ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

27.10.2021

1η ΑΣΚΗΣΗ

1.1 Έστω β η βάση ενός αριθμητικού συστήματος, n το πλήθος των ψηφίων που μπορούν να αποθηκευθούν στο κλασματικό τμήμα (mantissa) και e ο εκθέτης, όπου $m \leq e \leq M$ με $m < 0 < M$ για την παράσταση ενός αριθμού με κινητή υποδιαστολή.

α) Να αποδειχθεί ότι το πλήθος των αριθμών μηχανής είναι : $1 + 2(\beta - 1)\beta^{n-1}(M - m + 1)$.

β) Αν $\beta = 2,\ n = 52$ και $[m, M] = [-1023, 1024]$ τότε να βρεθούν :

(i) η μονάδα σφάλματος στρογγύλευσης,

(ii) το πλήθος των αριθμών μηχανής,

(iii) ο μικρότερος και ο μεγαλύτερος θετικός κανονικοποιημένος αριθμός κινητής υποδιαστολής,

(iv) τα διαστήματα που συμβαίνει υποχείλιση(underflow) και υπερχείλιση(overflow).

1.2 Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$. Αν $b^2 - 4ac > 0$, τότε οι ρίζες της μπορούν να υπολογιστούν με την χρήση των δυο παρακάτω διαφορετικών τύπων

$$(I)\ \ \xi_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad\qquad (II)\ \ \xi_{-} = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad \xi_{+} = \frac{c}{a\xi_{-}}$$

. Εφαρμογή : Δίνονται $a = 1.002,\ b = -11.01,\ c = 0.01265$.
(Ακριβείς τιμές : $\xi_{+} = 10.98687487643590,\ \xi_{-} = 0.00114907565991$).
Να υπολογίσετε με αριθμητική κινητής υποδιαστολής με 4 σημαντικά ψηφία και στρογγύλευση τις ρίζες της εξίσωσης εφαρμόζοντας τους τύπους (I) και (II). Για κάθε τύπο να εκτιμήσετε, κατά προσέγγιση

α) Το απόλυτο σφάλμα των υπολογιζόμενων τιμών ξ_{+} και ξ_{-} των ριζών.

β) Το απόλυτο σχετικό σφάλμα των υπολογιζόμενων τιμών ξ_{+} και ξ_{-} των ριζών.

γ) Τι συμπεράσματα εξάγετε σχετικά με την ακρίβεια των αποτελεσμάτων στα α) και β)· Συγκρίνατε ως προς την ακρίβεια τους δύο τύπους. Σχολιάστε τα συμπεράσματά σας.

1.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 19x + 2$.

α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια μοναδική ρίζα ξ στο $[0, 1]$.

β) Να εφαρμόσετε δύο επαναλήψεις της μεθόδου **Εσφαλμένης Θέσης** για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_2 της ρίζας ξ της εξίσωσης.

γ) Να βρεθεί μια μέθοδος **Σταθερού Σημείου** για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής της ρίζας ξ της ανωτέρω εξίσωσης, η οποία να έχει καθολική σύγκλιση. Στη συνέχεια να εφαρμόσετε για $x_0 = 0.5$ δύο επαναλήψεις της μεθόδου σταθερού σημείου.
Για τους υπολογισμούς σας στα β) και γ) χρησιμοποιήστε ακρίβεια με 3 δεκαδικά ψηφία.

δ) Να βρεθεί το θεωρητικό κάτω φράγμα του αριθμού n των επαναλήψεων που απαιτούνται για την προσέγγιση του σταθερού σημείου ξ στο ερώτημα γ) με $x_0 = 0.5$ και επιθυμητή ακρίβεια $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-3}$, έτσι ώστε : $\frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \leq \epsilon$, όπου $L = \max_{x\in[0,1]} |g'(x)|$.

1.4 Δίνεται η επαναληπτική μέθοδος σταθερού σημείου

$$x_{n+1} = x_n + \lambda({x_n}^2 - 7), \quad n = 0, 1, 2, ... \qquad (1)$$

για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου $f(x) = x^2 - 7$.
Για τη ρίζα $\xi = \sqrt{7}$ της εξίσωσης :

α) Να βρεθεί διάστημα τιμών της παραμέτρου λ ώστε η ε.μ. σταθερού σημείου (1) να συγκλίνει.

β) Να βρεθεί τιμή του λ έτσι ώστε η σύγκλιση της ε.μ. σταθερού σημείου (1) να είναι τουλάχιστον τετραγωνική.

γ) Να εξετασθεί και να δικαιολογηθεί πλήρως αν αληθεύει ή όχι η παρακάτω πρόταση:
Η επαναληπτική μέθοδος **Newton-Raphson (N-R)** *για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής της ρίζας $\xi = \sqrt{7}$ είναι πιο αποτελεσματική μέθοδος από την ε.μ.* **Σταθερού Σημείου** (1) *για την τιμή του λ που βρέθηκε στο β).*

1.5 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)(x-2)^3$.

α) Αν υποθέσουμε ότι η μέθοδος N-R συγκλίνει στη ρίζα $\xi = 2$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ τότε να βρεθεί η τάξη σύγκλισής της. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) Στη συνέχεια να επιλέξετε και να εφαρμόσετε μια πιο αποτελεσματική μορφή της μεθόδου N-R για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_3 (τρεις επαναλήψεις) της ρίζας $\xi = 2$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ για $x_0 = 1$.

γ) Ποια είναι η τάξη σύγκλισης της νέας μορφής της μεθόδου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Οδηγίες για την παράδοση της 1ης Άσκησης

Προσοχή : *Η Άσκηση είναι* **ατομική** *(δηλαδή ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εργαστεί μόνος του).*

Καταληκτική ημερομηνία παράδοσης:

Η **1η Άσκηση** θα υποβληθεί ηλεκτρονικά στην e_class του μαθήματος μέχρι και την **Παρασκευή 12.11.2021** και **ώρα 23:59**.

Για την υποβολή στην **e_class** πρέπει να επισυνάψετε ΜΟΝΟ ένα Φάκελο (συμπιεσμένο με winzip) με όνομα **ASK1_Ονοματεπώνυμο_ xxxxxxx.zip**, όπου xxxxxxx τα τελευταία ψηφία του Α.Μ. σας. Μέσα στον φάκελο αυτό πρέπει να περιέχεται ένα μόνο αρχείο κειμένου με όνομα **ask1_Απαντήσεις_xxxxxxx** (.tex σε latex ή .doc σε word ή σε χειρόγραφο ή και σε pdf), το οποίο θα περιέχει τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 και 1.5.

Προσοχή: Είναι απαραίτητο στην αρχή του αρχείου **κειμένου**) να αναγράφετε το ονοματεπώνυμό σας και τον ΑΜ.

ΠΡΟΣΟΧΗ

1. Η Άσκηση είναι **ατομική** και σε περίπτωση αντιγραφής δεν βαθμολογείται.

2. Η Άσκηση θα πρέπει να λυθεί με βάση τη θεωρία που έχετε διδαχθεί.

3. Μετά την λήξη της καταληκτικής ημερομηνίας παράδοσης η άσκηση δεν θα γίνεται δεκτή. Μετά την λήξη της καταληκτικής ημερομηνίας παράδοσης η άσκηση θα μπορεί να υποβληθεί για τις επόμενες δύο ημέρες αλλά η βαθμολογία της θα μειωθεί κατά το ήμισυ.

4. Θα πρέπει να επισκέπτεστε συχνά την ιστοσελίδα (στο e-class) του μαθήματος και να ενημερώνεστε με το σχετικό υλικό (Σημειώσεις, Φροντιστηριακές Ασκήσεις, Ασκήσεις, Βαθμολογίες).