Zadanie 8

Mamy pokazać, że dla macierzy $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$,gdzie $A : n \times n, B : m \times n, C : m \times m$, 0: macierz zerowa $n \times m$, zachodzi własność:

$$det(M) = det(A) \cdot det(C)$$

1. Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy jedna z macierzy A, C jest nieodwracalna: załóżmy bez straty ogólności, że A nieodwracalna. Wtedy jej rząd $rk(A) < n$ (tw. 4.28), więc $det(A) = 0$. Wystarczy teraz pokazać, że również $det(M) = 0$: skoro pewien wektor z $A : A_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn})$ jest liniowo zależny od pozostałych wektorów z A, to w oczywisty sposób wektor $A'_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn}, 0...0)$ z macierzy M jest liniowo zależny od pozostałych wektorów z M. Wobec tego $rk(M) < n + m$, czyli macierz M nie jest odwracalna, więc $det(M) = 0 = det(A) \cdot det(C)$.

2. Teraz sytuacja, gdy obie macierze A, C są odwracalne:
Skoro A jest odwracalna, to przy użyciu eliminacji Gaussa na pierwszych n wierszach, możemy ją doprowadzić do postaci przekątniowej. Podobnie C można doprowadzić do postaci przekątniowej za pomocą eliminacji Gaussa na ostatnich m kolumnach (lemat 4.33). Wykonując te operacje dostaniemy macierz:

$$M' = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ B & C' \end{bmatrix}$$

gdzie A', C' - macierze przekątniowe. Zauważmy też, że eliminacja Gaussa, to przeprowadzanie trzech operacji elementarnych:

- dodawanie do wiersza/kolumny innego wiersza/kolumny przemnożonego przez skalar (nie zmienia wartości wyznacznika)
- mnożenie wiersza/kolumny przez skalar α (zmienia wyznacznik α razy)
- zamiana ze sobą dwóch wierszy/kolumn (zmienia znak wyznacznika)

Tak więc sprowadzając A do postaci przekątniowej A' wykonaliśmy pewną liczbę każdej z powyższych operacji na pierwszych n wierszach macierzy M i możemy napisać:

$$det(A') = det(A) \cdot (-1)^{z_a} \cdot x_a$$

, gdzie z_a – liczba wykonanych zamian wierszy, x_a – współczynnik wynikający z ewentualnego mnożenia wierszy przez skalary (może być równy 1, jeśli nie wykonaliśmy żadnego mnożenia przez skalar).

Analogicznie dla macierzy C, którą sprowadziliśmy do C' przy pomocy operacji na m ostanich kolumnach macierzy M:

$$det(C') = det(C) \cdot (-1)^{z_c} \cdot x_c$$

Teraz z faktu, że te operacje były wykonywane na macierzy M mamy:

$$det(M') = det(M) \cdot (-1)^{z_a} \cdot x_a \cdot (-1)^{z_c} \cdot x_c$$

Można teraz zauważyć, że M' jest macierzą trójkątną (ponieważ A' i C' są przekątniowe), więc $det(M')$ to iloczyn elementów na przekątnej (fakt 6.3). Jednak te elementy na przekątnej to jednocześnie elementy A' i C', więc mamy:

$$det(M') = det(A') \cdot det(C')$$

I teraz z wcześniejszych równań:

$$det(M) \cdot (-1)^{z_a} \cdot x_a \cdot (-1)^{z_c} \cdot x_c = det(A) \cdot (-1)^{z_a} \cdot det(C) \cdot (-1)^{z_c} \cdot x_c \cdot x_a$$

Po skróceniu otrzymamy oczywiście:

$$det(M) = det(A) \cdot det(C)$$