



第七章 模拟信号的数字化

信息与通信工程学院

无线信号处理与网络实验室(WSPN)

智能计算与通信研究组 (IC²)

彭岳星

yxpeng@bupt.edu.cn

6119 8066 ext.2



内容

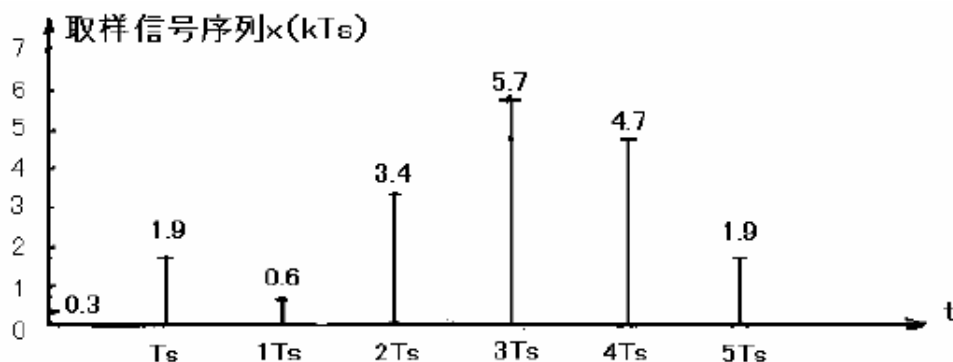
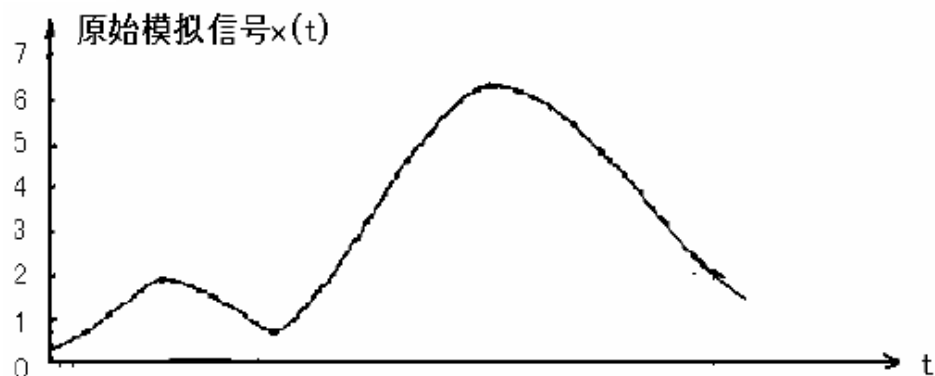
- 模拟信号的数字化传输
- (均匀采样) 采样定理
- 标量量化
- 脉码调制 (PCM)
- 差分PCM与增量调制
- 时分复用

数字化基本原理

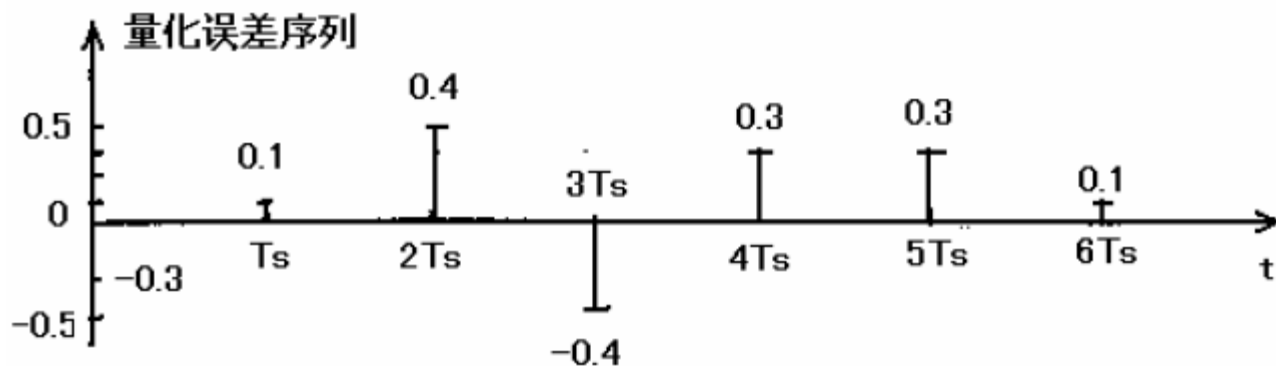
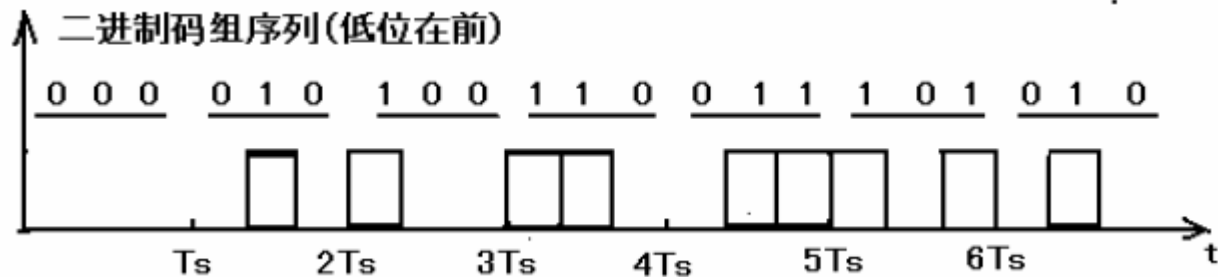
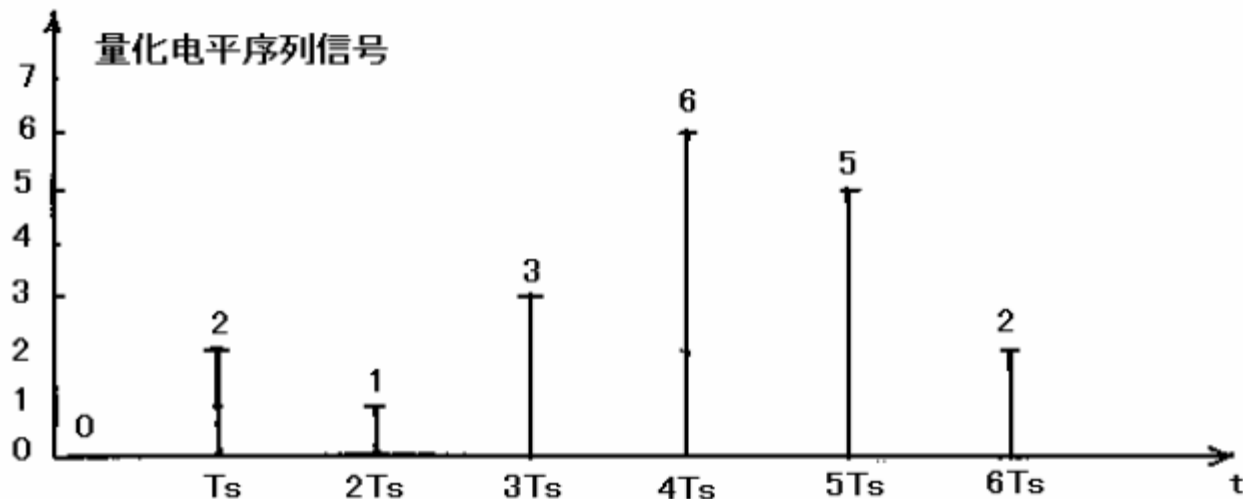
- 三个基本步骤:

- 取样: 时间离散化
- 量化: 取值离散化
- 编码: 将离散化的数值编为**0, 1**码组

- 例: 对连续语音信号数字化, 取 $2^3=8$ 电平量化: **0,1,...,7**

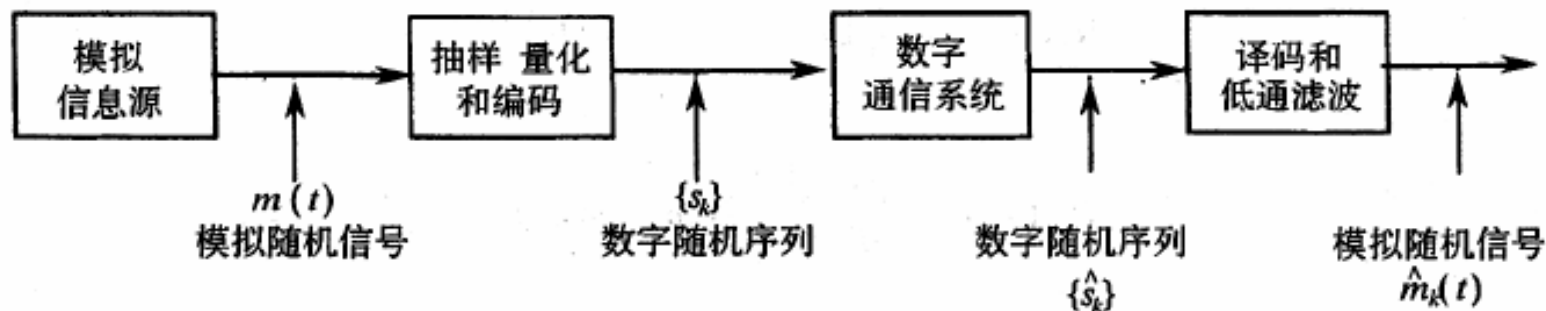


数字化基本原理



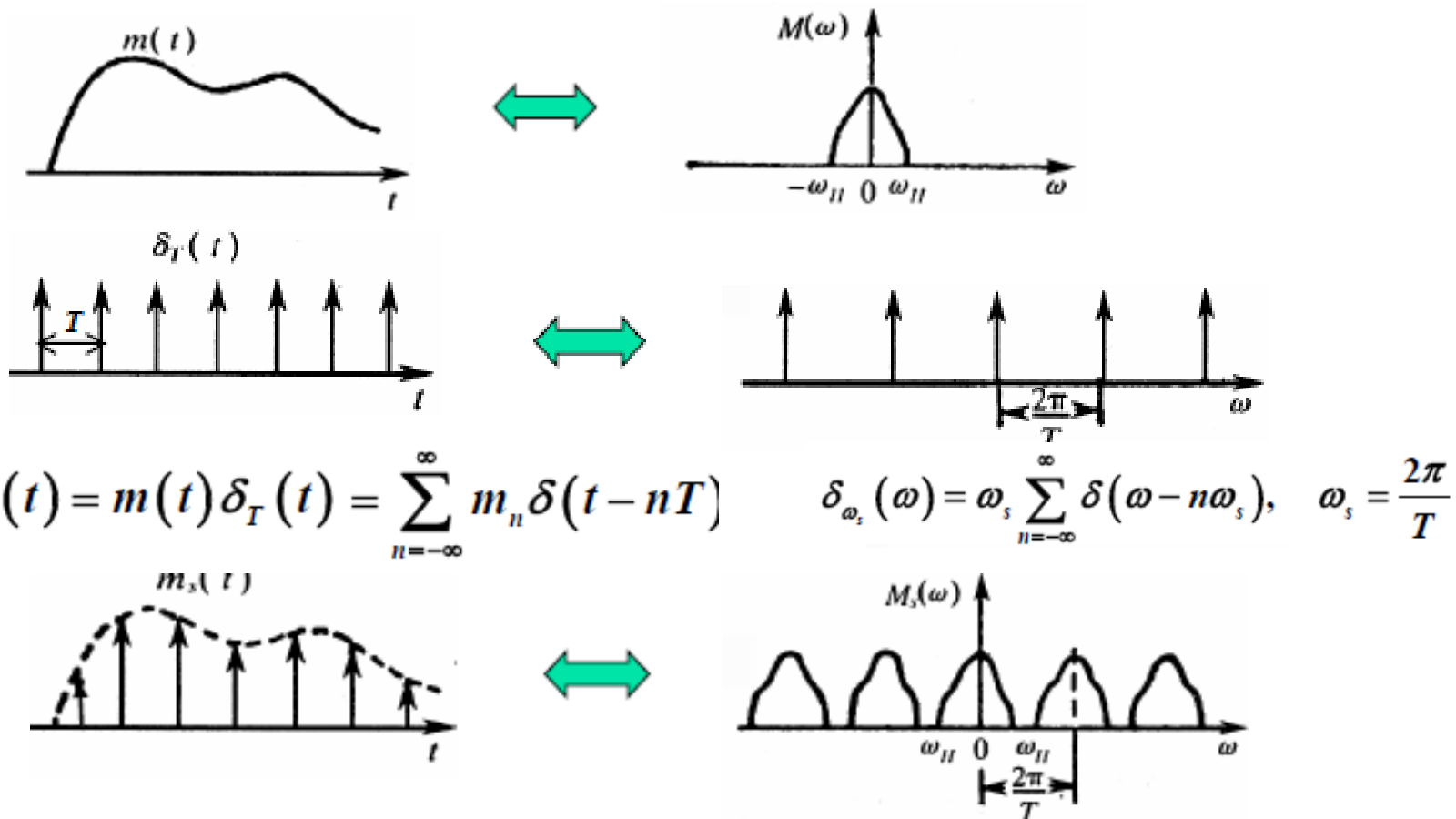
7.9.1 模拟信号的数字化传输

- 模拟信号 → 抽样、量化、编码 → 数字方式传输
- 理论基础：抽样定理
- 实现



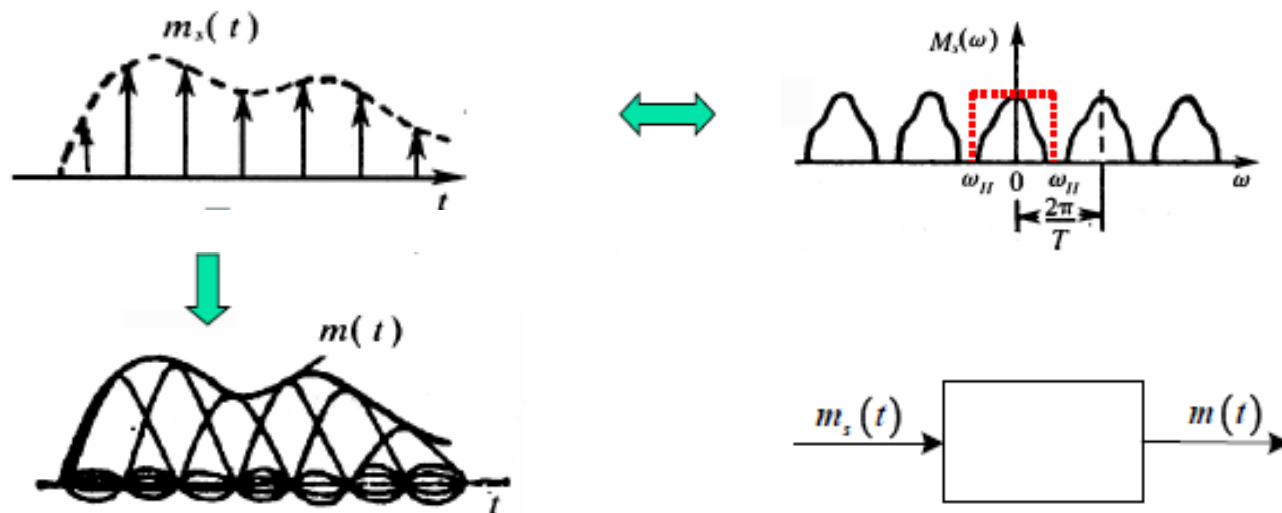
7.9.2 采样定理-低通采样

- 以信号的最高频的2倍采样，则原信号可以被采样序列完全表示，无任何信息损失。



$$M_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} [M(\omega) * \delta_{\omega_s}(\omega)] = \frac{1}{T} \left[M(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega - n\omega_s)$$

7.9.2 采样定理-低通采样-信号恢复



$$M_s(\omega) \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_H}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega - n\omega_s) \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_H}\right) = \frac{1}{T} M(\omega)$$

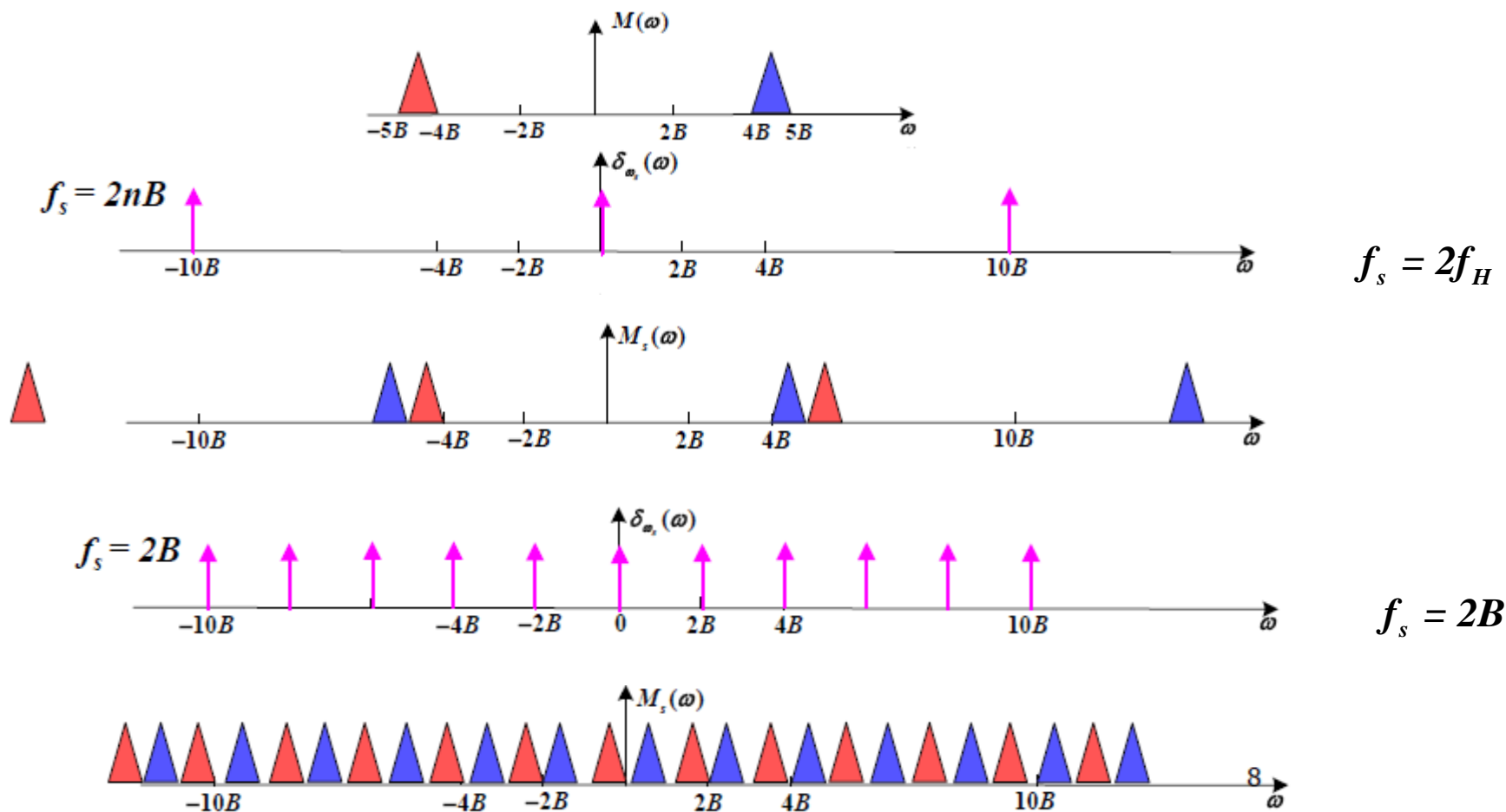
$$\therefore m(t) = T \left[m_s(t) * \frac{\omega_H}{\pi} \text{Sa}(\omega_H t) \right] \xrightarrow{T=1/2f_H}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n \delta(t - nT) * \text{Sa}(\omega_H t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n \text{Sa}[\omega_H(t - nT)]$$

7.9.2 采样定理-带通信号的采样

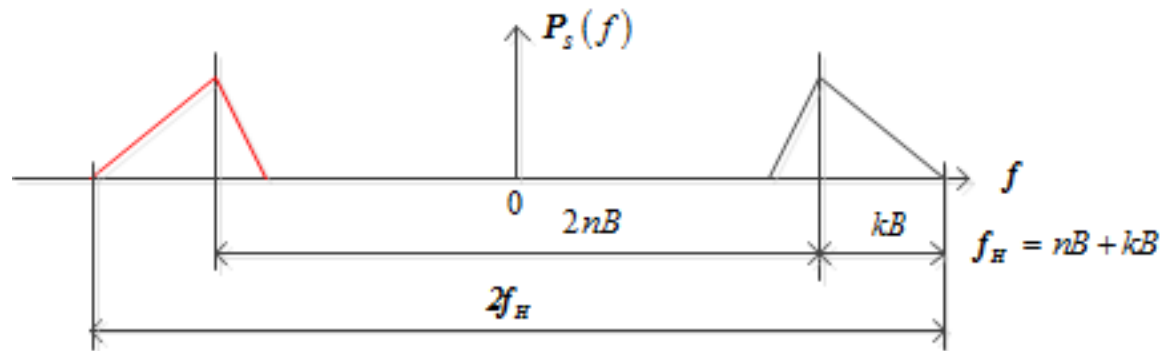
- 带通型信号(频带受限于 (f_L, f_H) , $B=f_H-f_L$)

- $f_H = nB$, n 为整数

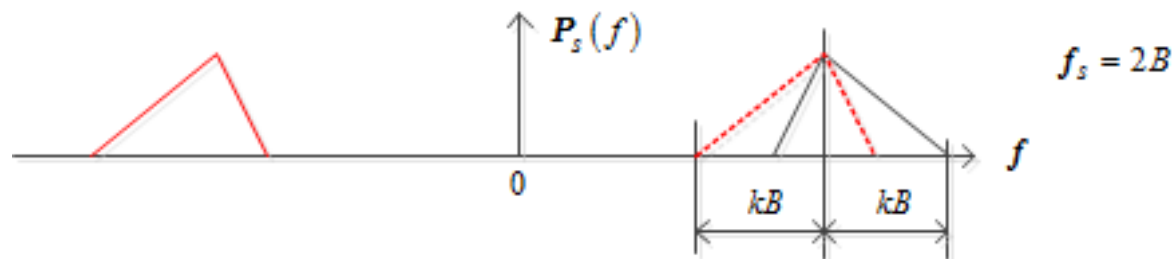


7.9.2 采样定理-带通信号的采样

- $f_H = nB + kB$, $0 \leq k < 1$, n 为小于 f_H/B 的最大整数



$$f_s = 2B$$



不重叠的话需要再偏移 $2kB$, 此时是延拓了 n 次的位置

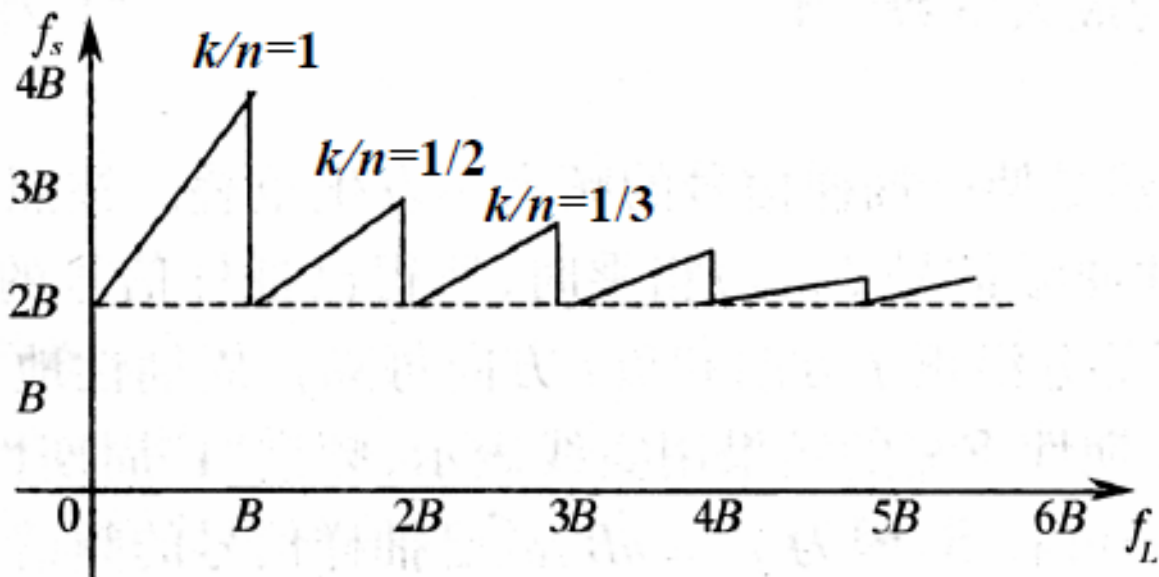
$$\text{即: } 2kB = \Delta f \cdot n \rightarrow \Delta f = 2kB/n$$

$$\text{所以有: } f_s = 2B + 2kB/n = 2B(1 + k/n)$$

7.9.2 采样定理-带通信号的采样

- 若 $f_H = nB + kB$, $0 \leq k < 1$, n 为小于 f_H/B 的最大整数, 则带通信号的最小抽样频率为

$$f_s = 2B + 2(f_H - nB)/n = 2B(1 + k/n)$$



带宽为 B 的高频窄带信号, 其抽样频率近似等于 $2B$ 。



7.9.2 采样定理-随机基带信号的采样

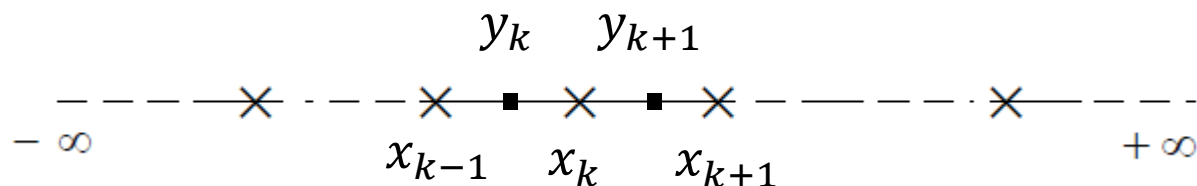
- 一个宽平稳的随机信号，当其功率谱密度函数限于 f_H 以内时，若以不大于 $1/2f_H$ 秒的间隔对其进行均匀抽样，则可得一随机样值序列。如果让该随机样值序列通过一截止频率为 f_H 的低通滤波器，那么其输出信号与原来的宽平稳随机过程的均方差在统计平均意义下为零。



7.9.3 标量量化

- 量化：利用预先规定的有限个电平表示模拟取样值(以便能转换成有限长度的码组)
 - 引入失真，即量化误差
- 一维标量量化：均匀量化/非均匀量化
- 多维矢量量化：多个样值联合量化

7.9.3 标量量化-基本原理



- if $x(nT_s) \in (x_{k-1}, x_k]$, $y(nT_s) = y_k$, $k = 1, 2, \dots, M$

↑
分层电平

↑
量化电平

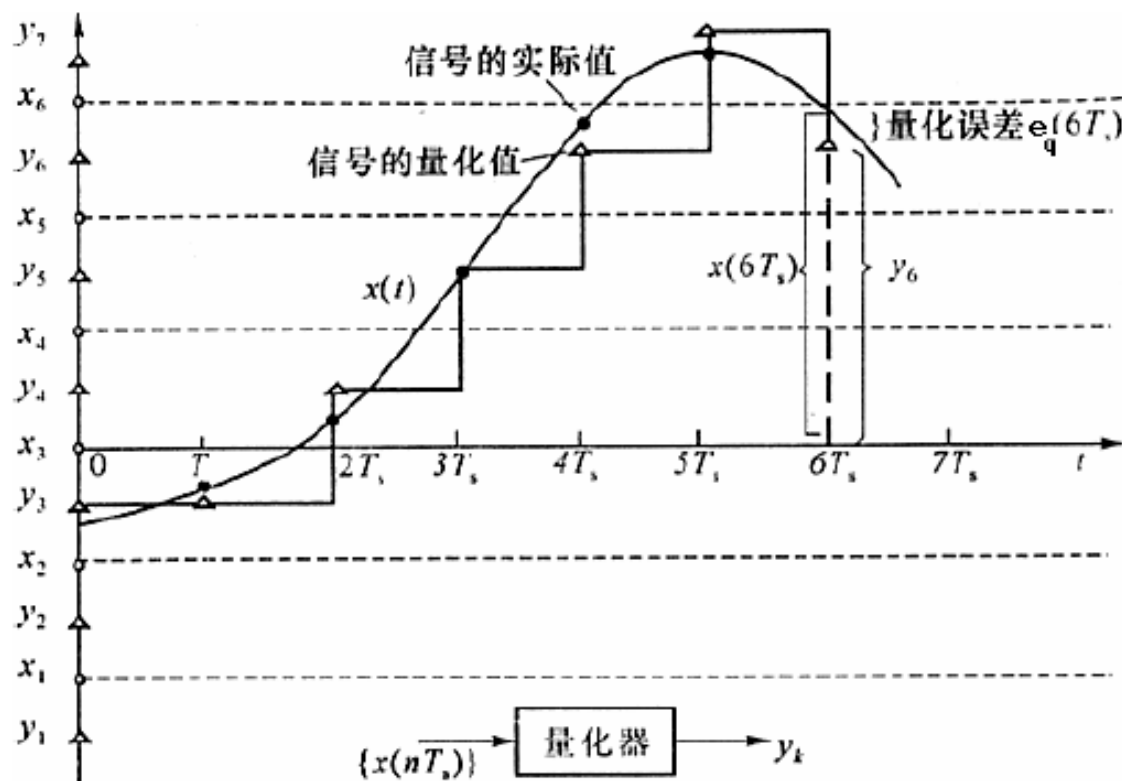
- 量化间隔: $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$

- 量化级数: M

7.9.3 标量量化-基本原理

- 量化误差(量化噪声): $e_q(nT_s) = x(nT_s) - y(nT_s)$

$$\rightarrow e_q = x - y_k = x - Q(x) \sim \text{随机变量}$$



- 量化噪声平均功率(方差)

$$N_q = E[e_q^2]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [x - Q(x)]^2 p(x) dx$$

$$= \sum_{k=1}^M \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - y_k)^2 p(x) dx$$

7.9.3 标量量化-基本原理

- 量化信噪比：量化器输出信号与量化噪声的平均功率之比

$$\frac{S_q}{N_q} = \frac{E[y_k^2]}{E[e_q^2]} = \frac{\sum_{k=1}^M \int_{x_{k-1}}^{x_k} y_k^2 p(x) dx}{\sum_{k=1}^M \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - y_k)^2 p(x) dx}$$

$p(x)$, M 一定时, N_q 与量化区间的划分方式有关

——— 量化理论 ———→ N_q 最小, S_q/N_q 最大化

7.9.3 标量量化-均匀量化器

- $(-V, V)$ 内等间隔进行量化
 - 量化间隔: $\Delta_k = \Delta = 2V/M, k=1,2,\dots,M$
 - 分层电平: $x_k = -V + k\Delta, k=1,2,\dots,M$
- 当输入信号 x 为均匀分布时, 最佳量化电平
$$y_k = (x_k + x_{k-1})/2 = -V + k\Delta - \Delta/2$$
- 量化过载: 输入信号 x 超过量化器的量化范围 $(-V, V)$, 产生过载噪声

7.9.3 标量量化-均匀量化器

- 例. 设一 M 个量化电平的均匀量化器, 输入信号在 $(-V, V)$ 内均匀分布, 即 $p(x)=1/(2V)$, 试求量化器输出端的量化信噪比.

均匀量化间隔为 $\Delta = 2V/M$

$$\begin{aligned} S_q = E[y_k^2] &= \sum_{k=1}^M \int_{x_{k-1}}^{x_k} y_k^2 p(x) dx = \sum_{k=1}^M \int_{-V+(k-1)\Delta}^{-V+k\Delta} \left(-V + k\Delta - \frac{\Delta}{2}\right)^2 \frac{1}{2V} dx \\ &= \sum_{k=1}^M \left(-V + k\Delta - \frac{\Delta}{2}\right)^2 \frac{\Delta}{2V} = \frac{(M^2 - 1)\Delta^2}{12} \end{aligned}$$

$$N_q = E[e_q^2] = \sum_{k=1}^M \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - y_k)^2 p(x) dx = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$\frac{S_q}{N_q} = M^2 - 1 \stackrel{M \gg 1}{\approx} M^2 \quad \longrightarrow \quad \text{x均匀分布时的最佳量化器}$$

输入信号与量化噪声的平均功率比 $S_q/N_q = ? \quad M^2$

例题

七、(16 分)

已知一个模拟信号 $x(t)$ 采样值的概率密度 $p(x)$ 如下图 4 所示, 对其进行 4 电平均匀量化, 并对量化后的序列进行哈夫曼编码。

- (1) 确定量化电平、量化区间以及每个量化电平的出现概率;
- (2) 计算量化器输出端的量化信噪比;
- (3) 设计对量化输出序列的哈夫曼编码方案, 并计算其编码效率。

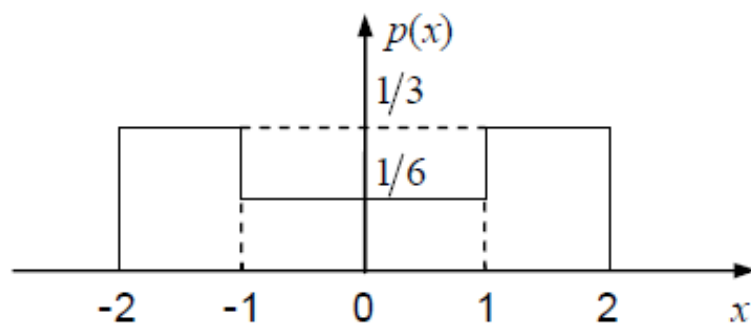


图 4

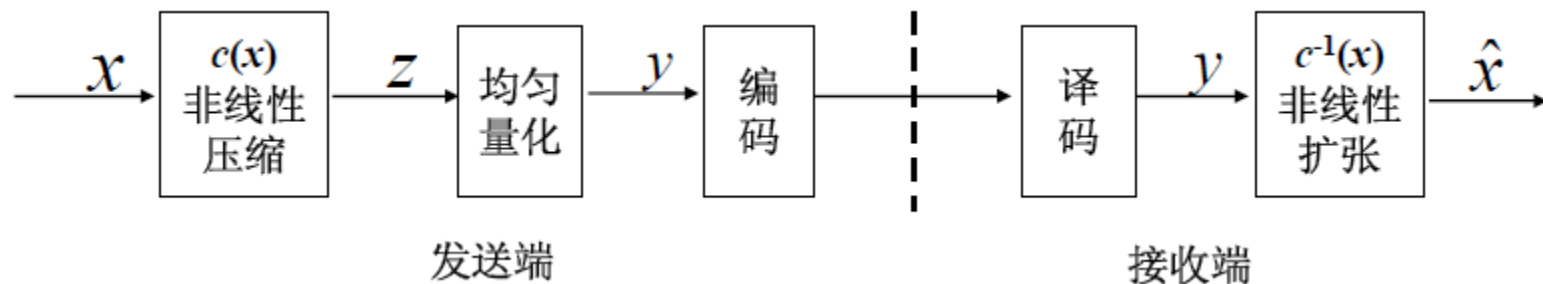


7.9.3 标量量化-均匀量化器

- 特点: N_q 与信号统计特性无关, 仅取决于 Δ
 - e_q 始终在 $\pm\Delta/2$ 之间, 小信号信噪比会比大信号信噪比低很多, 输入信号的动态范围受到很大限制。
 - 对于幅度分布不均匀的信号(语音), 小幅度出现机会多, 采用均匀量化会使大多数时间量化信噪比较低。

7.9.3 标量量化-非均匀量化器

- 非均匀量化：根据信号所处的不同区间确定量化间隔
 - 信号取值小的区间，量化间隔小
 - 信号取值大的区间，量化间隔大
- 优点
 - 改善了小信号时的量化信噪比
 - 对于非均匀分布的信号，可提高其平均量化信噪比
- 实现方法：压缩原始抽样值(非线性变换)，再均匀量化
 - 发送端压缩： $z = c(x)$
 - 接收端扩张： $x = c^{-1}(z)$



7.9.3 标量量化-最佳量化器

- 求取使 N_q 最小的 $\{x_k\}$ 及 $\{y_k\}$ ($p(x)$ 与 M 一定)

$$N_q = \sum_{k=1}^M \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - y_k)^2 p(x) dx \longrightarrow \text{Minimize}$$

- $\frac{\partial N_q}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - y_k)^2 p(x) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - y_{k+1})^2 p(x) dx \right] = 0$$

$$\longrightarrow x_{k,opt} = \frac{1}{2} (y_{k+1,opt} + y_{k,opt}), \quad k = 1, 2, \dots, M$$

7.9.3 标量量化-最佳量化器

$$\frac{\partial N_q}{\partial y_k} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y_k} \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - y_k)^2 p(x) dx \right] = 0$$

$$y_{k,opt} = \frac{\int_{x_{k-1,opt}}^{x_{k,opt}} x p(x) dx}{\int_{x_{k-1,opt}}^{x_{k,opt}} p(x) dx} \quad (\text{对应量化间隔的概率质心})$$

$$\approx \frac{1}{2} [x_{k-1,opt} + x_{k,opt}]$$

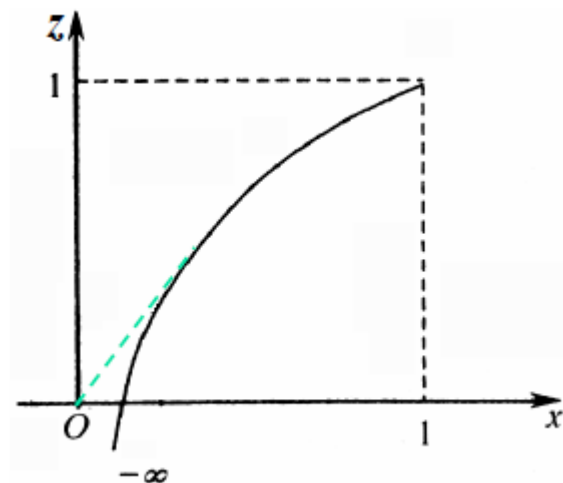
- 实际求解方法：设定初始值，计算偏差，反复迭代。
- 要求信源的输出过程 \mathbf{x} 是平稳过程。
- 语音信号非平稳(统计特性随时间缓慢变化)，采用对数量化器(简单，性能可接受)

7.9.3 标量量化-对数量化器

- 理想的对数压缩特性

$$z = c(x) = 1 + \frac{1}{B} \ln x$$

$x = 0, z = -\infty \rightarrow$ 修正



- G.711建议给出的两种对数压缩特性标准

- μ 律: 美国24路PCM
- A律: 欧洲与我国32路PCM

7.9.3 标量量化-对数量化器

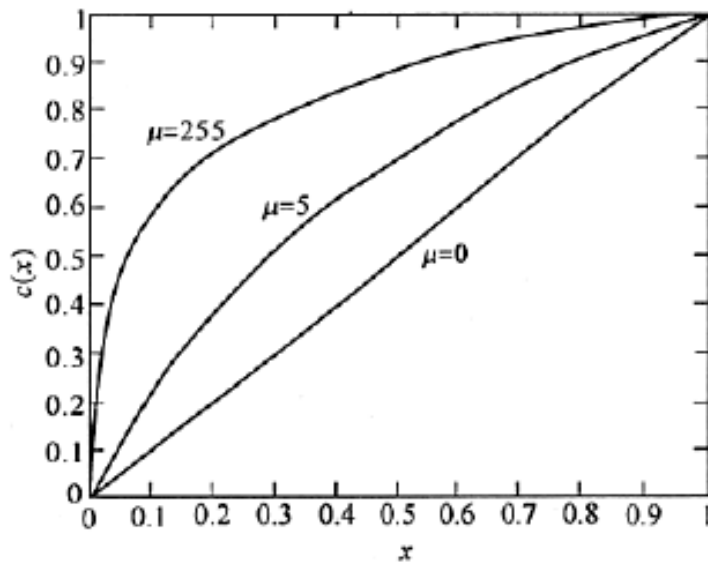
■ μ 律

$$z = c(x) = \frac{\ln(1 + \mu x)}{\ln(1 + \mu)}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

z ~ 压缩器输出电压的归一化值

x ~ 压缩器输入电压的归一化值

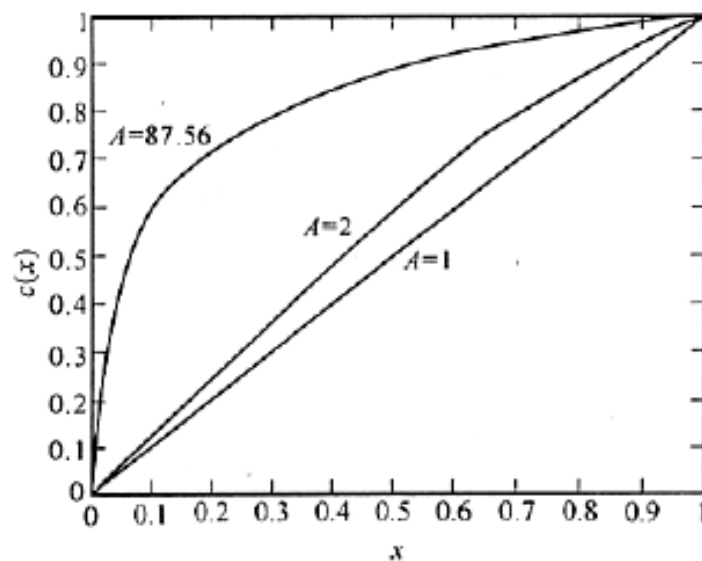
μ ~ 压扩参数



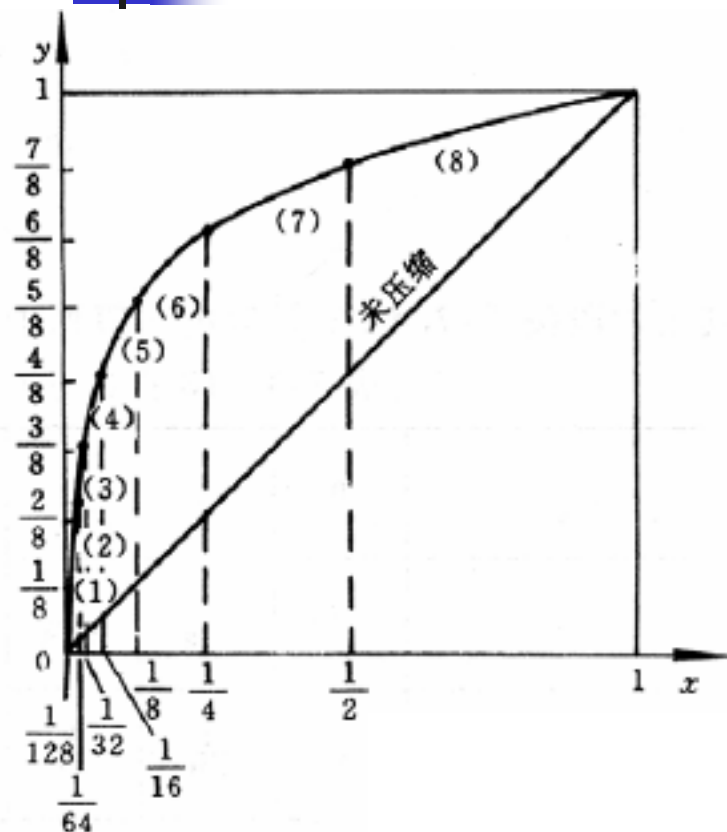
■ A 律

$$z = \begin{cases} \frac{Ax}{1 + \ln A}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1 + \ln Ax}{1 + \ln A}, & \frac{1}{A} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

A ~ 压扩系数(87.6)



7.9.3 标量量化-A律13折线

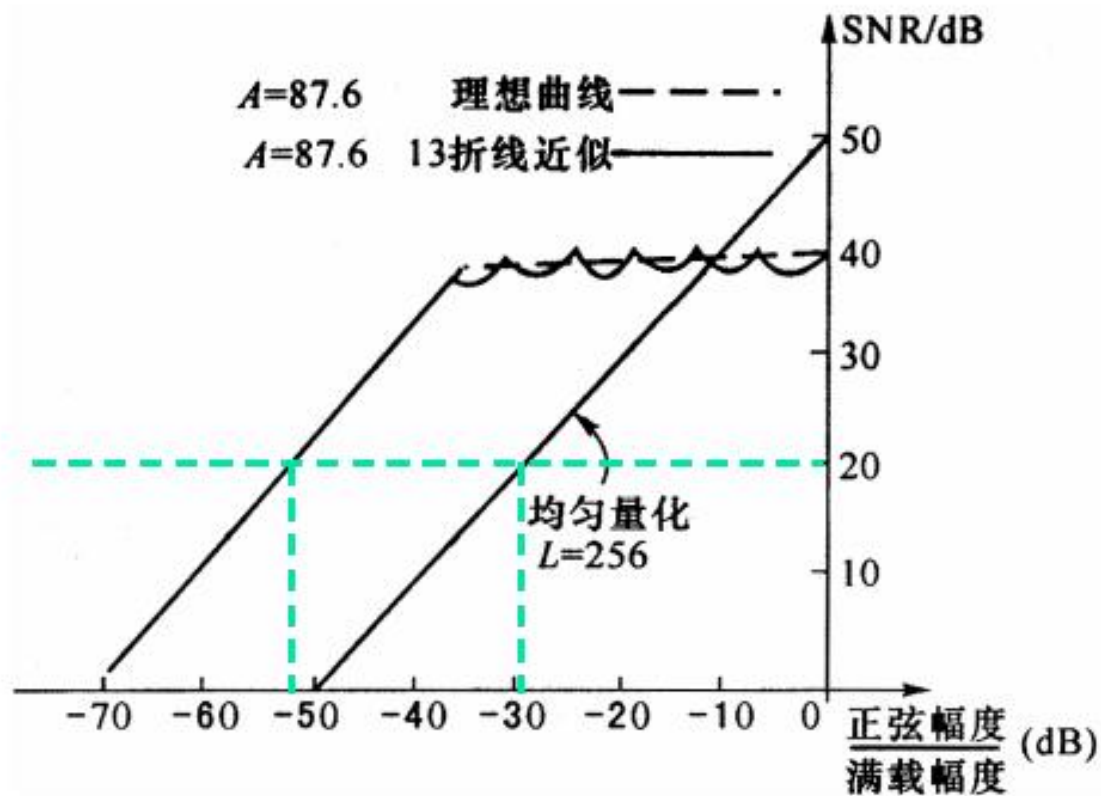


对 $A = 87.6$ 压扩特性的近似

z	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1
x	0	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
段落		1	2	3	4	5	6	7	8
斜率		16	16	8	4	2	1	1/2	1/4

7.9.3 标量量化-对数压扩对性能的改善

■ A律压缩与均匀量化的性能比较



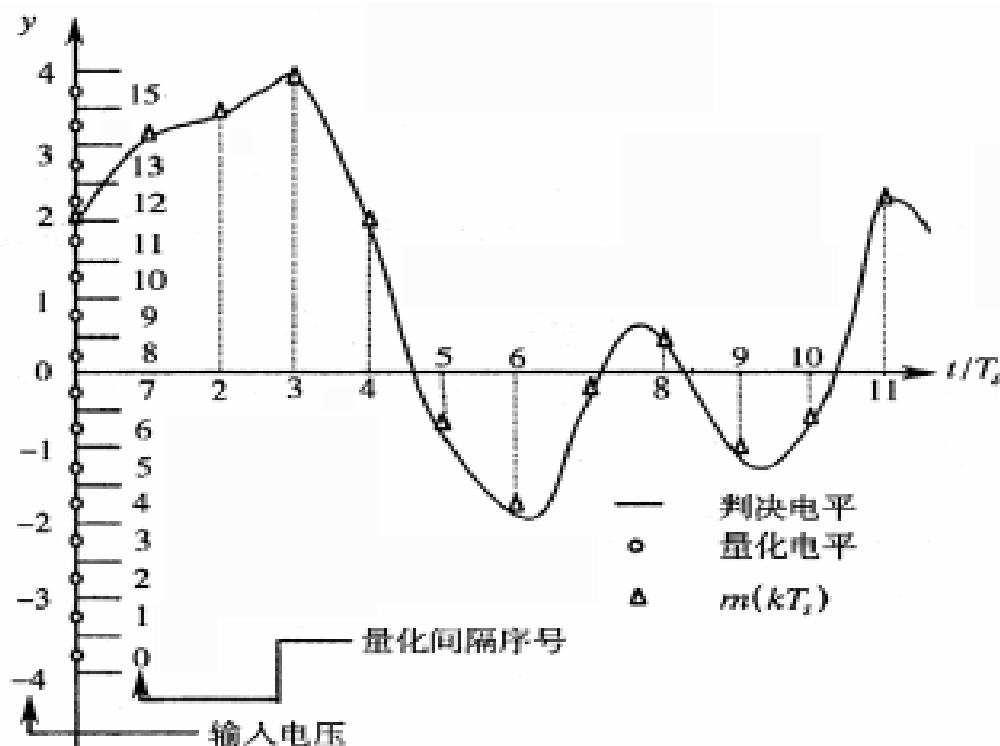
7.9.4 脉码调制 (PCM)

- 将模拟信号抽样量化，然后将已量化值变换成代码的过程，称之为脉冲编码调制(PCM)。

例. $|m(t)| < 4V$, 抽样速率 R_s , $M = 16$. $\rightarrow \Delta v = 0.5V$

$$m_i = -4 + 0.5i, \quad i = 0, 1, \dots, 16$$

$$q_i = -3.75 + 0.5i, \quad i = 0, 1, \dots, 15$$



抽样值	2.1	3.2	-0.75
q_i	2.25	3.25	-0.75
量化级序号	12	14	6
二进制编码	1100	1110	0110
四进制编码	30	32	12

	符号速率	比特速率
数字PAM (16电平)	R_s	$4R_s$
二进制PCM	$4R_s$	$4R_s$
四进制PCM	$2R_s$	$4R_s$

7.9.4 PCM – 码型

量化级	样值极性	自然码	折叠码	格雷码
15	正极性 部分	1 1 1 1	1 1 1 1	1 0 0 0
14		1 1 1 0	1 1 1 0	1 0 0 1
13		1 1 0 1	1 1 0 1	1 0 1 1
12		1 1 0 0	1 1 0 0	1 0 1 0
11		1 0 1 1	1 0 1 1	1 1 1 0
10		1 0 1 0	1 0 1 0	1 1 1 1
9		1 0 0 1	1 0 0 1	1 1 0 1
8		1 0 0 0	1 0 0 0	1 1 0 0
7	负极性 部分	0 1 1 1	0 0 0 0	0 1 0 0
6		0 1 1 0	0 0 0 1	0 1 0 1
5		0 1 0 1	0 0 1 0	0 1 1 1
4		0 1 0 0	0 0 1 1	0 1 1 0
3		0 0 1 1	0 1 0 0	0 0 1 0
2		0 0 1 0	0 1 0 1	0 0 1 1
1		0 0 0 1	0 1 1 0	0 0 0 1
0		0 0 0 0	0 1 1 1	0 0 0 0

- 最高位表示信号极性，其余码表示绝对值，可简化编码过程
- 误码对小信号影响较小



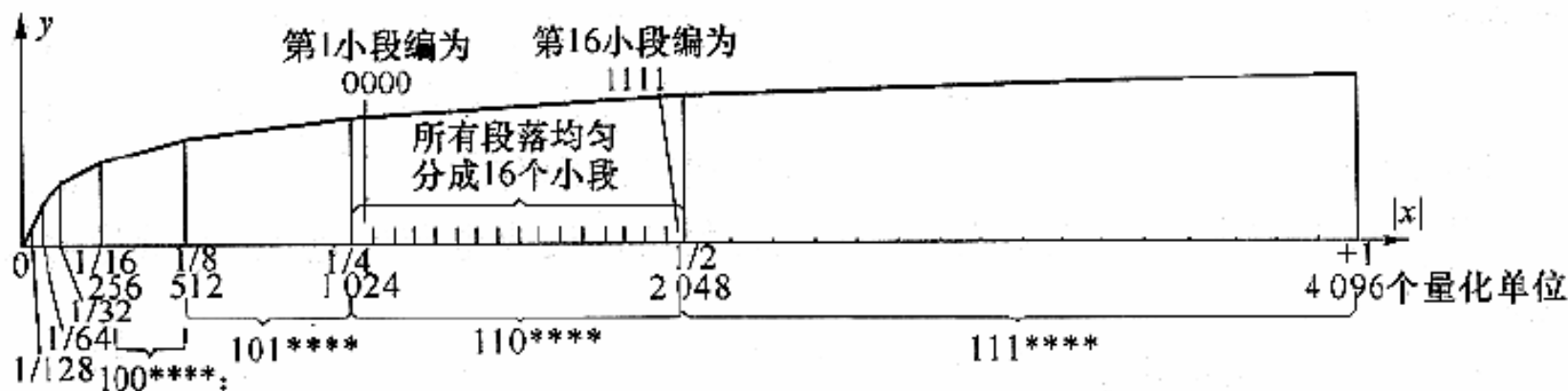
7.9.4 PCM — 位数选择

- 位数的选择：位数越多，量化分层越细，量化噪声越小。（语音：**7~8位**）
- **G.711**建议
 - 电话信号带宽：**300~3400Hz**
 - 抽样速率： $f_s = 8\text{kHz}$
 - **8位非线性编码**
 - 每路标准话路的比特率：**64kbit/s**

7.9.4 PCM – 码位安排

■ 码位的安排

- 极性码：第一位
- 段落码：第二至四位，代表**13**折线中的**8**个段落
- 段内码：第五至八位，代表每一段落内的**16**个均匀划分的量化间隔



- 最小量化间隔： $\Delta = \frac{1}{128} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2048} = 2 \text{ 个量化单位}$

注：1 量化单位=1/4096

7.9.4 PCM – 段落码

段落序号	段落码	段内量化间隔		段落起始电平		段内第一量化级的量化电平值	
7	1 1 1	64Δ	128	1024Δ	2048	1056Δ	2112
6	1 1 0	32Δ	64	512Δ	1024	528Δ	1056
5	1 0 1	16Δ	32	256Δ	512	264Δ	528
4	1 0 0	8Δ	16	128Δ	256	132Δ	264
3	0 1 1	4Δ	8	64Δ	128	66Δ	132
2	0 1 0	2Δ	4	32Δ	64	33Δ	66
1	0 0 1	Δ	2	16Δ	32	16.5Δ	33
0	0 0 0	Δ	2	0	0	0.5Δ	1



7.9.4 PCM – 段内码

量化级	段内码(自然码)
15	1 1 1 1
14	1 1 1 0
13	1 1 0 1
12	1 1 0 0
11	1 0 1 1
10	1 0 1 0
9	1 0 0 1
8	1 0 0 0
7	0 1 1 1
6	0 1 1 0
5	0 1 0 1
4	0 1 0 0
3	0 0 1 1
2	0 0 1 0
1	0 0 0 1
0	0 0 0 0



7.9.4 PCM – 非线性码转换为线性码

- 非线性对数**PCM**码：8位
- 线性**PCM**码：与量化电平值(-4096, +4096)对应的13位线性折叠码
 - 第一位是极性码
 - 后12位表示量化电平的绝对值(自然码)

例： +2240个量化单位 = $2048 + 128 + 64 = 2^{11} + 2^7 + 2^6$

→ 线性码： 1 1000 1100 0000

7.9.4 PCM — 例

- 例. 某A律13折线编码器的设计输入范围是 $[-6, +6]\text{V}$ 。若抽样脉冲幅度为 -2.4V ，求编码器的输出码组，对应的量化电平值，量化误差以及13位线性码组。

- 输入信号归一化： $\frac{-2.4}{6} = -0.4$
 $-0.4 \times 4096 = -1638.4$ 个量化单位

- 极性码： $c_1 = 0$

- 段落码： $c_2 c_3 c_4 = 110 \rightarrow$ 段内量化间隔：64

- 段内码： $c_5 c_6 c_7 c_8$

$$2^3 * 64 + 2^1 * 64 > 1638.4 - 1024 = 614.4 > 2^3 * 64 + 2^0 * 64$$

$$\rightarrow c_5 c_6 c_7 c_8 = 1001$$

- 输出：01101001

- 量化电平： $1024 + 9 * 64 + 64/2 = 1632$

- 量化误差： $-1632 - (-1638.4) = 6.4$ 个量化单位 即 $\frac{6.4}{4096} * 6\text{V} = 0.009375\text{V}$

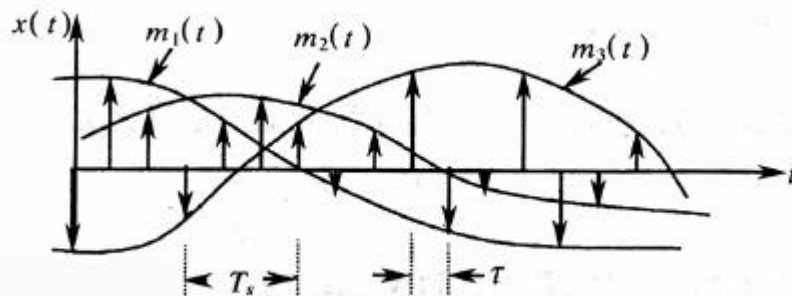
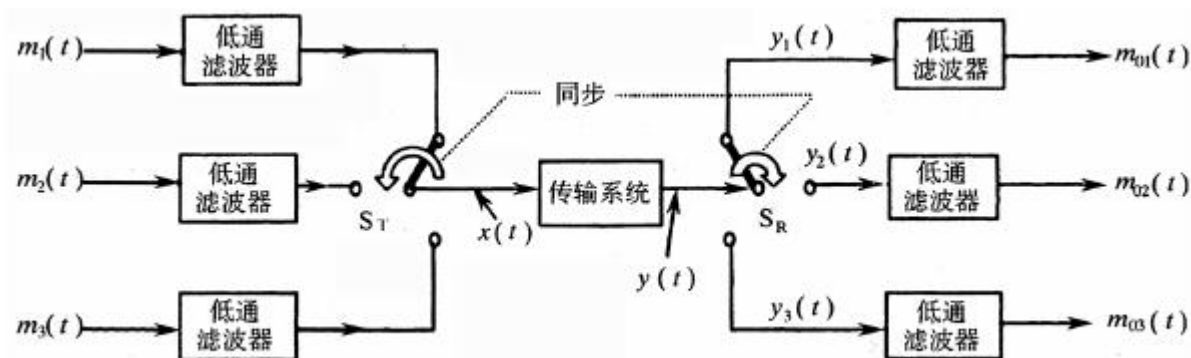
- 13位线性码： $1632 = 1024 + 512 + 64 + 32 = 2^{10} + 2^9 + 2^6 + 2^5$

$$\rightarrow \text{线性码：} 0\ 0110\ 0110\ 0000$$

段落	段落码	起始电平	段内量化间隔
7	1 1 1	2048	128
6	1 1 0	1024	64
5	1 0 1	512	32
4	1 0 0	256	16
3	0 1 1	128	8
2	0 1 0	64	4
1	0 0 1	32	2
0	0 0 0	0	2

7.9.5 时分复用

- 把时间帧划分成若干时隙，各路信号占有各自的时隙



- 帧长度: T_s

例. 话音 $f_s = 8\text{KHz}$,

$$T_s = 125\mu\text{s}$$

- 时隙长度: τ

八、(12分)

对 10 路带宽为 4KHz 的模拟语音信号分别进行 A 律 13 折线 PCM 编码, 然后进行时分复用, 经过 (2, 1, 4) 卷积编码后用 QPSK 调制信号传输。若卷积编码器的生成多项式为 $g_1(x) = 1 + x^2 + x^3$, $g_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3$, 载波频率为 $f_c = 20\text{MHz}$, QPSK 调制采用滚降因子 $\alpha = 1$ 的频谱成形, 请问:

(1) 给出 QPSK 信号最小的信号速率和带宽各是多少(给出理由)?

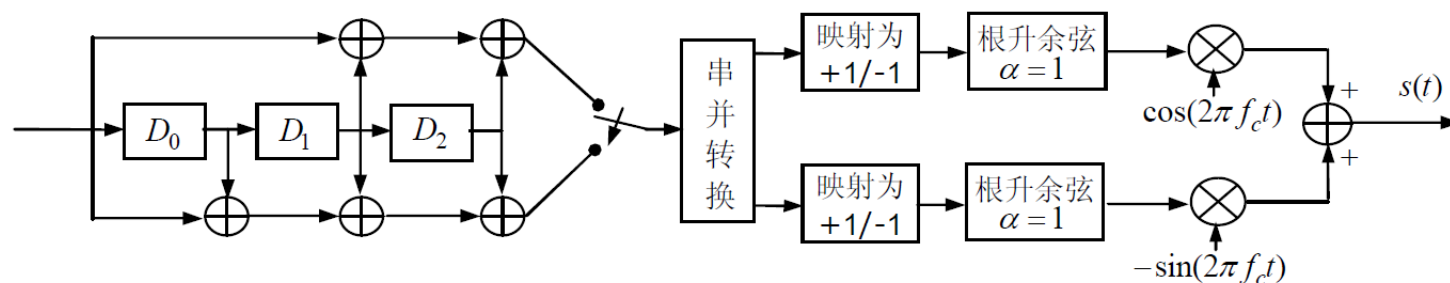
(2) 请画出发送机中卷积编码和 QPSK 调制的实现框图;

(3) 请画出 QPSK 已调信号功率谱图(并标上频率值)。

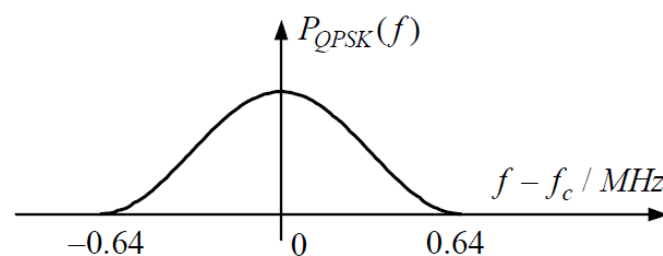
$$(1) R_s = 4k \times 2 \times 8 \times 10 \times 2 / \log_2 4 = 640 \text{KBaud}$$

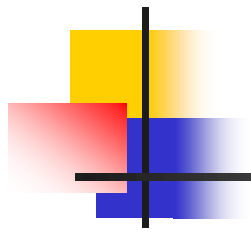
$$\text{由 } \frac{R_s}{W} = \frac{1}{1+\alpha} \text{ 得: } W = R_s (1+\alpha) = 1.28 \text{MHz}$$

(2) 实现框图如下:



(3) 功率谱密度图如下:





作业: 7.11, 7.14, 7.16, 7.17