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

$\frac{1}{a} \neq 0$，$\frac{1}{a}, -\frac{b}{a} \in R$，$f^{-1} \in G$.

Date:

$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(ax+b)=\frac{1}{a}(ax+b)-\frac{b}{a}=x=I(x)$,

$(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=f(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a})=a(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a})+b=x=I(x)$.

$\therefore f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I$，$f^{-1}$为$f$的逆元.

综上①②③④，$\langle G,\circ\rangle$为群.

(2) 证明：

(i) $\langle S_1,\circ\rangle$：① $S_1\subseteq G$：$f(x)=x+b$为G中$a=1$的特殊情况，$S_1\subseteq G$；

② $S_1\neq\phi$：显然$I(x)=x\in S_1$；

③ 混合封闭性：$\forall f,g\in S_1$，$f(x)=x+b_1$，$g(x)=x+b_2$，$b_1,b_2\in R$，存在

$g^{-1}(x)=x-b_2\in S_1$，$(f\circ g^{-1})(x)=f(g^{-1}(x))=x-b_2+b_1$，$b_1-b_2\in R$，故

$f\circ g^{-1}\in S_1$

综上①②③，$\langle S_1,\circ\rangle$是$\langle G,\circ\rangle$的子群

(ii) $\langle S_2,\circ\rangle$：① $S_2\subseteq G$：$f(x)=ax$为G中$b=0$的特殊情况，$S_2\subseteq G$；

② $S_2\neq\phi$：显然$I(x)=x\in S_2$；

③ 混合封闭性：$\forall f,g\in S_2$，$f(x)=a_1x$，$g(x)=a_2x$，$a_1,a_2\in R$且$a_1,a_2\neq0$

存在$g^{-1}(x)=\frac{1}{a_2}x\in S_2$，$(f\circ g^{-1})(x)=f(g^{-1}(x))=a_1(\frac{1}{a_2}x)=\frac{a_1}{a_2}x$，

$\frac{a_1}{a_2}\in R$且$\frac{a_1}{a_2}\neq0$，故$f\circ g^{-1}\in S_2$

综上①②③，$\langle S_2,\circ\rangle$是$\langle G,\circ\rangle$的子群.

T34. 证明：设$\langle G,*\rangle$是循环群，其同态象为$\langle h(G),\circ\rangle$，$h$为同态函数。易知$\langle h(G),\circ\rangle$为含幺群，且对任一$h(x)\in h(G)$，均有逆元$h^{-1}(x)=h(x^{-1})$。故只需证明$\langle h(G),\circ\rangle$是循环的，有生成元即可。

No:
Date:

设 $\langle G,*\rangle$ 中生成元为 g_0，则 $\forall g\in G$，$\exists m\in N$，$g=g_0^m\in G$，于是

$h(g)=h(g_0^m)=h(g_0)\circ h(g_0)\circ\cdots\circ h(g_0)=h^m(g_0)$

$\therefore h(g_0)$ 是 $\langle h(G),\circ\rangle$ 的生成元，$\langle h(G),\circ\rangle$ 是循环群.

T56. 证明：① $H\subseteq X$：$\forall x\in H$ 均有 $x\in X$，易知 $H\subseteq X$；

② $H\neq\phi$：设 $\langle X,*\rangle$、$\langle Y,\oplus\rangle$ 的幺元分别为 e_1、e_2，则

$f(e_1)=e_2=g(e_1)$，故 $e_1\in H$，$H\neq\phi$；

③ 混合封闭性：$\forall a,b\in H$，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，有

$f(b^{-1})=f^{-1}(b)=g^{-1}(b)=g(b^{-1})$

由 $\langle X,*\rangle$ 的封闭性可知 $a*b^{-1}\in X$，故

$f(a*b^{-1})=f(a)\oplus f(b^{-1})=g(a)\oplus g(b^{-1})=g(a*b^{-1})$

$\therefore a*b^{-1}\in H$

综上①②③可知 $\langle H,*\rangle$ 是 $\langle X,*\rangle$ 的子群。