概率论中的一些公式及其推导或证明

1 组合数的计算

$$
\begin{aligned}
C_n^m &= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} \\
&= \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}
\end{aligned}
$$

2 二项分布

在 n 次独立重复试验（伯努利试验）中，事件 A 发生的次数 X 服从二项分布，记为 $X \sim B(n, p)$，其概率分布为：

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

3 泊松分布

在 n 重伯努利试验中，记 A 事件在一次试验中发生的概率为 p_n，如果当 $n \to +\infty$ 时，有 $np_n \to \lambda(>0)$，则

$$\lim_{n \to +\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

证明：设 $np_n = \lambda_n$，则有 $p_n = \dfrac{\lambda_n}{n}$

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(\frac{n}{n}\right) \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

对于固定的 K，有

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda},$$

因此有

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$