zadanie 4

$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \iff a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-2} = 0$

sprawdźmy że $(E^2 - \frac{1}{2}E - \frac{1}{2})$ anihiluje nasz ciąg:

$$(E^2 - \frac{1}{2}E - \frac{1}{2})\langle a_n \rangle =$$

$$= \langle a_{n+2} \rangle - \langle \tfrac{1}{2} a_{n+1} \rangle - \langle \tfrac{1}{2} a_n \rangle =$$

$$= \langle a_{n+2} - \tfrac{1}{2} a_{n+1} - \tfrac{1}{2} a_n \rangle = \langle 0 \rangle \quad \checkmark$$

$$(E^2 - \tfrac{1}{2}E - \tfrac{1}{2}) = (E-1)(E+\tfrac{1}{2})$$

wobec tego $a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta(-1/2)^n$

$$\begin{cases} a_0 = 1 = \alpha + \beta \\ a_1 = 0 = \alpha - \frac{1}{2}\beta \end{cases}$$

$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = 2/3, \quad$ czyli $a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$

zadanie 5

a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1 \iff a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n - 3^n + 1 = 0$

~~anihilatory: $E^2 - 2E + 1$~~

$a_0 = 0$

$a_1 = 0$

anihilatory:

$(a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n)$: $(E^2 - 2E + 1) = (E-1)^2$

$3^n : (E-3)$

$-1 : (E-1)$; wobec tego $(E-3)(E-1)^3$ anihiluje cały ciąg

$$a_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot 1^n + \gamma \cdot n \cdot 1^n + \delta \cdot n^2 \cdot 1^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 = \alpha + \beta \\ a_1 = 0 = 3\alpha + \beta + \gamma + \delta \\ a_2 = 0 = 9\alpha + \beta + 2\gamma + 4\delta \\ a_3 = 2 = 27\alpha + \beta + 3\gamma + 9\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = -\frac{1}{4} \\ \gamma = 0 \\ \delta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

czyli nasze równanie jest postaci:

$$a_n = \frac{1}{4} \cdot 3^n - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} n^2$$

b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1} \iff a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n - n2^{n+1} = 0$

$a_0 = 1$
$a_1 = 1$

anihilatory:

$(a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n)$: $E^2 - 4E + 4 = (E-2)^2$

$n2^{n+1}$: $(E-2)^2$; czyli $(E-2)^4$ jest anihilatorem $\langle a_n \rangle$

~~Wobec tego~~ Wiemy, że $(E-2)^4$ anihiluje $2^n, n\cdot 2^n, n^2\cdot 2^n, n^3\cdot 2^n$

Wobec tego $a_n = 2^n(\alpha + n\cdot\beta + n^2\cdot\gamma + n^3\cdot\delta)$

c) $a_{n+2} = -a_{n+1} - a_n + 2^{n+1} \iff a_{n+2} + a_{n+1} + a_n - 2^{n+1} = 0$

$\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}$

anihilatory:

$(a_{n+2} + a_{n+1} + a_n)$: $(E^2 + E + 1) = \left(E - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(E - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

2^{n+1} : $E-2$

anihilatorem $\langle a_n \rangle$ jest więc $(E-2)\left(E - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(E - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

Wobec tego $a_n = \alpha\cdot 2^n + \beta\cdot\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) + \gamma\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$

zadanie 6

chcemy znaleźć ciąg t. że $a_n - a_{n-3} = 0$ oraz $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases}$
(czyli z definicji - ciąg $n \bmod 3$)

Łatwo zauważyć, że $(E^3 - 1) = (E-1)(E^2+E+1) =$
$= (E-1)\left(E - \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(E - \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ jest anihilatorem $\langle a_n \rangle$ (*)

Mamy więc: $a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \gamma\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$

$$\begin{cases} a_0 = 0 = \alpha + \beta + \gamma & (1) \\ a_1 = 1 = \alpha + \beta\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) + \gamma\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) & (2) \\ a_2 = 2 = \alpha + \beta\left(\frac{i\sqrt{3}-1}{2}\right) + \gamma\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) & (3) \end{cases}$$

$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ i\sqrt{3}(\beta - \gamma) = 1 \end{cases}$ po odjęciu stronami (3) - (2)

$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ i\sqrt{3}(\beta - \gamma) = 1 \quad (**) \\ \alpha - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{3}{2} \end{cases}$ z (3) i (**)

podstawiając $\alpha = -(\beta + \gamma)$:

$\begin{cases} i\sqrt{3}(\beta - \gamma) = 1 \\ \beta + \gamma = -1 \end{cases}$

podstawiamy $\gamma = -1 - \beta$:

$i\sqrt{3}(2\beta + 1) = 1$

$\beta = \left(\frac{1}{i\sqrt{3}} - 1\right) \cdot \frac{1}{2}$

$\beta = -\left(\frac{i\sqrt{3}+3}{6}\right)$

wobec tego $\gamma = -\left(\frac{i\sqrt{3}-3}{6}\right)$, $\alpha = 1$

czyli $a_n = \underbrace{1}_{\alpha} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n \cdot \underbrace{\left(-\left(\frac{i\sqrt{3}+3}{6}\right)\right)}_{\beta} + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n \cdot \underbrace{\left(-\left(\frac{i\sqrt{3}-3}{6}\right)\right)}_{\gamma}$

wiemy, że

$\forall \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = \frac{n - n \bmod 3}{3}$

wobec tego, korzystając z obliczonego wzoru otrzymujemy

$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = \left(n - \left(1 - \left(\frac{i\sqrt{3}+3}{6}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{i\sqrt{3}-3}{6}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)\right) \cdot \frac{1}{3}$

(*) — 1, $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ są miejscami zerowymi $E^3 - 1$

więc są to pierwiastki 3-go stopnia z 1

zadanie 7 a_i – liczba prawidłowych ciągów długości i

$a_1 = 25$ (każda litera oprócz 'a')

$a_0 = 1$ (ciąg pusty)

$$a_n = \underbrace{25 \cdot a_{n-1}}_{\text{gdy } a_{n-1} \text{ ma parzystą liczbę "a"}} + \underbrace{\left(26^{n-1} - a_{n-1}\right)}_{\text{wszystkie ciągi długości } n-1 \text{ oprócz tych prawidłowych}} \iff a_n - 24 a_{n-1} - 26^{n-1} = 0$$

anihilatorem jest: $(E-24)(E-26)$, czyli $a_n = \alpha \cdot 24^n + \beta \cdot 26^n$

$$\begin{cases} a_0 = 1 = \alpha + \beta \\ a_1 = 25 = 24\alpha + 26\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

mamy więc $a_n = \frac{1}{2} \cdot 24^n + \frac{1}{2} \cdot 26^n$

zadanie 8 $\quad S_n = \sum_{i=1}^{n} i2^i$

$S_n = S_{n-1} + n\cdot 2^n \iff S_n - S_{n-1} + n2^n = 0$

anihilatorem jest $(E-1)(E-2)^2$ $\left(\begin{array}{l} E-1 \text{ anihiluje } S_n - S_{n-1} \\ (E-2)^2 \text{ anihiluje } n\cdot 2^n \end{array}\right)$

wobec tego $a_n = \alpha\cdot 1^n + \beta\cdot 2^n + \gamma\cdot n\cdot 2^n$

$$\begin{cases} S_1 = 2 = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 2 + \gamma\cdot 2 \\ S_2 = 10 = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 4 + \gamma\cdot 8 \\ S_3 = 34 = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 8 + \gamma\cdot 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

czyli $a_n = 2 + 2n\cdot 2^n - 2\cdot 2^n =$

$= 2(1 + (n-1)2^n)$

zadanie 10

p – p-stwo negacji
$1-p$ – p-stwo zachowania oryginału

p_n – p-stwo, że po przejściu n linii dostaniemy dobrą (0) wiadomość

$$p_{n+1} = p_n(1-p) + (1-p_n)p = p_n(1-2p) + p$$

$$\underbrace{p_{n+1} - p_n(1-2p)}_{\text{anihilowane przez } (E-(1-2p))} - p = 0$$

p ← anihilowane przez $(E-1)$

anihilatorem jest więc $(E-1)(E-(1-2p))$.

$$p_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot (1-2p)^n$$

$$\begin{cases} p_1 = 1-p = \alpha + (1-2p)\beta \\ p_2 = p^2 + (1-p)^2 = \alpha + \beta \cdot (1-2p)^2 \end{cases}$$

$p_1 = 1-p$
$p_2 = p^2 + (1-p)^2$
(2× negacja albo 2× brak zmiany)

odejmujemy stronami: $p^2 + (1-p)^2 - (1-p) = \beta(1-2p)^2 - (1-2p)\beta$

$$2p^2 - p = (1-2p) \cdot \beta \cdot (-2p)$$

$$p(2p-1) = (2p-1) \cdot \beta \cdot 2p$$

$$\begin{cases} \beta = 1/2 \\ \alpha = 1/2 \end{cases}$$

tak więc $\boxed{p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^n}$

Zadanie 14

a) $a_n = n^2$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (n x^n)' =$$

$$= x\left(x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots\right)' = x \cdot \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' =$$

$$= x \cdot \frac{(1-x)^2 - x(2x-2)}{(1-x)^4} = x \cdot \left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3}\right) =$$

$$= \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

b) $a_n = n^3$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 x^n)' = x\left(\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}\right)' =$$

$$= x\left(\frac{(2x+1)(1-x^3) + x(x+1)\cdot 3(x-1)^2}{(1-x)^6}\right) = x\left(\frac{2x+1}{(1-x)^3} + \frac{3x(x+1)}{(1-x)^4}\right) =$$

$$= x\left(\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}\right)$$

c) $$a_n = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!\,k!} = \frac{1}{k!}(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\ldots(n+k)\, x^n =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)^{\underline{k}} x^n = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{n+k}\right)^{(k)} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(x^k + x^{k+1} + \ldots\right)^{(k)} = \frac{1}{k!}\left(x^k(1+x+x^2+\ldots)\right)^{(k)} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{x^k}{1-x}\right)^{(k)}$$