Zadanie 7

- $S = \{(1,2,0,1),(1,1,1,0)\},\ T = \{(1,0,1,0),(1,3,0,1)\}$

  Łatwo zauważyć, że S i T to dwa liniowo niezależne zbiory wektorów. Rozpinają więc pewne przestrzenie liniowe: niech LIN(S)=$\mathbb{W}_1$ oraz LIN(T)=$\mathbb{W}_2$. Mamy więc oczywiście dim($\mathbb{W}_1$)=dim($\mathbb{W}_2$)=2
  Policzmy teraz dim($\mathbb{W}_1$+$\mathbb{W}_2$). Aby to zrobić zastosujemy najpierw eliminację Gaussa dla wektorów z S i T:

  $$\begin{bmatrix}1&2&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&3&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(1)-(2)}} \begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&-1&1\\1&0&1&0\\1&3&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(3)-(1)+(2)}} \begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&-1&1\\1&3&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{(4)-(1)-2\cdot(2)+(3)} \begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

  Widać więc, że dim($\mathbb{W}_1$+$\mathbb{W}_2$)=3, ponieważ dostaliśmy liniowo niezależny zbiór 3 wektorów. Dalej ze wzoru dim($\mathbb{W}_1$)+dim($\mathbb{W}_2$)=dim($\mathbb{W}_1$+$\mathbb{W}_2$)+dim($\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$) możemy wywnioskować łatwo, że dim($\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$)=1

- $S = \{(2,-1,0,-2),(3,-2,1,0),(1,-1,1,-1)\},\ T = \{(3,-1,-1,0),(0,-1,2,3),(5,-2,-1,0)\}$

  Postępujemy analogiczne jak w przykładzie pierwszym. Musimy jednak jeszcze sprawdzić czy układy S i T są niezależne:

  $$S\colon \begin{bmatrix}2&-1&0&-2\\3&-2&1&0\\1&-1&1&-1\end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-3\cdot(3)} \begin{bmatrix}2&-1&0&-2\\0&1&-2&3\\1&-1&1&-1\end{bmatrix} \xrightarrow{(1)-2\cdot(3)-(2)} \begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$$

  $$T\colon \begin{bmatrix}3&-1&-1&0\\0&-1&2&3\\5&-2&-1&0\end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-\frac{5}{3}\cdot(1)} \begin{bmatrix}3&-1&-1&0\\0&-1&2&3\\0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-\frac{1}{3}\cdot(2)} \begin{bmatrix}3&-1&-1&0\\0&-1&2&3\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

  Sprowadziliśmy oba zbiory wektorów do postaci schodkowej, co oznacza że są one liniowo niezależne. Wprowadźmy jeszcze oznaczenia: niech LIN(S)=$\mathbb{W}_1$ oraz LIN(T)=$\mathbb{W}_2$. Mamy więc dim($\mathbb{W}_1$)=dim($\mathbb{W}_2$)=3, $\mathbb{W}_1$,$\mathbb{W}_2$ - przestrzenie liniowe.
  Policzmy teraz wymiar dim($\mathbb{W}_1$+$\mathbb{W}_2$):

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & -2\\ 3 & -2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 5 & -2 & -1 & 0\end{bmatrix} \xRightarrow[\text{przekształceń}]{\text{Z wcześniejszych}} \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -3\\ 3 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \xRightarrow{(6)-\frac{1}{3}\cdot(3)} \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{(6)+\frac{1}{2}\cdot(4)+\frac{1}{2}\cdot(5)} \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 3\end{bmatrix} \xRightarrow[(6)+(5)]{(4)-3\cdot(3)} \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -4 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{bmatrix} \xRightarrow{(4)+2\cdot(5)}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{bmatrix} \xRightarrow{(5)-\frac{3}{2}\cdot(6)} \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

Dzięki metodzie eliminacji Gaussa dostajemy $\dim(\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2)=3$, a zgodnie ze wzorem $\dim(\mathbb{W}_1)+\dim(\mathbb{W}_2)=\dim(\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2)+\dim(\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2)$, mamy również $\dim(\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2)=3$