zadanie 3

niech $f(a) = \sum_{k=0}^{r} \frac{e^{x_k}+2020}{\ln(x_k^2+1)+1}\left[y_k - a(\cos(2x_k+2020)+x_k^3)\right]^2$

niech $w_k = \frac{e^{x_k}+2020}{\ln(x_k^2+1)+1} > 0$, $g(x) = \cos(2x+2020)+x^3$

policzmy pochodną $f'(a)$ aby znaleźć ekstremum:

$$f'(a) = \sum_{k=0}^{r} w_k \cdot 2(y_k - a\cdot g(x_k))\cdot(-g(x_k)) =$$

$$= -2\sum_{k=0}^{r} w_k(y_k - a\cdot g(x_k))\cdot g(x_k) = -2\sum_{k=0} w_k y_k g(x_k) - a g^2(x_k) w_k$$

$$\sum_{k=0}^{r} w_k y_k g(x_k) - \sum_{k=0}^{r} w_k a g^2(x_k) = 0$$

$$\boxed{a = \frac{\sum_{k=0}^{r} w_k y_k g(x_k)}{\sum_{k=0}^{r} w_k g^2(x_k)}}$$

policzmy jeszcze drugą pochodną, aby upewnić się, czy jest to minimum:

$$f''(a) = -2\sum_{k=0}^{r} w_k g(x_k)(0 - g(x_k)) = 2\sum_{k=0}^{r} \underset{0}{\underset{\wedge}{w_k}} \underset{0}{\underset{\wedge}{g^2(x_k)}} > 0$$

wobec tego znalezione a jest minimum, ponieważ druga pochodna jest zawsze dodatnia, a co za tym idzie - pierwsza pochodna w znalezionym punkcie zmienia znak z „-" na „+".