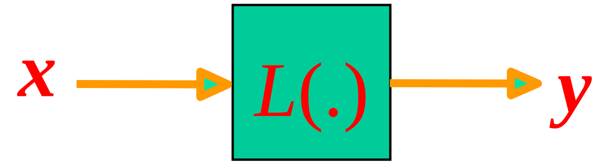
第二章 确定信号分析

信息与通信工程学院
无线信号处理与网络实验室(WSPN)
智能计算与通信研究组 (IC^2)
彭岳星
yxpeng@bupt.edu.cn
6119 8066 ext. 2

确定信号分析



- 周期信号的傅立叶级数分析
- 傅立叶变换
- 单位冲击函数的傅立叶变换
- 功率信号的傅立叶变换

信号分析：正交变换与分解—将复杂信号分解为简单信号

- 能量谱密度和功率谱密度
- 确定信号的相关函数
- 卷积
- 确定信号通过线性系统

信号间关系分析：相关分析—信号功率特征及相互关系

- 希尔伯特变换
- 频带信号带通系统

信号的等效分析：基带信号与频带信号的统一

线代回顾/矩阵论补充

- **行列式**
  - 线性变换后两个空间之间的度量比例关系
  - e.g.： $X = \{e_1, e_2\}; Y = \{f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 - e_2\}; J = \left|\frac{\partial X}{\partial Y}\right|$
- **线性相关/线性无关/最大无关组**
  - 独立的矢量：自由度/坐标系
  - 最大无关组不唯一：坐标系可不同，通过旋转/平移等操作
- **标准正交基的构造**
  - Gram-Schmitz正交化过程；
    - $\{a_1, \cdots, a_n\} \to \{e_1, \cdots, e_k\}$: $e_i = \frac{a_i - \sum_{j=1}^{i-1} <a_i, e_j> e_j}{|a_i - \sum_{j=1}^{i-1} <a_i, e_j> e_j|}$
  - 投影运算/正交分解
    - 分析：复杂信号用简单信号来正交组合
    - 傅立叶级数，
    - 傅立叶变换，小波变换，

线代回顾/矩阵论补充

- **矩阵**
  - 向量的集合
  - 特征值/特征向量
    - $Ax_i = \lambda_i x_i \rightarrow AX = X\Sigma \rightarrow A = X\Sigma X^H$
    - $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$; $\Sigma = diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = [\cdots \lambda_i e_i \cdots]$
    - $X^H = X^{-1}$：酉阵
  - 矩阵运算：$Ax = U\Sigma U^H x$
  - 矩阵秩：线性空间的维度
  - 解方程
    - $A^T x = 0$：$x \perp A_i$
    - $Ax = b: b = \sum_i x_i A_i$
- **完备的线性空间：子空间的直和**
  - $A = A_1 \oplus A_2$
    - $R(A) = R(A_1) + R(A_2)$
    - $a_1 \perp a_2, \forall a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$

2.1 周期信号的傅立叶级数分析

- 傅氏级数
  - $s(t)$是周期为T、且满足狄里赫利条件的周期信号，则有：

$$s(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_o t)+b_n\sin(n\omega_0 t)]$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\mathrm{d}t;\qquad a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\cos(n\omega_o t)\mathrm{d}t;$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\sin(n\omega_o t)\mathrm{d}t\;;\quad c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_o t}\mathrm{d}t$$

其中：

- 周期函数$s(t)$由许多不同幅度、频率和相位的正弦函数构成
  - 周期时间函数 ←→离散频谱
  - $\omega_0=2\pi/T$

注：狄里赫利条件：在一个周期内$s(t)$只有有限个第一类不连续点，且可将T分为有限个区间，每个区间内$s(t)$为单调函数。一般实际信号均满足此条件

2.2 非周期信号的傅立叶级数

$f(t)$为非周期信号，持续时间为T_1，将其以$T > T_1$为周期延拓为周期函数$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT)$

当$T \to \infty$时，$F(t) = f(t)$，即$\lim\limits_{T\to\infty} F(t) = f(t)$

令$F(t)$满足狄里赫利条件，展开为傅氏级数

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t') e^{-jn\omega_0 t'} \mathrm{d}t'\right] e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} \mathrm{d}t, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

当$T \to \infty$时，$\omega_0 \to d\omega, n\omega_0 \to \omega$，$\sum \to \int$，因此有

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j\omega t'} \mathrm{d}t'\, e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

2.3 傅立叶变换

- 表达式： $f(t) \Leftrightarrow F(f)$

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi ft} df$$

- 傅氏变换存在的充分条件
  - $f(t)$ 在无限区间内绝对可积 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$
  - 在每个有限区间内只有有限个极大值和极小值
  - 在每个有限区间内只有有限个不连续点

2.4 傅立叶变换的运算特性

	$g(t)$	$\Leftrightarrow$ $G(f)$
放大	$c \cdot g(t)$	$c \cdot G(f)$
叠加	$c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)$	$c_1 G_1(f) + c_2 G_2(f)$
复共轭	$g^*(t)$	$G^*(-f)$
标度换算	$g(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} G\left(\frac{f}{a}\right)$
时移	$g(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0} G(f)$
频移	$e^{j2\pi f_0 t} g(t)$	$G(f - f_0)$

2.4 傅氏变换的运算特性-(Cont’d)

- 调制： $g(t)\cos 2\pi f_0 t$ $\quad \frac{1}{2}[G(f+f_o)+G(f-f_0)]$
- 卷积： $g_1(t)\otimes g_2(t)$ $\quad G_1(f)G_2(f)$

  $g_1(t)g(t)$ $\quad G_1(f)\otimes G_2(f)$
- 对偶： $G(t)$ $\quad g(-f)$
- 微分： $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}g(t)$ $\quad (j2\pi f)^n G(f)$
- 积分： $\int_{-\infty}^{t} g(\tau)\mathrm{d}\tau$ $\quad \frac{G(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}G(0)\delta(f)$

2.5 单位冲激函数(δ函数)

- δ函数的定义：

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases} \quad 且\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1,\ \ \forall\varepsilon>0$$

- δ函数的频谱密度：

$$\Delta(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j2\pi ft}dt=1\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

- δ函数的物理意义：

一个高度为无穷大、宽度为无穷小、面积为1的脉冲。

2.5 单位冲激函数的性质——采样

$$f(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt$$

证: 因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

物理意义：可以看作是用δ函数在 $t=t_0$时刻对$f(t)$抽样。

因单位冲激函数是偶函数，即$\delta(t) = \delta(-t)$，故也可写成：

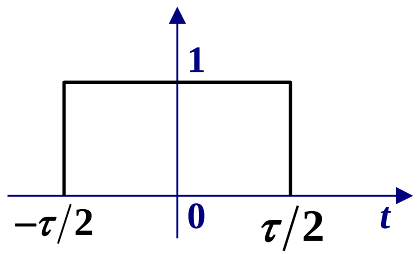
$$f(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t_0-t)dt$$

2.6 常用功率信号的傅立叶变换

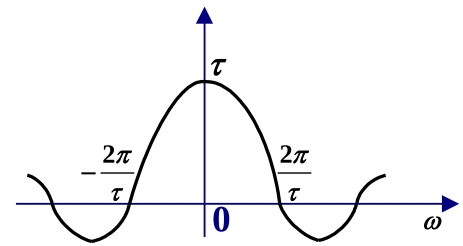
$f(t)$	$\Leftrightarrow$	$F(f)$
1		$\delta(f)$
$u(t)$		$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
$\mathrm{sgn}(t)$		$\frac{1}{j\pi f}$
任意周期信号 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j2\pi n f_0 t}$		$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(f-nf_0)$
$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$		$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_0),\quad f_0=1/T$

2.6 常用功率信号的傅立叶变换（续）

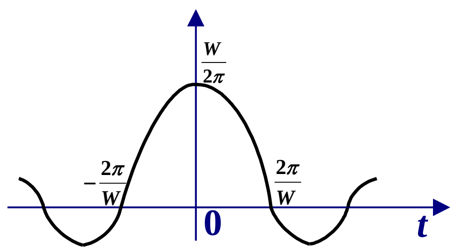
$$\mathrm{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$



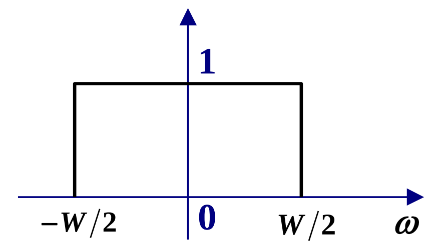
$$\tau \cdot \mathrm{sinc}(f\tau)$$



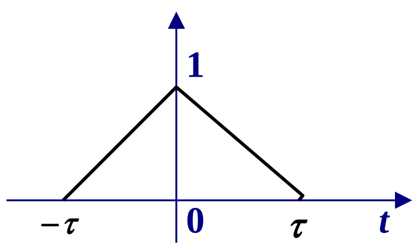
$$W \cdot \mathrm{sinc}(Wt)$$



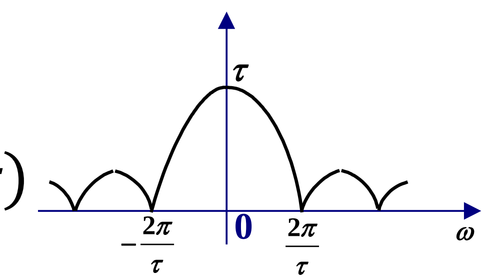
$$\mathrm{Rect}\left(\frac{f}{W}\right)$$



$$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$



$$\tau \cdot \mathrm{sinc}^2(f\tau)$$



2.7 能量信号的频谱密度

$f(t)$的能量：

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(f)\right|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} E(f)df$$ **：Parseval定理**

$$E(f) = \left|F(f)\right|^2$$ **：能量谱密度，双边谱密度**

$f(t)$是实函数，则$E(f)$是 偶函数, 可定义单边谱密度：

$$G(f) = \begin{cases} 2E(f) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

2.8 功率信号的功率谱密度

首先将信号$s(t)$截短为$s_T(t)$，$-T/2 < t < T/2$

$s_T(t)$是一个能量信号，可用傅里叶变换求出其能量谱密度 $|S_T(t)|^2$

由帕斯瓦尔定理有 $E = \int_{-T/2}^{T/2} s_T^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(f)|^2 df$

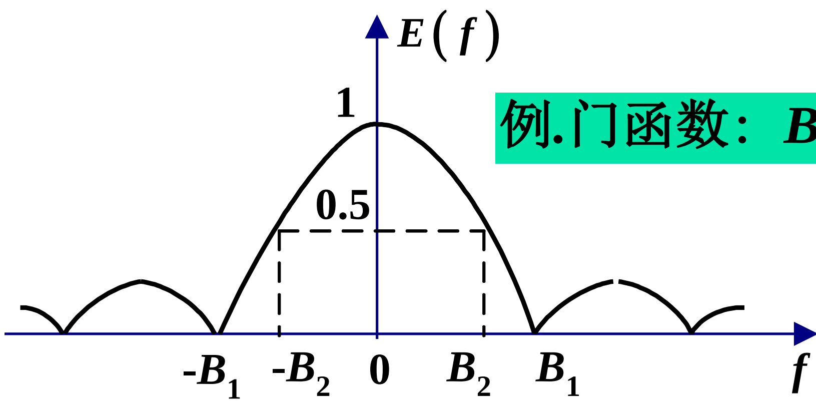
将 $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|S_T(f)|^2$ 定义为信号的功率谱密度$P(f)$，

即 $P(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|S_T(f)|^2$

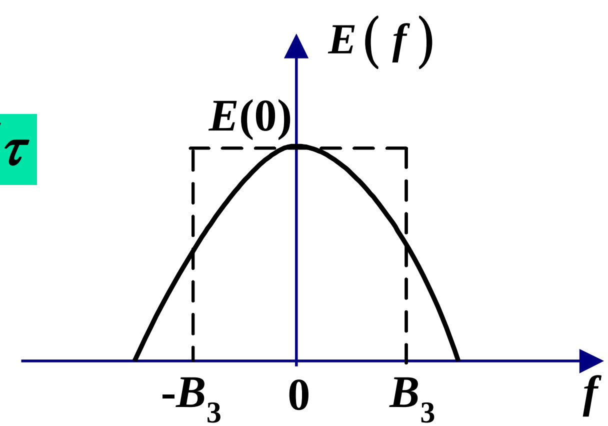
2.9 信号带宽

- **信号带宽：信号能量或功率主要部分集中的频率范围(正频率部分)--Hz**
- **定义方法**
  - 零点带宽(主瓣带宽)：B_1
  - 3dB(半功率点)带宽：B_2
  - 等效矩形带宽（等能量带宽）：B_3
  - 占总能量(功率)的百分比带宽

$$B_3 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} E(f)df}{2E(0)}$$



例.门函数：$B_1 = 1/\tau$



2.9 信号带宽 – IEEE 802.11a

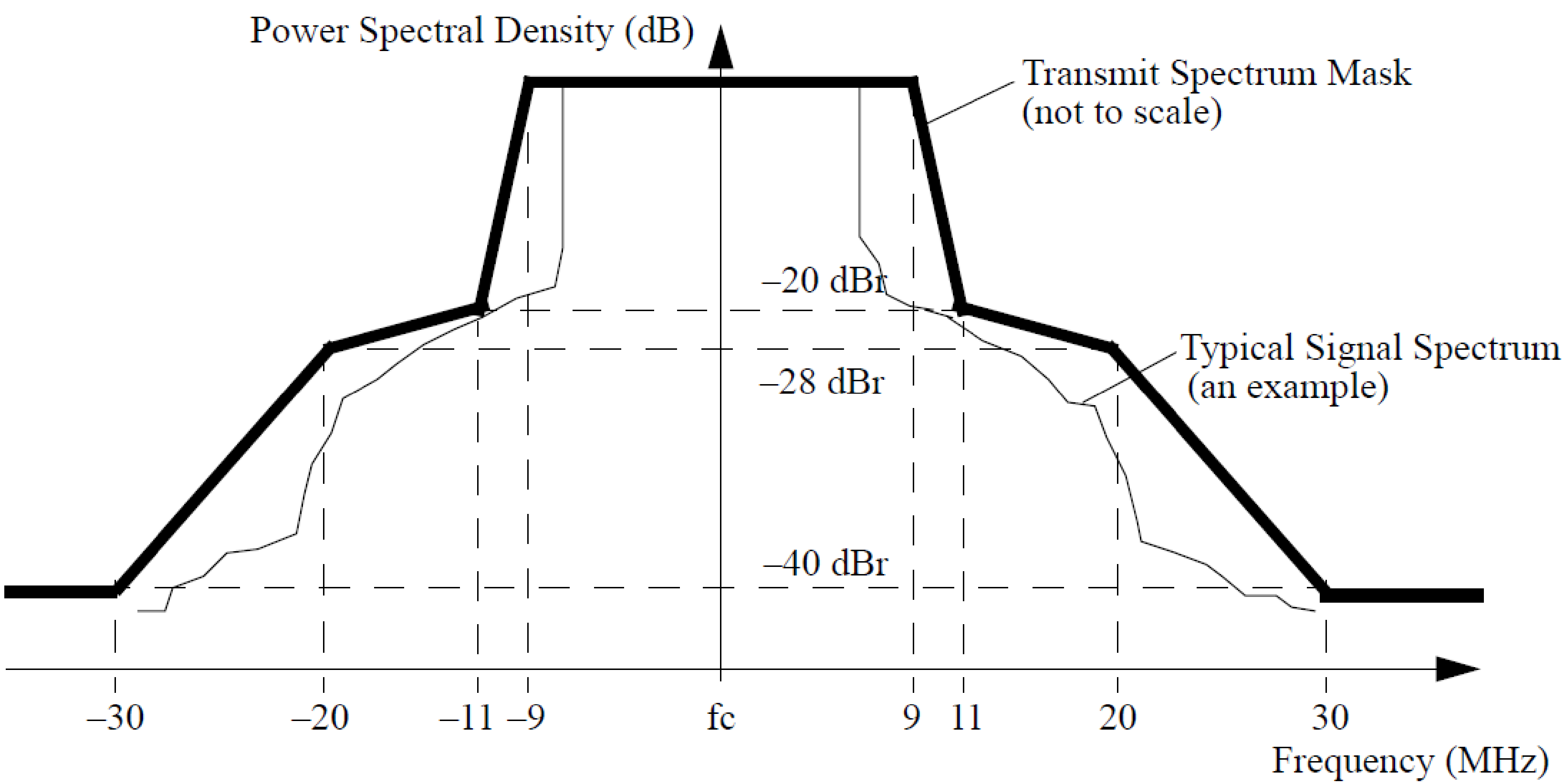


Figure 120—Transmit spectrum mask

2.10 相关 ⟷ 卷积

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t-\tau)y(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^*[-(\tau-t)]y(t)\mathrm{d}t$$

$$= x^*(-\tau) \otimes y(\tau)$$

2.11 确定性信号的相关函数

- 能量信号的自相关函数

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)f(t+\tau)dt$$

(1) $|R(\tau)|\le R(0)$

(2) $E=R(0)$

(3) $R(\tau)\leftrightarrow E(f)$

- 功率信号的自相关函数

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^*(t)f(t+\tau)dt$$

(1) $|R(\tau)|\le R(0)$

(2) $P=R(0)$

(3) $R(\tau)\leftrightarrow P(f)$

- 能量信号的互相关函数

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(t)f_2(t+\tau)dt$$

$$R_{12}(\tau)\leftrightarrow E_{12}(f)=F_1^*(f)F_2(f)$$

- 功率信号的互相关函数

$$R_{12}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_1^*(t)f_2(t+\tau)dt$$

$$R_{12}(\tau)\leftrightarrow P_{12}(f)$$

- 归一化相关函数：

$$r_{12}(\tau)=\frac{R_{12}(\tau)}{\sqrt{R_1(0)R_2(0)}}$$

2.11 相关函数与谱密度

- 能量信号自相关函数与其能量谱密度互为傅氏变换

$$R(\tau) \Leftrightarrow E(f) = |F(f)|^2$$

- 功率信号自相关函数与其功率谱密度互为傅氏变换

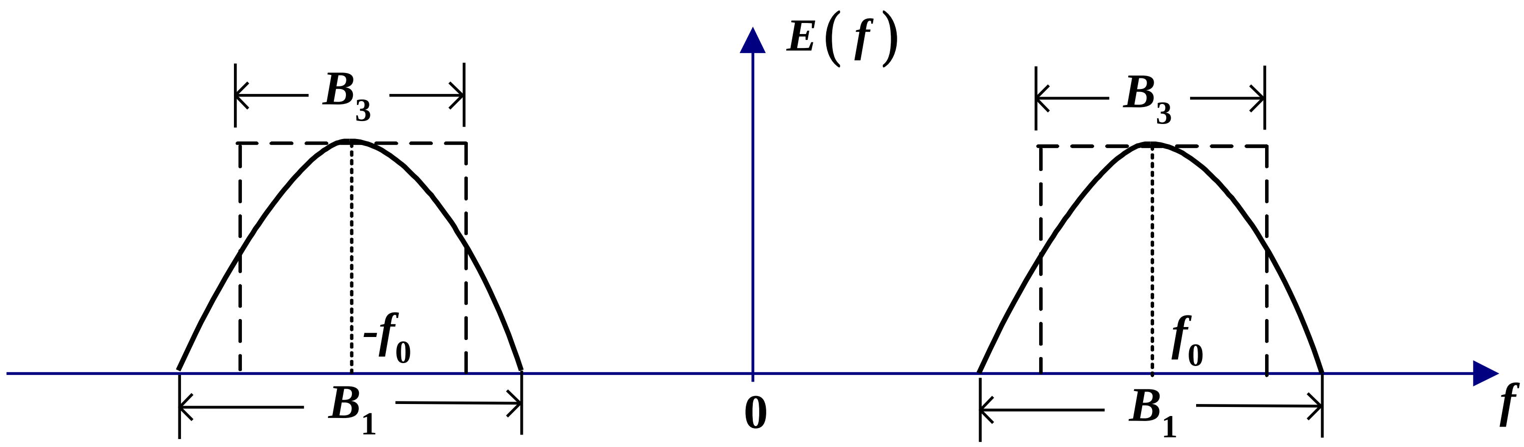
$$R(\tau) \Leftrightarrow P(f)$$

- 能量信号的互相关函数与互能量谱互为傅氏变换

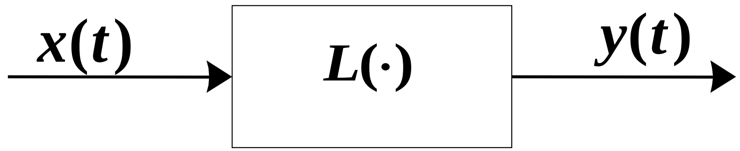
$$R_{12}(\tau) \Leftrightarrow E_{12}(f) = F_1^*(f)F_2(f)$$

2.12 基带信号与频带信号

- 基带信号：信号能量或功率集中在零频率附近
- 频带信号：信号能量或功率集中在某一载频附近



2.13 确定信号通过线性系统(1)



- **单入单出**

$$y(t) = L[x(t)]$$

- **线性：系统输入线性和的响应等于响应的线性和(叠加原理)**

$$y(t) = L[\sum_i c_i x_i(t)] = \sum_i c_i L[x_i(t)]$$

- **时不变性(恒参)**

$$L\{\delta(t)\} = h(t) \Rightarrow L\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau)$$

- **对于线性时不变系统**

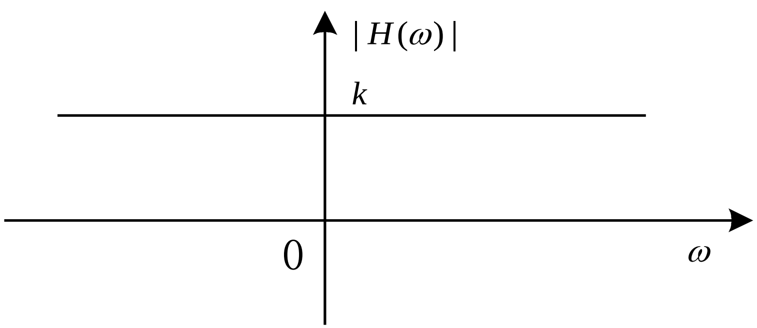
$$h(t) \leftrightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = |H(f)|e^{j\phi(f)}$$ —— **传递函数**

2.13 确定信号通过线性系统(2)

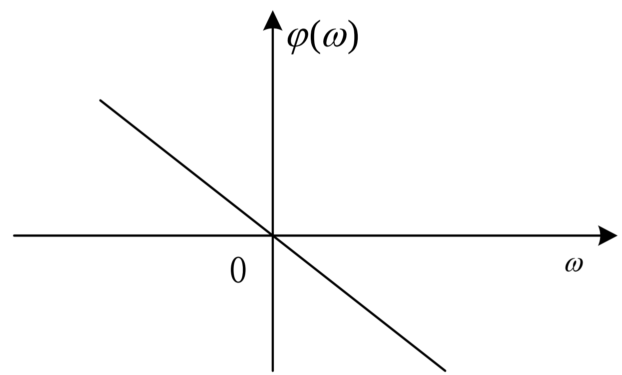
- **信号不失真条件——理想系统**

$$y(t) = k \cdot x(t-\tau) \Rightarrow \begin{cases} h(t) = k \cdot \delta(t-\tau) \\ H(f) = k \cdot e^{j2\pi f\tau} \end{cases}$$

- **幅频特性**



- **相频特性**

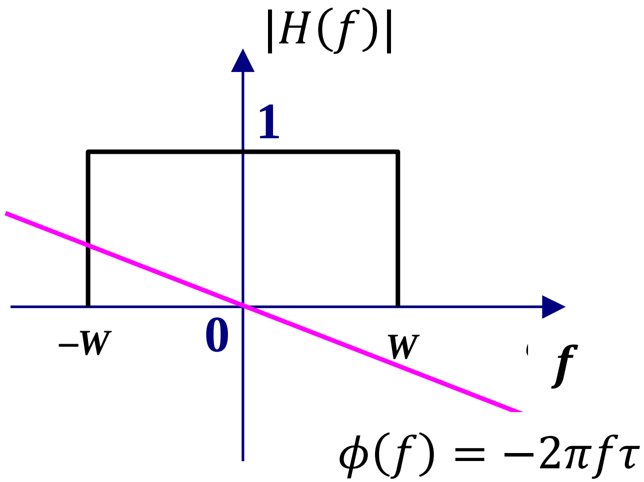


- **群时延特性：不同频率分量的到达时间**

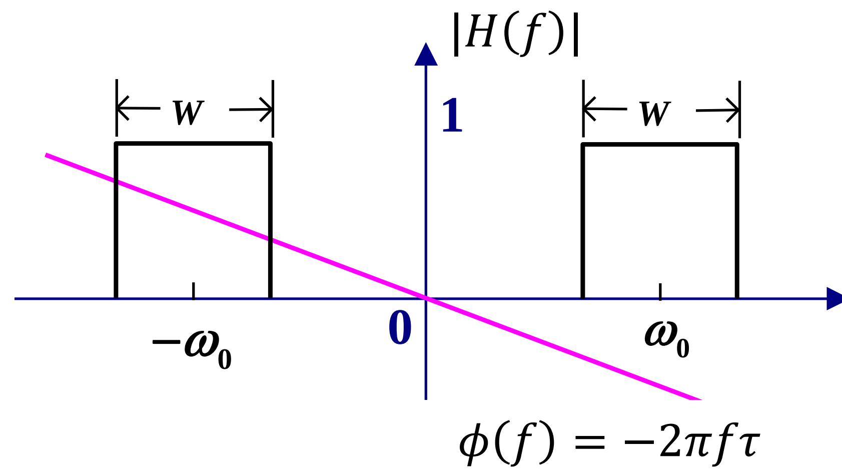
$$\tau(f) = -\frac{\mathrm{d}\phi(f)}{\mathrm{d}f} = \tau$$

2.13 确定信号通过线性系统(3)

- 理想低通滤波器LPF



- 理想带通滤波器BPF



$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{W}\right)e^{j2\pi f\tau}$$

$$h(t) = 2W\mathrm{Sinc}[2W(t-\tau)]$$

- 限带基带信号通过理想LPF不失真
- 限带频带信号通过理想BPF不失真

2.14 Hilbert变换

- **定义：若 $x(t)$为实函数**

$$\hat{x}(t)=H[x(t)]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau=\frac{1}{\pi t}\otimes x(t)$$

$$h(t)=\frac{1}{\pi t}\Leftrightarrow H(f)=-j\,\mathrm{sgn}(f)$$

$$x(t)=H^{-1}[\hat{x}(t)]=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{\pi t}\otimes\hat{x}(t)$$

- **性质**
  - **重变换：**$H\{H[x(t)]\}=-x(t)$
  - **等能量：**$\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}^2(t)\mathrm{d}t$
  - **正交性：**$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,\hat{x}(t)\mathrm{d}t=0$
  - **奇偶性：**$f(t)$ 是奇(偶)函数 $\rightarrow\hat{f}(t)$是偶(奇)函数
  - **三角函数：**$H[\cos\omega_c t]=\sin\omega_c t;\ H[\sin\omega_c t]=-\cos\omega_c t$
  - **调制函数：**$H[m(t)\cos\omega_c t]=m(t)\sin\omega_c t;\ H[m(t)\sin\omega_c t]=-m(t)\cos\omega_c t$

$$F\{H[\cos 2\pi f_c t]\}=\mathrm{sgn}(f)\frac{\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)}{2j}$$

$$=\frac{\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c)}{2j}$$

$$=F^{-1}\{\sin 2\pi f t\}$$

2.15.1 解析信号

- 实信号 $x(t)$的解析信号定义为

$$z(t) = x(t) + j\,\hat{x}(\mathrm{t})$$

1) $f(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\} = \frac{z(t)+z^*(t)}{2}$

2) if $x(t) \Leftrightarrow X(f), z(t) \Leftrightarrow Z(f)$, then

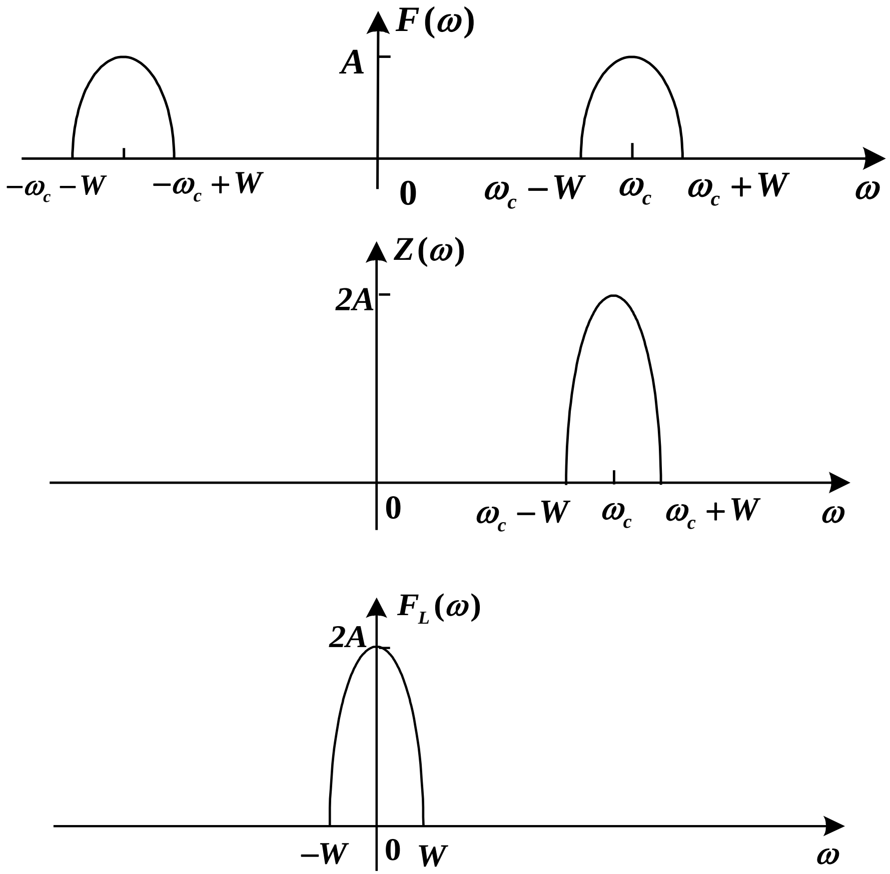
$$Z(f) = \begin{cases} 2X(f), f > 0 \\ 0, \quad\quad f < 0 \end{cases}$$

$$z(t) = 2\int_0^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} \mathrm{d}f$$

3) $F\{z^*(t)\} = \begin{cases} 0, \quad f > 0 \\ 2X(f), f < 0 \end{cases}$ 物理意义？

2.16 频带信号与带通系统(1)

- 频带信号：信号的频谱集中在某一频率附近(带通信号)
- 窄带信号：$f_c \gg 2W$



$$f(t) \Leftrightarrow F(f)$$

$$z(t) = f(t) + j\hat{f}(t)$$

$$Z(f) = 2F(f)u(f)$$

$$F_L(f) = Z(f + f_c)$$

$$f_L(t) = z(t)e^{-j2\pi f_c t}$$

$f(t)$的复包络

2.16 频带信号与带通系统(2)

频带信号$f(t)$的表示方法

- 解析信号： $z(t)=f(t)+j\hat{f}(t)$
- 等效低通信号：

$$f_L(t)=z(t)e^{-j\omega_c t}$$

$$=\left[f(t)\cos\omega_c t+\hat{f}(t)\sin\omega_c t\right]+j\left[\hat{f}(t)\cos\omega_c t+f(t)\sin\omega_c t\right]$$

$$=f_c(t)\ +jf_s(t)$$

- $f(t)=\mathrm{Re}\{z(t)\}=\mathrm{Re}\left\{f_L(t)e^{j\omega_c t}\right\}$ —— 表示法1

$$=f_c(t)\cos\omega_c t-f_s(t)\sin\omega_c t$$ —— 表示法2

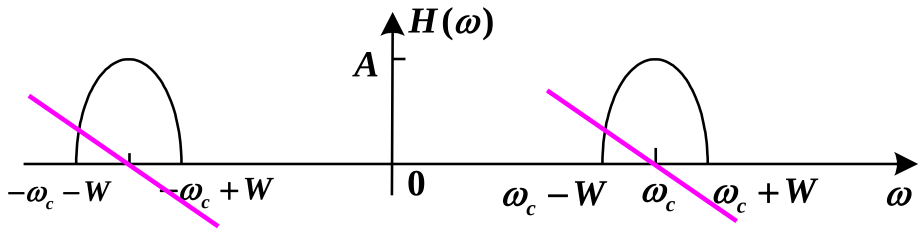
- 若$f_L(t)=a(t)e^{j\theta(t)}$

$f(t)=\mathrm{Re}\left\{f_L(t)e^{j\omega_c t}\right\}=a(t)\cos[\omega_c t+\theta(t)]$—— 表示法3

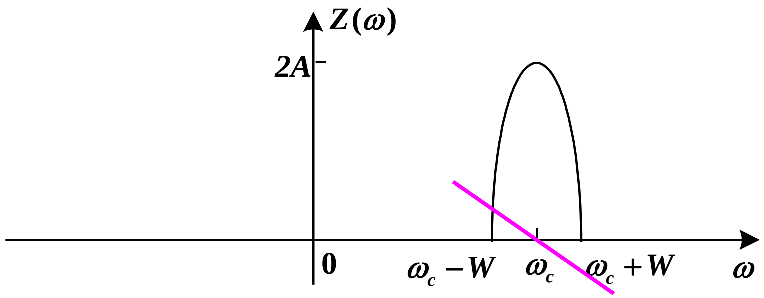
$f_L(t)$中包含了$f(t)$除载频之外的所有信息 → **$f_L(t)$为$f(t)$的等效基带信号**

2.16 频带信号与带通系统(3)

- 带通系统：系统的通频带位于某一频率附近
- 窄带系统：$f_c \gg 2W$

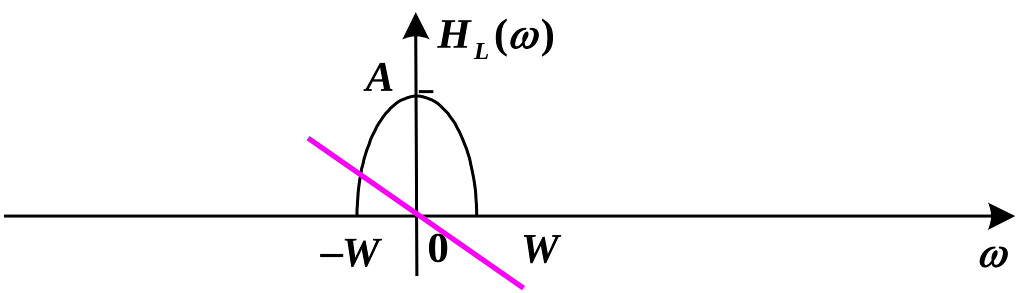


$$h(t) \Leftrightarrow H(f)$$



$$z(t) = h(t) + j\,\hat{h}(t)$$

$$Z(f) = 2H(f)u(f)$$



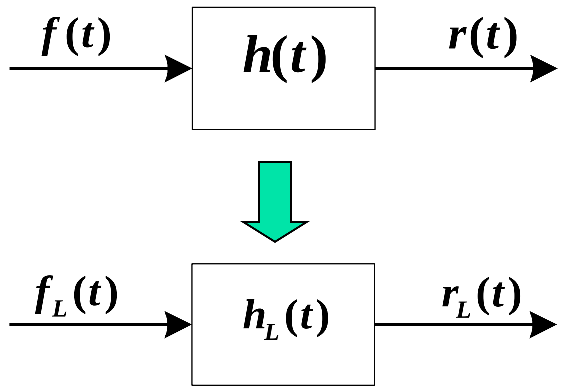
$$H_L(f) = H(f+f_c)u(f+f_c)$$

$$h_L(t) = \frac{1}{2}z(t)e^{-j2\pi f_c t}$$

$h(t)$的等效低通特性

2.16 频带信号与带通系统(4)

- **频带信号通过带通系统**



$$f(t) = \mathrm{Re}\left[f_L(t)e^{j\omega_c t} \right]$$

$$h(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[h_L(t)e^{j\omega_c t} \right]$$

$$r(t) = \mathrm{Re}\left[r_L(t)e^{j\omega_c t} \right]$$

结论：在处理频带信号激励带通系统时，可以由等价的低通分析代替，即由$f_L(t)$激励单位冲激响应为$h_L(t)$的低通系统，求得其输出响应$r_L(t)$,再乘以$e^{j\omega_c t}$求其实部，即为带通系统的响应。

2.15.2 共轭解析信号

$$m(t)=m_c(t)\cos\omega_c t-m_s(t)\sin\omega_c t=\mathrm{Re}\{z(t)\}=\mathrm{Re}\{z'(t)\}$$

$$M(f)=M(f_+)+M(f_-)$$

$$z(t)=m(t)+j\hat{m}(t)$$

$$Z(f)=2M(f_+)=2M(f)u(f)$$

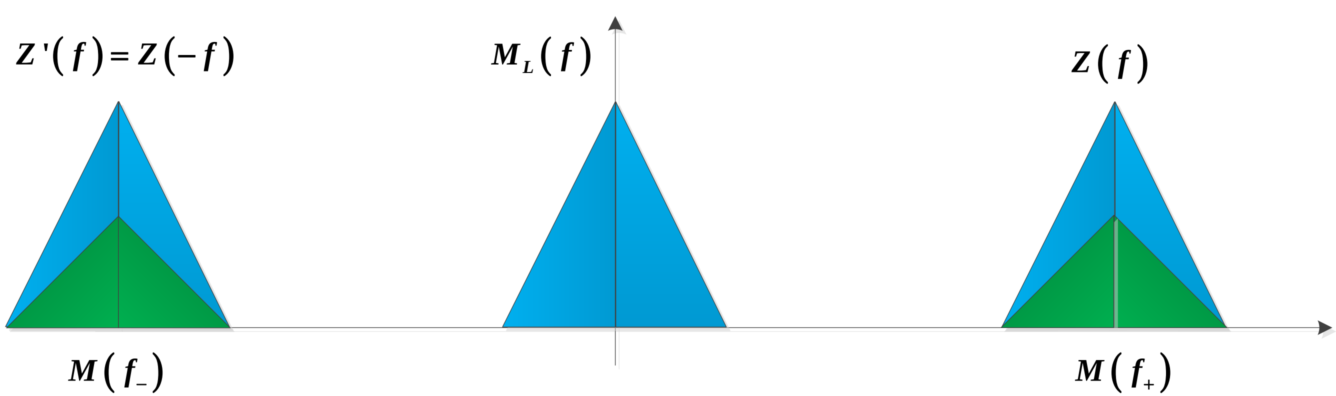
$$M_L(f)=Z(f+f_c)$$
$$=2M(f+f_c)u(f+f_c)$$

$$m_L(t)=m_c(t)+jm_s(t)$$

$$z'(t)=m(t)-j\hat{m}(t)$$

$$Z'(f)=2M(f_-)=Z(-f)$$
$$=2M(f)u(-f)$$

$$M_L(f)=Z'(f-f_c)$$
$$\boxed{=2M(f-f_c)u(f_c-f)}$$
$$=Z(f+f_c)$$
$$\boxed{=2M(f+f_c)u(f+f_c)}$$



例题

调相信号 $s(t)=A_c\cos\left[2\pi f_c t+K_P m(t)\right]$，其解析信号（即复信号）的表达式为 $A_c e^{j\left[2\pi f_c t+K_P m(t)\right]}$

其复包络的表示式为. $A_c e^{jK_P m(t)}$