第六章 数字信号的频带传输

信息与通信工程学院

无线信号处理与网络实验室(WSPN)

智能计算与通信研究组（IC^2 ）

彭岳星

yxpeng@bupt.edu.cn

6119 8066 ext.2

6.4 M进制数字调制

内容

- 数字调制信号的矢量表示
- 统计判决理论
- AWGN下的最佳接收
- MASK
- MPSK
- MQAM
- MFSK
- 恒包络连续相位调制

核心问题

- 信号表示
- 功率谱密度
- 最佳接收
- 性能分析
  - 误码率性能
  - 功率效率
  - 频谱效率

6.4.1 数字调制信号的矢量表示

- 矢量表示能简化M进制信号的产生及解调结构，误码率性能分析更简单
  - 正交矢量空间
  - 正交信号空间
  - M进制线性数字调制信号波形的矢量表示

6.4.1 正交矢量空间

- 若N个相互正交的能量归一化矢量组$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_N\}$形成一个完备的正交坐标系统，那么任意一个矢量$\boldsymbol{V}$可表示为在$N$个坐标轴上的分矢量的几何和：

$$\boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{N} v_i \boldsymbol{e}_i = [v_1, v_2, \dots, v_N]$$

其中：$v_i = <\boldsymbol{V}, \boldsymbol{e}_i> = \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{e}_i$

$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_N\}$ 构成了空间的一组标准正交基/正交坐标系

6.4.1 数字调制信号的矢量表示

坐标系下的表示与信号的均方误差:

$$E_e=\int_{-\infty}^{\infty}\left[s(t)-\sum_{i=1}^{N}s_i f_i(t)\right]^2\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)\mathrm{d}t-2\sum_{i=1}^{N}s_i\int_{-\infty}^{\infty}f_i(t)s(t)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{N}s_i f_i(t)\right]^2\mathrm{d}t$$

$$=E_s-2\sum_{i=1}^{N}s_i^2+\sum_{i=1}^{N}s_i^2\int_{-\infty}^{\infty}f_i^2(t)\mathrm{d}t$$

$$=E_s-\sum_{i=1}^{N}s_i^2$$

当$E_e=0$时，$E_s=\sum_{i=1}^{N}s_i^2$，即有：$s(t)=\sum_{i=1}^{N}s_i f_i(t)$

如果对每个能量有限信号进行正交展开时均能满足$E_e=0$，则称正交函数集$\{f_i(t)\}$是完备的。

6.4.1 数字调制信号的矢量表示

- 信号$s(t)$的矢量表示(几何表示)

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, ..., s_N]$$ ~N维信号空间中的一个点

where $s_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot f_n(t)dt$ ~ $s(t)$在各归一化正交函数$f_n(t)$上的投影

- 用{ $f_n(t)$, n=1,2,…,N }描述M个能量有限的信号波形{$s_i(t)$, i =1,…,M }

$$s_i(t) = \sum_{k=1}^{N} s_{in} f_n(t), \quad i = 1, 2, ..., M$$

其中 $s_{in} = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) \cdot f_n(t)dt, \quad i = 1, 2, ..., M; \quad n = 1, ..., N$

可得 $\mathbf{s}_i = [s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{iN}], \quad i = 1, 2, ..., M$

$$E_i = \int_{-\infty}^{\infty} [s_i(t)]^2 dt = \sum_{i=1}^{N} s_{in}^2 = |\mathbf{s}_i|^2$$ ~ 矢量模的平方

6.4.1 数字调制信号的矢量表示

- 与误码率有关的两个参量
  - 两个信号波形或两个信号矢量之间的互相关系数

$$\rho_{mk} = \frac{1}{\sqrt{E_m E_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t) s_k(t) dt$$

$$= \frac{\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{s}_k}{\sqrt{E_m E_k}} = \frac{\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{s}_k}{|\mathbf{s}_m| \cdot |\mathbf{s}_k|}$$

$E_k \sim s_k(t)$的能量
$E_m \sim s_m(t)$的能量

where $\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{s}_k = \sum_{n=1}^{N} s_{mn} s_{kn} \sim$ 内积

    - 表征两个信号之间的相似性
    - $\rho \in [-1, +1]$

6.4.1 数字调制信号的矢量表示

- 两信号波形或两信号矢量之间的距离(欧氏距离)

$$d_{km}=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[s_m(t)-s_k(t)\right]^2dt\right\}^{1/2}$$

$$=\left(E_m+E_k-2\sqrt{E_mE_k}\rho_{km}\right)^{1/2}$$

$$=\left|\mathbf{s}_m-\mathbf{s}_k\right|\ =\sqrt{\sum_n(s_{mn}-s_{kn})^2}$$

若$E_k=E_m=E$,

$$d_{km}=\sqrt{2E(1-\rho_{km})}$$ ~ 也用来测量两信号之间的相似性

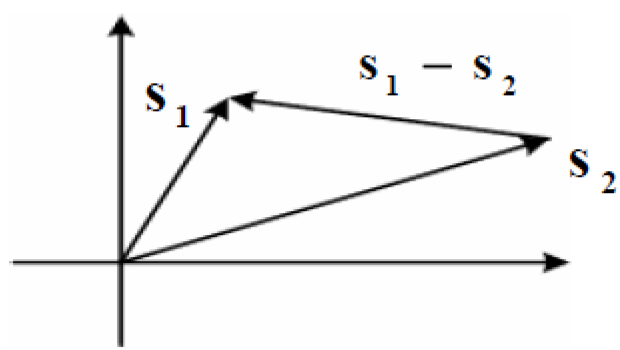
6.4.1 数字调制信号的矢量表示

- M个能量有限的信号波形 $\xrightarrow{\text{映射}}$ N维信号空间中的M个点

- 信号星座：N维信号空间中的M个点的集合，可用几何图形表示 —— 星座图

  - 某点矢量长度的平方：信号的能量

  - 两点之间的距离：欧氏距离
    距离的平方：两信号波形之差的能量



6.4.1 数字调制信号的矢量表示

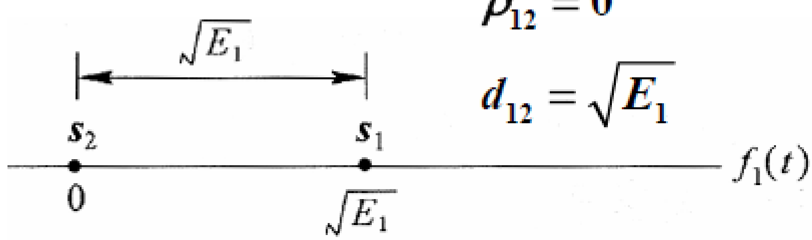
- 例1. OOK信号

$$s(t)=\begin{cases} s_1(t)=\sqrt{\dfrac{2E_1}{T_b}}\cos\omega_c t \\ s_2(t)=0 \end{cases} \qquad 0\le t\le T_b$$

- $f_1(t)=\sqrt{\dfrac{2}{T_b}}\cos\omega_c t$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} s_1(t)=\sqrt{E_1}\,f_1(t) \\ s_2(t)=0 \end{cases}$

- $\mathbf{s}_i=[s_{i1}],\quad s_{i1}=\int_{-\infty}^{\infty}s_i(t)f_1(t)dt,\qquad i=1,2$

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1=\left[\sqrt{E_1}\right] \\ \mathbf{s}_2=[0] \end{cases}$$



$\rho_{12}=0$

$d_{12}=\sqrt{E_1}$

6.4.1 数字调制信号的矢量表示

- 例2. 正交2FSK信号

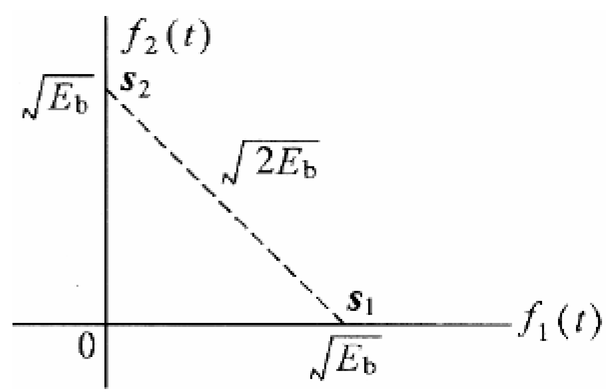
$$s(t)=\begin{cases} s_1(t)=\sqrt{2E_b/T_b}\cos\omega_1 t \\ s_2(t)=\sqrt{2E_b/T_b}\cos\omega_2 t \end{cases} \quad 0\le t\le T_b$$

$$f_1-f_2=k/2T_b \quad \Rightarrow \quad \rho_{12}=\frac{1}{E_b}\int_{-\infty}^{\infty}s_1(t)s_2(t)dt \ =0$$

- $$f_1(t)=\sqrt{2/T_b}\cos\omega_1 t$$
  $$f_2(t)=\sqrt{2/T_b}\cos\omega_2 t$$
  $$\Rightarrow \begin{cases} s_1(t)=\sqrt{E_b}\,f_1(t) \\ s_2(t)=\sqrt{E_b}\,f_2(t) \end{cases}$$

- $$\mathrm{s}_1=[s_{11},\ \ s_{12}]=[\sqrt{E_b},\ \ 0]$$
  $$\mathrm{s}_2=[s_{21},\ \ s_{22}]=[0,\ \ \sqrt{E_b}]$$

$$d_{12}=|\mathrm{s}_1-\mathrm{s}_2|=\sqrt{2E_b}$$



6.4.1 数字调制信号的矢量表示

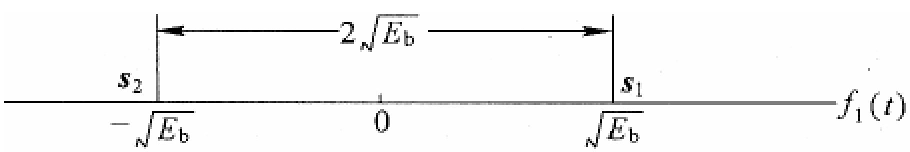
- 例3. 2PSK信号

$$s(t)=\begin{cases} s_1(t)=\sqrt{2E_b/T_b}\cos\omega_c t \\ s_2(t)=-\sqrt{2E_b/T_b}\cos\omega_c t \end{cases} \quad 0\le t\le T_b$$

- $f_1(t)=\sqrt{2/T_b}\cos\omega_c t$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} s_1(t)=\sqrt{E_b}f_1(t) \\ s_2(t)=-\sqrt{E_b}f_1(t) \end{cases}$

- $\mathbf{s}_1=\left[\sqrt{E_b}\right]$

  $\mathbf{s}_2=\left[-\sqrt{E_b}\right]$



- $d_{12}=\left|\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2\right|=2\sqrt{E_b}$

  $\rho_{12}=-1$

6.4.1 标准正交基的构造：G-S法

- 假设通信信道中有M个信号波形$s_i(t)$用于信息传输，据此可构造一个由$N \le M$个标准正交波形构成的集合

- $$f_1(t)=\frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}},\quad E_1=\int_{-\infty}^{\infty}s_1^2(t)\,dt$$ ~ $s_1(t)$的能量

- $$f_2(t)=\frac{d_2(t)}{\sqrt{E_2}},\quad E_2=\int_{-\infty}^{\infty}d_2^2(t)\,dt$$

  其中 $$d_2(t)=s_2(t)-c_{21}f_1(t)$$

  $$c_{21}=\int_{-\infty}^{\infty}s_2(t)f_1(t)\,dt$$ ~ $s_2(t)$在$f_1(t)$上的投影

  。。。。。。

- $$f_k(t)=\frac{d_k(t)}{\sqrt{E_k}},\quad E_k=\int_{-\infty}^{\infty}d_k^2(t)\,dt$$

  其中 $$d_k(t)=s_k(t)-\sum_{i=1}^{k-1}c_{ki}f_i(t)$$

  $$c_{ki}=\int_{-\infty}^{\infty}s_k(t)f_i(t)\,dt,\quad i=1,2,\cdots,k-1$$

6.4.1 数字调制信号的矢量表示

- N维信号空间的一组基：

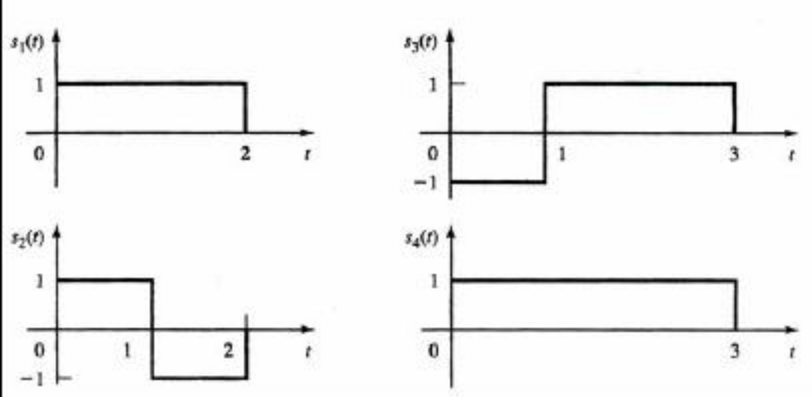
  由N个标准正交波形构成的集合$\left\{f_n(t), n=1,\dots N\right\}$。

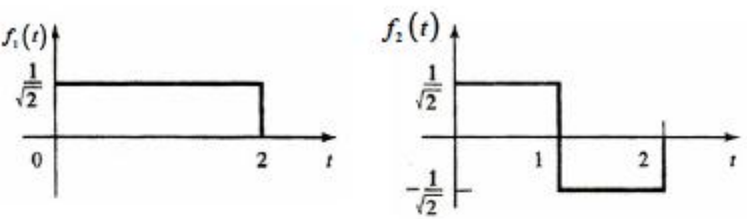
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) f_m(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

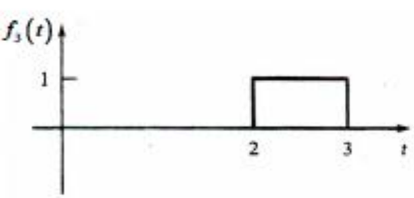
若 M 个信号波形线性无关，则 $N = M$.

6.4.1 数字调制信号的矢量表示

- 例. 对下图所示四波形集进行Gram-Schmidt正交化







- $E_1=2,\ f_1(t)=s_1(t)/\sqrt{2}$.
- $c_{21}=0,\ E_2=2,\ f_2(t)=s_2(t)/\sqrt{2}$.
- $c_{31}=0,\ c_{32}=-\sqrt{2},$

$$d_3(t)=s_3(t)+\sqrt{2}\,f_2(t)$$

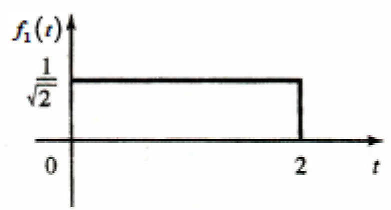
$$f_3(t)=s_3(t)+\sqrt{2}\,f_2(t).$$

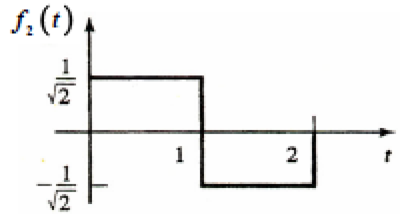
- $c_{41}=\sqrt{2},\ c_{42}=0, c_{43}=1,$

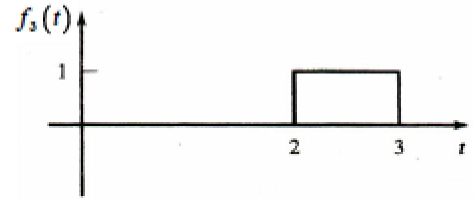
$$d_4(t)=s_4(t)-\sqrt{2}\,f_1(t)-f_3(t)=0$$

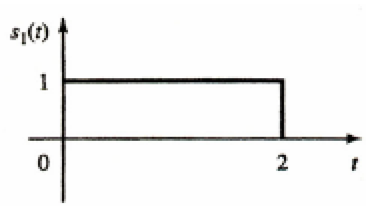
$\therefore\quad N=3.$

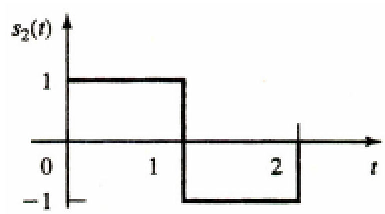
6.4.1 数字调制信号的矢量表示

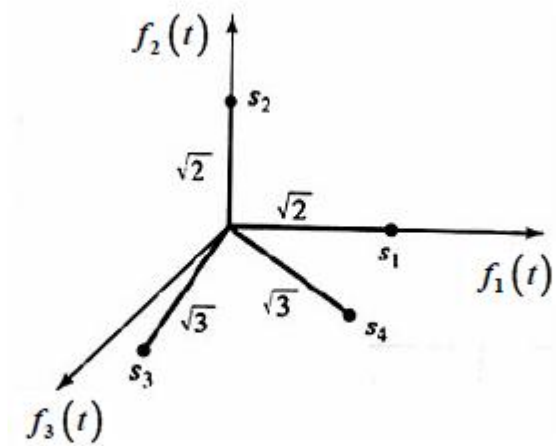




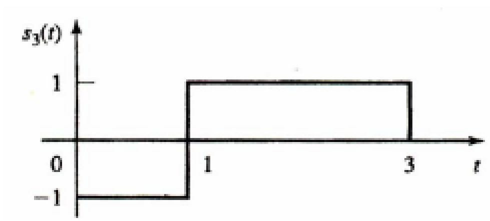


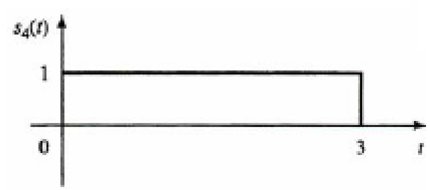






$$\mathbf{s}_1 = \left(\sqrt{2},\ 0,\ 0\right) \qquad \mathbf{s}_2 = \left(0,\ \sqrt{2},\ 0\right)$$

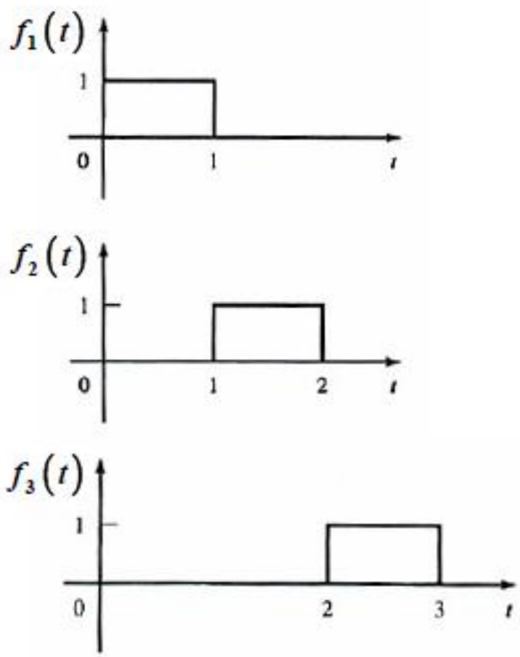


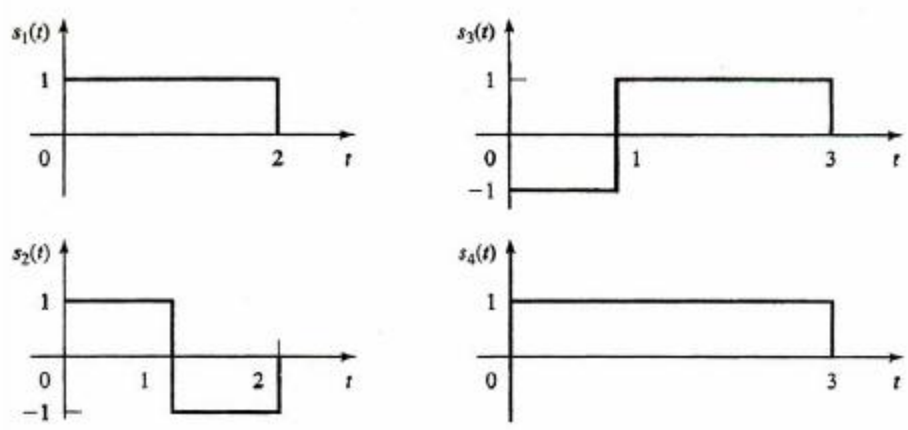


$$\mathbf{s}_3 = \left(0,\ -\sqrt{2},\ 1\right) \qquad \mathbf{s}_4 = \left(\sqrt{2},\ 0,\ 1\right)$$

6.4.1 数字调制信号的矢量表示

标准正交函数集$\{f_n(t), n=1,\ldots N\}$不唯一.





$$\mathbf{s}_1 = (1,\ 1,0) \qquad \mathbf{s}_3 = (-1,\ 1,1)$$

$$\mathbf{s}_2 = (1,\ -1,0) \qquad \mathbf{s}_4 = (1,\ 1,1)$$

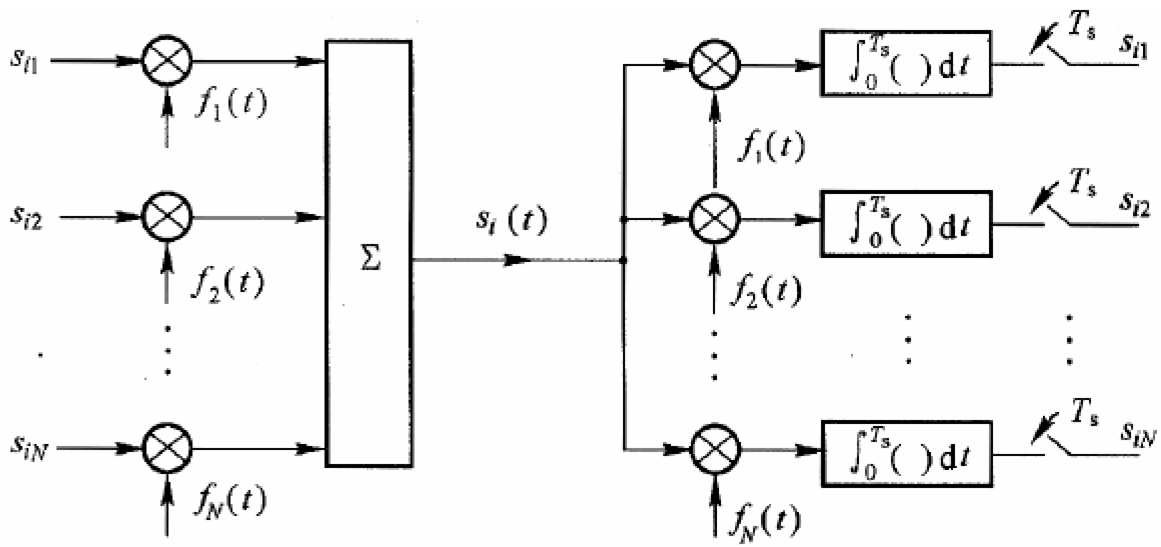
标准正交函数集的变化不改变信号空间的维数、信号矢量的长度及任意两个矢量的内积.

6.4.2 统计判决理论

- 信号波形的正交展开

$$s_i(t) \Longleftrightarrow \mathbf{s}_i = [s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{iN}], \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad N \le M$$

$$s_i(t) = \sum_{k=1}^{N} s_{in} f_n(t) \quad \text{where} \quad s_{in} = \int_0^{T_s} s_i(t) \cdot f_n(t) dt$$



6.4.2 统计判决理论

- 问题的提出
  - 若在$0 \leqslant t \leqslant T_s$区间内发送M进制数字调制信号波形$\{s_i(t),\ i=1,2,\ldots,M\}$之一，信道传输中受到加性高斯白噪声$n_w(t)$干扰，接收到的信号为:

$$r(t) = s_i(t) + n_w(t), \quad i=1,2,\ldots,M. \quad 0 \leqslant t \leqslant T_s$$

设$s_i(t)$为确定信号,发端发送$s_i(t)$的概率(先验概率)为$P(s_i)$

  - 判决: 根据$r(t)$判断发端发出的信号波形是哪一个$s_i(t)$

如何使平均错判概率最小?

统计判决理论要解决的问题：根据平均错判概率最小的原则设计最佳接收。

6.4.2 统计判决理论

- 做出假设

  对信源输出的符号/发送的信号波形做出M个假设：

  $$\{s_i, i=1,2,\ldots,M\}$$

  先验概率：每个假设出现的概率 $P(s_i)$

- 信道的转移概率 $s_i(t)+n_w(t)\rightarrow r(t)$

  - 观察矢量： $\mathbf{r}=[r_1,\ldots,r_N]$

  观察矢量$\mathbf{r}$与s_i之间无确定的函数关系,但具有转移概率关系，即

$$p(\mathbf{r}|s_i) \quad \text{or} \quad P(\mathbf{r}|s_i)$$

$\boxed{r_i\text{连续}}$ $\boxed{r_i\text{离散}}$

6.4.2 统计判决理论

- 问题一：

$$r(t)\xrightarrow{?}\mathbf{r}=[r_1,r_2,\ldots,r_N]$$

~ 有限维观察矢量且为充分统计量

- 问题二：$p(\mathbf{r}|s_i)=p(r_1,r_2,\ldots,r_N|s_i)$

$r_1,r_2,\ldots,r_N$ 应为相互统计独立的高斯随机变量

6.4.2 统计判决理论

- 接收信号波形的正交展开

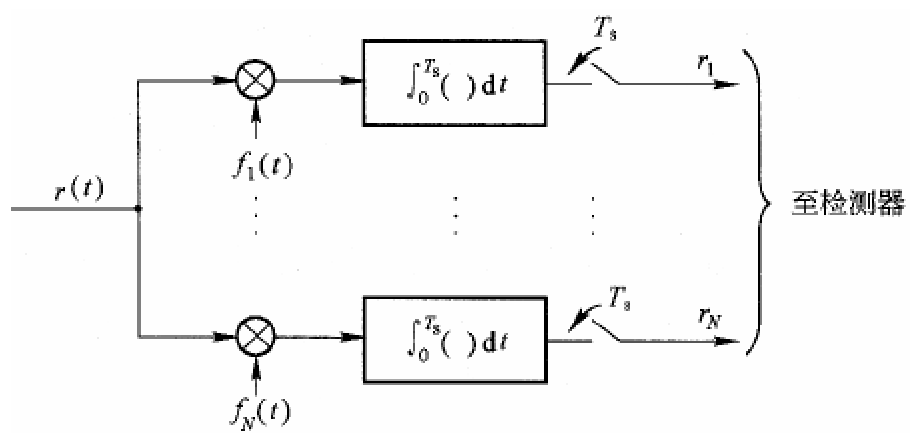
$$r(t)=s_i(t)+n_W(t),\quad i=1,...,M,\quad 0\le t\le Ts$$

$\mathbf{r}=[r_1,r_2,...,r_N]$ ~ 观察矢量(维数N由信号波形$s_i(t)$的维数决定)

$$r_k=\int_0^{T_s} r(t)f_k(t)dt \ =s_{ik}+n_k,\quad i=1,...,M;k=1,...,N$$

其中：$s_{ik}=\int_0^{T_s} s_i(t)\cdot f_k(t)dt,\quad n_k=\int_0^{T_s} n_w(t)\cdot f_k(t)dt$

可以证明：各r_k相互统计独立，且观察矢量$\mathbf{r}$是充分统计量(包含了$r(t)$中所有与判决有关的信息)



6.4.2 统计判决理论

- 问题2：r 的统计特性？

- $n_k = \int_0^T n_w(t) f_k(t) dt$ ~ 高斯随机变量

$$E[n_k] = \int_0^T E[n_w(t)] f_k(t) dt \;= 0$$

$$E[n_k n_m] = \int_0^T E[n_w(t) n_w(\tau)] f_k(t) f_m(\tau) dt d\tau$$

$$= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(t-\tau) f_k(t) f_m(\tau) dt d\tau$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_0^T f_k(t) f_m(t) dt \;= \frac{N_0}{2} \delta_{mk} \xrightarrow{m=k} \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}$$

$$\therefore \quad p(n_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{n_k^2}{2\sigma_n^2}\right) \;= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{n_k^2}{N_0}\right)$$

$$p(\mathbf{n}) = \prod_{k=1}^{N} p(n_k) \;= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{N} \frac{n_k^2}{N_0}\right)$$

6.4.2 统计判决理论

- $r_k = s_{ik} + n_k$ ～高斯随机变量

$$E[r_k] = E[s_{ik} + n_k] = s_{ik}$$

$$\sigma_r^2 = \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}$$

$$\therefore \quad p(r_k | s_{ik}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{(r_k - s_{ik})^2}{N_0} \right]$$

$$p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_i) = \prod_{k=1}^{N} p(r_k | s_{ik}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left[-\sum_{k=1}^{N} \frac{(r_k - s_{ik})^2}{N_0} \right]$$

$$= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left[-\frac{\| \mathbf{r} - \mathbf{s}_i \|^2}{N_0} \right], \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

6.4.2 统计判决理论

- 问题1：r 对于发送信号的判决是否统计充分？

$$r(t)=s_i(t)+n_w(t)$$

$$=\sum_{k=1}^{N}s_{ik}f_k(t)+\sum_{k=1}^{N}n_k f_k(t)+n'(t)\ =\sum_{k=1}^{N}r_k f_k(t)+n'(t)$$

$$\Longrightarrow\ n'(t)=n_w(t)-\sum_{k=1}^{N}n_k f_k(t)$$

$$E\left[n'(t)r_k\right]=E\left[n'(t)s_{ik}\right]+E\left[n'(t)n_k\right]\ =E\left[n'(t)n_k\right]$$

$$=E\left\{\left[n_w(t)-\sum_{j=1}^{N}n_j f_j(t)\right]n_k\right\}=\int_0^T E\left[n_w(t)n_w(\tau)\right]f_k(t)d\tau+\sum_{j=1}^{N}E\left(n_j n_k\right)f_j(t)$$

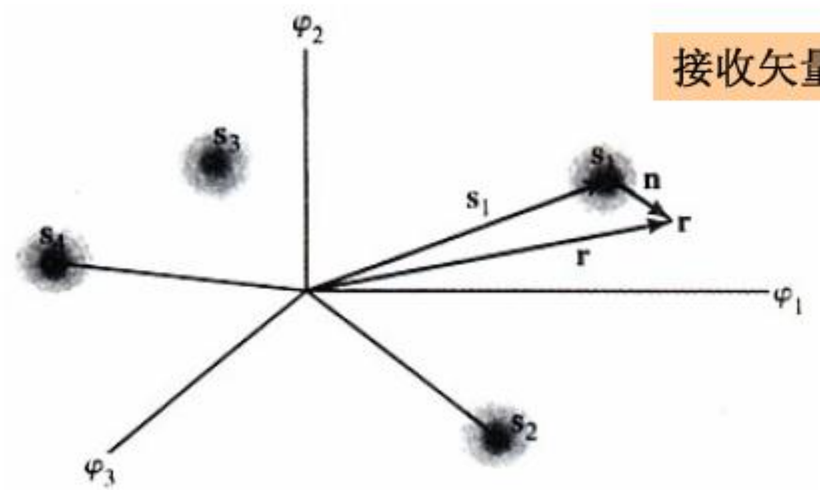
$$=\frac{N_0}{2}f_k(t)-\frac{N_0}{2}f_k(t)\ =0$$

$\Longrightarrow$ $n'(t)$不包含与判决有关的任何信息

6.4.2 统计判决理论

$\mathbf{r} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$ ～观察矢量空间

其中，$\mathbf{r} = (r_1, r_2, ..., r_N)$，$\mathbf{s}_i = (s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{iN})$，$\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_N)$.



接收矢量r：以s_i为中心的球形云图

- 信号检测的任务：根据接收矢量r对发送信号做出判决，并使正确判决的概率最大.

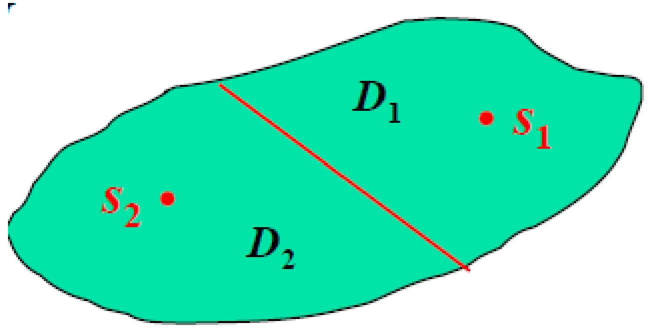
6.4.2 统计判决理论

- 选择合适的判决准则：

  最小错判概率准则/最大后验概率准则(MAP)

- 最佳地划分判决区域

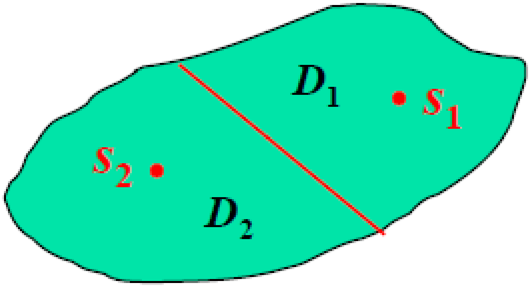
  根据 $P(s_i)$, $p(\mathrm{r}|s_i)$ 与 MAP 准则确定判决区域 D_i，$i=1,2,\ldots,M$。



- 最佳判决：$if\ \mathrm{r} \in D_i$, then $\hat{s} = s_i$.

$$P_e = \sum_{i=1}^{M} P(s_i) \cdot P\left(\hat{s} \neq s_i \middle| s_i\right) = \sum_{i=1}^{M} P(s_i) \cdot P\left(e \middle| s_i\right)$$

6.4.2 统计判决理论



- 在发s_i的条件下，正确判决的概率：

$$P\left(\hat{s}=s_i \middle| s_i\right)=\int_{D_i} p\left(\mathbf{r} \middle| s_i\right) d\mathbf{r}$$

对应的错判概率：

$$P\left(e \middle| s_i\right)=P\left(\hat{s}\neq s_i \middle| s_i\right)=1-\int_{D_i} p\left(\mathbf{r} \middle| s_i\right) d\mathbf{r}$$

$$P_e=\sum_{i=1}^{M} P(s_i)\cdot P\left(e \middle| s_i\right)=1-\sum_{i=1}^{M}\underline{\int_{D_i} P(s_i)\, p\left(\mathbf{r} \middle| s_i\right) d\mathbf{r}}$$

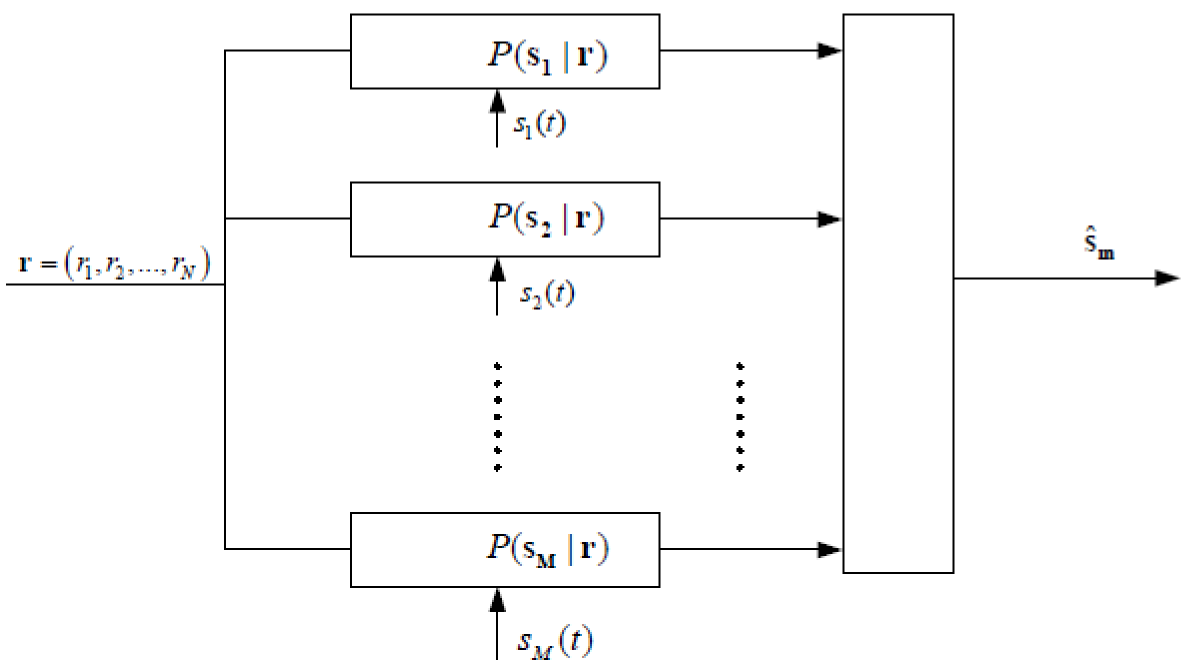
使P_e最小的判决规则： $\hat{s}=\arg\max P(s_i)\, p\left(\mathbf{r} \middle| s_i\right)$

定义后验概率： $P\left(s_i \middle| \mathbf{r}\right)=\dfrac{P(s_i)\, p\left(\mathbf{r} \middle| s_i\right)}{p(\mathbf{r})}$

6.4.2 统计判决理论

- 最大后验概率准则(MAP)：根据接收矢量r同时计算M个后验概率$\{P(s_i|\mathbf{r}),\ i=1,\ldots,M\}$，选择使$P(s_i|\mathbf{r})$最大的$s_i$作为判决输出，此时错误判决概率最小.

$$\hat{s} = \arg\max_{s_i} P\left(s_i \middle| \mathbf{r}\right) = \arg\max_{s_i} P(s_i)\, p\left(\mathbf{r} \middle| s_i\right)$$



6.4.2 统计判决理论

- 最大似然(ML)准则：根据接收矢量r同时计算M个似然函数$\{p(\mathrm{r}|\mathrm{s}_i), i=1,\ldots M\}$，选择使$p(\mathrm{r}|\mathrm{s}_i)$最大的$\mathrm{s}_i$作为判决输出.

$$\hat{s} = \arg\max_{s_i} p\left(\mathrm{r} \middle| s_i\right),$$

其中 $p\left(\mathrm{r}\middle|\mathrm{s}_i\right)$ ~似然函数

根据Bayes公式，$P\left(\mathrm{s}_i\middle|\mathrm{r}\right) = \dfrac{p\left(\mathrm{r}\middle|\mathrm{s}_i\right)P\left(\mathrm{s}_i\right)}{p\left(\mathrm{r}\right)}$

- 先验等概时，ML准则等价于MAP准则.

- 实际应用中，信源编码的使用，可以放心的用ML代替MAP。

6.4.2 统计判决理论

- 在AWGN信道条件下，

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_i)=\prod_{k=1}^{N}p(r_k|s_{ik})=\frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}}\exp\left[-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\|^2}{N_0}\right]$$

$$\ln p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_i)=-\frac{N}{2}\ln(\pi N_0)-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\|^2}{N_0}$$

定义

$$D(\mathbf{r},\mathbf{s}_i)=\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\|^2=\sum_{k=1}^{N}(r_k-s_{ik})^2,\quad i=1,2,\dots,M$$

~距离度量

- 对于加性白高斯噪声信道，基于ML准则的判决规则等价于寻求在距离上最接近于接收信号矢量r的信号$\mathbf{s}_i$.

6.4.2 统计判决理论

$$D(\mathbf{r},\mathbf{s}_i)=\sum_{k=1}^{N}(r_k-s_{ik})^2 \quad =\sum_{k=1}^{N}r_k^2-2\sum_{k=1}^{N}r_k s_{ik}+\sum_{k=1}^{N}s_{ik}^2$$

$$=\|\mathbf{r}\|^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_i+\|\mathbf{s}_i\|^2,\quad i=1,2,\ldots,M$$

定义

$$D'(\mathbf{r},\mathbf{s}_i)=-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_i+\|\mathbf{s}_i\|^2,\quad i=1,2,\ldots,M$$ ~修正距离度量

$$C(\mathbf{r},\mathbf{s}_i)=2\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_i-\|\mathbf{s}_i\|^2,\quad i=1,2,\ldots,M$$ ~相关度量

信号等能量 $\longrightarrow$ $C(\mathbf{r},\mathbf{s}_i)=\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_i$

- 对于加性白高斯噪声信道，基于ML准则的判决规则等价于计算一组M个相关度量$C(\mathbf{r},\mathbf{s}_i)$，并选择对应于最大度量的信号$\mathbf{s}_i$

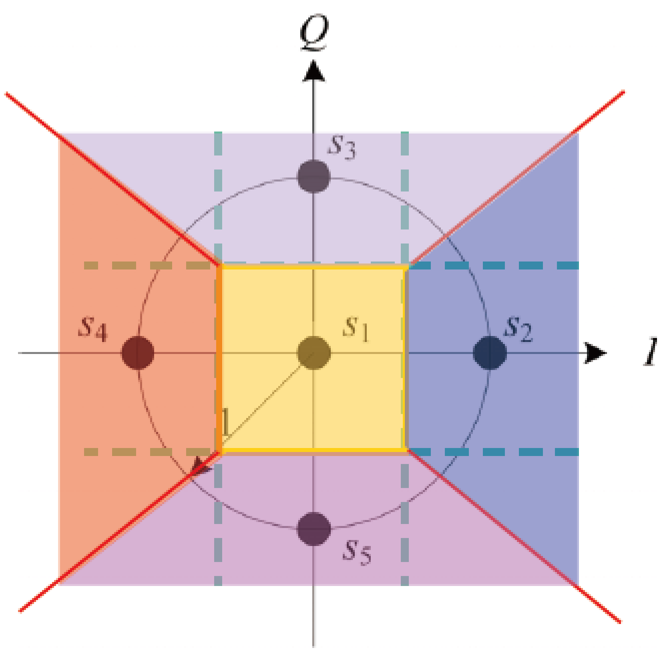
6.4.2 统计判决理论

MAP准则 $\xrightarrow{\text{先验等概}}$ ML准则 $\xrightarrow{\text{AWGN信道}}$ 最小距离准则

最大相关准则
(信号等能量)

6.4.2 统计判决理论

- 某个5进制信号星座如下图所示，若信道噪声是加性白高斯噪声，请画出按最大似然判决准则进行判决时，各符号的判决域。若各符号等概出现，求平均符号能量。



- $$E_s = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} E_i$$

$$= \frac{1}{5}\left[0 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2\right]$$

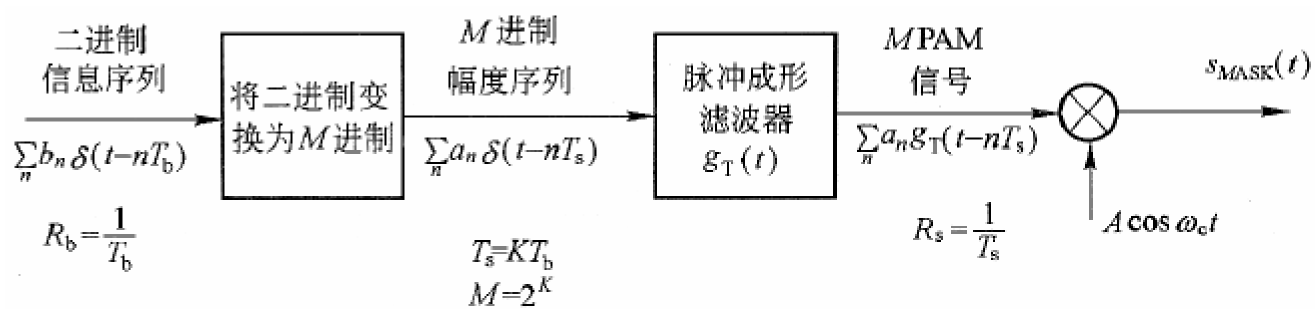
$$= 0.8$$

6.4.4 MASK

M进制符号间隔T_s内,载波振幅是$M=2^m$个电平之一,每种电平对应一个M进制符号

$$s_{MASK}(t)=b(t)A\cos\omega_c t=\sum_n a_n g_T(t-nT_s)\,A\cos\omega_c t$$

$$=a_n A\cos\omega_c t,\qquad (n-1)T_s\le t\le nT_s$$



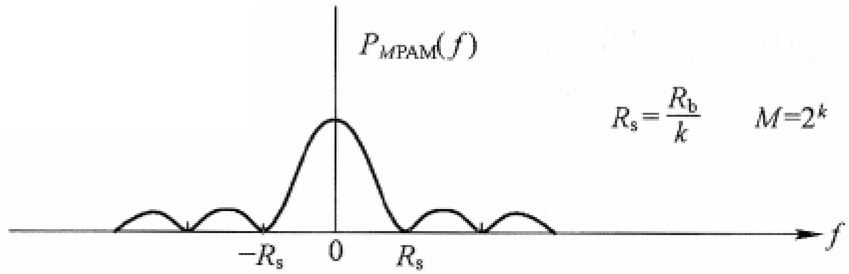
$$P_s(f)=\frac{A^2}{4}[P_b(f-f_c)+P_b(f+f_c)]$$

若$g_T(t)$矩形不归零,$\{a_n\}$各电平等概，各符号互不相关且$E[a_n]=0$， 则

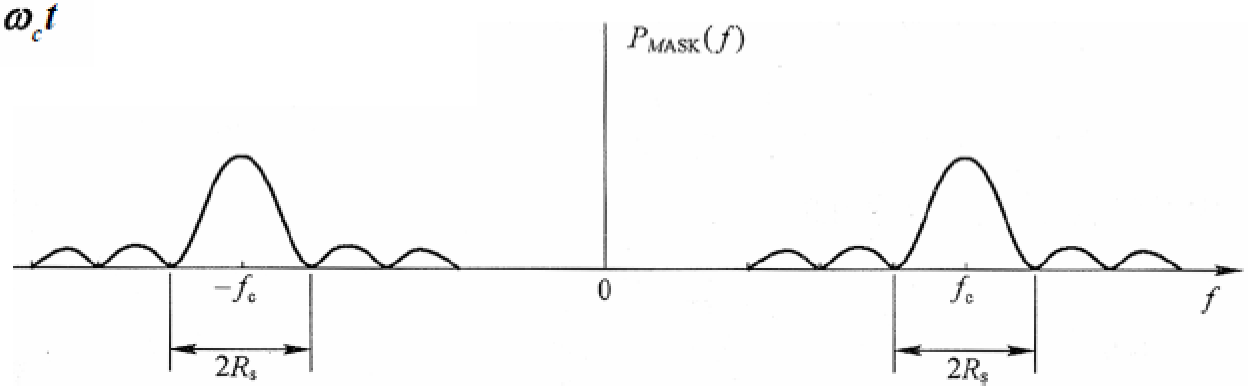
$$P_b(f)=\frac{\sigma_a^2}{T_s}|G_T(f)|^2=\sigma_a^2A^2T_s\mathrm{sinc}^2(fT_s)$$

6.4.4 MASK

$$b(t)=\sum_n a_n g_T\left(t-nT_s\right)$$



$$s_{MASK}(t)=b(t)\cdot A\cos\omega_c t$$



- 特点：主瓣宽度为$2R_s$，仅取决于符号速率$R_s=R_b/k$

- 频带利用率：$\dfrac{R_s}{2R_s}=\dfrac{1}{2}\text{Baud/Hz}$ 或 $\dfrac{kR_s}{2R_s}=\dfrac{k}{2}\text{bit/s/Hz}$

6.4.4 MASK

- $0 \le t \le T_s$， $b_i(t) = a_i g_T(t)$ 其中 $a_i = 2i - 1 = \pm 1, \ldots, \pm(M-1)$， $i = -\frac{M}{2} + 1, \ldots, \frac{M}{2}$

  $$s_i(t) = b_i(t)\cos\omega_c t = a_i g_T(t)\cos\omega_c t \overset{\Delta}{=} s_i f_1(t)$$

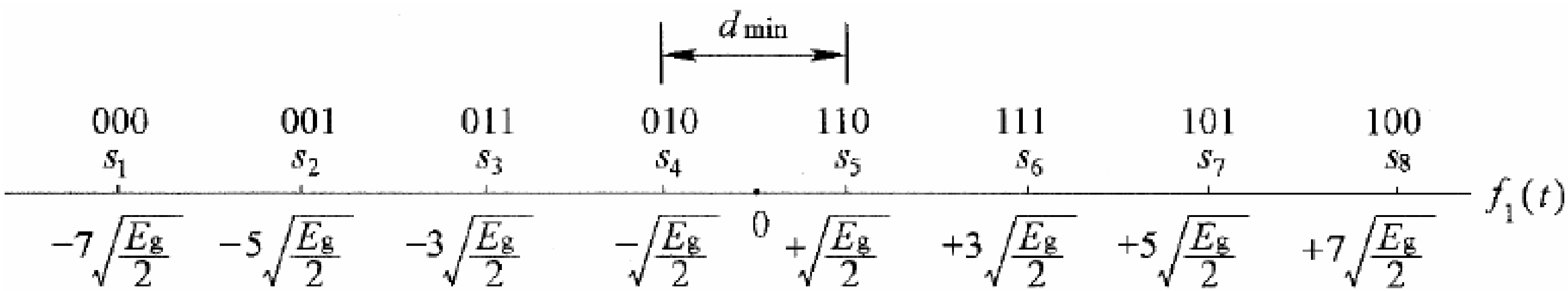
  其中： $f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}}\, g_T(t)\cos\omega_c t \qquad E_g = \int_0^{T_s} g_T^2(t)dt$

  $$s_i = \int_0^{T_s} s_i(t) f_1(t) dt = \sqrt{\frac{E_g}{2}}\, a_i \quad \sim s_i(t)\text{在}f_1(t)\text{上的投影}$$

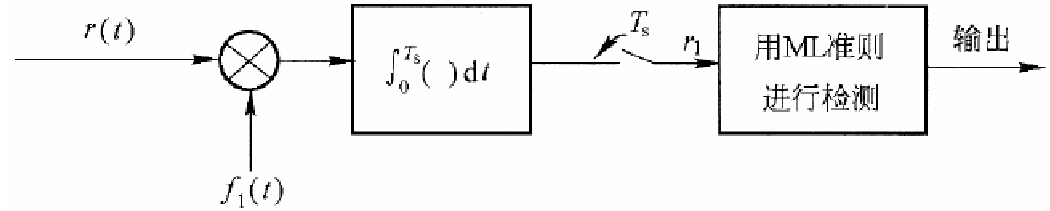
  $$\mathrm{s}_i = [s_i], \qquad i = 1, \ldots, M \qquad d_{mn} = \sqrt{(s_m - s_n)^2} = \sqrt{\frac{E_g}{2}}\,|a_m - a_n| = \sqrt{2E_g}\,|m-n|$$

- 例. M=8时的8ASK信号空间图

  $$a_i = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7 \qquad s_i = \sqrt{\frac{E_g}{2}}\, a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 8 \qquad d_{\min} = \sqrt{2E_g}$$



6.4.4 MASK



- $r_1 = \int_0^{T_s} r(t) f_1(t) dt = \int_0^{T_s} \left[s_i(t) + n_w(t) \right] f_1(t) dt$

  $= s_i + n, \quad i = 1, \ldots, M$

- ML准则(等概条件下): $\hat{s} = \underset{s_i}{\arg\max}\, p(r_1 | s_i)$
  - $n = \int_0^{T_s} n_w(t) f_1(t) dt$

    $E(n) = E\left[\int_0^{T_s} n_w(t) f_1(t) dt \right] = 0$

    $D(n) = E\left[\int_0^{T_s} \int_0^{T_s} n_w(t) n_w(z) f_1(t) f_1(z) dt dz \right]$

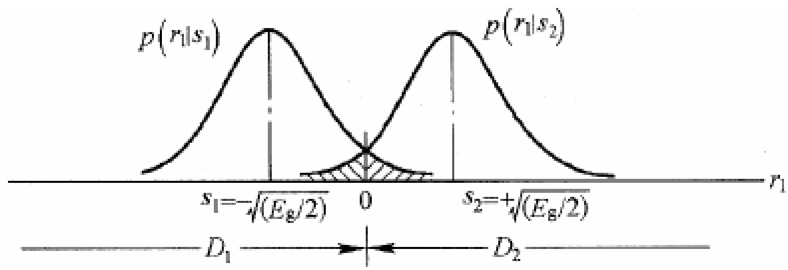
    $= \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{N_0}{2} \delta(t-z) f_1(t) f_1(z) dt dz$

    $= \frac{N_0}{2}$

- $r_1 = s_i + n \implies p(r_1 | s_i) = \frac{1}{\sqrt{2N_0}} \exp\left[-\frac{(r_1 - s_i)^2}{N_0} \right]$

6.4.4 MASK

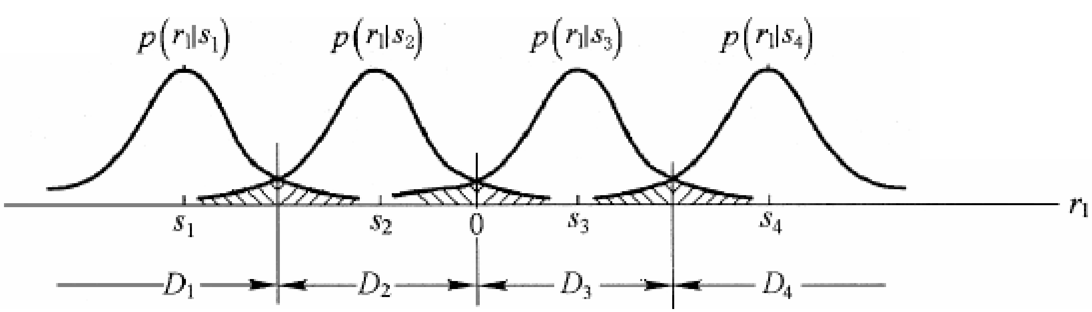
- M=2



V_T=0

$$p(e|s_1)=\int_0^{\infty}p(r_1|s_1)\mathrm{d}r_1=Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}}\right),\quad p_b=Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2N_0}}\right)$$ （等概时）

- M=4



$$P_e=Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}}\right)$$

$$P_M=p_1\cdot P_e+p_2\cdot 2P_e+p_3\cdot 2P_e+p_4\cdot P_e=\frac{3}{2}P_e$$**(等概时)**

6.4.4 MASK

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} \cos\omega_c t$$

$$d_{min} = 2\sqrt{\frac{E_g}{2}} = \sqrt{2E_g}$$

- 推广：对于$M = 2^k$

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}}\right) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right)$$

- 第i个MASK信号波形的能量：

$$E_i = |s_i|^2 = \frac{E_g a_i^2}{2}, i = 1, \dots, M$$

平均符号能量：

$$E_{\text{avg}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} E_i = \frac{E_g}{2M}\sum_{i=1}^{M}(2i-1-M)^2 = \frac{M^2-1}{6}E_g$$

平均比特能量：

$$E_b = \frac{E_{\text{avg}}}{\log_2 M} = \frac{M^2-1}{6\log_2 M}E_g$$

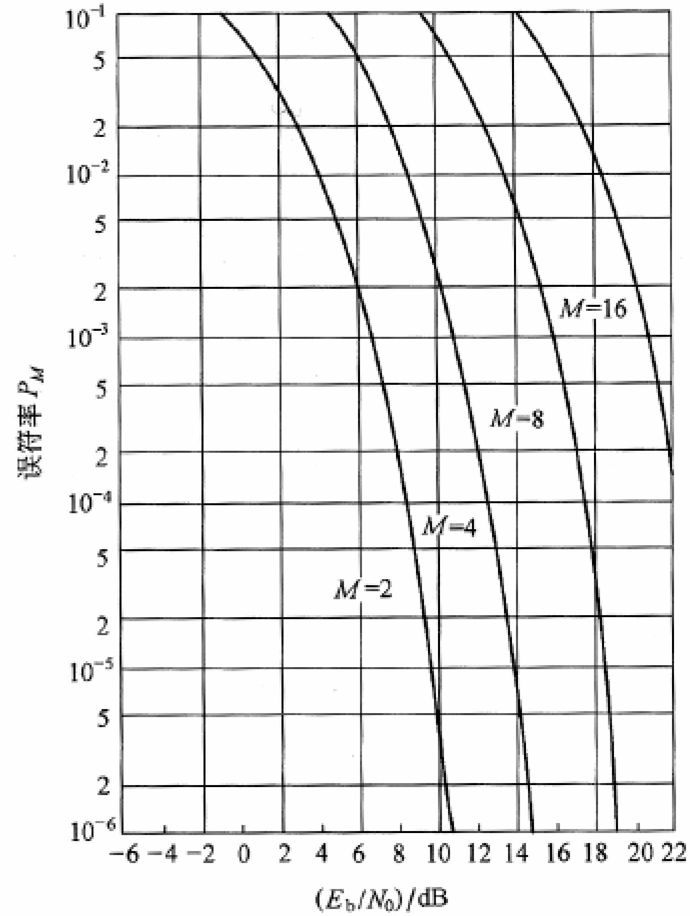
$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

6.4.4 MASK

- 误符号率P_M：理论信噪比一定，$M\uparrow$，$P_M\uparrow$.

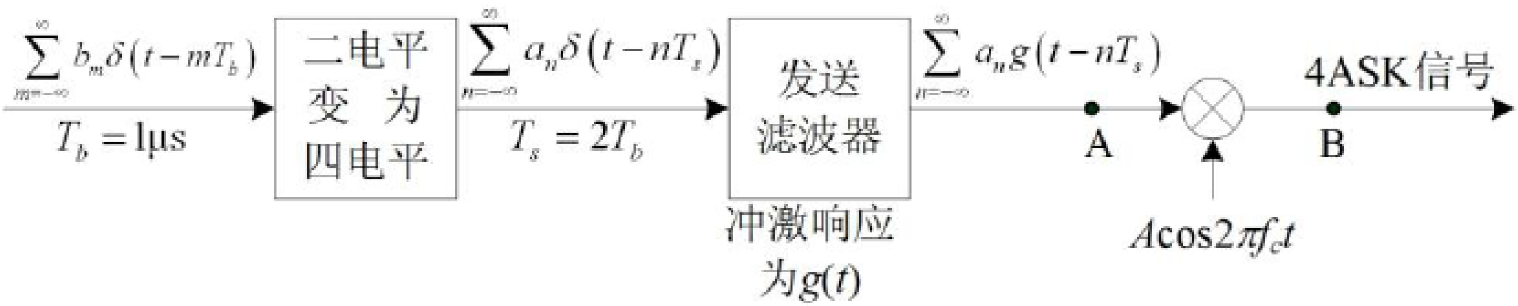
- 误比特率P_b：格雷编码映射下，近似有

$$P_b \approx \frac{P_M}{\log_2 M}$$



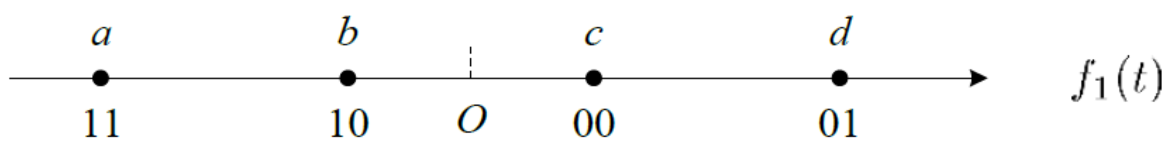
例题5

6. 错误!未定义书签。 下图是 4ASK 的产生框图，其中$\{b_m\}$是速率为 1Mbps 的独立等概二进制序列，$b_m \in \{1,0\}$，$a_n \in \{-3,-1,+1,+3\}$， $\{a_n\}$是独立等概的四进制序列。$g(t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{T_s}} & 0\le t\le T_s \\ 0 & else\end{cases}$。求 A 点和 B 点的功率谱密度，并画图。



例：

五、（10 分）某 4ASK 系统的输入速率为 2Mbps，已知输入的比特序列为独立但不等概序列，其中“0”的出现概率是 1/4。该系统发送信号的星座图如下



其中 a、b、c、d 四个点的坐标分别是$-3, -1, 1, 3$，基函数$f_1(t) = g(t)\cos 2\pi f_c t$，$g(t)$是能量为 2、滚降系数为 0.5 的根升余弦成形脉冲。

1) 求 a、b、c、d 各点的出现概率。
2) 求 a、b、c、d 各点所对应波形$s_a(t), s_b(t), s_c(t), s_d(t)$的能量。
3) 求该系统发送信号的平均符号能量E_s、平均比特能量E_b。
4) 画出发送信号的功率谱密度示意图。

6.4.5 MPSK

- MPSK: 在一个M进制符号间隔内，M种可能符号对应M种可能的载波相位

$$s_i(t)=g_T(t)\cos\left[2\pi f_c t+\frac{2\pi(i-1)}{M}\right]=g_T(t)\cos[2\pi f_c t+\theta_i]$$

$$=g_T(t)\left[\cos\theta_i\cos 2\pi f_c t-\sin\theta_i\sin 2\pi f_c t\right]$$

$$=g_T(t)\left[a_{i_c}\cos 2\pi f_c t-a_{i_s}\sin 2\pi f_c t\right],i=1,\dots,M,0\le t\le T_s$$

$$\begin{cases}a_{i_c}=\cos\theta_i=\cos\left[\dfrac{2\pi(i-1)}{M}\right]\\ a_{i_s}=\sin\theta_i=\sin\left[\dfrac{2\pi(i-1)}{M}\right]\end{cases}\quad 且 a_{i_c}{}^2+a_{i_s}{}^2=1$$

- $MPSK$各信号波形等能量：

$$E_s=\int_0^{T_s}s_i^2(t)dt=\int_0^{T_s}\frac{1}{2}g_T^2(t)dt=\frac{E_g}{2},\quad i=1,2,\dots,M$$

- MPSK有两个坐标轴，却是一维调制：两坐标一约束→1 DoF

6.4.5 MPSK

$$s_i(t)=g_T(t)\left[a_{i_c}\cos\omega_c t-a_{i_s}\sin\omega_c t\right],\quad 0\le t\le T_s$$

- $f_1(t)=\sqrt{2/E_g}\,g_T(t)\cos 2\pi f_c t$

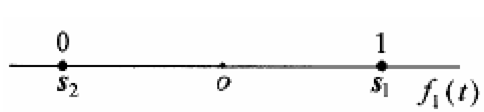
  $f_2(t)=-\sqrt{2/E_g}\,g_T(t)\sin 2\pi f_c t$ $\Longrightarrow$ $s_i(t)=s_{i1}f_1(t)+s_{i2}f_2(t)$

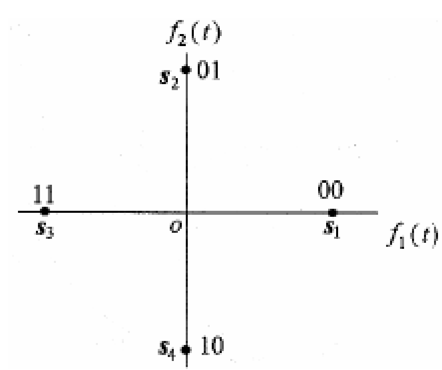
- $s_{i1}=\int_0^{T_s}s_i(t)f_1(t)dt=\sqrt{E_s}\,a_{i_c}$

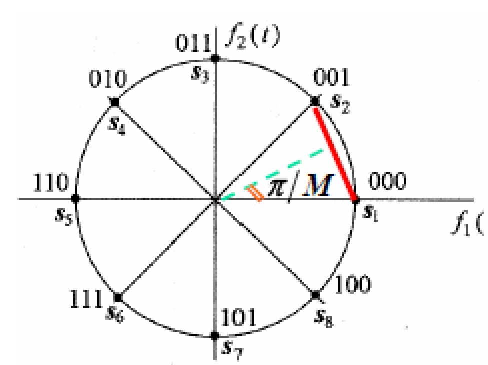
  $s_{i2}=\int_0^{T_s}s_i(t)f_2(t)dt=\sqrt{E_s}\,a_{i_s}$ $\Longrightarrow$ $s_i=[s_{i1},s_{i2}]=\left[\sqrt{E_s}\,a_{i_c},\sqrt{E_s}\,a_{i_s}\right]$

  且$a_{i_c}{}^2+a_{i_s}{}^2=1$

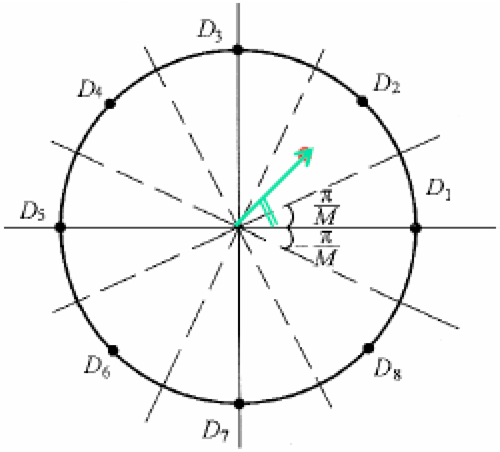
- $d_{\min}=2\sqrt{E_s}\sin\dfrac{\pi}{M}$

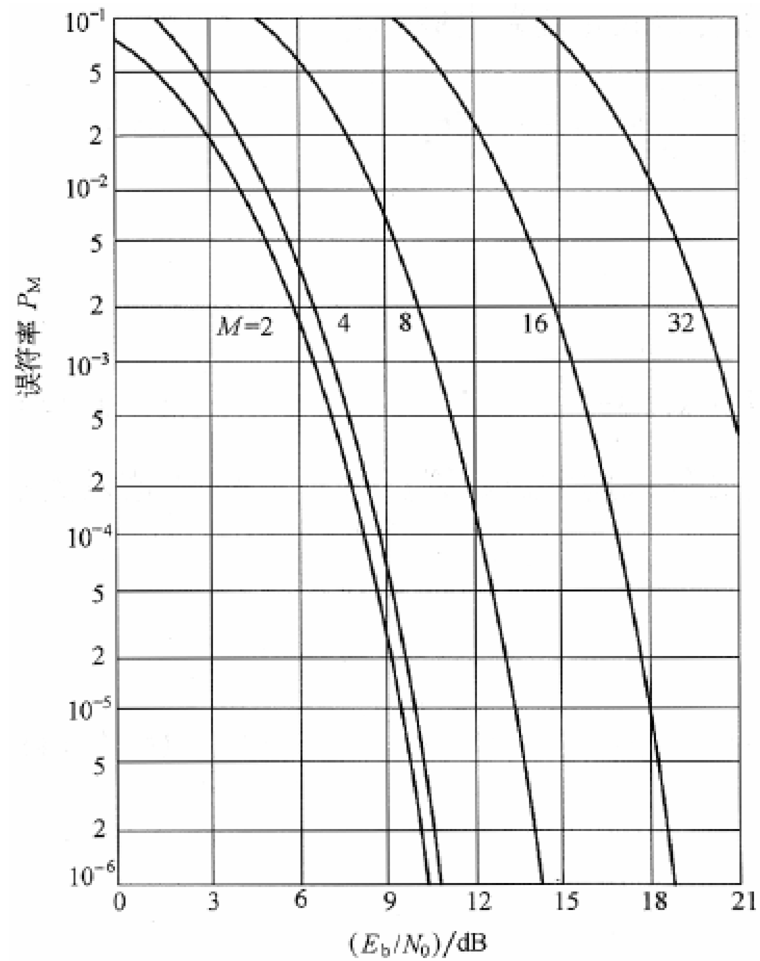






6.4.5 MPSK





- $$P\left(e\left|s_1\right.\right)=1-\int_{-\pi/M}^{\pi/M}p\left(\theta_r\left|s_1\right.\right)d\theta_r$$

- $$P_M=\sum_{i=1}^{M}P\left(s_i\right)P\left(e\left|s_i\right.\right)$$

$$\approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2\log_2 M\cdot E_b}{N_0}}\sin\frac{\pi}{M}\right)$$

6.4.6 QAM

- **QAM**由两个正交载波的**MASK**信号叠加而成

$$s_{QAM}(t) = a_{i_c} g_T(t)\cos\omega_c t - a_{i_s} g_T(t)\sin\omega_c t, i = 1, \cdots, M, \qquad 0 \le t \le T_s$$

$$a_{i_c}, a_{i_s} \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm\sqrt{M}\}, \qquad a_{i_c}^2 + a_{i_s}^2 = 1, 9, \dots, M$$

$$s_{QAM}(t) = \mathrm{Re}\{V_i e^{j\theta_i} g_T(t) e^{j\omega_c t}\}$$

$$V_i = \sqrt{a_{i_c}^2 + a_{i_s}^2}, \quad \theta_i = \mathrm{atan}\left(\frac{a_{i_s}}{a_{i_c}}\right)$$

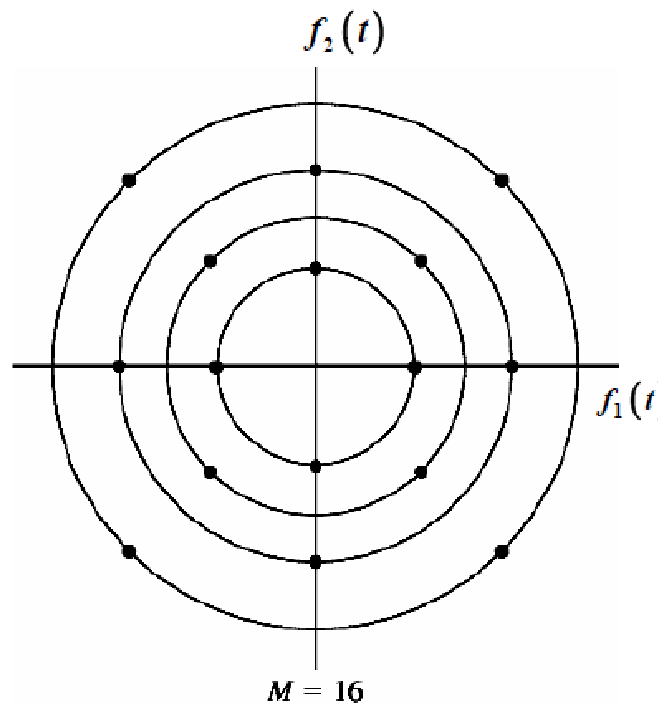
~ 数字振幅和数字相位联合调制(PAM-PSK)

- QAM信号的矢量表示

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g_T(t)\cos\omega_c t$$

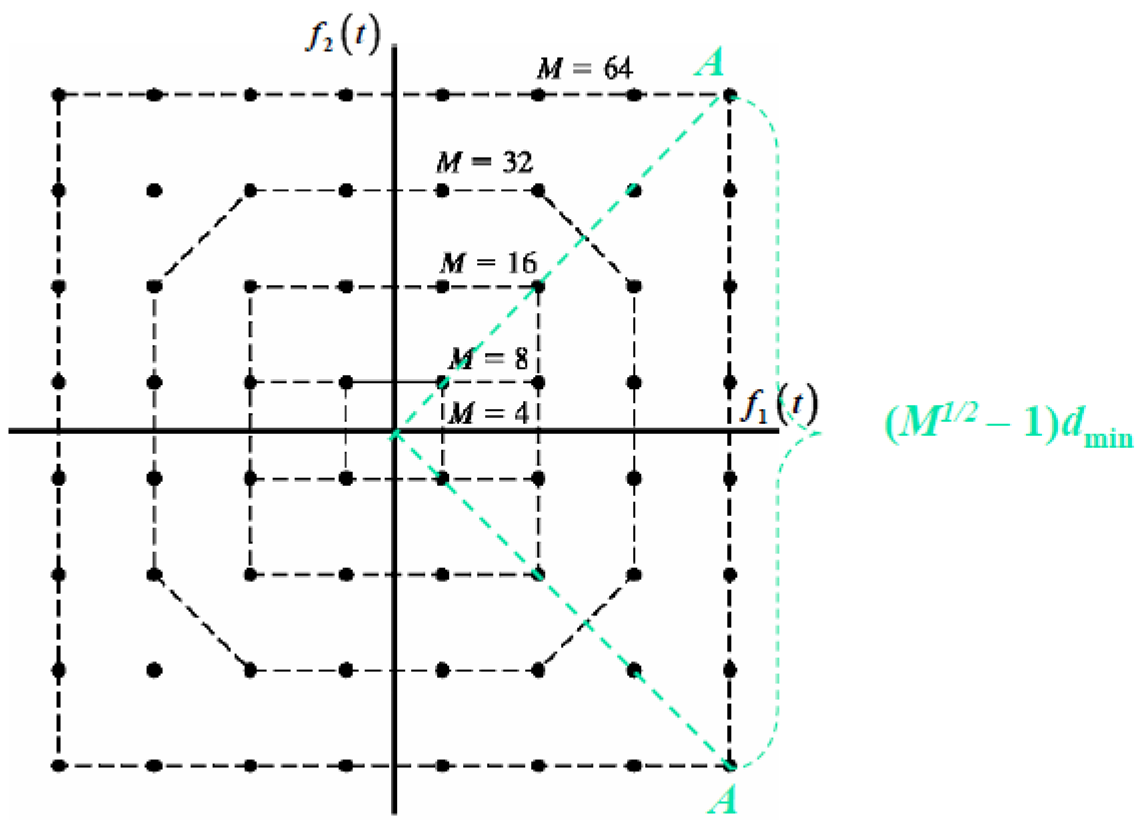
$$f_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g_T(t)\sin\omega_c t$$

$$\Rightarrow \quad s_i = [s_{i1}, s_{i2}] = \sqrt{E_g/2}\,[a_{i_c}, a_{i_s}]$$



6.4.6 QAM

- 矩形QAM信号星座：可分解为两路独立正交的$M^{1/2}$进制PAM信号，调制解调较为简单

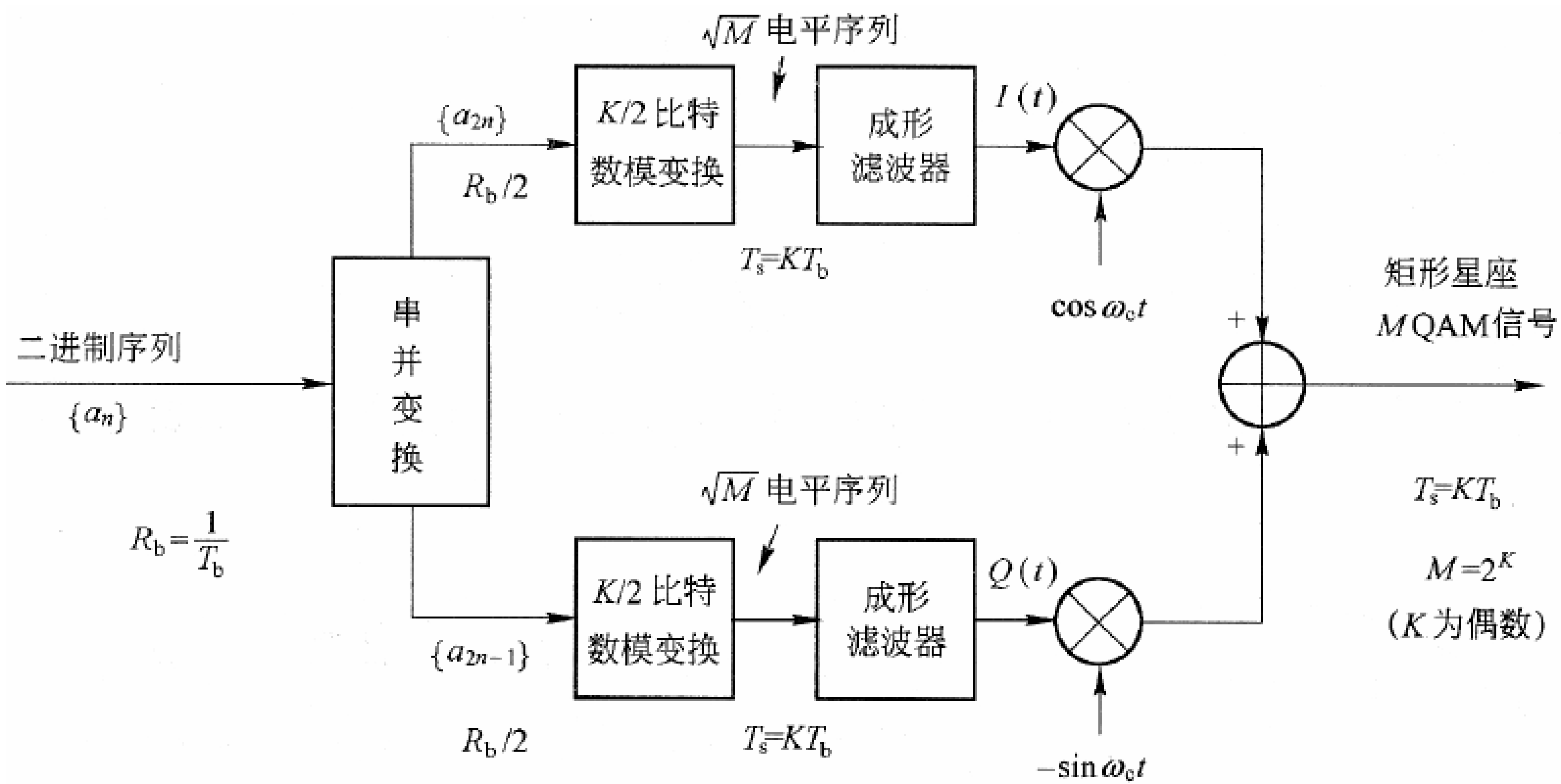


A ~ 最大振幅

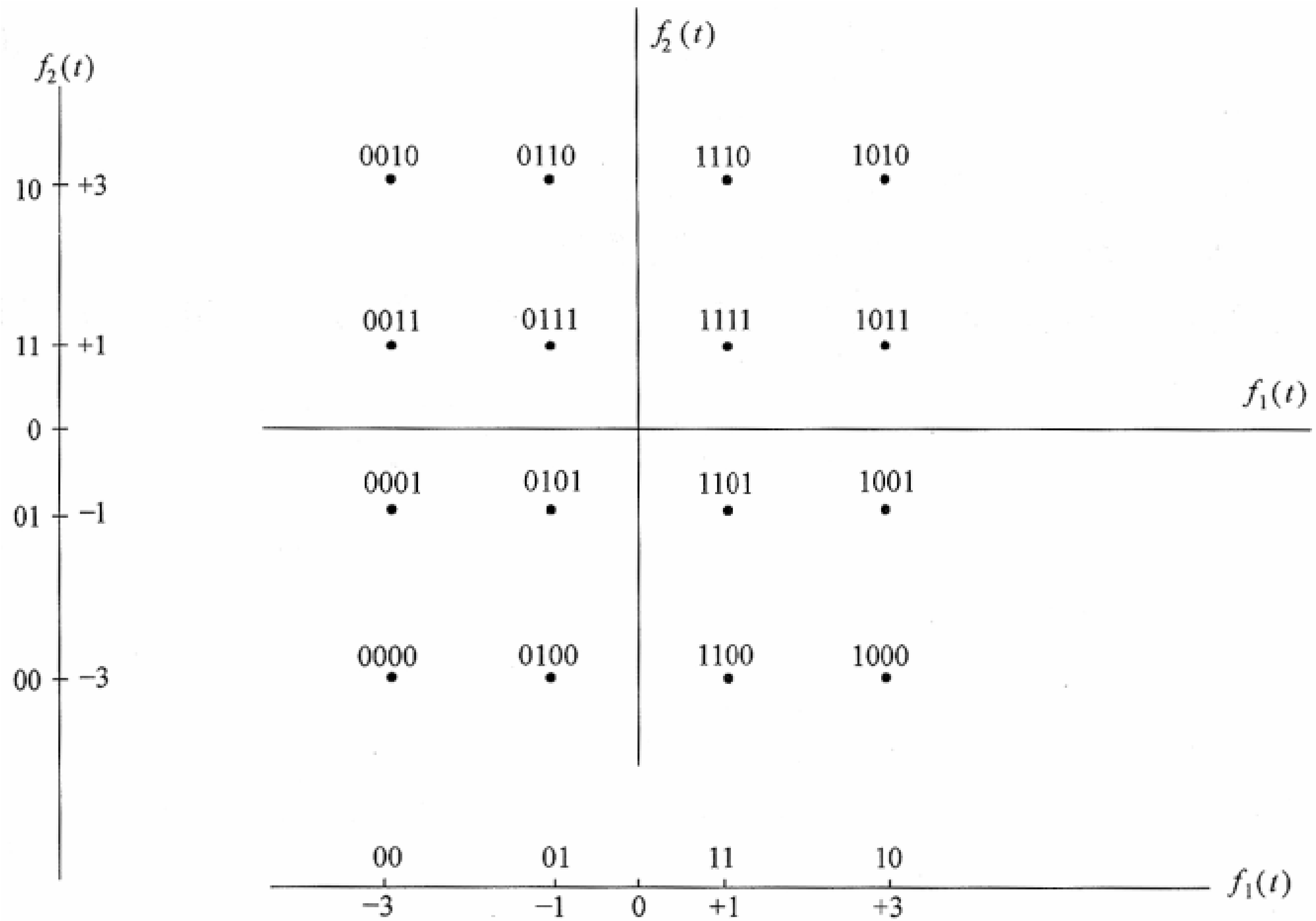
$$d_{min} = \frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{M} - 1}$$

6.4.6 QAM

$$s_{QAM}(t) = a_{i_c} g_T(t)\cos\omega_c t - a_{i_s} g_T(t)\sin\omega_c t,\quad i = 1,2,\ldots,M,\quad 0 \le t \le T_s$$



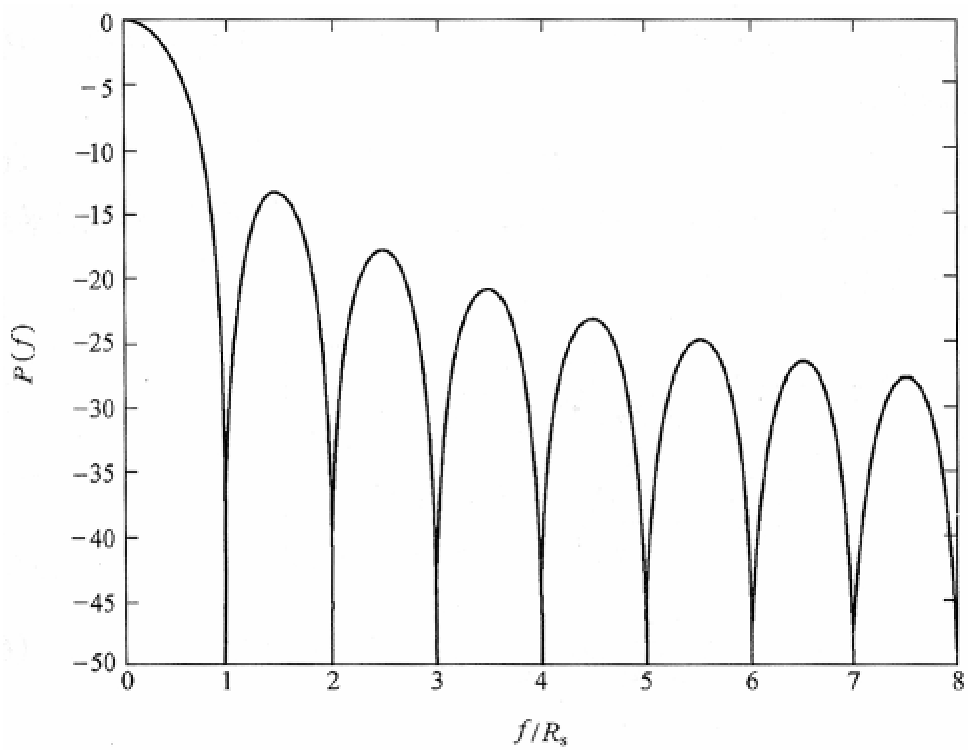
6.4.6 QAM



$f_2(t)$
$f_2(t)$
10 +3
11 +1
0
01 −1
00 −3
0010
0110
1110
1010
0011
0111
1111
1011
$f_1(t)$
0001
0101
1101
1001
0000
0100
1100
1000
00
01
11
10
$f_1(t)$
−3
−1
0
+1
+3

6.4.6 QAM

- **MAQM**的功率谱：同相及正交支路的平均功率谱密度之和

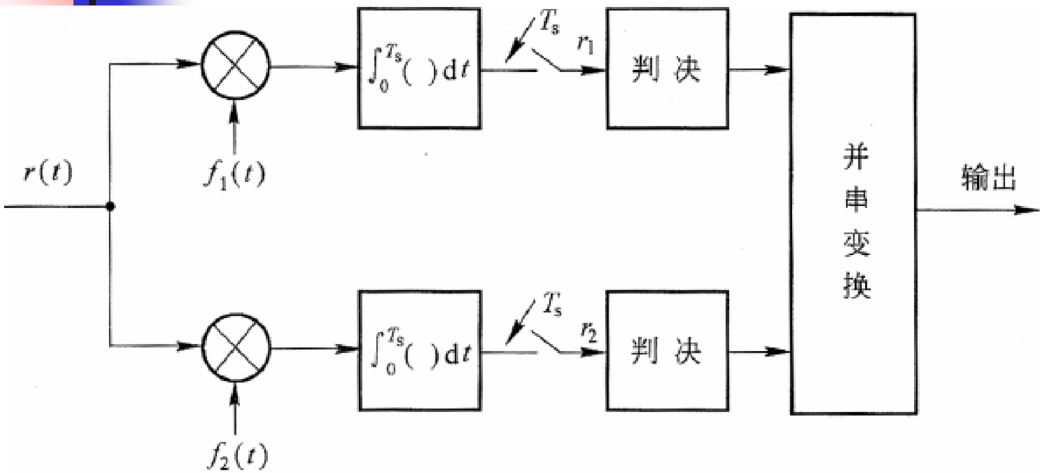


- $$B = 2R_s = \frac{2R_b}{\log_2 M}$$

- $$\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{R_b}{2\dfrac{R_b}{\log_2 M}}$$

$$= \frac{\log_2 M}{2}\text{bit/s/Hz}$$

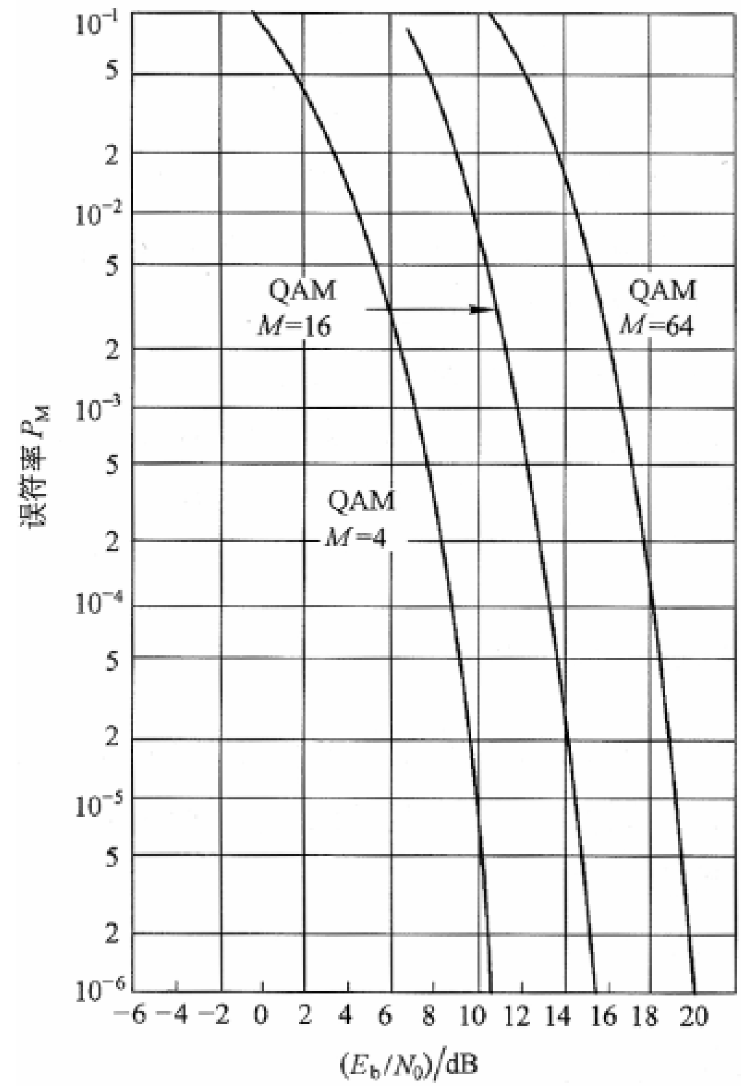
6.4.6 QAM



- $$P_c = \left(1 - P_{\sqrt{M}}\right)^2$$

$$P_{\sqrt{M}} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\cdot\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- $$P_M = 1 - P_c = 1 - \left(1 - P_{\sqrt{M}}\right)^2$$



6.4.6 QAM

- $P_{M-PSK} \simeq 2Q\left(\sqrt{2\frac{E_{av}}{N_0}\cdot\sin^2\frac{\pi}{M}}\right)$

- $P_{M-QAM} \simeq 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\cdot\frac{E_{av}}{N_0}}\right)$

$\mathfrak{R}_M = \frac{3/(M-1)}{2\sin^2\pi/M}$ ~ 两系统获得相同误符率所需的理论**SNR**之比

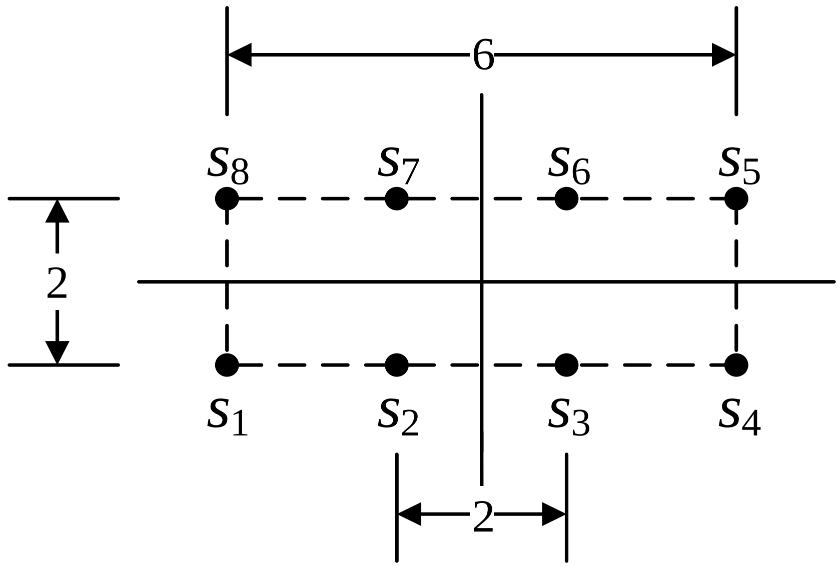
- $M = 4: \quad \mathfrak{R}_M = 1$
- $M > 4: \quad \mathfrak{R}_M > 1$

即**MQAM**好于**MPSK.**

M	$10\lg\mathfrak{R}_M$ (dB)
8	1.65
16	4.20
32	7.02
64	9.95

例1:

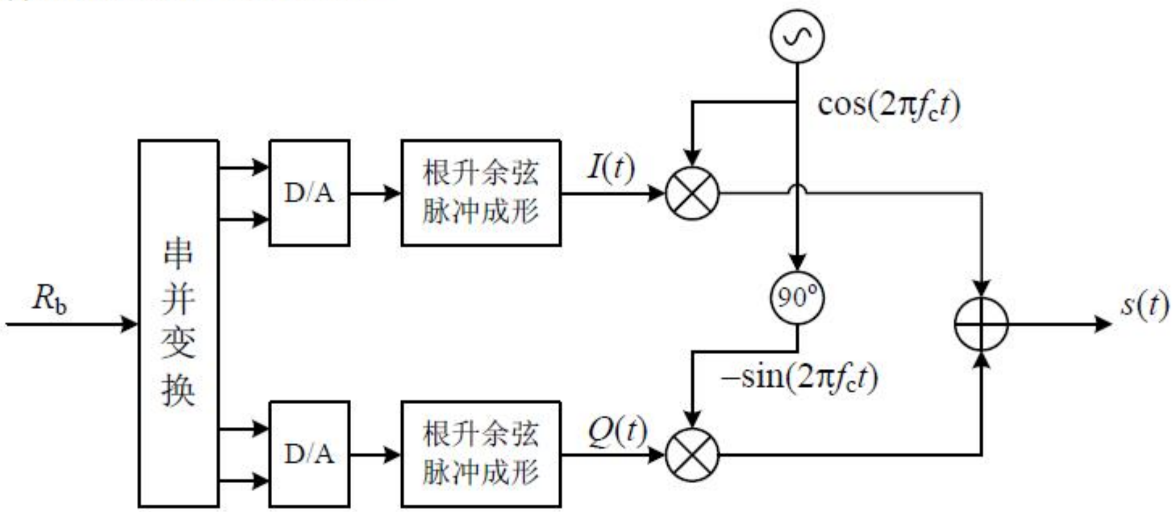
某8进制调制在归一化正交基下的星座图如下所示。假设各星座点等概出现，信道中加性白高斯噪声的双边功率谱密度是$\frac{N_0}{2}=\frac{1}{2}$。



(1) 求平均符号能量E_S 、最小星座点距离,并标出s_1的佳判决域；
(2) 按格雷码映射规则标注出各星座点所携带的比特；
(3) 求发送s_1条件下误判为s_2,s_3,s_4之一的总概率。

例题2

五、（12 分）下图所示为一个 16QAM 系统，已知该系统的滚降系数是 0.5，发送信号 $s(t)$的带宽是 12MHz。

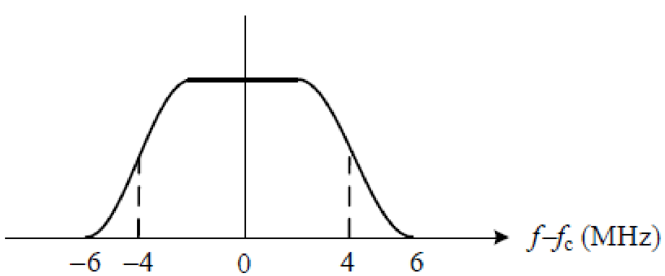


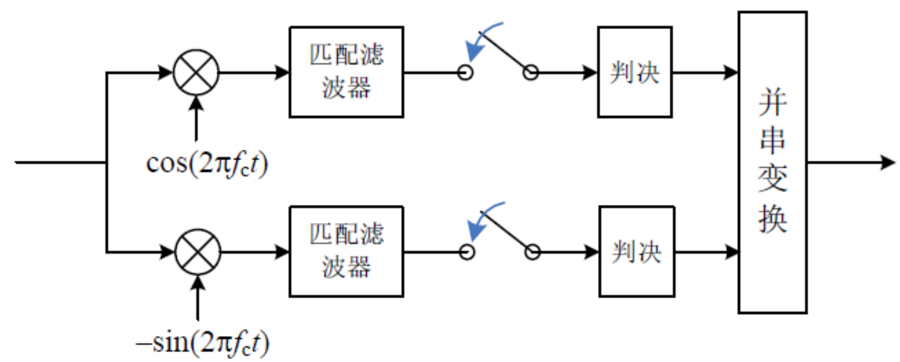
(1)求该系统的数据传输速率 R_b。

(2)画出 $s(t)$的功率谱图。

(3)画出接收框图。

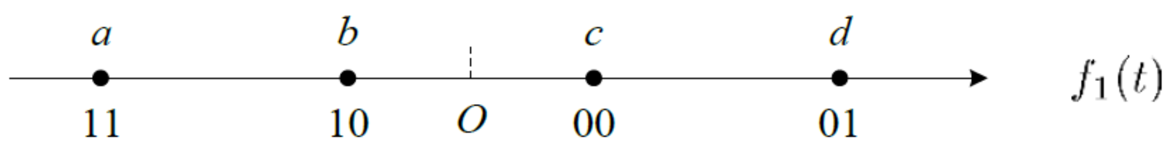
$$R_s(1+\alpha)=B, \quad R_s=\frac{12}{1+0.5}=8\text{MBaud}, \quad R_b=4R_s=32\text{Mbps}$$





例：

五、（10 分）某 4ASK 系统的输入速率为 2Mbps，已知输入的比特序列为独立但不等概序列，其中“0”的出现概率是 1/4。该系统发送信号的星座图如下



其中 a、b、c、d 四个点的坐标分别是$-3, -1, 1, 3$，基函数$f_1(t) = g(t)\cos 2\pi f_c t$，$g(t)$是能量为 2、滚降系数为 0.5 的根升余弦成形脉冲。

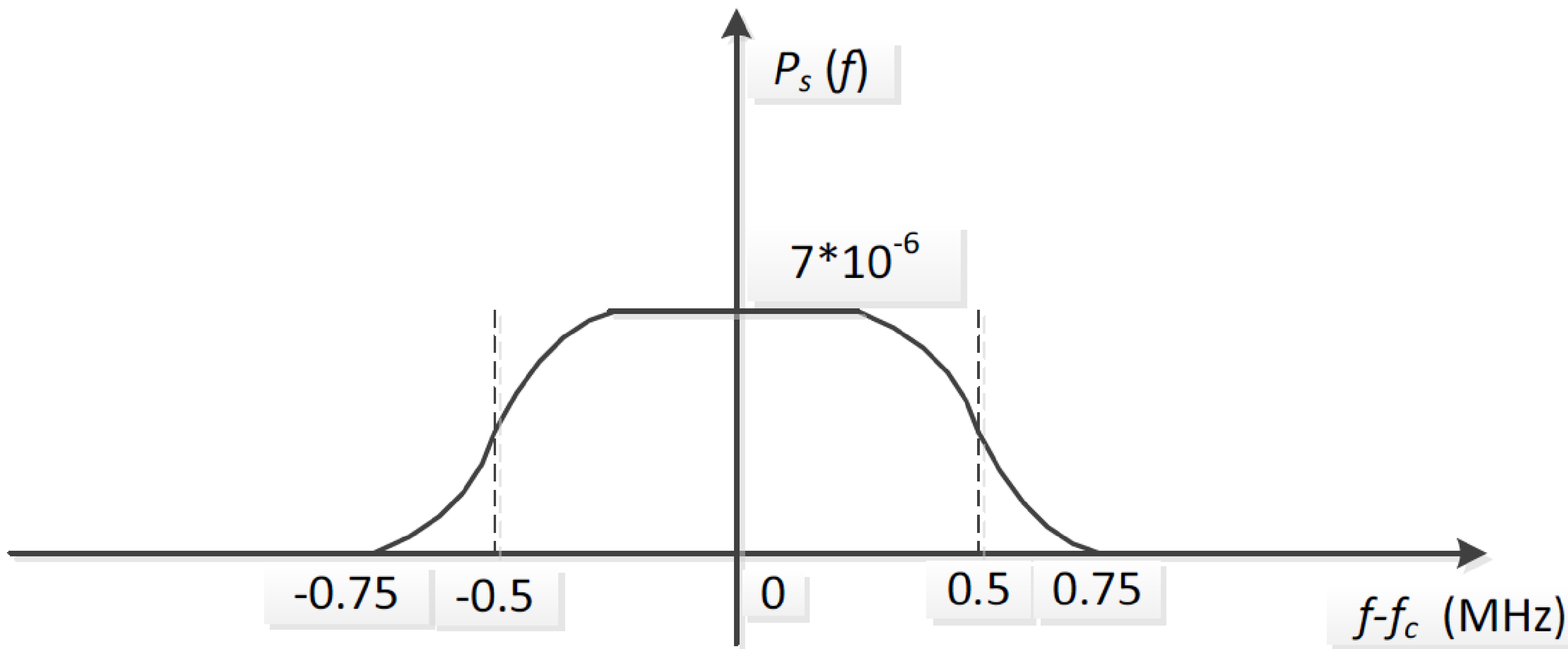
1) 求 a、b、c、d 各点的出现概率。
2) 求 a、b、c、d 各点所对应波形$s_a(t), s_b(t), s_c(t), s_d(t)$的能量。
3) 求该系统发送信号的平均符号能量E_s、平均比特能量E_b。
4) 画出发送信号的功率谱密度示意图。

1） $p_a = \frac{9}{16},\ p_b = p_d = \frac{3}{16}, p_c = \frac{1}{16}$

2） $S_a = S_d = 9, S_b = S_c = 1$

3） $E_s = \sum_{i=1}^{4} p_i S_i = 7, E_b = \frac{E_s}{2} = 3.5$

4）



6.4.7 MFSK信号表示

- $$s_{i,MFSK}(t)=\sqrt{\frac{2E_s}{T_s}}\cos[2\pi f_c t+2\pi i\Delta f t],\ i=1,\cdots,M,\quad 0\le t\le T_s$$

$$=\mathrm{Re}\{V_i(t)e^{j2\pi f_c t}\}\ \text{with}\ V_i(t)=\sqrt{\frac{2E_s}{T_s}}e^{j2\pi i\Delta f t}$$

- 各信号波形等能量：$E_s=\int_{-\infty}^{\infty}s_i^2(t)dt$

- 各信号波形之间的互相关系数

$$\rho_{mk}=\frac{1}{E_s}\int_{-\infty}^{\infty}s_m(t)s_k(t)dt$$

$$=\frac{2}{T_s}\int_0^{T_s}\left[\cos 2\pi\left(f_c+k\Delta f\right)t\cdot\cos 2\pi\left(f_c+m\Delta f\right)t\right]dt$$

$$=\mathrm{sinc}\left[2\left(m-k\right)\Delta f T_s\right]$$

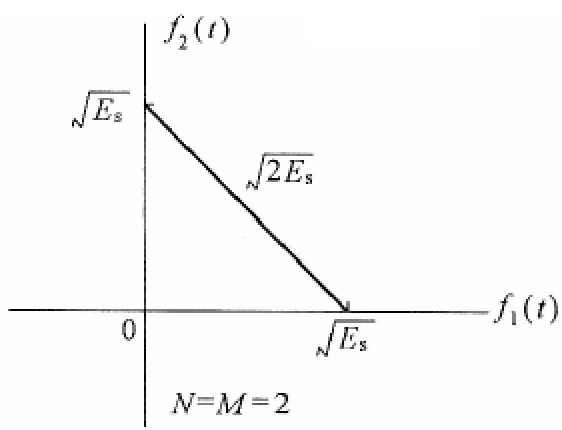
$\Delta f=\frac{1}{2T_s},\quad \rho_{km}=0$ ⟹ 正交MFSK

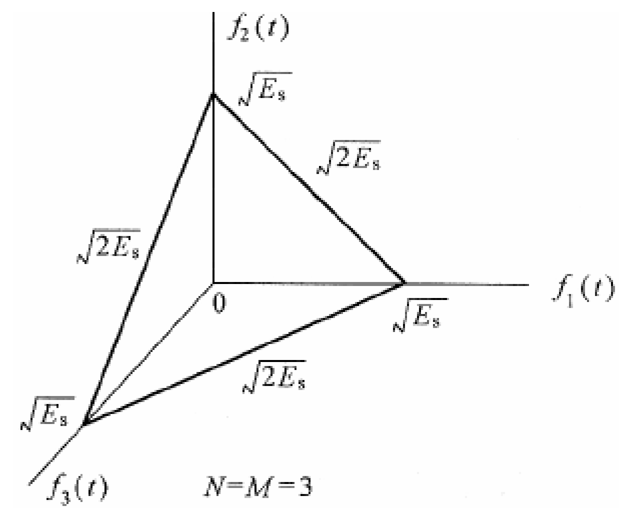
6.4.7 MFSK矢量表示（星座图）

- $s_i(t)=\sqrt{E_s}\,f_i(t),\quad i=1,2,\dots,M,\quad 0\le t\le T_s$

  where $f_i(t)=\sqrt{2/T_s}\cos 2\pi\left(f_c+i\Delta f\right)t,\quad i=1,\dots,M$

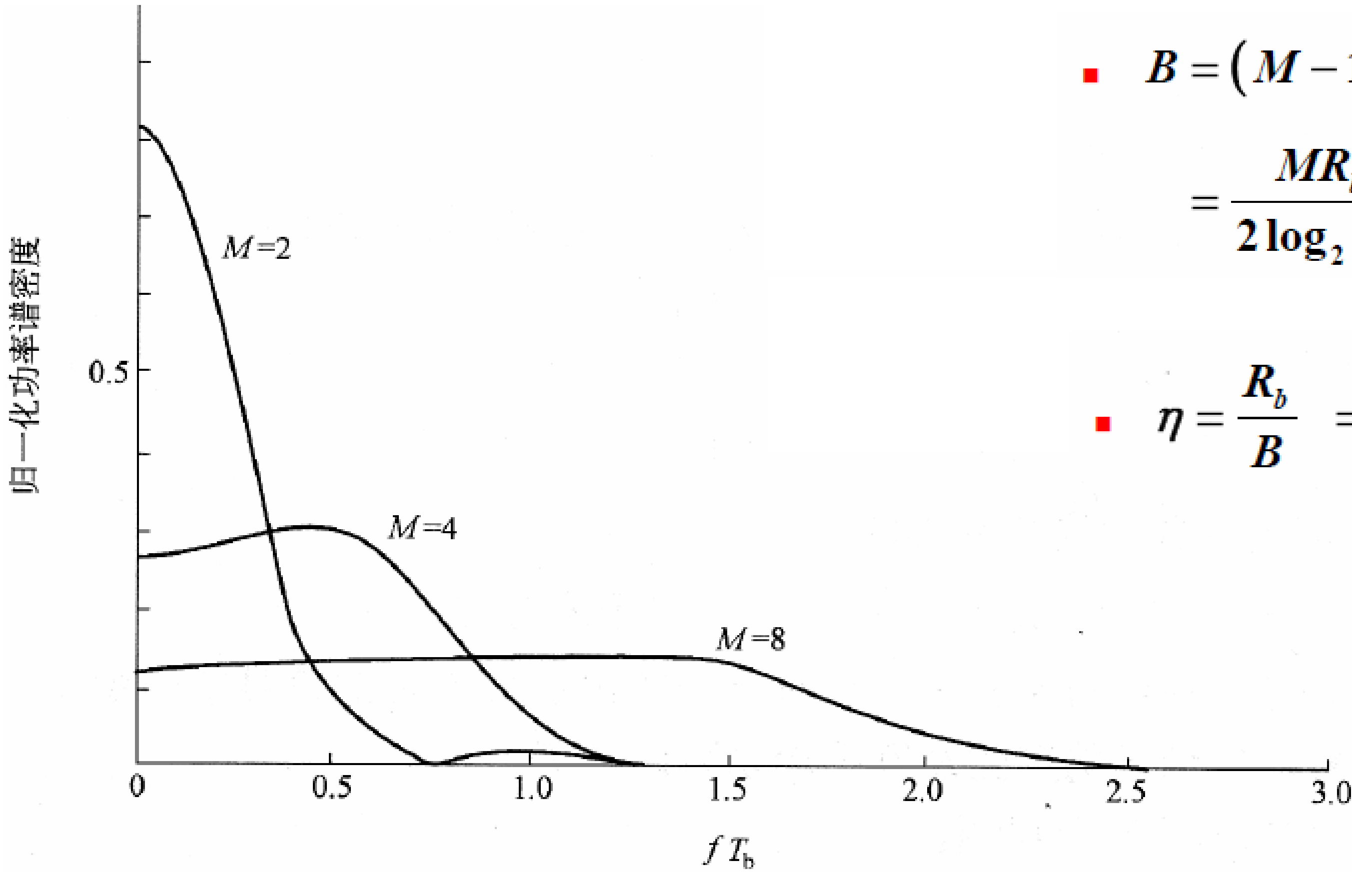
$$\Rightarrow\begin{cases} s_1=\left(\sqrt{E_s},0,0,\dots,0\right)\\ s_2=\left(0,\sqrt{E_s},0,\dots,0\right)\\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots\\ s_M=\left(0,0,\dots,0,\sqrt{E_s}\right)\end{cases}\Rightarrow\quad d_{kn}=\sqrt{2E_s},\quad \forall k,n$$





6.4.7 MFSK的功率谱密度

给定$\Delta f = 1/2T_s$，正交**MFSK**信号的复包络功率谱密



- $B = (M-1)\Delta f + \dfrac{2}{T_s} \approx \dfrac{M}{2T_s}$

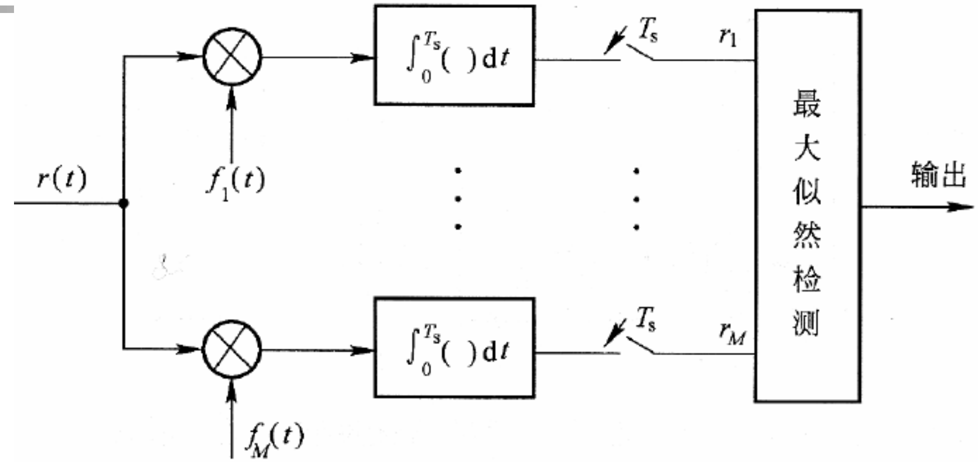
  $= \dfrac{MR_b}{2\log_2 M}$

- $\eta = \dfrac{R_b}{B} = \dfrac{\log_2 M}{M}$ bit/s/Hz

6.4.7 MFSK的最佳接收

$$\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_1 = [r_1, \cdots, r_M]$$
$$= [\sqrt{E_s} + n_1, n_2, \cdots, n_M]$$

$$n_1, n_2, \cdots, n_M : \ i.i.d., \sim N\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$$



AWGN信道下，发送信号独立等概且等能量：MAP=ML=MED=MC

发送$\boldsymbol{s}_1$而错判为$\boldsymbol{s}_i$的错判事件发生的条件为：$E_i = \{\sqrt{E_s} + n_1 < n_i\}$

发送$\boldsymbol{s}_1$的正确判决事件为：$\boldsymbol{C} = \sqcap_{i=2}^{M}\{\sqrt{E_s} + n_1 > n_i\}$

发送$\boldsymbol{s}_1$的正确判决概率：$\Pr\{\boldsymbol{C}\} = \Pr\left\{\sqcap_{i=2}^{M}\{\sqrt{E_s} + n_1 > n_i\}\right\} = \prod_{i=2}^{M}(1 - \Pr\{E_i\})$

发送$\boldsymbol{s}_1$的错判概率：

$$p_1 = 1 - \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\right)^{M-1} \simeq M \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = M \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right) = p_M$$

6.4.7 MFSK的解调性能

$$p_M \simeq M \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$

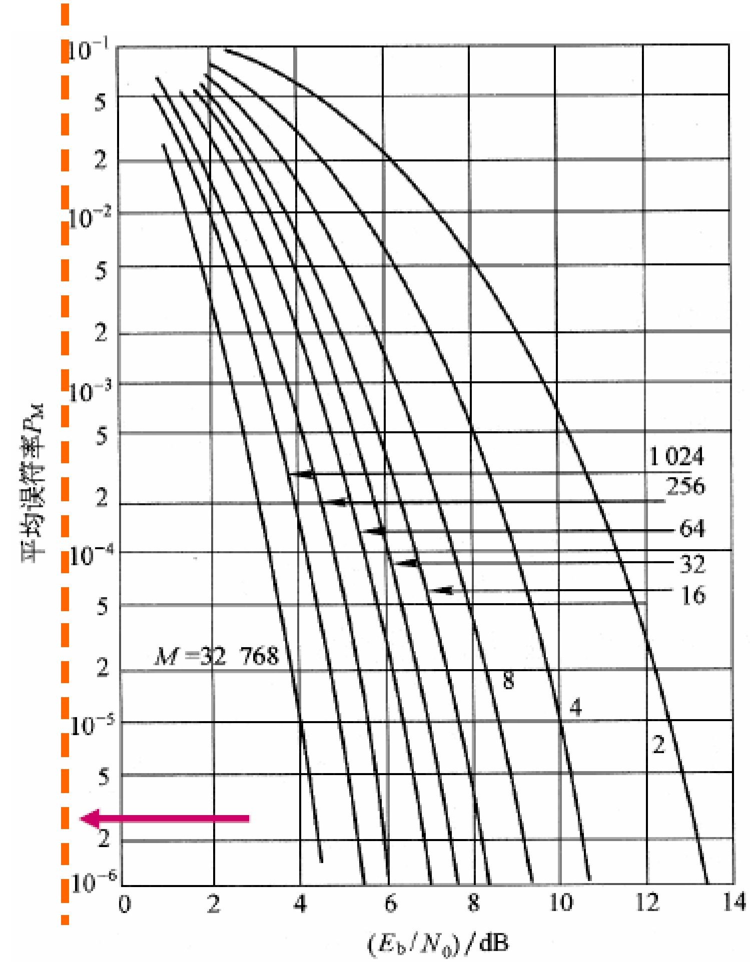
- M增加，带宽增加，误符率降低。(有效性换可靠性)

$M \to \infty$时，为保证 $P_M \to 0$，要求

$$\frac{E_b}{N_0} > \ln 2 \quad (-1.6\text{dB})$$

- 平均误比特率P_b

$$P_b \approx \frac{P_M}{2}$$



例：

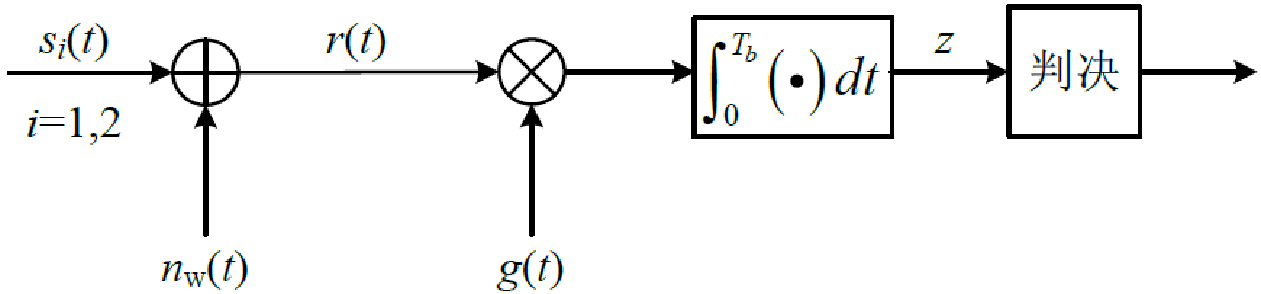
四、（10 分）某系统在时间区间$0 \le t \le 2$时间内等概发送如下两个信号之一

$$\begin{cases} s_1(t) = 2\cos 20\pi t \\ s_2(t) = \cos 22\pi t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2$$

至接收端时叠加了双边功率谱密度为 $N_0/2$ 的加性白高斯噪声。

1) 求 $s_1(t)$和 $s_2(t)$的能量。
2) 设$f_1(t) = \cos 20\pi t$、$f_2(t) = \cos 22\pi t$，$0 \le t \le 2$是一组正交基，试画出此系统的星座图，并求星座点之间的欧氏距离。
3) 画出该系统匹配滤波器最佳接收框图。
4) 推导最佳接收的判决错误概率。

三、（12 分）某 2FSK 系统在$[0,T_b]$时间内等概发送$s_1(t)=\sqrt{2}\cos(10\pi t)$或$s_2(t)=\sqrt{2}\cos(12\pi t)$之一。接收框图如下所示，图中$n_w(t)$是双边功率谱密度为$N_0/2$的零均值加性白高斯噪声，$g(t)=2\sin(\pi t)\sin(11\pi t)$，判决门限为 0。



(1) 求能使$s_1(t)$和$s_2(t)$正交的最小T_b值。
(2) 求发送$s_1(t)$条件下，判决量z的均值、方差及概率密度函数$f_1(z)$。
求发送$s_1(t)$条件下判决出现错误的概率。

频差是 1Hz，最小频差是$1/(2T_b)$，因此 Tb=0.5s

$$g(t)=2\sin(\pi t)\sin(11\pi t)=\cos 10\pi t-\cos 12\pi t=\frac{s_1(t)-s_2(t)}{\sqrt{2}}$$

$$f_1(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0 T_b}}\exp\left(-\frac{\left(z-\frac{T_b}{\sqrt{2}}\right)^2}{N_0 T_b}\right)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{T_b}{2N_0}}\right)$$