zadanie 13

$(n>1)$

$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, hipoteza: $H_n = \frac{1}{n}(H_{n-1} + \dots + H_1) + 1$

sprawdźmy indukcyjnie:

1) dla $n=2$: $H_2 = \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot H_1 + 1 = \frac{3}{2} = H_2$ ✓

2) zał. że $\forall_{m<n}$ $H_m = \frac{1}{m}(H_{m-1} + \dots + H_1) + 1$

$$H_n = H_{n-1} + 1/n = \frac{1}{n-1}(H_{n-2} + \dots + H_1) + 1 + 1/n = H_n$$

$$(n-1)H_n = \frac{n-1}{n} + (n-1) + (H_{n-2} + \dots + H_1) \quad / + H_{n-1}$$

$$nH_n = \frac{n-1}{n} + (n-1) + (H_{n-1} + H_{n-2} + \dots + H_1) + 1/n$$

$$H_n = \frac{1}{n}(H_{n-1} + H_{n-2} + \dots + H_1) + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$H_n = \frac{1}{n}(H_{n-1} + H_{n-2} + \dots + H_1) + 1 \quad \blacksquare$$

zadanie 10. niech n - liczba rozmiarów w wieży

Mamy wieżę na pręcie A. Aby ją przenieść na B trzeba:

1. $2(n-1)$ klocków przenieść na C
2. przenieść 2 klocki (pozostałe z A) na B
3. przenieść $2(n-1)$ klocków z C na B.

Tak więc: $T(n) = c\cdot(T(n-1)\cdot 2 + 2) =$

$= c(2(2T(n-2)+2)+2) = c\cdot(2^k\cdot T(n-k) + 2^k + 2^{k-1} + \ldots + 2)$

wiemy, że $T(1) = 2$. wobec tego:

$T(n) = c\cdot(2^{n-1}\cdot T(1) + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2) =$

$= c\cdot(2^n + 2^n - 2) = \underline{c\cdot(2^{n+1} - 2)}$

zadanie 9

a) $f(1) = 1$, $f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil) + 1$.

Zauważmy, że gdyby n było potęgą 2, to łatwo możnaby tę zależność rozwiązać iteracyjnie i wtedy $f(n) = 2n-1$. Sprawdźmy indukcyjnie czy ten wzór jest prawdziwy w ogólności

1) dla $n=1$: $2 \cdot 1 - 1 = 1 = f(1)$ ✓

2) zał. że $\forall_{m<n}$ $f(m) = 2m-1$

$$f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil) + 1 =$$
$$= 2\lfloor n/2 \rfloor - 1 + 2\lceil n/2 \rceil - 1 + 1 =$$
$$= 2(\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) - 1 = 2n-1 \checkmark \ \blacksquare$$

b) $g(0) = 0$, $g(n) = g(\lfloor n/2 \rfloor) + \lfloor \log_2 n \rfloor$

wypiszmy kilka początkowych wyrazów:

n:	0	1	2	3	4	5	6	7	8 … 15	16 … 31	32	…
$g(n)$:	0	0	1	1	3	3	3	3	6 … 6	10 … 10	15	…

$$\underbrace{1 \quad 1}_{2} \quad \underbrace{3 \quad 3 \quad 3 \quad 3}_{4} \quad \underbrace{6 \ldots 6}_{8} \quad \underbrace{10 \ldots 10}_{16}$$

sprawdźmy indukcyjnie, czy $g(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} i$, dla $n>0$

1) $n=1$: $g(1) = 0$ ✓

2) zał. że $\forall_{m<n}$ $g(m) = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 m \rfloor} i$

$$g(n) = g(\lfloor n/2 \rfloor) + \lfloor \log_2 n \rfloor = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 \lfloor n/2 \rfloor \rfloor} i + \lfloor \log_2 n \rfloor =$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} i \ \checkmark \quad \blacksquare$$

$$H_n = \frac{1}{n}\left(H_{n-1} + H_{n-2} + \dots + H_1\right) + 1$$ ■

d) $d_0 = 1$, $d_1 = 2$, $d_n = \frac{d_{n-1}^2}{d_{n-2}}$ sprawdźmy ind. czy $d_n = 2^n$

① dla $n=0$, $n=1$ oczywiście działa

② zał. że $\forall_{m<n}$ $d_m = 2^m$

$$d_n = \frac{d_{n-1}^2}{d_{n-2}} = \frac{2^{2n-2}}{2^{n-2}} = 2^n$$ ■

zadanie 5

a) $a_0 = 1$, $a_n = \frac{2}{a_{n-1}}$ ~~wypasta~~

zaobserwujmy, że $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ ...

sprawdźmy indukcyjnie, czy $a_n = n \bmod 2 + 1$:

(1) $0 \bmod 2 + 1 = 1 = a_0$ ✓

(2) zał. że $\forall_{m<n}$ $a_m = m \bmod 2 + 1$

$a_n = \frac{2}{a_{n-1}} = \frac{2}{n-1 \bmod 2 + 1}$

jeśli n parzyste: $a_n = \frac{2}{1+1} = 1 = n \bmod 2 + 1$

jeśli n nieparzyste: $a_n = \frac{2}{0+1} = 2 = n \bmod 2 + 1$ ∎

b) $b_0 = 0$, $b_n = \frac{1}{1+b_{n-1}}$

pierwsze wyrazy: $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{2}{3}$, $b_4 = \frac{3}{5}$, $b_5 = \frac{5}{8}$ ...

sprawdźmy indukcyjnie, czy $a_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$

(1) dla $n = 0$: $\frac{F_0}{F_1} = 0 = b_0$ ✓

(2) zał. że $\forall_{m<n}$ $b_m = \frac{F_m}{F_{m+1}}$

$b_n = \frac{1}{1+b_{n-1}} = \frac{1}{1+\frac{F_{n-1}}{F_n}} = \frac{1}{\frac{F_{n-1}+F_n}{F_n}} =$

$= \frac{F_n}{F_{n+1}}$ ∎

c) $c_0 = 1$, $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i$ postępujemy jak poprzednio:

pierwsze kilka wyrazów: 1, 1, 2, 4, 8, ...

sprawdźmy ind. czy $c_n = 2^{n-1}$ dla $n>0$

(1) $2^{1-1} = 2^0 = 1 = c_1$ ✓

(2) zał. że $\forall_{m<n}$ $c_m = 2^{m-1}$

$c_n = c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1} = 1 + 1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2} = 2^{n-1}$ ∎

zadanie 4

$f_n = f_{n-1} + 3^n \quad ; f_1 = 3$

$f_n = f_{n-2} + 3^{n-1} + 3^n = f_1 + \sum_{i=2}^{n} 3^i = \sum_{i=1}^{n} 3^i = \frac{3(3^n - 1)}{2}$

$h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n \quad ; h_1 = 1$

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	...
h_n:	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	...

udowodnijmy indukcyjnie, że $h_n = (-1)^{n+1} \cdot \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$

1) $(-1)^2 \cdot 1 = 1 = h_1$ ✓

2) załóżmy, że $\forall_{m<n} \; h_m = (-1)^{m+1} \cdot \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$

$h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n = (-1)^n \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + (-1)^{n+1} \cdot n$

- jeśli n parzyste, to $h_n = \frac{n}{2} - n = -\frac{n}{2} = -\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$
- jeśli n nieparzyste, to $h_n = n - \lfloor n/2 \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$

Czyli ogólny wzór: $h_n = (-1)^{n+1} \cdot \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$

$l_n = l_{n-1} \cdot l_{n-2} \quad , l_1 = l_2 = 2$

$l_n = l_{n-2}^2 \cdot l_{n-3} = l_{n-3}^3 \, l_{n-4}^2 = l_{n-4}^5 \cdot l_{n-5}^3 = \ldots$

$= l_2^{F_{n-1}} \cdot l_1^{F_{n-2}} = 2^{F_{n-1} + F_{n-2}} = 2^{F_n}$

gdzie F_n to ciąg Fibonacciego: $F_n = \begin{cases} 1, & \text{dla } n=1, n=2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{dla } n>2 \end{cases}$

zadanie 3

a) $a_n = n \cdot a_{n-2}$ mając dane a_0 znamy parzyste wyrazy ciągu z kolei a_1 określa nieparzyste wyrazy.

Potrzeba więc 2 wyrazów

b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ do obliczenia a_3 potrzeba a_2 i a_0, których z kolei nie da się obliczyć z podanego wzoru. Musimy jeszcze znać a_1, którego też nie da się obliczyć ze wzoru, a które potrzeba do wyliczenia a_4.

Potrzeba więc 3 wyrazów

c) $a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor} + n$. $a_0 = 2a_0 + 0$ czyli $a_0 = 0$

Łatwo zauważyć, że kolejne wyrazy ciągu można już obliczyć mając $a_0 = 0$. Potrzeba więc 0 wyrazów.

zadanie 1 $\quad a \notin \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{Z}_+$

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = \lfloor an \rfloor + \lfloor n + (-an) \rfloor = \lfloor an \rfloor + \lfloor -an \rfloor + n =$$

$$= \lfloor an \rfloor - \lceil an \rceil + n = n - 1$$

ponieważ $an \notin \mathbb{Q}$

analogicznie dla powały:

$$\lceil an \rceil + \lceil (1-a)n \rceil = \lceil an \rceil + \lceil n + (-an) \rceil = \lceil an \rceil + \lceil -an \rceil + n =$$

$$= \lceil an \rceil - \lfloor an \rfloor + n = n + 1$$