第三章 随机过程

信息与通信工程学院
无线信号处理与网络实验室(WSPN)
智能计算与通信研究组 (IC^2)
彭岳星
yxpeng@bupt.edu.cn
6119 8066 ext.2

随机过程

- 随机过程的统计特性
- 平稳随机过程
- 高斯随机过程
- **平稳随机过程通过线性系统**
- 高斯白噪声
- 窄带平稳随机过程
- 余弦波加窄带平稳高斯随机过程
- **匹配滤波器**
- 循环平稳随机过程

3.1 随机过程的统计（概率）特性

- 随机过程的统计性质可由其分布函数和概率密度描述。

- $X(t)$的n维分布函数(CDF)：

$$F_n(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=P\{X(t_1)\le x_1,\cdots,X(t_n)\le x_n\}$$

- $X(t)$的n维概率密度函数(PDF)：

$$\frac{\partial F_n(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)}{\partial x_1\cdots\partial x_n}=p_n(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)$$

3.2 随机过程的数字特征

- 数学期望: $E\{X(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}xp_X(x,t)dx=m_X(t)$
- **方差:** $D[X(t)]=E\left\{[X(t)-m_X(t)]^2\right\}=\sigma_X^2(t)$
- 标准差: $\sigma_X(t)$

信号能量：$E\left\{x^2(t)\right\}=m_X^2(t)+\sigma_X^2(x)$

- **自协方差:** $C_X(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\}$
- 自相关: $R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

- 归一化自协方差(**相关系数**)：$\rho_X(t_1,t_2)=\dfrac{C_X(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)}$

3.3 两随机过程的联合分布函数与数字特征

- $X(t), Y(t)$为两个随机过程, 其n+m维联合分布函数:

$$F_{n,m}(x_1,\cdots,x_n,t_1,\cdots,t_n;y_1,\cdots,y_m,t_1',\cdots,t_m')$$
$$=P\{X(t_1)\le x_1,\cdots,X(t_n)\le x_n;Y(t_1')\le y_1,\cdots,Y(t_m')\le y_m\}$$

- X(t)的n维概率密度函数:

$$\frac{\partial F_{n,m}(x_1,\cdots,x_n,t_1,\cdots,t_n;y_1,\cdots,y_m,t_1',\cdots,t_m')}{\partial x_1\cdots\partial x_n\partial y_1\cdots\partial y_m}$$
$$=p_n(x_1,\cdots,x_n,t_1,\cdots,t_n;y_1,\cdots,y_m,t_1'\cdots,t_m')$$

- 互协方差函数:

$$C_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]\}$$

- 互相关函数:

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\{X(t_1)Y(t_2)\}$$

3.4 平稳随机过程

- **狭义平稳(严平稳)**

$$p_n(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=p_n(x_1,\cdots,x_n;t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau),\ \forall n,\tau$$

- **广义平稳(宽平稳)**
  - **一维分布与时间无关，二维分布只与时间间隔τ有关**
  - **数字特征** $\begin{cases}E\{X(t)\}=m_X\\ D\{X(t)\}=\sigma_X^2\end{cases}$; $\begin{cases}R_X(t_1,t_2)=R(t_1-t_2)=R(\tau)\\ C_X(t_1,t_2)=R(\tau)-m_X^2=C_X(\tau)\end{cases}$

- **联合宽平稳随机过程**
  - **若X(t)，Y(t)是宽平稳随机过程，且**

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\{X(t_1)Y(t_2)\}=R_{XY}(\tau)=X(-\tau)\otimes Y(\tau)$$

$$\tau=t_2-t_1$$

3.5 各态历经性 (遍历性)

- 各态历经性(遍历性)：随机过程的任一实现，经历了随机过程的所有的可能状态，可以用“时间平均”来代替“统计平均”
  - 均值遍历过程：统计平均与其样函数的时间平均值以概率1相等
  - 自相关遍历过程：样函数的时间平均自相关函数以概率1等于统计自相关
- 若随机过程的均值与自相关均为遍历，则称为宽遍历随机过程
- 若随机过程的所有统计平均特性与其样函数对应的时间平均特性以概率1相等，则称为严遍历过程或狭义遍历过程
- 遍历过程一定是平稳过程，平稳过程不一定是遍历过程

3.6 维纳–辛钦定理

维纳–辛钦定理：平稳随机过程的自相关函数与功率谱密度函数互为傅氏变换

$$R_X(\tau) \Leftrightarrow P_X(f)$$

3.7 高斯过程

- **一维正态分布：** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
- **二维正态分布**

$$\boldsymbol{f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{\left(y-\mu_y\right)^2}{\sigma_y^2}\right)\right)}$$

- ***n*维正态分布**

$$f(\boldsymbol{X})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

$$\boldsymbol{\mu}=E\{\boldsymbol{X}\}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}=E\{(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^T\}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\right)$$

$$f(X)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)\right)$$

- 性质：
  - 广义平稳 $\Leftrightarrow$ 狭义平稳:二阶统计特性决定高阶统计特性
  - 各随机变量之间互不相关 $\Leftrightarrow$ 统计独立：指数分布特征
    - 相关：线性关系$\sum_n c_n x_n=0$；独立：任何关系$p(xy)=p(x)p(y)$；
- 概率积分函数：$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$
- 误差函数:$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz=2\Phi(\sqrt{2}x)-1$
- 互补误差函数：$\mathrm{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-z^2}dz=1-\mathrm{erf}(x)=2-2\Phi(\sqrt{2}x)$
- Q函数(尾函数)：$Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=1-\Phi(x)=\Phi(-x)$

3.8 平稳随机过程通过线性系统(1)

$$x(t) \xrightarrow{X(f)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{Y(f)=X(f)H(f)} y(t)=x(t)*h(t)$$

- 输出随机过程的均值

$$E\left[Y(t)\right]=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}X(t-\tau)h(\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{\infty}E\left[X(t-\tau)\right]h(\tau)d\tau$$

$$=m_X\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)d\tau=m_X H(0)$$

$$m_Y=E\{x(t)\otimes h(t)\}=m_X\otimes h(t)$$

- 输出随机过程的自相关函数

$$R_Y(t,t+\tau)=E\left[Y(t)Y(t+\tau)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau+u-v)h(u)h(v)dudv=R_Y(\tau)$$

平稳

$$R_Y(\tau)=y(-\tau)\otimes y(\tau)=x(-\tau)\otimes h(-\tau)\otimes x(\tau)\otimes h(\tau)$$

$$=R_X(\tau)\otimes h(-\tau)\otimes h(\tau)$$

3.8 平稳随机过程通过线性系统(2)

- **$X(t)$和$Y(t)$的互相关函数与互功率谱密度**

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\{X(t_1)Y(t_2)\}$$

$$=E\left\{X(t_1)\int h(u)X(t_2-u)du\right\}$$

$$=\int h(u)E\{X(t_1)X(t_2-u)\}du$$

$$=\int R_X(\tau-u)h(u)du$$

$$=R_X(\tau)\otimes h(u)$$

$$P_{XY}(\tau)=P_X(f)H(f)$$

$$R_{XY}(\tau)=x(-\tau)\otimes y(\tau)=x(-\tau)\otimes x(\tau)\otimes h(\tau)=R_X(\tau)\otimes h(\tau)$$

3.8 平稳随机过程通过线性系统(3)

例：实平稳过程$X(t)$的自相关函数为$R_X(\tau)$，求$X(t)$与$\hat{X}(t)$的相关函数

$$\hat{X}(t) = X(t) * h(t) \qquad h(t) = \frac{1}{\pi t} \text{ 为奇函数}$$

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = E\{X(t)\int h(u)x(t+\tau-u)\mathrm{d}u\} = \int h(u)R_X(\tau-u)\mathrm{d}u = \hat{R}_X(\tau)$$

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = X(-\tau) * \hat{X}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) = \hat{R}_X(\tau)$$ —— 奇函数

$$R_{\hat{X}X}(\tau) = R_{X\hat{X}}(-\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$$ —— 奇函数

$X(t)$为正态随机过程 $\xrightarrow{\text{线性变换}}$ $\hat{X}(t)$为正态随机过程

$X(t)$与$\hat{X}(t)$都为高斯过程

$X(t)$与$\hat{X}(t)$在同一时刻不相关

$\xrightarrow{\text{高斯}}$ 独立

3.8 平稳随机过程通过线性系统(4)

- 输出随机过程功率谱密度

$$R_Y(t, t+\tau) = R_Y(\tau)$$

$$P_Y(f) = \mathrm{F}\{h^*(-\tau) \otimes h(\tau) \otimes R_X(\tau)\}$$

$$= \mathrm{F}\{R_h(\tau) \otimes R_X(\tau)\}$$

$$= H^*(f)H(f)P_X(f)$$

$$= P_X(f)|H(f)|^2$$

- 如系统为希尔伯特变换，则

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) = R_{\hat{X}}(\tau)$$

$$P_Y(f) = P_X(f) = P_{\hat{X}}(f)$$

- 输入/输出信号间关系

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

$$r_{xy}(\tau) = x(-\tau) \otimes y(\tau)$$

$$= r_x(\tau) \otimes h(\tau)$$

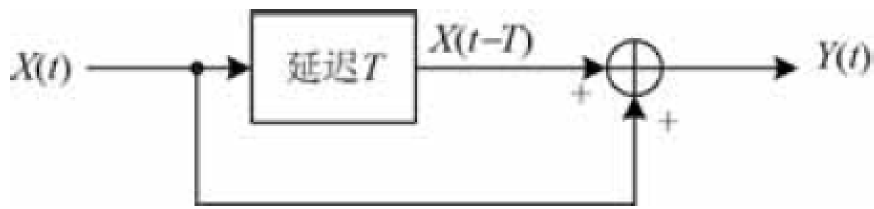
$$P_{xy}(f) = P_x(f)H(f)$$

$$r_y(\tau) = y(-\tau) \otimes y(\tau)$$

$$= r_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

$$P_y(f) = P_x(f)|H(f)|^2$$

下图中的$X(t)$是均值为零的平稳遍历随机过程，已知其自相关函数是$R_X(\tau)$。



(1)求$X(t)$、$Y(t)$的平均功率P_X及P_Y；

(2)写出$X(t)$、$Y(t)$的双边功率谱密度$P_X(f)$及$P_Y(f)$的计算公式；

3.9 高斯白噪声

- **定义：$n(t)$为0均值高斯随机过程，其功率谱密度为**

$$P_n(f)=\frac{N_0}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad R_n(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

- **性质**

(1) 若$X=\int_0^T n(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t$，$\phi(t)$为确定函数，则$X$为高斯随机变量，其数学期望为0，方差为$\sigma_X^2=\frac{N_0}{2}\int_0^T \phi^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{N_0}{2}E_\phi$

(2) 若 $X_1=\int_0^T n(t)\phi_1(t)\,\mathrm{d}t$, $X_2=\int_0^T n(t)\phi_2(t)\,dt$, $\phi_1(t),\phi_2(t)$为确定函数，则$\mathrm{E}\{X_1X_2\}=\frac{N_0}{2}\int_0^T \phi_1(t)\phi_2(t)\,dt$

(3) 限带高斯白噪声的功率谱为 $P_n(f)=\frac{N_0}{2}\mathrm{Rect}\left(\frac{f}{2f_H}\right)$, 其相关函数为$R_n(\tau)=N_0f_H\mathrm{Sa}(2\pi f_H\tau)=N_0f_H\mathrm{sinc}(2f_H\tau)$

因$R_n\left(\frac{k}{2f_H}\right)=N_0f_H\mathrm{Sa}(k\pi)=0, k\in Z$,故$n(t)$与$n\left(t+\frac{k}{2f_H}\right)$不相关，从而统计独立

某系统输入为$x(t)$时，输出为 $y(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$.试求:

(1) 该系统的冲激响应 $h(t)$, 传递函数$H(f)$;

(2) 若输入为双边谱密度为$N_0/2$的白噪声，求系统输出噪声的功率谱密度$P(f)$与自相关函数$R(\tau)$。

三角公式

$$\begin{cases}\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \\ \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b\end{cases}$$

令：$a = \frac{u+v}{2}, b = \frac{u-v}{2}$,

即：$u = a + b, v = a - b$

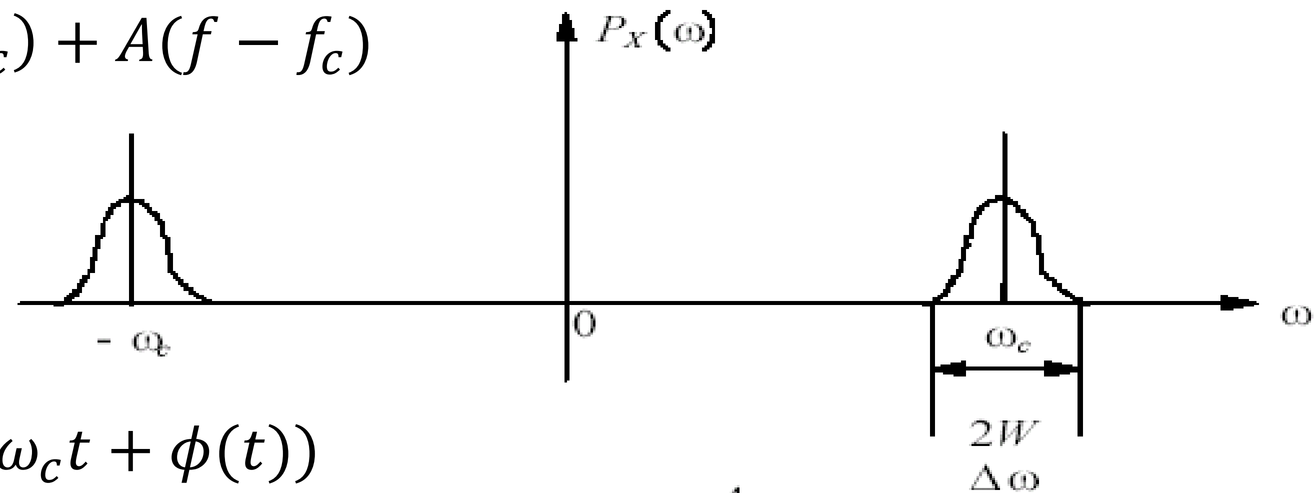
$$\begin{cases}\sin u = \sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} + \cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2} \\ \sin v = \sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} - \cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2} \\ \cos u = \cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} - \sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2} \\ \cos v = \cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} + \sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2a = 2\sin a \cos a \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \qquad = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \\ \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}\end{cases}$$

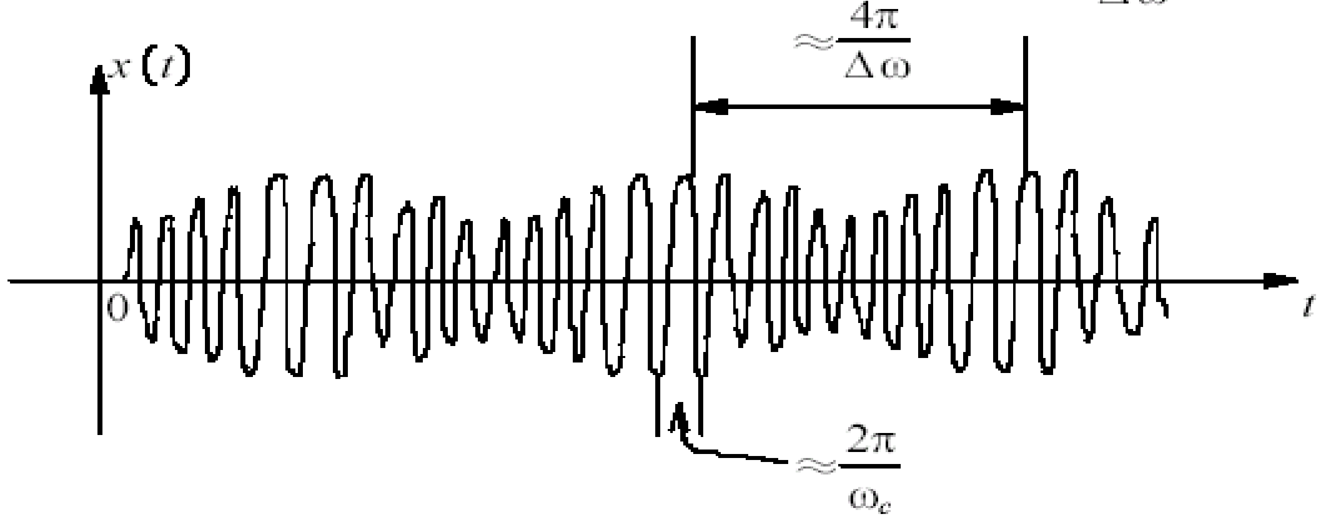
3.10.1 窄平稳随机过程

- 定义: 平稳过程$x(t)$的带宽远远小于其中心频率，即$\Delta f \ll f_c$

$$X(f) = A(f + f_c) + A(f - f_c)$$



$$x(t) = a(t)\cos(\omega_c t + \phi(t))$$



3.10.2 窄带平稳随机过程的表示

$$x(t) = a(t)\cos[\omega_c t + \phi(t)]$$

$$= x_c(t)\cos\omega_c t - x_s(t)\sin\omega_c t$$

$x_c(t) = a(t)\cos\phi(t)$:同相分量

$x_s(t) = a(t)\sin\phi(t)$:正交分量

$a(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}$: 包络

$\phi(t) = \mathrm{atan}\frac{x_s}{x_c}$: 相位

$x(t)$的等效低通表示:

$$x(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\} = x_c(t)\cos\omega_c t - x_s(t)\sin\omega_c t$$

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = [x_c(t) + jx_s(t)]e^{j\omega_c t} = x_L(t)e^{j\omega_c t}$$

$$x_L(t) = z(t)e^{-j\omega_c t} = x_c(t) + jx_s(t) = a(t)e^{j\phi(t)}$$

3.10.3 $Z(t)$, $X_L(t)$的自相关与功率谱

- $Z(t)$的自相关函数和功率谱密度

$$R_Z(\tau) = 2\left[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)\right] \Longleftarrow Z(t) = X(t) + j\hat{X}(t)$$

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_{\hat{X}}(\tau) + j[R_{X\hat{X}}(\tau) - R_{\hat{X}X}(\tau)]$$

$$\Updownarrow$$

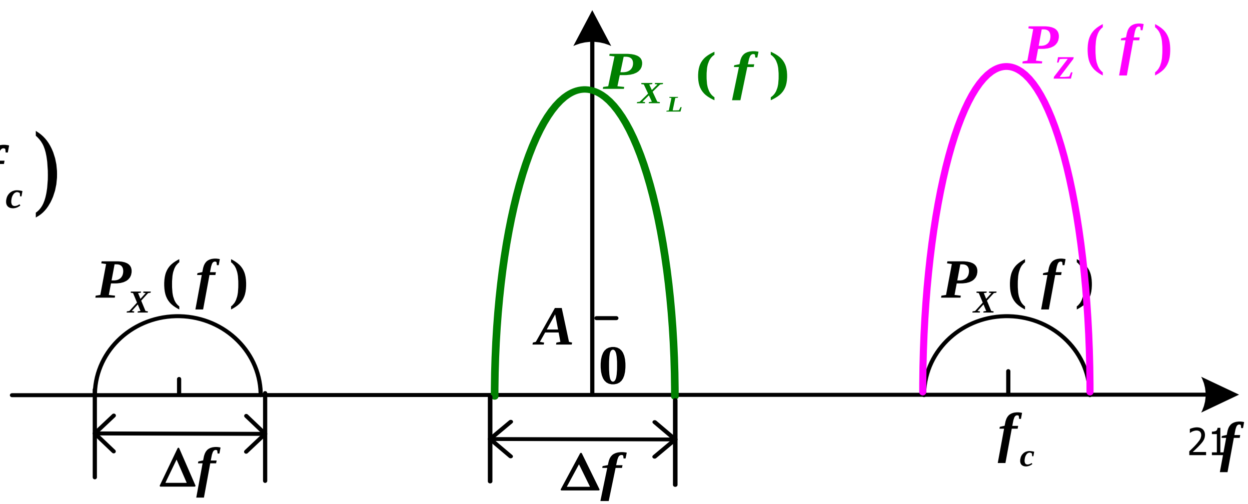
$$P_Z(f) = 4P_X(f)u(f)$$

- $X_L(t)$的自相关函数和功率谱密度

$$R_{X_L}(\tau) = R_Z(\tau)e^{-j2\pi f_c \tau} \Longleftarrow Z(t) = X_L(t)e^{j2\pi f_c t}$$

$$\Updownarrow$$

$$P_{X_L}(f) = P_Z(f + f_c)$$



3.10.4 $X_c(t)$和$X_s(t)$的性质(1)

$$\begin{cases} X(t) = X_c(t)\cos\omega_c t - X_s(t)\sin\omega_c t \\ \hat{X}(t) = X_s(t)\cos\omega_c t + X_c(t)\sin\omega_c t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X_c(t) = X(t)\cos\omega_c t + \hat{X}(t)\sin\omega_c t \\ X_s(t) = \hat{X}(t)\cos\omega_c t - X(t)\sin\omega_c t \end{cases}$$

(1) 若$E\{X(t)\} = 0$，有$E\{\hat{X}(t)\} = 0$，则有$E\{X_c(t)\} = E\{X_s(t)\} = 0$

(2) 若$X(t)$是高斯过程，则$\hat{X}(t), X_c(t), X_s(t)$也是高斯过程

(3) 若$X(t)$是宽平稳过程，则$X_c(t), X_s(t)$为宽平稳过程

$$R_{X_c}(t, t+\tau) = E\{X_c^*(t)X_c(t+\tau)\}$$

$$= E\{[X(t)\cos\omega_c t + \hat{X}(t)\sin\omega_c t][X(t+\tau)\cos\omega_c(t+\tau) + \hat{X}(t+\tau)\sin\omega_c(t+\tau)]\}$$

$$= R_X(\tau)\cos\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau) + R_{\hat{X}}(\tau)\sin\omega_c t\sin\omega_c(t+\tau)$$

$$+R_{X\hat{X}}(\tau)\cos\omega_c t\sin\omega_c(t+\tau) + R_{\hat{X}X}(\tau)\sin\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau)$$

$$= R_X(\tau)\cos\omega_c\tau + \hat{R}_X(\tau)\sin\omega_c\tau$$

$$= R_{X_c}(\tau)$$

$$R_{X_s}(t, t+\tau) = E\{X_s^*(t)X_s(t+\tau)\} = R_X(\tau)\cos\omega_c\tau + \hat{R}_X(\tau)\sin\omega_c\tau = R_{X_c}(\tau)$$

3.10.4 $X_c(t)$和$X_s(t)$的性质(2)

$$\begin{cases} X_c(t) = X(t)\cos\omega_c t + \hat{X}(t)\sin\omega_c t \\ X_s(t) = \hat{X}(t)\cos\omega_c t - X(t)\sin\omega_c t \end{cases}$$

(4) 若$X(t)$是宽平稳过程，则$X_c(t), X_s(t)$为联合宽平稳过程

$$R_{X_cX_s}(t,t+\tau) = E\{X_c^*(t)X_s(t+\tau)\}$$

$$= R_X(\tau)\sin\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau) - R_{\hat{X}}(\tau)\cos\omega_c t\sin\omega_c(t+\tau)$$

$$+R_{X\hat{X}}(\tau)\cos\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau) + R_{\hat{X}X}(\tau)\sin\omega_c t\sin\omega_c(t+\tau)$$

$$= \hat{R}_X(\tau)\sin\omega_c\tau - R_X(\tau)\cos\omega_c\tau$$

$$= R_{X_cX_s}(\tau)$$

$$\boxed{R_{X_s}(\tau) = R_X(\tau)\cos\omega_c\tau + \hat{R}_X(\tau)\sin\omega_c\tau = R_{X_c}(\tau)}$$

(5) $R_{X_c}(0) = R_{X_s}(0) = R_X(0) = \sigma_X^2$

(6) $R_{X_cX_s}(0) = -R_{X_sX_c}(0) = \hat{R}_X(0) = 0$, 因为$\hat{R}_X(\tau)$是奇函数

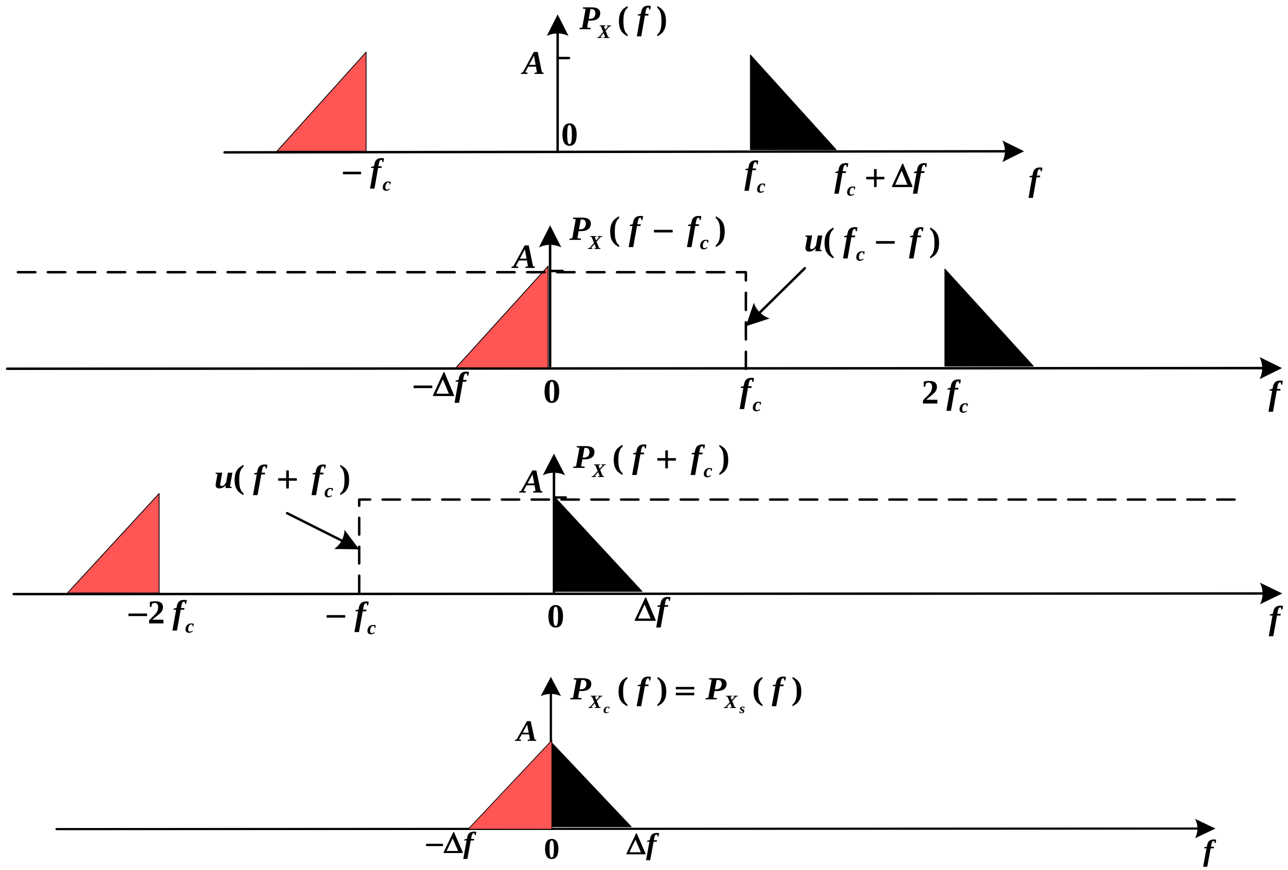
(7) 因为$R_{X_c}(\tau) = R_{X_s}(\tau)$, 所以有$P_{X_c}(f) = P_{X_s}(f)$

3.10.4 $X_c(t)$和$X_s(t)$的性质(3)

(8) $R_{X_c}(\tau) = R_{X_s}(\tau) = R_X(\tau)\cos\omega_c\tau + \hat{R}_X(\tau)\sin\omega_c\tau$

$$P_{X_c}(f) = [P_X(f)u(-f)] * \delta(f - f_c) + [P_X(f)u(f)] * \delta(f + f_c)$$

$$= P_X(f - f_c)u(f_c - f) + P_X(f + f_c)u(f + f_c)$$



3.10.4 $X_c(t)$和$X_s(t)$的性质(4)

- 对于能量或功率严格限制在带内的信号，当$\Delta f < f_c$

$$P_{X_c}(f) = P_{X_s}(f) = \begin{cases} P_X(f - f_c) + P_X(f + f_c), & -f_c \le f \le f_c \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

- 对于非严格限频信号，$\Delta f \ll f_c$ 时，此公式近似成立。

- 当$P_X(f)$对称于f_c时 $\longrightarrow$ 等效基带过程为实过程

$$P_X(f) = \frac{1}{2}\left[P_{X_c}(f + f_c) + P_{X_c}(f - f_c)\right]$$

$$R_X(\tau) = R_{X_c}(\tau)\cos 2\pi f_c \tau = R_{X_s}(\tau)\cos 2\pi f_c \tau$$

3.10.5 $X_c(t)$和$X_s(t)$的联合概密

- $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 是 $i.i.d$ 高斯随机变量，同一时刻相互独立其联合概率密度为

$$p_{X_c X_s}(x_c, x_s) = p_{X_c}(x_c) p_{X_s}(x_s)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x_c^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x_s^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_c^2 + x_s^2}{2\sigma^2}\right)$$

3.10.6 $a(t)$和$\varphi(t)$的联合概密

$$X_c(t)=a(t)\cos\varphi(t)$$

$$X_s(t)=a(t)\sin\varphi(t)$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_c}{\partial a} & \frac{\partial x_s}{\partial a}\\ \frac{\partial x_c}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_s}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi(t) & \sin\varphi(t)\\ -a\sin\varphi(t) & a\cos\varphi(t)\end{vmatrix}=a$$

$$p_{X_cX_s}(x_c,x_s)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x_c^{\ 2}+x_s^{\ 2}}{2\sigma^2}\right)$$

$$p_{a\varphi}(a,\varphi)=p_{X_cX_s}\left[X_c(a,\varphi),X_s(a,\varphi)\right]|J|$$

$$=\frac{a}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right),\quad a\geq 0,0\leq\varphi\leq 2\pi$$

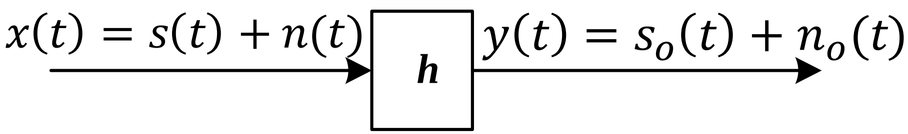
$$p_a(a)=\int_0^{2\pi}p_{a\varphi}(a,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=\frac{a}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right),a\geq 0$$ ← 瑞利分布

$$p_\varphi(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{a\varphi}(a,\varphi)\,\mathrm{d}a=\frac{1}{2\pi},0\leq\varphi\leq 2\pi$$ ← 均匀分布

$p_a(a)\,p_\varphi(\varphi)=p_{a\varphi}(a,\varphi)$, 同一时刻的 $a(t)$ 和 $\varphi(t)$ 独立

3.11 匹配滤波器 (1)

- **MF：某一特定时刻的输出信噪比最大的线性滤波器**
  - **滤波器输入：**$x(t) = s(t) + n(t)$



    - $s(t) \Leftrightarrow S(f)$
    - $n(f)$**为高斯白噪声，均值为零，双边功率谱密度**$N_0/2$.
  - **滤波器输出：**$y(t) = s_o(t) + n_o(t)$

    瞬时输出信号功率:$|s_o(t)|^2$; **输出噪声的统计平均功率:**$E\{n_o^2(t)\}$
    - $s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f$
    - $E\{n_o^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n_o}(f)\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}|H(f)|^2\mathrm{d}f$

输出信噪比 $\gamma_o = \frac{|s_o(t_0)|^2}{E\{n_o^2(t_0)\}} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft_0}\mathrm{d}f\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}|H(f)|^2\mathrm{d}f}$

3.11 匹配滤波器(2)

- 许瓦兹不等式：

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y(f)df\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty}|Y(f)|^2 df$$

$X(f)=KY^*(f)$时，等号成立。K为常数

$$r_o = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft}df\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 df} \le \frac{\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 df}$$

$$\le \frac{\int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2 df}{N_0/2} = \frac{2E}{N_o}, \qquad E = \int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2 df$$

$\therefore \quad r_{o_{\max}} = \dfrac{2E}{N_0}$，此时有$H(f)=KS^*(f)e^{-j2\pi ft_0}$ ~匹配滤波器

3.11 匹配滤波器(3)

- 结论：在白噪声干扰的背景下，当滤波器的传输特性与输入信号频谱的复共轭相一致时，将能在给定时刻 t_0 获得最大输出信噪比 $2E/N_0$。这种最大信噪比意义下的最佳线性滤波器被称为匹配滤波器。

$$H(f) = KS^*(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

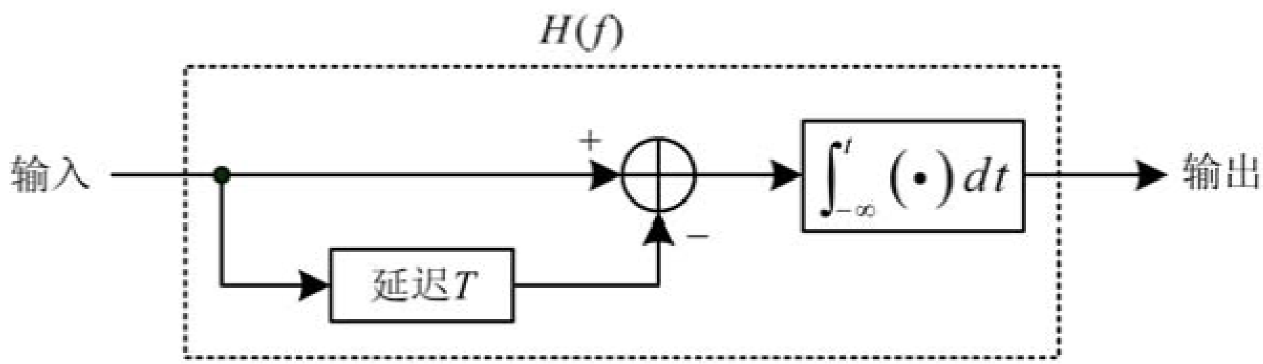
$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi f t} df = Ks(t_0 - t)$$

滤波器的物理可实现条件：$t < 0$时，要求$h(t) = 0$，即

$$s(t_0 - t) = 0 \quad for \quad t < 0 \quad \Longrightarrow \quad s(t) = 0, \quad t > t_0.$$

假设$s(t)$ 在 t_1瞬间消失，则$t_0 \geq t_1$，通常取$t_0 = t_1$。

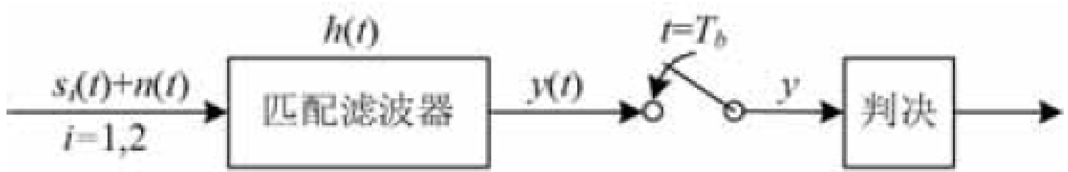
二.（12 分）已知下图所示的系统是在加性白高斯噪声干扰条件下，对某个脉冲 $g(t)$ 匹配的匹配滤波器。



(1)请写出该匹配滤波器的冲激响应 $h(t)$ 及传递函数 $H(f)$ 的表达式；

(2)假设 $g(t)$ 在 $(0,T)$ 之外为 0，请写出脉冲 $g(t)$ 的表达式并画出波形。

七、（14 分）在下图中，二进制确定信号 $s_i(t), i=1,2$ 在信道传输中受到双边功率谱密度为 $N_0/2$ 的加性白高斯噪声 $n(t)$ 的干扰。今用冲激响应为 $h(t)$ 的匹配滤波器进行最佳解调。设 $s_1(t)$ 与 $s_2(t)$ 等概出现，E_b 为平均每个比特的信号能量，y 表示在最佳抽样时刻对 $y(t)$ 进行采样得到的抽样值 $y(T_b)$



$$s_1(t)=\begin{cases} A & 0\le t\le T_b \\ 0 & \text{其它}t \end{cases} \qquad s_2(t)=-s_1(t)$$

(a)证明 y 中信号分量的瞬时功率是 E_b^2；

(b)证明 y 中噪声分量的平均功率是 $\dfrac{N_0E_b}{2}$；

(c)若发送 $s_2(t)$，请写出 y 的条件概率密度函数 $p(y\,|\,s_2)$ 表达式。

3.12 循环平稳随机过程

- 定义：若随机过程的**统计平均**和**自相关函数**是时间的**周期函数**，则称为周期平稳随机过程或循环平稳随机过程。
- 随机过程：$X(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n g(t-nT)$，$\{a_n\}$ 是随机序列，$g(t)$为码元波形，若
  - $m_a=E\{a_n\}$为常数；
  - a_n的自相关函数$R_a(n,n+k)=E\{a_n^* a_{n+k}\}=R_a(k)$

  则$X(t)$ **为周期平稳过程**

$$E\{X(t)\}=E\{\sum_n a_n g(t-nT)\}=m_a\sum_n g(t-nT)$$:周期函数

$$R_X(t,t+\tau)=\sum_n\sum_m E\{a_n^* a_m\}g^*(t-nT)g(t+\tau-mT)$$

$$=\sum_n\sum_m R_a(m-n)\,g^*(t-nT)g(t+\tau-mT)$$

$$=R_X(t+kT,t+\tau+kT)$$:周期函数

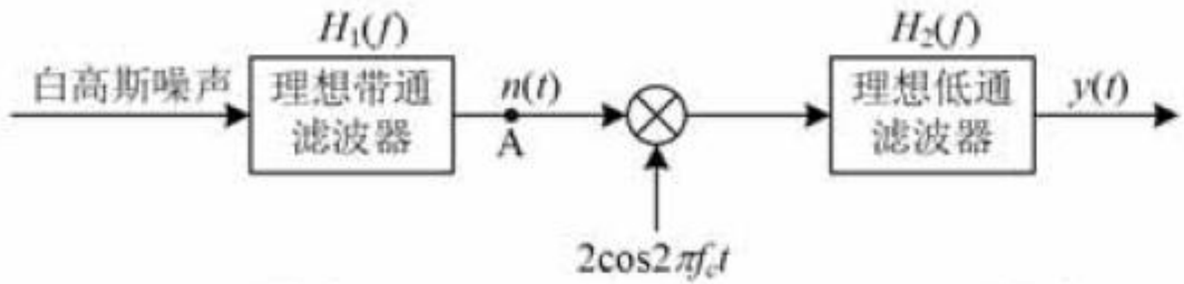
3.13 循环平稳随机过程的功率谱

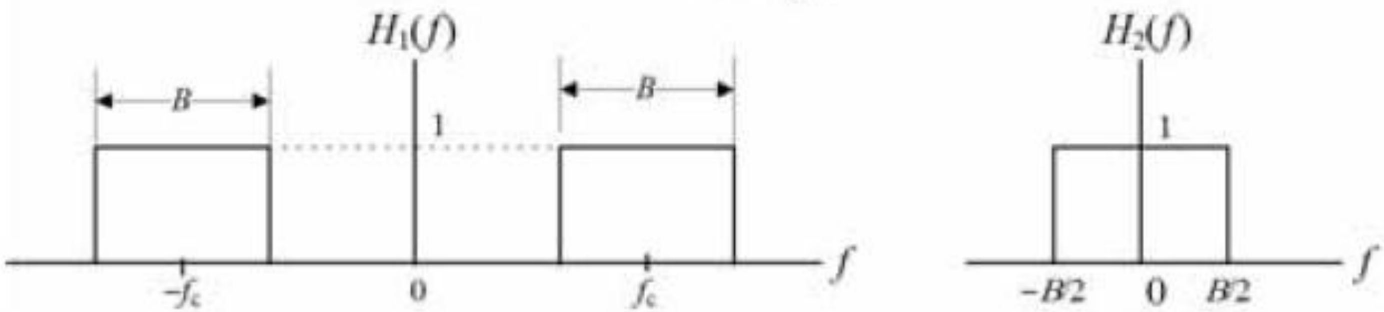
$$\overline{R_X(t,t+\tau)} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R_X(t,t+\tau)\mathrm{d}t = \bar{R}_X(\tau)$$

$$P_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_X(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$$

将功率谱密度为低通型的平稳过程 $X(t)$ 与正弦载波 $\sin(2\pi f_c t+\varphi)$ 相乘，得到 $Y(t)=X(t)\sin(2\pi f_c t+\varphi)$，若相位 φ 是在 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量，且与 $X(t)$ 统计独立，则 $Y(t)$ 是__①__随机过程；若 φ 是常数，则 $Y(t)$ 是__②__随机过程。

、（14 分）双边功率谱密度为 $N_0/2$ 的白高斯噪声通过带宽为B的理想带通滤波器，并经相干解调器的相乘、低通后，得到输出为 $y(t)$。





(a)请写出图中A点噪声 $n(t)$ 的数学表示式，并画出 $n(t)$ 的双边功率谱密度 $P_n(f)$ 图；

(b)请写出图中 $y(t)$ 的表示式，并画出 $y(t)$ 的双边功率谱密度图；

作业：1、2、5、6、7、8