zadanie 3

niech n – dowolna liczba naturalna

do pokazania: $k! \mid n(n+1)\ldots(n+(k-1))$

niech $n' = n+(k-1)$

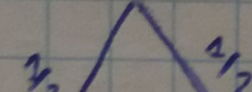
$$n(n+1)\ldots(n+(k-1)) = \frac{n'!}{(n-1)!} = \frac{n'!}{(n'-k)!} = \binom{n'}{k}\cdot k!$$

tak więc w oczywisty sposób $k! \mid \binom{n'}{k}\cdot k! = n(n+1)\ldots(n+(k-1))$

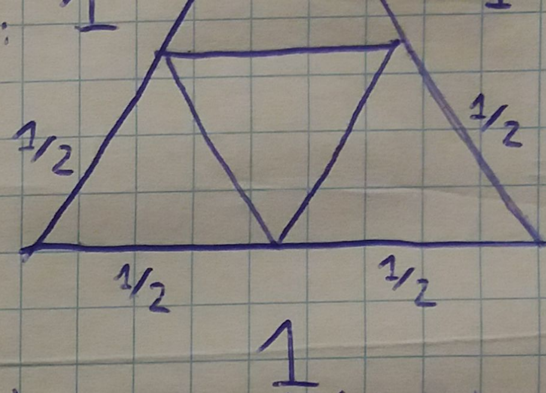
zadanie 4

(kulki)

a) niech n – liczba drużyn. Każda z drużyn ma więc do rozegrania $n-1$ meczów (szufladki), przy czym jeśli drużyna rozegra wszystkie $n-1$ meczów, to nie istnieje drużyna, która nie rozegrała żadnego meczu. Z zasady Dirichleta wynika więc, że w każdym momencie mamy 2 drużyny z taką samą liczbę rozegranych meczów.



b) podzielmy trójkąt jak na rysunku:



Jeśli w którymś z małych trójkątów znajdą się 2 punkty, to będą one w odległości $\leq 1/2$.

Mamy jednak 5 punktów i jedynie 4 małe trójkąty. Wobec tego, z zasady Drichleta, któraś z par znajdzie się w jednym trójkącie, więc ~~[illegible]~~ znajdzie się od siebie w odległości $\leq 1/2$.

c) 1) Jeśli ~~[illegible]~~ n - liczba ścian wielościanu, to każda ze ścian jest wielokątem o liczbie ~~[illegible]~~ boków $\leq n$.

2) Każda ze ścian wielościanu ma co najmniej 3 krawędzie

Niech n - liczba ścian wielościanu. Każda z nich ~~[illegible]~~ jest więc wielokątem o liczbie boków $3 \leq b \leq n$.

~~[illegible]~~ Tak więc z zasady Drichleta istnieją dwie ściany mające tę samą liczbę krawędzi.

zadanie 5 Skupmy się na resztach mod n:

niech $r_1, r_2 \dots r_n$ to reszty mod n z liczb $a_1 \dots a_n$

skoro reszty są mod n to jest $\boxed{n-1}$ możliwych takich reszt

(od 1 do $n-1$; zakładamy, że $\forall_i \; n \nmid a_i$ – wtedy zadanie jest trywialne).

Rozważmy kolejne sumy $S_1, S_2 \dots S_n$, gdzie $S_i = \sum_{k=1}^{i} r_k$

Zauważmy, że odjęcie dwóch takich sum

definiuje nam sumę kilku kolejnych reszt tj:

$S_j - S_i = r_{i+1} + \dots + r_{j-1} + r_j$, podobnie jak w treści zadania.

Sum S_x mamy n, możliwych reszt jest $n-1$,

czyli $\exists_{i,j} : S_i \underset{n}{\equiv} S_j$ (z zasady Dirichleta).

oznacza to, że $S_j - S_i = r_{i+1} + \dots + r_j \underset{n}{\equiv} 0$ ∎

Zadanie 9

b) $10^5 - \binom{10}{5} \cdot 5! = 69760$ (wszystkie możliwości oprócz tych, gdzie mamy 5 różnych cyfr)

a) gdy cyfra występuje:

- 2 razy: $10 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{9}{3} \cdot 3! = 50400$
- 3 razy: $10 \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{9}{2} \cdot 2! = 7200$
- 4 razy: $10 \cdot \binom{5}{4} \cdot 9 = 450$
- 5 razy: 10

łącznie mamy więc $50400 + 7200 + 450 + 10 = 58060$ możliwości

Zadanie 10

rozstawiamy w kolejności: 1. Białe, 2. Czarne
oraz Król -> Hetman -> Wieże -> Gońce -> Skoczki -> Pionki.

Mamy więc: $64 \cdot 63 \cdot \binom{62}{2} \cdot \binom{60}{2} \cdot \binom{58}{2} \cdot \binom{56}{8} \cdot$ (białe)

$\cdot\, 48 \cdot 47 \cdot \binom{46}{2} \cdot \binom{44}{2} \cdot \binom{42}{2} \cdot \binom{40}{8}$ (czarne)

różnych rozłożeń.

uwzględniając położenie gońców mamy jednak:

$\binom{32}{2} \cdot \binom{32}{2} \cdot 60 \cdot 59 \cdot \binom{58}{2} \cdot \binom{56}{2} \cdot \binom{54}{8} \cdot$

$\cdot\, 46 \cdot 45 \cdot \binom{44}{2} \cdot \binom{42}{2} \cdot \binom{40}{8}$

2 czarno- i 2białopolowe gońce

zadanie 13

a) $\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!}\right) = \frac{n}{k}\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\right) = \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$, $m,n \geq 0$. Niech $m \leq n$ (inaczej, jeśli $m > n$, to $L = P = 0$ w oczywisty sposób)

Dowodzimy indukcyjnie:

① Baza: dla $n=0$: $\binom{0}{0} = \binom{1}{1}$, dla $n=1$: $\binom{0}{0}+\binom{1}{0} \overset{?}{=} \binom{2}{1}$ ✓

$\binom{0}{1}+\binom{1}{1} \overset{?}{=} \binom{2}{2}$ ✓

② zał. że $\forall_{n'<n} \sum_{k=0}^{n'}\binom{k}{m} = \binom{n'+1}{m+1}$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{m} + \binom{n}{m} \overset{\text{zał.}}{=} \binom{n}{m+1} + \binom{n}{m}$$

Mamy jednak wzór $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (wykład; trójkąt Pascala)

Stosując go tutaj dostajemy: $\binom{n}{m+1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ ■

Zadanie 15 $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{N}$, wykazać że $a^p \equiv a \mod p$.

Dowodzimy indukcyjnie:

1 Baza: dla $a=1$ $a^p = 1 \equiv a \mod p$ ✓ (oczywiste)

2 Krok $\forall_{a' \leq a}$ $a'^p \equiv a' \mod p$. Chcemy uzyskać $(a+1)^p \equiv (a+1) \mod p$

$$(a+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k = \underbrace{a^p} + pa^{p-1} + \binom{p}{2} a^{p-2} + \dots + pa + \underbrace{1}$$

z założenia ind. $a^p \equiv a \mod p$, $1 \equiv 1 \mod p$

Łatwo zauważyć, że $\forall_{1 \leq i \leq p-1}$: $\binom{p}{i} \equiv 0 \mod p$

wyjaśnienie: $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!} = \frac{p(p-1)\dots(p-(i-1))}{i!} \Rightarrow p \mid \binom{p}{i}$

Wobec tego $(a+1)^p \equiv (a + (p-1)\cdot 0 + 1) \mod p$

$(a+1)^p \equiv (a+1) \mod p$ ■