zadanie 14

Gdy $x \in \mathbb{N}$: $\lfloor x \rfloor = x$ więc równość

$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$ jest oczywista

gdy $x \notin \mathbb{N}$:

niech $a = \lfloor \sqrt{x} \rfloor < a+1$

$$a < \sqrt{x} < a+1$$

$$a^2 < x < (a+1)^2$$

$$a^2 \leq \lfloor x \rfloor < (a+1)^2$$

$$a \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor} < a+1$$

$a = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor \leftarrow$ (z faktu, że $k \leq n < k+1 \Rightarrow k = \lfloor n \rfloor$)

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor \quad \#$$

zadanie 13

Mając przedział $\langle x, y\rangle$, $x, y \in \mathbb{Z}$ wiemy, że ilość liczb całkowitych, które do niego należą to $y - x + 1$

Dla każdego z poniższych przykładów wystarczy znaleźć więc największą i najmniejszą liczbę całkowitą w nim zawartą

a) $\langle a, b\rangle$ maks: $\lfloor b \rfloor$ min: $\lceil a \rceil$ czyli $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1$ ✓

b) $\langle a, b)$ • $b \in \mathbb{Z}$ : maks: $\lfloor b \rfloor - 1 = \lceil b \rceil - 1$ min: $\lceil a \rceil$ czyli $\lceil b \rceil - 1 - \lceil a \rceil + 1 = \lceil b \rceil - \lceil a \rceil$

• $b \notin \mathbb{Z}$ : maks: $\lfloor b \rfloor = \lceil b \rceil - 1$ min: $\lceil a \rceil$ czyli $\lceil b \rceil - 1 - \lceil a \rceil + 1 = \lceil b \rceil - \lceil a \rceil$ ✓

c) $(a, b\rangle$ • $a \in \mathbb{Z}$ : maks: $\lfloor b \rfloor$ min: $\lfloor a \rfloor + 1$ czyli $\lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor - 1 + 1 = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$

• $a \notin \mathbb{Z}$ : maks: $\lfloor b \rfloor$ min: $\lceil a \rceil = \lfloor a \rfloor + 1$ czyli $\lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor - 1 + 1 = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$ ✓

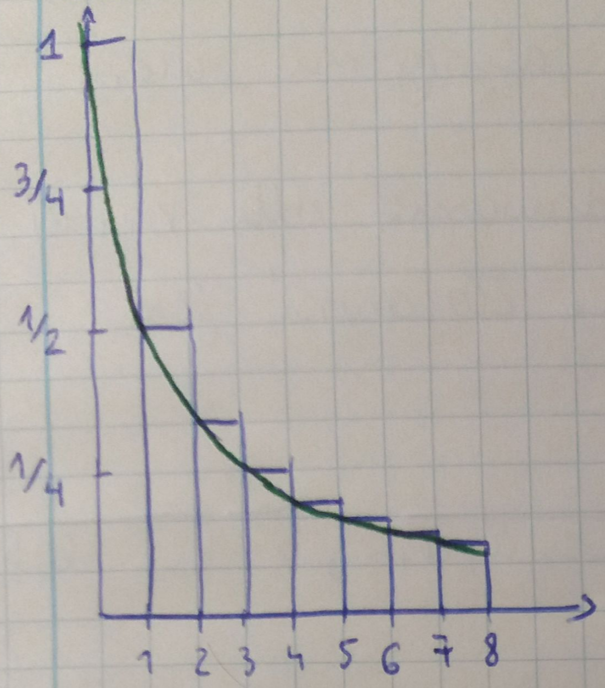
d) $(a, b)$ • $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ : maks: $\lceil b \rceil - 1$ min: $\lfloor a \rfloor + 1$ czyli $\lceil b \rceil - 1 - \lfloor a \rfloor - 1 + 1 = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor + 1$

• $a \notin \mathbb{Z}, b \notin \mathbb{Z}$ : maks: $\lfloor b \rfloor = \lceil b \rceil - 1$ min: $\lceil a \rceil = \lfloor a \rfloor + 1$ czyli $\lceil b \rceil - 1 - \lfloor a \rfloor - 1 + 1 = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$

• $a \in \mathbb{Z}, b \notin \mathbb{Z}$ : maks: $\lfloor b \rfloor = \lceil b \rceil - 1$ min: $\lfloor a \rfloor + 1$ czyli $\lceil b \rceil - 1 - \lfloor a \rfloor - 1 + 1 = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$

• $a \notin \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ : maks: $\lfloor b \rfloor - 1$ min: $\lceil a \rceil = \lfloor a \rfloor + 1$ czyli $\lceil b \rceil - 1 - \lfloor a \rfloor - 1 + 1 = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$ ✓

zadanie 10




$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

łatwo oszacować tę sumę za pomocą całki:

$$\int_0^n \frac{1}{x+1}\,dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1| \,, \quad \int_0^n \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|n+1|$$

czyli $\ln|n+1| < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Można też oszacować z drugiej strony:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln|n|$$

Albo (podobnie jak na wykładzie), można zauważyć, że wszystkie fragmenty nad wykresem mieszczą się w najwyższym „słupku"

wobec czego:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln|n+1| + O(1)$$

Najbardziej precyzyjne oszacowanie to jednak:

$$\ln|n+1| < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \ln|n|$$

zadanie 8

DODAWANIE: czas działania algorytmu zależy od liczby dodawań

W algorytmie wykonujemy dodawanie dla każdej pary cyfr, a takich par jest $n$. Złożoność jest więc liniowa czyli $O(n)$

MNOŻENIE: niech $a = \overline{a_n \ldots a_2 a_1}$, $b = \overline{b_n \ldots b_2 b_1}$

$$
\begin{array}{rcccc}
 & a_n & \ldots & a_2 & a_1 \\
\cdot & b_n & \ldots & b_2 & b_1 \\
\hline
 & b_1 a_n & \ldots & b_1 a_2 & b_1 a_1 \\
b_2 a_n & \ldots & b_2 a_2 & b_2 a_1 & \\
\ldots & & & & \\
+ \ b_n a_n \ldots b_n a_2 \ b_n a_1 & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

powyżej (symboliczny zapis)

1) dla każdej cyfry $b_1 \ldots b_n$ mnożymy ją przez każdą cyfrę $a_1 \ldots a_n$. Dodatkowo w najgorszym przypadku musimy dla każdego takiego mnożenia (oprócz pierwszych) dodać „przeniesienie"

Mamy więc:

$n^2 + n(n-1)$ operacji

2) dodajemy $n$ liczb długości maks. $2n-1$

Mamy więc:

$(2n-1)n$ operacji

Całkowity czas: $T(n) = n^2 + n^2 - n + 2n^2 - n =$

$= 4n^2 - 2n = O(n^2)$

# zadanie 7

Liczba porównań dla wyrazu:

$1 : n-1$

$2 : n-2$

$\vdots$

$n-1 : 1$

$n : 0$

**Algorytm:**

```
for i=1...n
    poz := i
    for j=i+1...n
        if a_j < a_poz
            poz := j
    swap(a_i, a_poz)
```

Tak więc $T(n) = (n-1) + (n+2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$

zadanie 6

Pokaż, że $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ i $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2 \cdot 2!} + \frac{1}{n^3 \cdot 3!} + \ldots =$

$= 1 + \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^i \cdot i!}$ oszacujmy otrzymaną sumę:

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^i \cdot i!} \leqslant \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^i \cdot 2^i} = \frac{1}{n^2 \cdot 2^2} + \frac{1}{n^3 \cdot 2^3} + \ldots \leqslant \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^i} =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

wobec tego $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

zadanie 5

a) niech $f(n) = \Theta(g(n)) \overset{def.}{\iff} \frac{f(n)}{g(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

z def. granicy: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} : \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| \leq \varepsilon$

w szczególności: $\exists_c \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} : \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| \leq \varepsilon$

$\exists_c \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} : |f(n)| \leq \varepsilon \cdot |g(n)|$

wobec czego $f(n) = O(g(n))$

b) niech $f(n) \sim g(n) \overset{def}{\iff} \frac{f(n)}{g(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

z def. granicy: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} : \left|\frac{f(n)}{g(n)} - 1\right| \leq \varepsilon$

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} : 1-\varepsilon \leq \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| \leq 1+\varepsilon$

w szczególności $\exists_\varepsilon \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} : (1-\varepsilon)|g(n)| \leq |f(n)| \leq |g(n)|(1+\varepsilon)$

mamy więc: $\exists_{c,d} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \quad c \cdot |g(n)| \leq |f(n)| \leq d \cdot |g(n)|$

i z definicji: $f(n) = \Theta(g(n))$

c) niech $f(n) = O(g(n)) \overset{def.}{\iff} \exists_{c>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} |f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$

$\iff \exists_{c>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \quad |g(n)| \geq \frac{1}{c} \cdot |f(n)| \iff$

$\iff \exists_{d>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \quad |g(n)| \geq d \cdot |f(n)| \iff g(n) = \Omega(f(n))$

d) niech $f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = O(f(n)) \overset{def.}{\iff}$

$\overset{def.}{\iff} \exists_{c_1,c_2>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} : |f(n)| \leq c_1 \cdot |g(n)| \wedge |g(n)| \leq c_2 \cdot |f(n)|$

$\iff \exists_{c,d>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \quad |g(n)| \leq c \cdot |f(n)| \wedge |g(n)| \geq d \cdot |f(n)|$

i z definicji: $g(n) = \Theta(f(n))$

z definicji symboli wynika, że:

- symetryczne: $\Theta$, $\sim$
- przechodnie: wszystkie

d) $a_n = n \cdot \log^3 n$  Wiemy, że $\log^a n \prec n^b$, $a, b > 0$

Niech $\varepsilon > 0$, dowolnie mały oraz ~~...~~ $b_n = n^{1+\varepsilon}$

Łatwo zauważyć, że $a_n = O(b_n)$:

$$n \cdot \log^3 n \leq c \cdot n^{1+\varepsilon}$$

$$\log^3 n \leq c \cdot n^{\varepsilon}$$

Nie istnieje więc najmniejsze $k$, takie że $a_n = O(n^k)$, jednak biorąc $k = 1 + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$ oraz $\varepsilon \to 0$ możemy uzyskać dobre oszacowanie (im mniejsze $\varepsilon$, tym lepiej).

b) $a_n = 5^{\log_2 n}$

$$a_n = 2^{\log_2 5^{\log_2 n}} = 2^{\log_2 n \cdot \log_2 5} = 2^{\log_2 n^{\log_2 5}} = n^{\log_2 5}$$

Mamy zatem $a_n = O(n^{\log_2 5})$

---

c) $a_n = 1{,}001^n$ Ten ciąg rośnie w sposób wykładniczy.

Wiemy, że $n^b \prec c^n$, $b > 0$, $c > 1$

Wobec tego $a_n$ nie da się ograniczyć wielomianem

## zadanie 1

a) $a_n = \dfrac{2n^{81,2}+3n^{45,1}}{4n^{23,3}+5n^{11,3}} = \dfrac{n^{45,1}}{n^{11,3}} \cdot \dfrac{2n^{36,1}+3}{4n^{12}+5} = n^{33,8} \cdot \dfrac{2n^{36,1}+3}{4n^{12}+5}$

$n \neq 0$

Sprawdźmy, czy $a_n = O(n^{57,9})$:

$\exists_c \, \exists_{n_0} \, \forall_{n \geq n_0}$ $\quad n^{33,8} \cdot \dfrac{2n^{36,1}+3}{4n^{12}+5} \overset{?}{\leq} c \cdot n^{57,9}$

$$n^{-24,1} \cdot \frac{2n^{36,1}+3}{4n^{12}+5} \overset{?}{\leq} c$$

$$2n^{12}+3n^{-24,1} \overset{?}{\leq} c(4n^{12}+5)$$

weźmy $c=1$ $\quad 2n^{12}+\dfrac{3}{n^{24,1}} \overset{!}{\leq} 4n^{12}+5$

nierówność jest zawsze spełniona, bo $2n^{12} \leq 4n^{12}$, a także $\forall_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{3}{n^{24,1}} < 5$. Wobec tego $a_n = O(n^{57,9})$

Sprawdźmy, czy $k = 57,9$ jest najmniejsze. Niech $\varepsilon > 0$ (dowolnie małe)

Załóżmy, że $a_n = O(n^{57,9-\varepsilon})$:

$\exists_c \, \exists_{n_0} \, \forall_{n \geq n_0}$ $\quad n^{33,8} \cdot \dfrac{2n^{36,1}+3}{4n^{12}+5} \overset{!}{\leq} c \cdot n^{57,9-\varepsilon}$

$$2n^{12+\varepsilon}+3 \overset{?}{\leq} c(4n^{12}+5)$$

$$2n^{\varepsilon}+\frac{3}{n^{12}} \overset{!}{\leq} c\left(4+\frac{5}{n^{12}}\right)$$

Lewa strona dla $n \to \infty$ dąży też do $\infty$, a prawa strona dąży do $4c$. Dostajemy sprzeczność, czyli $k = 57,9$ jest faktycznie najmniejsze.