

函数的极限推导证明

目录

1	函数的极限	2
1.1	一些重要的极限	2
1.1.1	证明当 $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$	2
1.1.2	证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	2
1.1.3	证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$	2
1.1.4	证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	3
1.1.5	证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 有界	3

1 函数的极限

1.1 一些重要的极限

1.1.1 证明当 $a > 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$

解: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $|a^x - 1| < \varepsilon$, 即 $1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$, 因此只需要 $\log_a 1 - \varepsilon$

1.1.2 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

解法一: $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\left| \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right| < \varepsilon$, 则有 $1 - \varepsilon < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 + \varepsilon$

解法二:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \ln e \\ &= 1 \end{aligned}$$

1.1.3 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$$\begin{aligned} \therefore \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= e^{n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) &= x \\ \therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= e^x \end{aligned}$$

1.1.4 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

1.1.5 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 有界

解法一：夹逼法

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} \frac{1}{x^n} \\ &= 1 + \frac{x}{1!} \cdot \frac{1}{x} + \frac{x(x-1)}{2!} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{x(x-1) \cdots (x-x+1)}{x!} \cdot \frac{1}{x^x} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{x!} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{x}\right) \end{aligned}$$

设 $X_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 时，有

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$X_n < X_{n+1}$ ，即 X_n 单调递增，并且有

$$X_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$