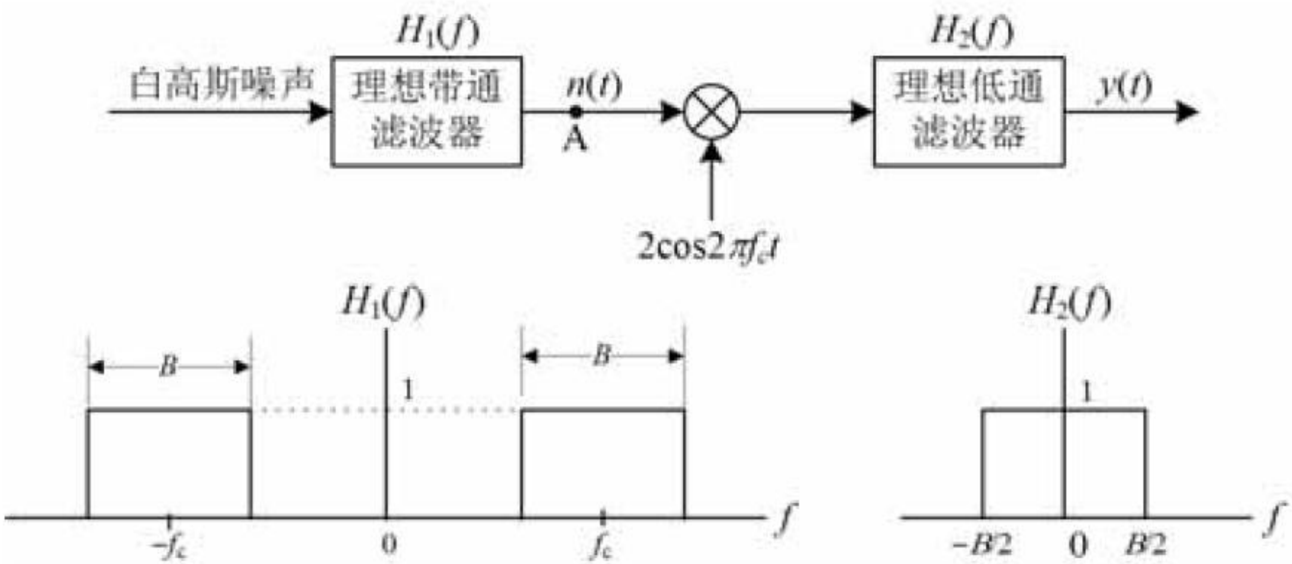
第四章例题与答案

信息与通信工程学院
无线信号处理与网络实验室(WSPN)
智能计算与通信研究组（IC2 ）
彭岳星
yxpeng@bupt.edu.cn
6119 8066 ext.2

四、（14 分）双边功率谱密度为 $N_0/2$ 的白高斯噪声通过带宽为B的理想带通滤波器，并经相干解调器的相乘、低通后，得到输出为 $y(t)$。



(a)请写出图中A点噪声 $n(t)$ 的数学表示式，并画出 $n(t)$ 的双边功率谱密度 $P_n(f)$ 图；

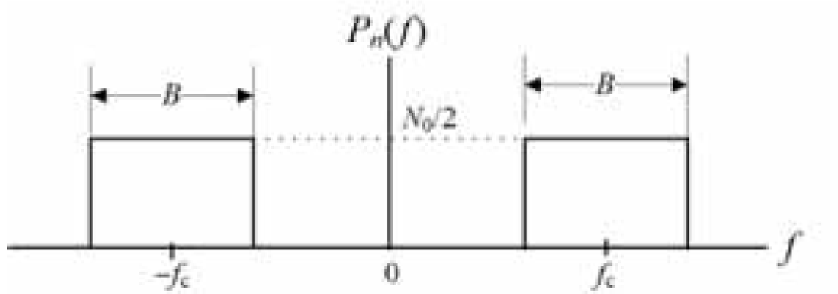
(b)请写出图中 $y(t)$ 的表示式，并画出 $y(t)$ 的双边功率谱密度图；

(c) 对 $y(t)$ 进行周期性采样，为得到互相统计独立的取样值序列 $\Lambda, y(t_1), y(t_2), \Lambda, y(t_n), \Lambda$，最大可能的抽样速率 f_s 是多少？给出此时 $y(t_1), y(t_2), \Lambda, y(t_n)$ 的联合概率密度函数。

(a)A 点噪声是窄带高斯噪声，可以表示为

$$n(t)=n_c(t)\cos 2\pi f_c t-n_s(t)\sin 2\pi f_c t$$

其功率谱密度图为



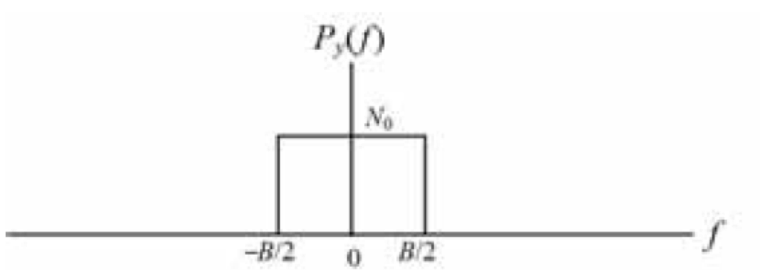
(b) $n(t)$ 与 $2\cos 2\pi f_c t$ 相乘后的结果是

$$\begin{aligned} n(t)\times 2\cos 2\pi f_c t &= \left[n_c(t)\cos 2\pi f_c t-n_s(t)\sin 2\pi f_c t\right]\times 2\cos 2\pi f_c t \\ &= n_c(t)(1+\cos 4\pi f_c t)-n_s(t)\sin 4\pi f_c t \end{aligned}$$

经 LPF 后

$$y(t)=n_c(t)$$

其功率谱密度图为



(c)对 $P_y(f)$ 做傅氏反变换可得 $y(t)$ 的自相关函数为

$$R_y(\tau)=N_0B\,\mathrm{sinc}(B\tau)$$

当抽样率为 f_s 时，两个抽样值 $y_k=y\left(t_0+\frac{k}{f_s}\right)$ 和 $y_{k'}=y\left(t_0+\frac{k'}{f_s}\right)$（$k\neq k'$）之间的互相关为 $R_{k,k'}=R_y\left(\frac{k-k'}{f_s}\right)=N_0B\,\mathrm{sinc}\left(\frac{B}{f_s}(k-k')\right)$，由sinc函数的特性可知，当抽样率为 $f_s=B$ 时，对任意 $k\neq k'$ 有 $R_{k,k'}=0$，再根据高斯分布的特性知此时取样值序列是统计独立的。当 f_s 大于B时，不可能对任意 $k\neq k'$ 都有 $R_{k,k'}=0$，故所求的最大可能抽样速率为 $f_s=B$。此时每个样值的均值为 0，方差为N_0B，$y(t_1),y(t_2),\Lambda\ ,y(t_n)$ 的联合概率密度函数为

$$f\left[y(t_1),y(t_2),\mathrm{L}\ ,y(t_n)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2(t_1)}{2\sigma^2}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2(t_2)}{2\sigma^2}}\times\mathrm{L}\ \times\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2(t_n)}{2\sigma^2}}$$

$$=(2\pi N_0B)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}y^2(t_i)}{2N_0B}\right)$$

五、（12 分）已知某调频信号中，模拟基带信号 $m(t)=a\cos 2\pi f_m t$ ， $f_m=1\mathrm{kHz}$ ，载波信号是 $c(t)=8\cos 2\pi f_c t$ ， $f_c=10\,\mathrm{MHz}$ 。

(*a*)若调频器的频率偏移常数 $K_f=10\,\mathrm{kHz/V}$ ，调制信号 $m(t)$ 的幅度 $a=0.5\,\mathrm{V}$ ，请求出该调频信号的调制指数 β ，写出表达式 $s_{FM}(t)$，并求出其带宽 B_c 。

(b)若其它条件同(*a*)，但 $m(t)$ 的幅度变成 $a=1\mathrm{V}$ ，请重复题(*a*) (a)最大频偏为

$$\Delta f = aK_f = 5\text{kHz}$$

调制指数为

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = 5$$

调频信号的表达式为

$$s_{\text{FM}}(t) = 8\cos\left(2\pi f_c t + 5\sin 2\pi f_m t\right)$$

带宽为

$$B_c \approx 2\left(1+\beta_f\right)f_m = 12\text{kHz}$$

(b) a增加到 1V时，最大频偏增加到 10kHz，调制指数成为 10 ，调频信号的表达式变成 $s_{\text{FM}}(t) = 8\cos\left(2\pi f_c t + 10\sin 2\pi f_m t\right)$，带宽变成 $B_c \approx 2(1+10)\times 1 = 22\text{kHz}$。

三．（12 分）两个不包含直流分量的模拟基带信号$m_1(t)$、$m_2(t)$被同一射频信号同时发送，发送信号为$s(t)=m_1(t)\cos\omega_c t+m_2(t)\sin\omega_c t+K\cos\omega_c t$，其中载频$f_c$=10MHz，$K$是常数。已知$m_1(t)$与$m_2(t)$的傅氏频谱分别为$M_1(f)$及$M_2(f)$，它们的带宽分别为5kHz与10kHz。

(*a*)请计算 $s(t)$的带宽；

(*b*)请写出 $s(t)$的傅氏频谱表示式；

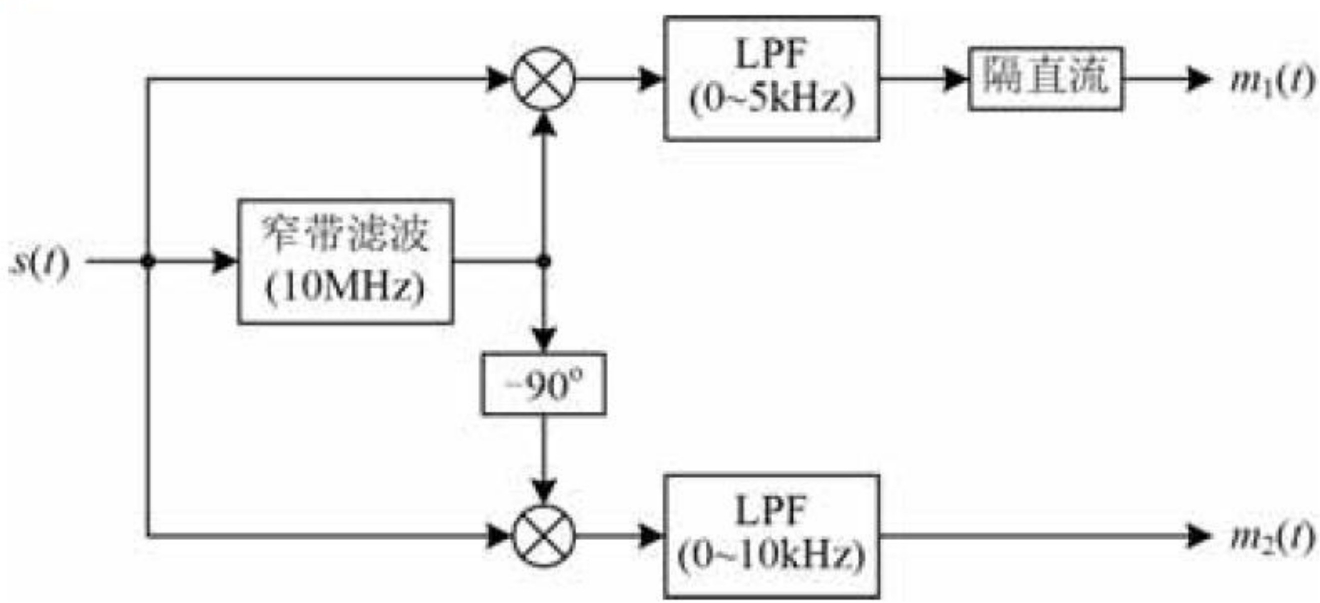
(*c*)画出从$s(t)$得到$m_1(t)$及$m_2(t)$的解调框图。

(a) $s(t)$ 由两个DSB及一个单频组成，这两个DSB的中心频率相同，带宽分别是 10kHz和20kHz，因此总带宽是 20kHz；

(b) $s(t)$的傅氏变换为：

$$\frac{M_1(f+f_c)+M_1(f-f_c)}{2}+\frac{jM_2(f+f_c)-jM_2(f-f_c)}{2}+\frac{K\delta(f+f_c)+K\delta(f-f_c)}{2}$$

(c)解调框图如下：

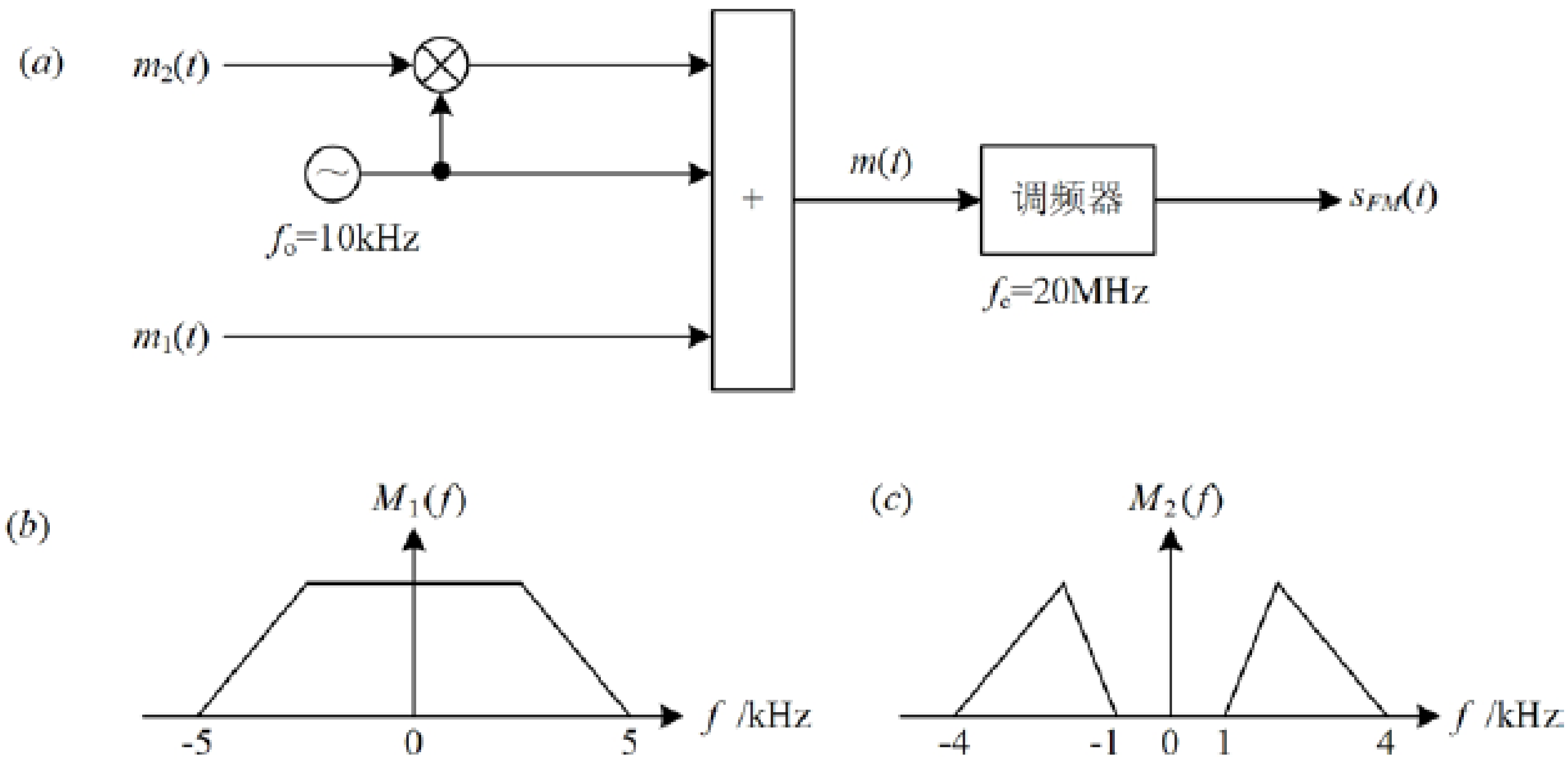


四．（12 分）将模拟基带信号 $m_1(t)$、$m_2(t)$ 按图(a)所示框图进行复合调制，$m_1(t)$ 及 $m_2(t)$ 的傅氏频谱 $M_1(f)$ 及 $M_2(f)$ 如图(b)、(c)所示。

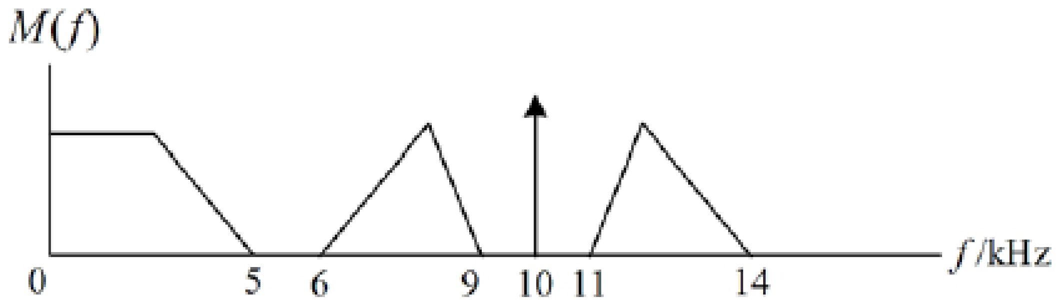
(1)画出图(a)中 $m(t)$ 的傅氏频谱 $M(f)$ 图；

(2)若调频器的调制指数 $\beta_f=14$，求调频信号的带宽；

(3)画出从 $s_{FM}(t)$ 信号中解调出 $m_1(t)$ 及 $m_2(t)$ 的框图。



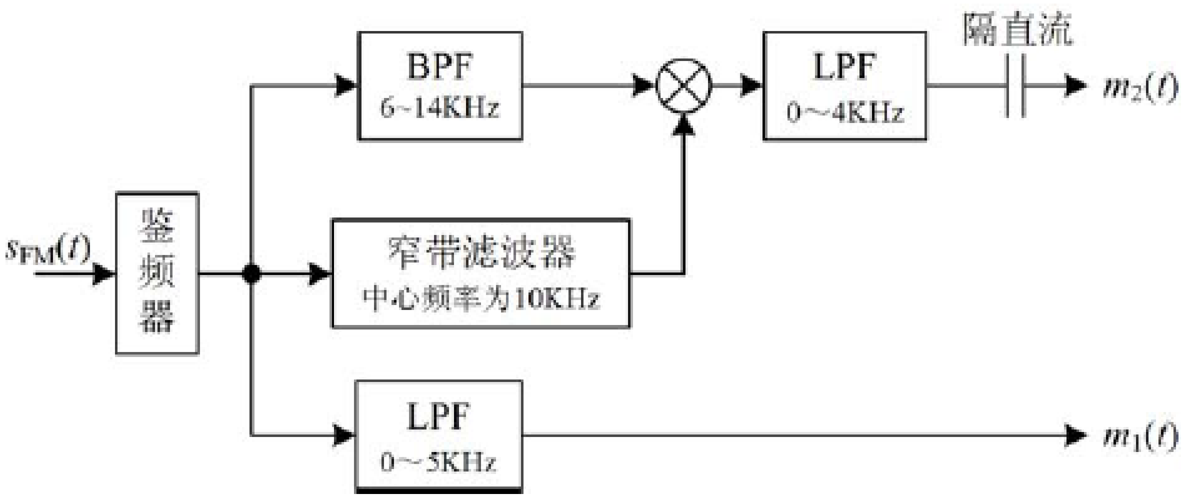
(1) $M(f)$ 图如下：



(2)用卡松公式可求得调频信号的带宽近似为

$$B=2\left(\beta_f+1\right)W=2\times15\times14\text{kHz}=420\text{kHz};$$

(3)从 $s_{FM}(t)$ 中解调 $m_1(t)$ 及 $m_2(t)$ 的框图如下：



四．（12 分）一角度调制信号 $s(t)=500\cos\left[2\pi f_c t+5\cos\left(2\pi f_m t\right)\right]$，其中 $f_m=1\text{kHz}$， $f_c=1\text{MHz}$。

(1)若已知 $s(t)$是调制信号为 $m(t)$的调相信号，其相位偏移常数（调相灵敏度） $K_p=5\text{rad/V}$，请写出调制信号 $m(t)$的表达式；

(2)若已知 $s(t)$是调制信号为 $m(t)$的调频信号，其频率偏移常数（调频灵敏度） $K_f=5000\text{Hz/V}$，请写出调制信号 $m(t)$的表达式；

(3)请写出 $s(t)$的近似带宽。

解：(1) $s(t)=500\cos\left[2\pi f_c t+5\cos(2\pi f_m t)\right]=500\cos\left[2\pi f_c t+K_p m(t)\right]$，因此

$$m(t)=\frac{5\cos(2\pi f_m t)}{K_p}=\cos(2\pi f_m t)$$

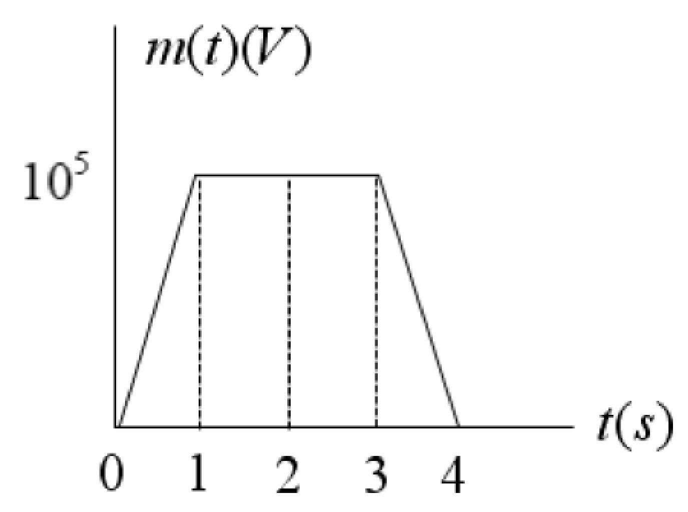
(2) $500\cos\left[2\pi f_c t+5\cos(2\pi f_m t)\right]=500\cos\left[2\pi f_c t+2\pi K_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)d\tau\right]$

$$\int_{-\infty}^{t}m(\tau)d\tau=\frac{5}{2\pi K_f}\cos(2\pi f_m t)$$

$$m(t)=-\frac{5\times 2\pi f_m}{2\pi K_f}\sin(2\pi f_m t)=-\sin(2\pi f_m t)$$

(3)12kHz

（1）消息 $m(t)$ 如图示，单位为 V。



（a）将 $m(t)$ 对频率为 10^6Hz 的载波进行频率调制，频率偏移常数为 $K_f = 5Hz/V$，则已调信号的最大瞬时频率是多少？

（b）将 $m(t)$ 对对频率为 10^6Hz 的载波进行相位调制，相位偏移常数为 $K_p = 3.1416rad/V$，则已调信号的最大瞬时频率是多少？最小瞬时频率是多少？

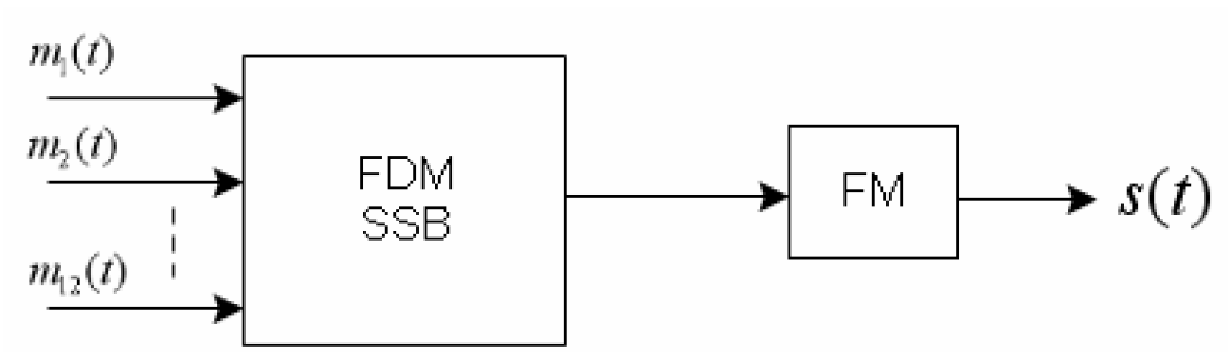
(1)

(a)已调信号的最大频偏是$5\times10^5\,\mathrm{Hz}=0.5\,\mathrm{MHz}$，因此最大瞬时频率是$1.5\,\mathrm{MHz}$。

(b)已调信号的角度是$\theta(t)=2\pi f_c t+K_p m(t)$，瞬时频率是$\frac{1}{2\pi}\times\frac{d\theta(t)}{dt}=f_c+\frac{K_p}{2\pi}\times\frac{dm(t)}{dt}$。由图可见，$m(t)$的最大斜率是$10^5$，因此最大瞬时频率是$10^6+\frac{3.1416}{2\pi}\times10^5=1.05\,\mathrm{MHz}$。

相应的，最小瞬时频率是$10^6-\frac{3.1416}{2\pi}\times10^5=0.95\,\mathrm{MHz}$。

（2）某 FDM/SSB 与 FM 的复合调制系统如下图所示，其中 $m_i(t)$ 为语音信号（$i=1,2,...,12$）。每一路语音信号平均功率相同，占用相同的频带范围 $0\sim W$。每一路语音信号分别对各自的副载波 $c_i(t)=A_i\cos 2\pi f_i t$ 进行上边带调幅，其中 $f_i=(i-1)W$，$1\le i\le 12$。再以所有上边带已调信号的总和 $m(t)$ 为调制信号，对频率为 f_c 的载波进行 FM 调制。接收端接收到的信号是 $r(t)=s(t)+n(t)$，其中 $n(t)$ 为加性白高斯噪声。接收端先进行 FM 解调，然后再对频分复用的上边带信号进行解调。为保证解调之后各路的信噪比相同，求第 12 路与第 1 路的副载波幅度之比 A_{12}/A_1。



(2)FM 解调输出的噪声功率谱是 kf^2。第 i 路 SSB 的频带范围是 $[f_i, f_i+W]=[(i-1)W, iW]$，此范围内噪声功率是

$$N_i=\int_{(i-1)W}^{iW} af^2 df=\frac{aW^3}{3}\left[i^3-(i-1)^3\right]=\frac{aW^3\left(3i^2-3i+1\right)}{3}$$

每路 SSB 信号的功率正比于副载波的幅度：$S_i=bA_i^2$。SSB 的输出信噪比等于输出信噪比，因此输出信噪比是 $\frac{3bA_i^2}{aW^3\left(3i^2-3i+1\right)}$。欲使各路输出的信噪比相同，必须 $\frac{A_i^2}{3i^2-3i+1}$ 是与 i 无关的常数，即 A_i^2 应正比于 $3i^2-3i+1$。因此第 i 路的幅度和第 1 路的比值是 $\frac{A_i}{A_1}=\sqrt{3i^2-3i+1}$。对于第 12 路，这个比值就是 $\sqrt{397}\approx 20$。