Zadanie 1

Mamy pokazać, że dla macierzy stochastycznej A $(n \times n)$ i dla wektora $\vec{V}$ zachodzi: $||A\vec{V}||_1 \leq ||\vec{V}||_1$, czyli (z definicji normy ℓ_1):

$$||A\vec{V}||_1 \leq ||\vec{V}||_1$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n} \left|(A\vec{V})_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

Teraz wystarczy zauważyć, że moduł sumy jest mniejszy lub równy sumie modułów:

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |v_j|$$

Zmieńmy kolejność sumowania po prawej stronie nierówności, a następnie skorzystajmy z własności macierzy stochastycznej (każda kolumna sumuje sie do 1):

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |v_j| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} |v_j| =$$
$$= |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n| = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

Korzystając z wcześniejszej nierówności:

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

co kończy dowód.