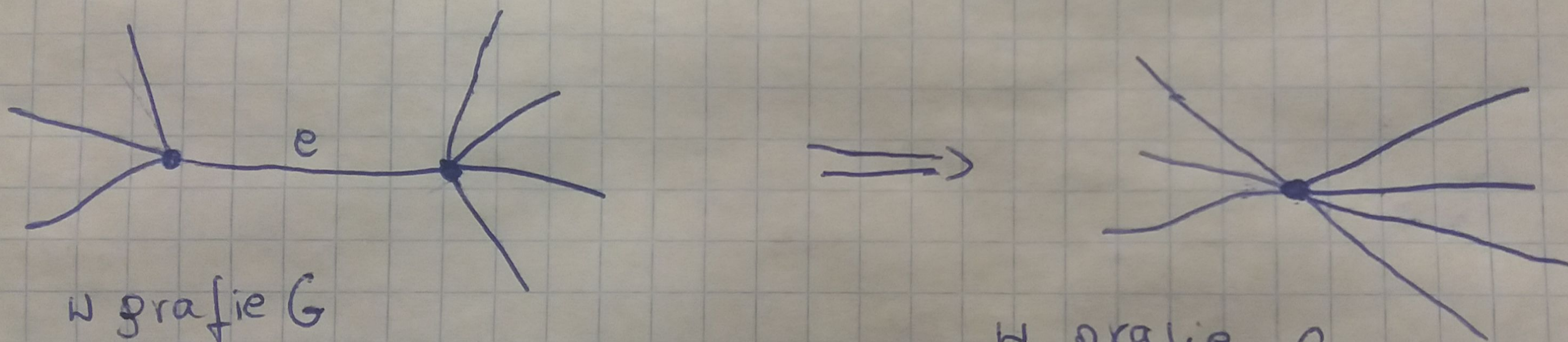
Zadanie 1

Niech G – planarny, czyli da się go przedstawić na płaszczyźnie jako graf płaski, co z kolei oznacza, że żadne 2 krawędzie nie przecinają się ze sobą.

„Ściąganie" krawędzi:

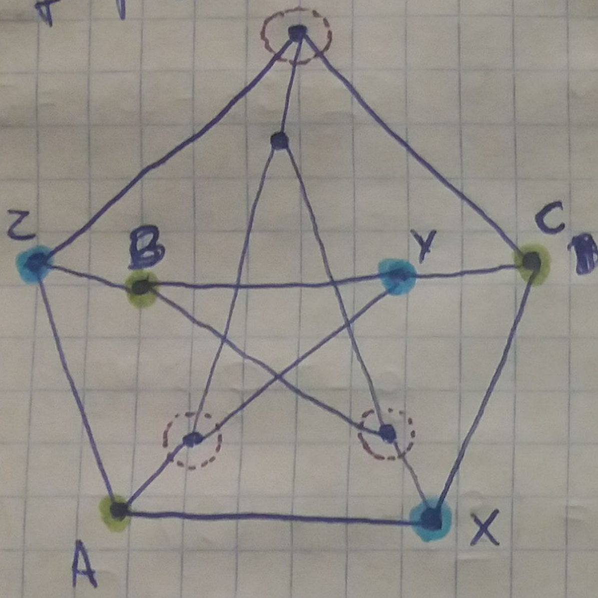


w grafie G

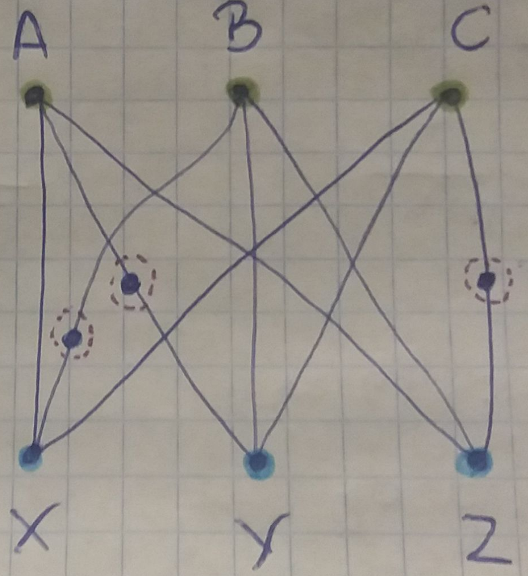
w grafie $G \bullet e$

Oczywistym jest więc, że ~~[illegible]~~ ściągając krawędź nie ~~[illegible]~~ generujemy żadnego nowego przecięcia, czyli graf $G \bullet e$ też jest planarny.

Graf Petersena:



Weźmy wierzchołki A, B, C, X, Y, Z jak na rysunku. Postaramy się pokazać, że tworzą one graf homeomorficzny z $K_{3,3}$:



mamy podgraf homeomorficzny z $K_{3,3}$ więc z tw. Kuratowskiego graf Petersena nie jest planarny.

zadanie 2

mamy graf G, $n \geq 11$.

Wiemy, że:

1. $m(G) + m(\bar{G}) = \frac{n(n-1)}{2}$

2. $m \leq 3n-6$

Rozpisując dalej:

$m(G) \leq 3n-6 \;\wedge\; m(\bar{G}) \leq 3n-6$

$\Downarrow$

$\frac{n(n-1)}{2} \leq 6n-12$

$n^2 - n \leq 12n - 24$

$(*)\; n^2 - 13n + 24 \leq 0$

$\Delta = 169 - 96 = 73$, $n_1 = \frac{13-\sqrt{73}}{2}$, $n_2 = \frac{13+\sqrt{73}}{2} < \frac{13+\sqrt{81}}{2} = 11$

Tak więc $n \geq 11$ nie spełnia nierówności $(*)$, czyli graf mający $n \geq 11$ wierzchołków i jego dopełnienie nie mogą być jednocześnie planarne.

zadanie 3 $n \geq 3$, G - planarny

Zał. nie wprost, że $\forall_{a,b,c \in V(G)}$: $\deg(a) > 5 \vee \deg(b) > 5 \vee \deg(c) > 5$

Wiemy, że $m \leq 3n - 6$ $(*)$

Ale również: $2m = \sum \deg(v) \geq (n-2) \cdot 6 + 1 + 1 = 6n - 10$

$(n-2)$ wierzchołków stopnia > 5

2 wierzchołki stopnia ≤ 5

czyli $m \geq 3n - 5$ $(**)$

dodając stronami $(*)$ i $(**)$:

$$3n - 5 + m \leq m + 3n - 6$$

$$-5 \leq -6 \ ↯$$

wobec czego $\exists_{a,b,c \in V(G)}$: $\deg(a), \deg(b), \deg(c) \leq 5$, jeśli G jest planarny.

zadanie 4

wzór Eulera dla $\underline{\underline{1}}$ spójnej składowej: $n-m+f=2$

My chcemy pokazać uogólnienie dla k składowych:

$$n-m+f=k+1$$

Stosując wzór Eulera dla każdej składowej:

$n-m+f=2k-(k-1)$, ponieważ nieograniczoną

ścianę „zewnętrzną" policzyliśmy k razy.

mamy więc:

$$n-m+f=2k-(k-1)=k+1 \quad \blacksquare$$

Zadanie 5

Przekształćmy najpierw nierówność:

$$(r-2)m \leq r(n-2)$$

$$rm - 2m \leq nr - 2r$$

$$r(m-n+2) \leq 2m$$

$$r \cdot f \leq 2m \quad \leftarrow \text{ponieważ } n - m + f = 2 \Leftrightarrow f = m - n + 2$$

gdzie r – długość najkrótszego cyklu

Rozważamy graf spójny, płaski, czyli krawędzie grafu nie przecinają się ze sobą. Każda ściana ma więc co najmniej r boków, czyli minimalnie mamy $r \cdot f$ boków. 1 krawędź jest bokiem dla 2 ścian, więc (po zsumowaniu mamy) $2m$ boków. Wobec tego $r \cdot f \leq m \cdot 2$ ■

Jeśli $r \cdot f = 2 \cdot m$, to oznacza, że każda ściana w grafie ma dokładnie r boków.

Zadanie 9

Niech G – graf eulerowski płaski.
Pokażmy, że G' jest dwudzielny – jeśli tak, to $\chi(G')=2$, czyli wierzchołki G' można pokolorować na 2 kolory, czyli ściany G można pokolorować na 2 kolory.

- skoro G – eulerowski to stopień każdego wierzchołka jest parzysty
- wobec tego stopień każdej ściany (czyli liczba otaczających ją krawędzi) jest parzysty.

Aby pokazać, że G' dwudzielny wystarczy zauważyć, że każdy cykl ma długość parzystą. Można to udowodnić indukcyjnie:

Zauważmy, że w G' ~~ ~~, który jest planarny i $\forall_{f \in F(G)} \deg(f)$ parzysty
każdy cykl ~~ ~~ otacza pewną liczbę ścian:

(1) cykl otacza 1 ścianę => ma dł. parzystą, bo

(2) zał. że cykl otacza k ścian. dołączmy do nich 1 kolejną, która ma parzysty stopień
może mieć ona:
- parzystą liczbę wspólnych krawędzi – wtedy pozostaje parzysta liczba krawędzi do stworzenia cyklu dla k+1 ścian ✓
- nieparzystą liczbę wspólnych krawędzi – cykl dla k ścian przechodził przez te krawędzie, bo były „zewnętrzne". Cykl dla k+1 ścian przechodzi z kolei przez pozostałe niewspólne krawędzie, których jest nieparzysta liczba. Parzystość zostaje więc zachowana ✓

■

Wobec tego każdy cykl ma dł. parzystą =>
=> G' jest dwudzielny => $\chi(G')=2$ => wierzchołki G' można pokolorować na 2 kolory =>
=> ściany G można pokolorować na 2 kolory

Zadanie 11

Rozważmy graf $G \setminus e$.

Chcemy pokazać, że $P_{G\setminus e}(k) = P_G(k) + P_{G \cdot e}(k)$ (*)

Jednak wystarczy zauważyć, że:

- $P_G(k)$ – liczba kolorowań $G\setminus e$ t. że wierzchołki, które łączyła krawędź e mają różny kolor.
- $P_{G\cdot e}(k)$ – liczba kol. $G \setminus e$ t. że te wierzchołki mają ten sam kolor.

Z tych dwóch faktów mamy równość (*).

zadanie 12

n - liczba wierzch.

Dowody Indukcyjne:

a) $P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$.

1. dla $n = 1$: $P_T(k) = k$ ✓

2. zał. że dla n zachodzi : $P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$

dla $n+1$: $P_T(k) = \underbrace{k(k-1)^{n-1}}_{\text{liczba kolorowań dla } n \text{ wierzch.}} \cdot \underbrace{(k-1)}_{\text{dla każdego kolorowania } n \text{ wierzch. mamy } k-1 \text{ możliwości dla } n+1\text{-ego}} = k \cdot (k-1)^n$

b) $P_C(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$

1. dla $n = 3$ $\left(\begin{matrix} n=1 \\ n=2 \end{matrix}\right.$ - nie ma cyklu) :

$P_C(k) = k(k-1)(k-2) = (k-1)^3 + (-1)^3(k-1)$

2. zał. że dla n zachodzi : $P_C(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$

dla $n+1$: ze wzoru z zadania 11 :

$P_C(k) = \underbrace{k(k-1)^n}_{\text{1. wierzch. ma k sposobów, kolejne ma k-1}} - \underbrace{(k-1)^n + (-1)^n(k-1)}_{\text{z zał. ind.}} = (k-1)(k-1)^n - (-1)^n(k-1) =$

$= (k-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(k-1) = P_C(k)$ ∎