Zadanie 10

Niech M - macierz dodatnio określona. Mamy pokazać, że $|\det(M)| \leq m_{11} \cdot m_{22} \ldots \cdot m_{nn}$
Niech A - macierz odwracalna taka, że $M = A^T \cdot A$; zapiszmy A jako: $A = \left[C_1|C_2|\ldots|C_n\right]$.
Wiemy, że taka macierz istnieje z lematu 12.7. Wobec tego, z mnożenia macierzy $A^T \cdot A$ mamy:

$$m_{11} \cdot m_{22} \ldots \cdot m_{nn} = (C_1^T \cdot C_1) \cdot (C_2^T \cdot C_2) \cdot \ldots \cdot (C_n^T \cdot C_n)$$

Ponieważ jesteśmy w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, iloczyn dwóch wektorów to oczywiście standardowy iloczyn skalarny. Z definicji standardowego il. skal. :

$$(C_1^T \cdot C_1) \cdot (C_2^T \cdot C_2) \cdot \ldots \cdot (C_n^T \cdot C_n) = \langle C_1, C_1\rangle \cdot \langle C_2, C_2\rangle \cdot \ldots \cdot \langle C_n, C_n\rangle$$

Przypomnijmy nierówność Cauchy-Schwartza: $|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||$, ale jeśli u, v są liniowo zależne, to mamy równość: $|\langle u, v\rangle| = ||u|| \cdot ||v||$. W szczególności, jeśli $u = v$, to $|\langle u, u\rangle| = ||u||^2$.
Z tego wynika:

$$\langle C_1, C_1\rangle \cdot \langle C_2, C_2\rangle \cdot \ldots \cdot \langle C_n, C_n\rangle = ||C_1||^2 \cdot ||C_2||^2 \cdot \ldots \cdot ||C_n||^2$$

Teraz możemy z korzystać z nierówności Hadamarda dla macierzy A:

$$|\det(A)| \leq ||C_1|| \cdot ||C_2|| \cdot \ldots \cdot ||C_n||$$
$$|\det(A)|^2 \leq ||C_1||^2 \cdot ||C_2||^2 \cdot \ldots \cdot ||C_n||^2$$

I na koniec wystarczy skorzystać z własności wyznaczników, a konkretnie $\det(A) = \det(A^T)$ oraz $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ (tw. Cauchy)

$$|\det(A)|^2 = \det(M)$$