zadanie 8

dowodzimy przez indukcję po liczbie wierzch.

1) $n=1$ - brak krawędzi
$n=2$ - jedyna krawędź

2) zał. że dla wszystkich ~~[illegible]~~ $n_0 \leq n$ drzewo z n_0 wierzch. ma ≤ 1 pełne skojarzenie

sprawdźmy dla $n+1$: mam drzewo - T
wiemy, że musi istnieć liść w tym drzewie - oznaczmy go v_l,
a jego sąsiada - v_s
w każdym $\underbrace{\text{skojarzeniu}}_{\text{(pełnym)}}$ musi więc istnieć krawędź $\{v_l, v_s\}$

Jeśli rozważymy ~~dr~~ $T \setminus v_l, v_s$, to mamy drzewo z $n-1$ wierzchołkami, które z założenia ind. ma ≤ 1 pełne skojarzenie.

Wobec tego w T może istnieć również co najwyżej 1 pełne skojarzenie.

Zadanie 4

liczba wierzchołków: $2n$; $\forall_{v \in V(G)} \deg(v) \geq n$

wobec tego $\forall_{v_1, v_2 \in V(G)} \deg(v_1) + \deg(v_2) \geq 2n$

z tw. Ore wynika, że jeśli $2n \geq 2 \iff n > 1$, to
G zawiera cykl Hamiltona.

Ma on oczywiście długość $2n$.

Jeśli weźmiemy naprzemiennie krawędzie cyklu, tj:
niech $v_1 \dots v_{2n} \in V(G)$ - wierzchołki ustawione w k
w jakiej są w cyklu Hamiltona.
wybierzemy krawędzie $\{v_1 v_2\}, \{v_3 v_4\}, \{v_5 v_6\} \dots \{v_{2n-1} v_{2n}\}$

to łatwo zauważyć, że dostaliśmy
, pełne skojarzenie n-krawędziowe.

zadanie 2

dowód indukcyjny po k:

teza: między 2 wierzchołkami hiperkostki o wymiarze k mamy k rozłącznych wierzchołkowo ścieżek

① $k=1$: ⓪——① oczywiście OK

② zał. że działa dla k
sprawdźmy dla $k+1$:

niech $A = a_1 a_2 \dots a_k \,|\, a_{k+1}$
$B = b_1 b_2 \dots b_k \,|\, b_{k+1}$ „dopisane" $k+1$-sze bity

z zał. ind. mamy, że między $a_1 \dots a_k$ i $b_1 \dots b_k$ mieliśmy k rozłącznych ścieżek

1. $a_{k+1} = b_{k+1}$ mamy już k rozł. ścieżek przebiegających analogicznie jak w k-wymiarowej kostce.
$k+1$-szą ścieżkę można łatwo uzyskać idąc przez A' - sąsiada A, w którym $a'_{k+1} \neq a_{k+1}$ i B' - sąsiada B gdzie $b'_{k+1} \neq b_{k+1}$

2. $a_{k+1} \neq b_{k+1}$
- jeśli $\exists_{i \leq k}$ $a_i = b_i$ to mamy w zasadzie **1.**, jedynie miejsce „dopisania" bitu jest inne (nie na końcu)
- jeśli $\forall_{i \leq k}$ $a_i \neq b_i$:
  - 1. ścieżkę generujemy zmieniając 1. szy bit, potem 2. 3. aż do $k+1$.
  - 2. ścieżkę najpierw zmiana 2. bitu, potem 3., 4. aż do $k+1$., na końcu 1. bit
  - i-tą ścieżkę generujemy zmieniając najpierw i-ty bit potem $i+1$... aż do $k+1$, a następnie kolejno od 1. do $i-1$.

zadanie 11

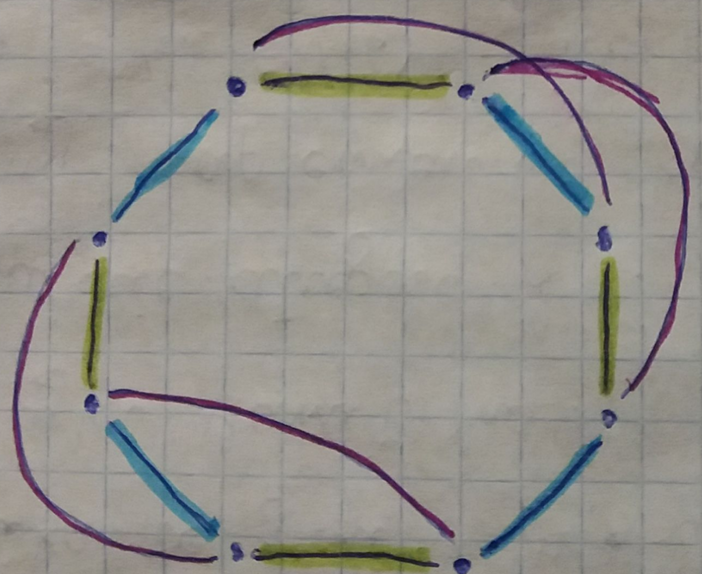
Z lematu o uściskach dłoni wynika, że 3-regularny graf ma parzystą liczbę wierzchołków.

Cykl Hamiltona ma więc również parzystą długość.

Tak więc krawędzie cyklu można pokolorować na 2 kolory (skoro ma on parzystą długość) - naprzemiennie.

Pozostałe krawędzie, nienależące do cyklu, należy zatem pokolorować na 3. kolor.

Przykładowo:



zadanie 10

Oczywiście skoro graf jest regularny i dwudzielny to musi zachodzić $|V_1| = |V_2|$

Weźmy dowolny $X \subseteq V_1$, $N(X) \subseteq V_2$ - zbiór sąsiadów X

liczba krawędzi z X do $N(X)$: $d|X|$

liczba krawędzi z $N(X)$ do V_1 : $d|N(X)|$

i teraz $d|N(X)| \geq d|X|$, ponieważ część krawędzi z $N(X)$ do V_1 stanowią krawędzie między $X \subseteq V_1$ a $N(X)$

wobec tego $|X| \leq |N(X)|$,

czyli z tw. Hall'a wynika, że graf 2-dzielny d-regularny ma pełne skojarzenie.

Zadanie 1

- macierz sąsiedztwa grafu skier. G : $M_G[i][j] == 1 \iff (ij) \in E$
  wpp. $M_G[i][j] == 0$

Łatwo zauważyć, że skoro $(ij) \in E(G) \iff (ij) \in E(\bar{G})$, to $M_G[i][j] == 1 \iff M_{\bar{G}}[i][j] == 0$. Wobec tego

$$M_G + M_{\bar{G}} = M_1 - Id_n \qquad ; M_1 : \forall_{ij}\ M[i][j] == 1$$

$$A \cdot I = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{i1} & & a_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + \ldots + a_{1j} \\ a_{21} + \ldots + a_{2j} \\ \vdots \\ a_{i1} + \ldots + a_{ij} \end{bmatrix}$$

czyli w i-tym elemencie wektora dostajemy liczbę wierzchołków, do których istnieje krawędź z wierzchołka V_i $(|outdeg(V_i)|)$

policzmy i-ty element wektora $A^2 \cdot I$:

$(a_{i1}a_{11} + a_{i2}a_{21} + \ldots + a_{in}a_{n1}) + (a_{i1}a_{12} + a_{i2}a_{22} + \ldots + a_{in}a_{n2}) + \ldots +$
$+ (a_{i1}a_{1n} + a_{i2}a_{2n} + \ldots + a_{in}a_{nn}) =$ [zmieniając kolejność sumowania]

$$= a_{i1} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{1j} + a_{i2} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{nj}$$

długości 2

z sumy w powyższej postaci wynika, że i-ty element z wektora $A^2 I$ oznacza liczbę różnych dróg, jakie można poprowadzić z wierzchołka V_i.