Zadanie 6

Antoni Pokusiński

Najpierw należy znaleźć przykładową, prostą funkcję f taką, że $f(\frac{1}{\sqrt{a}}) = 0$ i policzyć z niej pochodną. Mamy więc:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - a, \qquad f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

Mając ustaloną odpowiednią funkcję, możemy skorzystać ze wzoru Newtona:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n^2} - a}{-\frac{2}{x_n^3}} =$$
$$= x_n - \frac{x_n - ax_n^3}{-2} = \frac{1}{2}x_n(3 - ax_n^2)$$

Teraz spróbujmy znaleźć takie x_0, które zagwarantują nam zbieżność metody i otrzymanie prawidłowego wyniku. Mamy funkcję $F(x) = \frac{1}{2}x(3 - ax^2)$. Łatwo zauważyć, że $F(\frac{1}{\sqrt{a}}) = 0$; sprawdźmy więc, dla jakich argumentów zachodzi $|F'(x)| < 1$:

$$F(x) = \frac{1}{2}x(3 - ax^2); \qquad F'(x) = \frac{3}{2}(1 - ax^2)$$
$$|1 - ax^2| < \frac{2}{3}$$
$$|x^2 - \frac{1}{a}| < \frac{2}{3a}$$
$$-\frac{2}{3a} < x^2 - \frac{1}{a} < \frac{2}{3a}$$
$$\frac{1}{3a} < x^2 < \frac{5}{3a}$$

Biorąc x_0 spełniające powyższy warunek, mamy gwarancję zbieżności metody Newtona. Przy pomocy komputera możemy sprawdzić efektywność naszej metody w zależności od doboru punktu x_0 (niech $a = 3$):

```
a = 3
xn = 0.5 # xn = 0.1 xn = 0.12 zn = 0.7 xn = 1 xn = 0.001
for i in range(1,6):
    xn = 0.5*xn*(3-a*xn*xn)

print(xn)
```

Przy pomocy *Wolfram Alpha* znajdujemy dokładną wartość $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577350269189625764...$ i porównać do niej otrzymane wyniki

- dla wartości ze środka wyznaczonego przedziału ($xn = 0.5$), wystarczy jedynie kilka (6) iteracji pętli, aby policzyć miejsce zerowe z dokładnością maszynową
- jeśli weźmiemy wartość blisko końca przedziału ($xn = 0.12$) to potrzebujemy już więcej iteracji, w tym wypadku 10
- należy też pamiętać, że wyjście poza obliczony przedział nie musi oznaczać złego wyniku: przykładowo dla $xn = 0.7$, $xn = 0.1$ czy nawet $xn = 0.001$ nadal uzyskujemy prawidłowe wyniki, jednak znów potrzebujemy więcej iteracji (pierwsze 2 przykłady - 13, $xn = 0.001$ - aż 22 iteracje)
- jeśli jednak weźmiemy np. $xn = 1$, to nie uzyskamy poprawnego wyniku - komputer zwróci nam 0. Tak więc aby mieć gwarancję poprawności algorytmu, należy odpowiednio dobierać x_0, aby unikać komplikacji.