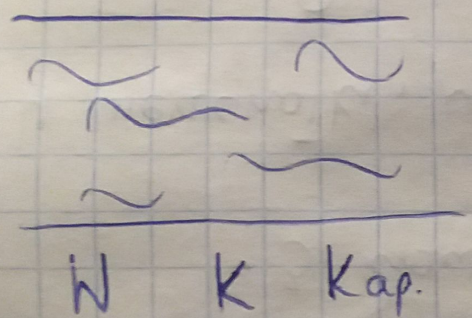
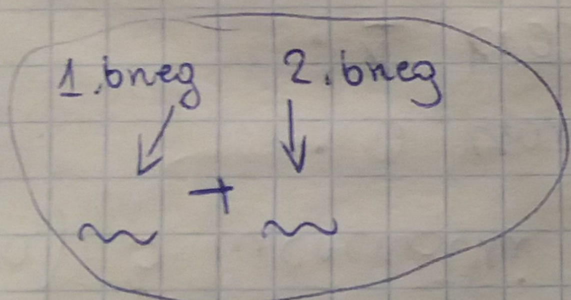
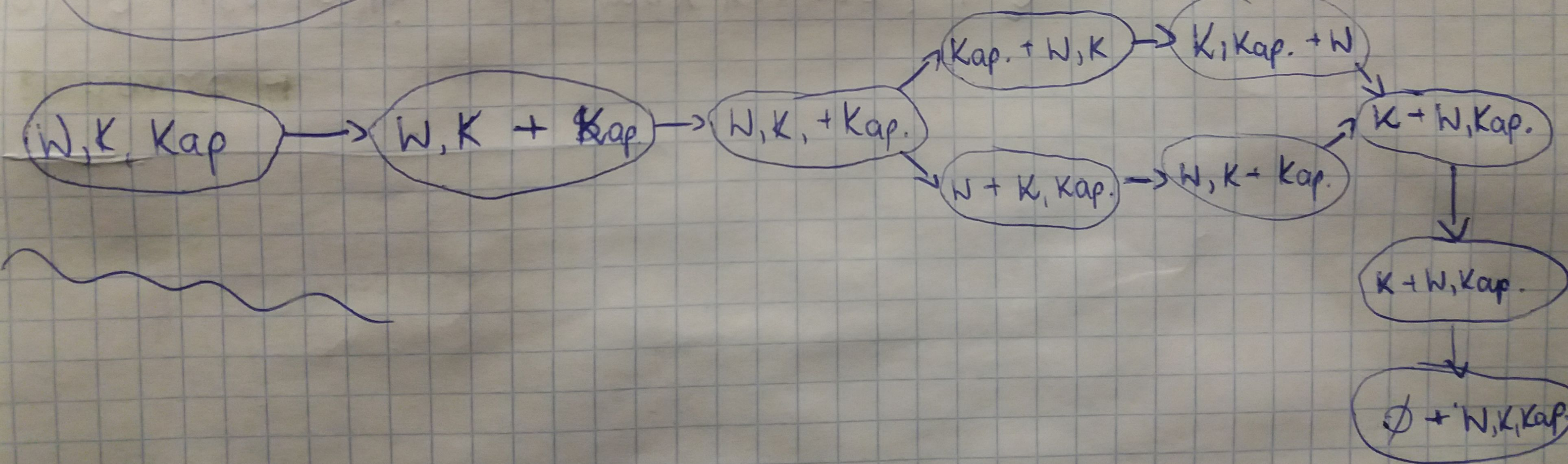
zadanie 1



1. bierzemy kozę (jedyne)
2. wracamy bez niczego (jedyne)
3. bierzemy wilka (1) / kapustę (2)
4. wracamy z kozą
5. bierzemy kapustę (2) / wilka (2)
6. wracamy bez niczego
7. bierzemy kozę :





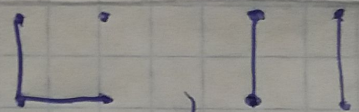
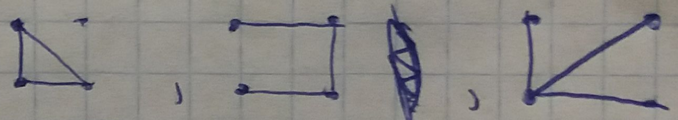
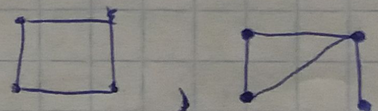
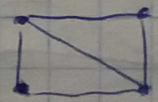
zadanie 4

a) 3 wierzchołki, czyli max krawędzi : 3.

- 0 krawędzi : 1
- 1 krawędź : 1
- 2 krawędzie : 1
- 3 krawędzie : 1

Czyli mamy 4 różne grafy

b) 4 wierzchołki, czyli max krawędzi : 6

- 0 krawędzi : 1
- 6 : 1
- 1 : 1
- 2 : 2 ()
- 3 : 3 ()
- 4 : 2 ()
- 5 : 1 ()

Zadanie 6

$n(Q_k) = |V| = 2^k$, ponieważ każdy wierzchołek to inny ciąg zero-jedynkowy

$m(Q_k) = |E| = \frac{k \cdot 2^k}{2} = 2^{k-1} \cdot k$, ponieważ w ciągu długości k możemy dokonać 1 zmiany na k sposobów

Twierdzenie z wykładu: Graf dwudzielny <=> każdy cykl ma długość parzystą.

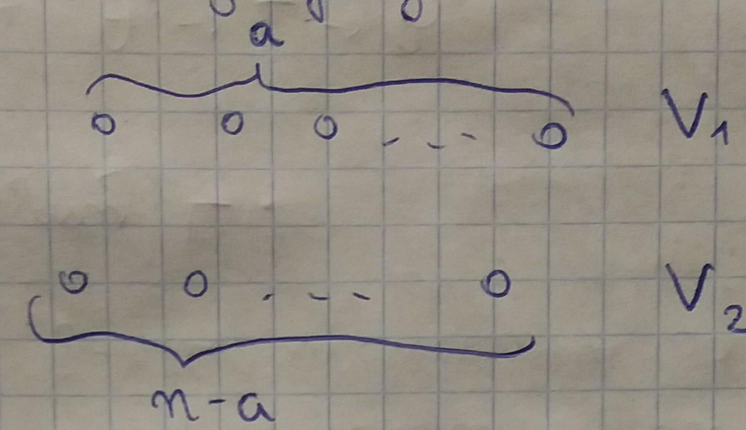
Weźmy dowolny k-elementowy ciąg zero-jedynkowy. Jeśli zanegujemy 1 element, to żeby na koniec uzyskać ten sam ciąg (chcemy mieć cykl), musimy „po drodze" ~~[illegible]~~ ten sam element zanegować. Wobec tego każda negacja musi mieć swoje „przeciwieństwo" zawarte w tym cyklu, z czego wynika, że cykl musi mieć długość parzystą, czyli graf ~~ma~~ jest dwudzielny.

Zadanie 8

mamy n wierzchołków. Skoro graf jest dwudzielny, to niech:

$|V_1| = a$

$|V_2| = n-a$



chcemy uzyskać maksymalną liczbę krawędzi, niech więc z każdego wierzchołka z V_1 istnieje krawędź do każdego wierzchołka z V_2

wtedy: $|E| = a(n-a) = f(a)$

$$\boxed{f'(a) = -2a+n}$$

Łatwo zauważyć, że maksymalną liczbę wierzchołków osiągamy dla $a = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

dla n parzystych: $|E| = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$

dla n nieparzystych: $|E| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil$, czyli maksymalnie: $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$

zadanie 9

jeśli G jest spójny - trywialnie spełnia zadanie

zał. że G nie jest spójny, rozważmy $\overline{G}$

Weźmy 2 dowolne $u, v \in V(G)$

- $\{u,v\} \notin E(G)$: wtedy $\{u,v\} \in E(\overline{G})$ ✓ (1)

- $\{u,v\} \in E(G)$: wtedy $\{u,v\} \notin E(\overline{G})$, ale skoro G nie jest spójny to $\exists\, w \in V(G)$ t. że $\{u,w\} \in E(\overline{G})$ oraz $\{w,v\} \in E(\overline{G})$, czyli istnieje droga $\{u,w,v\}$ ✓ (2)

z (1) i (2) przypadku wynika, że $\overline{G}$ jest spójny.

zadanie 11

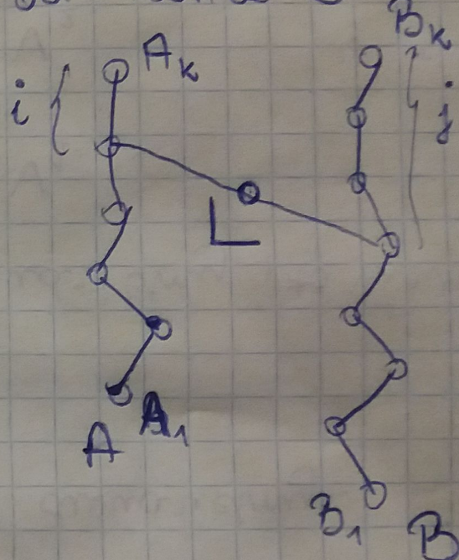
Nie wprost: zał. że istnieją dwie drogi (najdłuższe) bez wspólnego wierzchołka

Skoro graf jest spójny to istnieje droga łącząca dwie te najdłuższe drogi (jej długość jest ≥ 1)

niech długość A, B : k

Niech drogi: A, B oraz niech droga łącząca je
- łączy się z A w i-tym wierzchołku od końca A
- łączy się z B w j-tym wierzchołku od końca B

Drogę łączącą nazwijmy L.



- jeśli $i = j$, to droga $A_1 \to L \to B_k$ jest najdłuższą drogą, co sprzeczne z założeniem ↯

- jeśli $i > j$ (bez straty ogólności: przypadek $i < j$ analogiczny)

to droga $B_1 \to L \to A_k$ jest najdłuższe, co sprzeczne z założeniem ↯

Wobec tego dwie drogi (najdłuższe) w grafie spójnym muszą mieć wspólny wierzchołek.