zadanie 1

mamy n osób, część wysyłamy na delegację

1) $n \cdot 2^{n-1}$: najpierw wybieramy przewodniczącego, spośród n osób
potem, z pozostałych n-1 osób, każdy może albo pojechać, albo nie pojechać, mamy więc 2^{n-1} możliwości wyboru takich osób

2) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + i\binom{n}{i} + \dots + \binom{n}{n}\cdot n$

~~[illegible]~~ liczba możliwych delegacji to suma możliwości delegacji 1-osobowych, 2-osobowych ... n-osobowych.

$i\binom{n}{i}$ oznacza wybranie i-osobowej delegacji spośród ~~n~~ osób, a potem wybranie przewodniczącego z wybranej już grupy.

zadanie 3 niech A_2, A_3 - zbiory liczb podz. przez 2 i 3

B_5, B_7 - ——— " ——— 5, 7 $\quad |A_2 \cap A_3 \cap (B_5 \cup B_7)|$

szukamy więc $S = |A_2 \cup A_3| - |A_2 \cap (B_5 \cup B_7)| - |A_3 \cap (B_5 \cup B_7)| + |A_2 \cap A_3 \cap (B_5 \cup B_7)|$

$|A_2 \cup A_3| = |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| = \lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/3 \rfloor - \lfloor n/6 \rfloor$

$|A_2 \cap (B_5 \cup B_7)| = |A_2| + |B_5 \cup B_7| - |A_2 \cup B_5 \cup B_7| = \lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/5 \rfloor + \lfloor n/7 \rfloor - \lfloor n/35 \rfloor -$

$- (\lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/5 \rfloor + \lfloor n/7 \rfloor - \lfloor n/10 \rfloor - \lfloor n/14 \rfloor - \lfloor n/35 \rfloor + \lfloor n/70 \rfloor) = \lfloor n/10 \rfloor + \lfloor n/14 \rfloor - \lfloor n/70 \rfloor$

analogicznie: $|A_3 \cap (B_5 \cup B_7)| = \lfloor n/15 \rfloor + \lfloor n/21 \rfloor - \lfloor n/105 \rfloor$

$|(A_2 \cap A_3) \cap (B_5 \cup B_7)| = \lfloor n/30 \rfloor + \lfloor n/42 \rfloor - \lfloor n/210 \rfloor$

mamy więc $S = \lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/3 \rfloor - \lfloor n/6 \rfloor - \lfloor n/10 \rfloor - \lfloor n/14 \rfloor + \lfloor n/70 \rfloor - \lfloor n/15 \rfloor - \lfloor n/21 \rfloor + \lfloor n/105 \rfloor + \lfloor n/30 \rfloor + \lfloor n/42 \rfloor - \lfloor n/210 \rfloor$

Zadanie 4 niech A_i - zbiór permutacji, gdzie na i-tym miejscu jest i-ta liczba.

Szukamy $n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k|$

Ponieważ będziemy korzystać z zasady włączeń i wyłączeń, policzmy najpierw moce przekrojów:

- $|A_i| = (n-1)!$
- $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

$\vdots$

- $|A_1 \cap \ldots \cap A_k| = (n-k)!$

Mamy więc: $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = k(n-1)!$

$$- \binom{k}{2}(n-2)! + \binom{k}{3}(n-3)! - \ldots \pm (n-k)!$$

Ogólny wzór: $n! - |A_1 \cup \ldots \cup A_k| =$

$$= n! - \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}(n-i)!(-1)^{i+1}$$

zadanie 6 Łącznie mamy $(5\cdot 4)^n$ możliwości

niech A_i – układ, gdzie i-ta komoda jest pusta.

Podobnie jak w zadaniu 4 policzmy moce przekrojów:

- $|A_i| = (4\cdot 4)^n$
- $|A_i \cap A_j| = (3\cdot 4)^n$
- $|A_i \cap A_j \cap A_k| = (2\cdot 4)^n$
- $|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = 4^n$
- $|A_1 \cap \dots \cap A_5| = 0$

Mamy więc: $|A_1 \cup A_2 \dots \cup A_5| = 5\cdot 16^n - \binom{5}{2}\cdot 12^n + \binom{5}{3}\cdot 8^n - \binom{5}{4}\cdot 4^n$

Ponieważ chcemy, żeby żadna komoda nie była pusta, to dostajemy:

$$20^n - \left(5\cdot 16^n - \binom{5}{2}\cdot 12^n + \binom{5}{3}\cdot 8^n - \binom{5}{4}\cdot 4^n\right)$$

Zadanie 13 wiemy, że $|G| = |O_x| \cdot |G_x|$ $\forall_{x \in X}$; $|G| = 2^k$

wobec tego $|O_x| \mid |G|$ czyli $|O_x|$ musi też być potęgą dwójki

Wiemy też z algebry, że każde dwie orbity są równe albo rozłączne, czyli tworzą podział zbioru X.

Skoro $|X|$ jest nieparzyste, a $|O_x|$ są potęgami dwójki to musi istnieć jakaś orbita taka, że jej moc jest jednocześnie potęgą dwójki i jest nieparzysta, czyli jest równa 1.

Wobec tego, jeśli istnieje $x \in X$ t. że $|O_x| = 1$, to dla tego x mamy $|G_x| = |G|$.

Z definicji stabilizatora wynika, że ten x jest punktem stałym wszystkich przekształceń z G. ∎

Zadanie 14

~~Postępujemy podobnie jak w przypadku sześcianu.~~

~~Orbita x - punkt leżący dokładnie na środku jednej ze ściany~~

Z tw. Lagranga: $|G| = |O_x| \cdot |G_x|$

1) każda ściana może „przejść" na 11 pozostałych i samą siebie, więc $|O_x| = 12$

2) dla pięciokąta foremnego (ściana 12-ścianu) mamy 5 obrotów i 5 symetrii i $|G_x| = 5+5 = 10$, ponieważ żadne z tych przekształceń nie zmienia położenia środka pięciokąta

~~Rozumowanie podobne jak w przypadku sześcianu~~

Wobec tego $|G| = 12 \cdot 10 = 120$

Zadanie 15 Postępujemy podobnie jak przy 6-ściennej kostce rozróżniając każdą ścianę mielibyśmy $\underbrace{8!}$ ustawień

Policzmy jednak pod grupy ~~[illegible]~~ obrotów tej kostki:

$$|G| = |O_x| \cdot |G_x| = 8 \cdot 3 = 24$$

mamy więc $\frac{8!}{24} = 168$ rozróżnialnych ustawień

Chcąc policzyć ustawienia prawidłowe zauważamy, że liczba na 1 ściance determinuje liczbę na przeciwległej ściance.

Mamy więc: $\frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{24} = 16$ prawidłowych ustawień

Zadanie 16

rozróżniając każde pole mielibyśmy $\binom{9}{2} = 36$ możliwości

ponieważ będziemy korzystać z lem. Burnside'a, policzmy rząd grupy symetrii:

$$|G| = 4 + 4 = 8 \quad \text{(obroty + symetrie)}$$

Policzmy moc zbioru punktów stałych:

$|fix(id)| = 36$

$|fix(o90)| = |fix(o270)| = 0$

$|fix(o180)| = 4$

$|fix(|)| = |fix(—)| = |fix(/)| = |fix(\setminus)| = 6$

Z lematu Burnside'a : $\# orbit = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |fix(g)| = \frac{36 + 4 + 6 \cdot 4}{8} = 8$

A zatem mamy 8 rozróżnialnych ustawień: