基本初等函数的相关公式及其推导过程

目录

摘要

本文主要介绍了基本初等函数的一些常用的公式，以及其推导过程。

1　对数函数

1.1　和公式

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc \tag{1}$$

推导过程:

$$\begin{aligned} \because b &= a^{\log_a b}, c = a^{\log_a c} \\ \therefore bc &= a^{\log_a b} a^{\log_a c} \\ &= a^{(\log_a b + \log_a c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a bc &= \log_a a^{(\log_a b + \log_a c)} \\ &= \log_a b + \log_a c \end{aligned}$$

1.2　差公式

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c} \tag{2}$$

推导过程:

$$\begin{aligned} \because b &= a^{\log_a b}, c = a^{\log_a c} \\ \therefore \frac{b}{c} &= \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} \\ &= a^{(\log_a b + \log_a c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a \frac{b}{c} &= \log_a a^{(\log_a b - \log_a c)} \\ &= \log_a b - \log_a c \end{aligned}$$

1.3 换底公式

$$\log_a b = \frac{\log_n a}{\log_n b} \tag{3}$$

推导过程：

$$\begin{aligned}
&\because \log_n b = \log_n a \log_a b \\
&\therefore \log_a b = \frac{\log_n b}{\log_n a}
\end{aligned}$$

1.4 真底互换公式

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \tag{4}$$

推导过程：

$$\begin{aligned}
&\because \log_a a = \log_a b \log_b a = 1 \\
&\therefore \log_a b = \frac{1}{\log_b a}
\end{aligned}$$

1.5 不知道是什么公式

$$\log_a b = \frac{\log_a c}{\log_b c} \tag{5}$$

推导过程：

$$\begin{aligned}
&\because \log_a c = \log_a b^{\log_b c} = \log_b c \log_a b \\
&\therefore \log_a b = \frac{\log_a c}{\log_b c}
\end{aligned}$$

2　三角函数

2.1　诱导公式

公式一

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 2k\pi) &= \sin\alpha \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos\alpha \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ \tan(\alpha + 2k\pi) &= \tan\alpha \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \tag{6}$$

公式二

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \pi) &= -\sin\alpha \\ \cos(\alpha + \pi) &= -\cos\alpha \\ \tan(\alpha + \pi) &= \tan\alpha \\ \cot(\alpha + \pi) &= \cot\alpha \end{aligned} \tag{7}$$

公式三

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha \end{aligned} \tag{8}$$

公式四

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin\alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos\alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot\alpha \end{aligned} \tag{9}$$

公式五

$$\begin{aligned}
&\sin{(\alpha+\frac{k\pi}{2})}=\sin\alpha\\
&\cos{(\alpha+\frac{k\pi}{2})}=-\cos\alpha\\
&\tan{(\alpha+\frac{k\pi}{2})}=-\tan\alpha\\
&\cot{(\alpha+\frac{k\pi}{2})}=-\cot\alpha
\end{aligned} \tag{10}$$

2.2 二角和差公式

$$\cos{(\alpha-\beta)}=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta \tag{11}$$

推导过程如下：设与 x 轴的夹角分别为 α 和 β 的两个单位向量为 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$，则有:

$$\begin{aligned}
&\vec{A}=(\sin\alpha,\cos\alpha)\quad \vec{B}=(\sin\beta,\cos\beta)\\
&\therefore\vec{A}\cdot\vec{B}=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\\
&\therefore\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos{(\alpha-\beta)}\\
&\therefore\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=\cos{(\alpha-\beta)}
\end{aligned}$$

将 $\beta=-\beta$ 带入上式，则有

$$\cos{(\alpha+\beta)}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{12}$$

再将 $\beta=\beta-\frac{\pi}{2}$ 带入上式，则有

$$\cos{(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2})}=\cos\alpha\cos{(\beta-\frac{\pi}{2})}-\sin\alpha\sin{(\beta-\frac{\pi}{2})}$$

因此可得

$$\sin{(\alpha+\beta)}=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos(\beta) \tag{13}$$

同理，将 $\beta=-\beta$ 带入上式，则有:

$$\sin{(\alpha-\beta)}=\cos\alpha\sin{(-\beta)}+\sin\alpha\cos{(-\beta)}$$

易得

$$\sin{(\alpha-\beta)}=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{14}$$