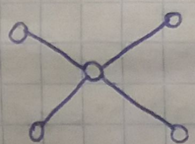
zadanie 2.

a) $1+2+2+3+3 \mod 2 = 1$

więc z lematu o uściskach dłoni $\left(\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot m(G)\right)$:

taki graf NIE ISTNIEJE!

b) narysujmy wierzchołek o ~~...~~ stopniu 4:



jest to graf o ciągu stopnia 1 1 1 1 4

Aby uzyskać 1 1 1 3 4 musielibyśmy dodać krawędź łączącą pewien wierzchołek z samym sobą. Nie możemy tak jednak zrobić, ponieważ graf ma być prosty.

Tak więc graf 11134 nie istnieje!

c) Rozważmy 2-dzielny graf o 5 wierzchołkach, mamy 2 możliwości ~~...~~ podziału na 2 części

V_1 V_2

- 1 - 4 wierzchołki - aby ~~s~~stopień każdego wierzchołka $\overbrace{}^{z\ V_2}$ był 2 ~~...~~ ~~...~~ musielibyśmy poprowadzić po 2 krawędzie ~~...~~ do pewnych wierzchołków z V_1 jednak jest tam ~~...~~ (w V_1) tylko 1 wierzchołek. ~~...~~ Musiałby więc mieć stopień >2

V_1 V_2

- 2 - 3 wierzch. - dla 2 wierzchołków z V_2 poprowadzimy ~~...~~ po 2 krawędzie do V_1, jednak dla trzeciego nie ~~...~~ możemy tego zrobić, ponieważ każdy wierzch. z V_1 ma już 2 krawędzie.

zadanie 3 teza: $d(G)>3 \Rightarrow d(\tilde{G})<3$

Niech $v_1, v_2 \in V$ - dowolne wierzchołki

I, jeśli $d(v_1, v_2) \neq 1$ w G to w $\tilde{G}$ $d(v_1, v_2) = 1$

II, jeśli w G $d(v_1, v_2) = 1$: w $\tilde{G}$ nie ma już krawędzi $\{v_1, v_2\}$
trzeba więc znaleźć inną drogę.

Skoro $d(G)>3$, to musi istnieć pewien $u \in V$ t. że
$\{v_1, u\}, \{v_2, u\} \notin E$

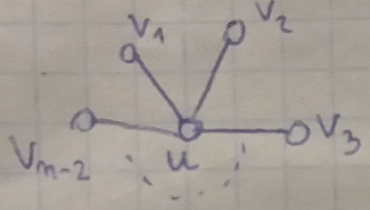
(inaczej każde 2 wierzchołki $\overbrace{\text{mozna by}}^{x,y}$ „połączyć" drogę $x - v_1 - v_2 - y$ długości 3 co sprzeczne z $d(G)>3$)

Wobec tego $\{v_1, u\}, \{v_2, u\} \in E$ w $\tilde{G}$ czyli $d(v_1, v_2) = 2 < 3$

A skoro były to 2 dowolne wierzchołki, to pokazaliśmy, że
$d(G)>3 \Rightarrow d(\tilde{G})<3$

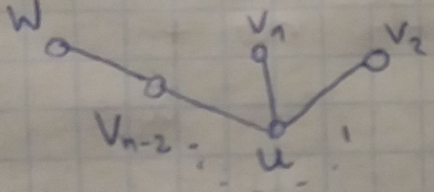
zadanie 4 $\overset{(1)}{d(G)=2}$; $\overset{(2)}{\max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}} = n-2$; teza: $m \geq 2n-4$

graf musi spełniać (2):



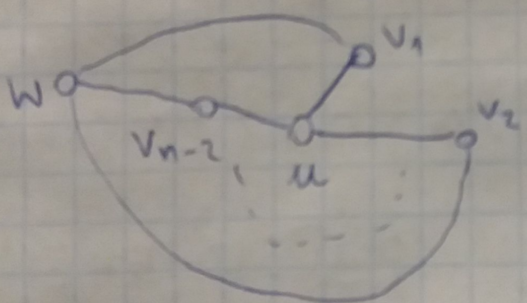
$n-1$ wierzchołków
$n-2$ krawędzi

musi jednak być jeszcze 1 wierzchołek:



n wierzchołków (wszystkie)
$n-1$ krawędzi

graf musi jeszcze spełniać (1) czyli z „w" musi być krawędź do każdego wierzchołka v_i (oprócz v_{n-2})



Jest to „najmniejszy" graf spełniający powyższe warunki (usunięcie jakiejkolwiek krawędzi spowoduje, że graf nie będzie spełniał warunków)

Mamy więc: $m \geq \overset{(\{u,v_i\})}{n-2} + \overset{(\{v_{n-2},w\})}{1} + \overset{(\{w,v_i\})}{n-3} = 2n-4$ ■

zadanie 6

drogi $a \to b$, $c \to d$ nie mają wspólnego wierzchołka

rozważamy drogi $a \to c$ i $b \to d$

FAKT:

dowolne 2 wierzchołki w drzewie łączy dokładnie 1 droga.

Zauważmy, że istnieje droga $b \to a \to c \to d$. Z FAKTU wiemy, że jest to jedyna droga z b do d. $a \to c$ ~~jest~~ więc „zawiera się" więc w $b \to d$, czyli w szczególności drogi te mają wspólny wierzchołek. ∎

Zadanie 11

wszystkich drzew o wierzchołkach $\{1, 2, \dots n\}$: n^{n-2} (tw. Cayley'a)

drzewa, takie że 1 jest liściem: $(n-1)^{n-3} \cdot (n-1) = (n-1)^{n-2}$

(liczba drzew o wierzch. $\{2, \dots n\}$ i do każdego wierzch. możemy „podpiąć" 1)

mamy więc $P(n) = (n-1)^{n-2} \cdot \frac{1}{n^{n-2}}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-2}\right]^{-1} = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-2}\right]^{-1} = \frac{1}{e}$$

zadanie 13 Dowodzimy indukcyjnie:

- $n=1$: 0 krawędzi ✓
  $n=2$: 1 krawędź (lub 0), $1 \leq \lfloor \frac{2^2}{4} \rfloor = 1$ ✓

- zał. że $\forall n' < n$ jeśli graf nie zawiera trójkątów, to ma $\leq \lfloor n^2/4 \rfloor$ krawędzi

Rozważmy graf o n wierzchołkach:
Weźmy 2 dowolne sąsiednie wierzchołki v_1, v_2. Każdy z pozostałych $n-2$ wierzch. może mieć krawędź albo do v_1 albo do v_2 (inaczej powstałby trójkąt). Mamy więc $n-2+1$ (kr. między v_1, v_2) krawędzi plus krawędzie łączące pozostałe wierzchołki (bez v_1, v_2). Te $n-2$ wierzchołki z krawędziami nieidącymi do v_1, v_2 tworzą więc graf bez trójkątów mający $\leq \lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \rfloor$ krawędzi (z założenia ind.).

Mamy więc nie więcej niż $\lfloor \frac{n^2-4n+4}{4} \rfloor + n - 1 = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + n - 1 - n + 1 = \lfloor n^2/4 \rfloor$ krawędzi ∎

zadanie 14

d - minimalny stopień wierzch. (> 1)

teza: G ma cykl długości $\geq d+1$

Rozważmy najdłuższą drogę w G, niech v - koniec tej drogi. $\deg(v) \geq d$, czyli v ma d sąsiadów. Zauważmy, że sąsiedzi v muszą być wierzchołkami z najdłuższej drogi, ponieważ inaczej uzyskalibyśmy nową najdłuższą drogę. ~~Mamy więc~~

~~[illegible]~~ v ma więc krawędź z ~~jednym~~ kolejnym wierzchołkiem z najdłuższej drogi i $d-1$ krawędzi z innymi wierzchołkami z tej drogi.

W najgorszym przypadku (każdy wierzchołek kolejno od v ma połączenie z v) mamy więc cykl długości $d+1$. ■