Zadanie 3

Wiemy, że $\langle\cdot,\cdot\rangle$ to standadowy iloczyn skalarny na $\mathbb{F}^n$ oraz dopełnienie ortogonalne dla dowolnego $U \subseteq \mathbb{F}^n$ definiujemy jako:

$$U^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{F}^n : \ \forall \vec{u} \in U \ \langle u, v\rangle = 0\}$$

Do udowodnienia mamy następujące fakty:

Fakt 1. *$U^\perp$ jest podprzestrzenią $\mathbb{F}^n$ ($U^\perp \leq \mathbb{F}^n$)*

Dowód. Przy dowodzeniu, że $U^\perp$ jest podprzestrzenią liniową, musimy pokazać 3 własności:

1. $\vec{0} \in U^\perp$ - oczywiste, ponieważ $\forall \vec{u} \in U \ \langle \vec{u}, \vec{0}\rangle = 0$
2. $U^\perp$ jest zamknięty na mnożenie przez skalar:
   Weźmy dowolny wektor $\vec{u} \in U^\perp$ i pokażmy, że jeśli $\alpha \in \mathbb{F}$, to wtedy również $\alpha\vec{u} \in U^\perp$, czyli (z definicji dop. ortogonalnego) $\langle \alpha u, v\rangle = 0$, gdzie $\vec{v}$ to dowolny wektor z U. Wiemy jednak, że skoro $\vec{u} \in U^\perp$, to $\langle u, v\rangle = 0$. Z definicji standardowego iloczynu skalarnego mamy : $\langle \alpha u, v\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha u_i v_i = \alpha \sum_{i=1}^n u_i v_i = \alpha\langle u, v\rangle$, a skoro $\langle u, v\rangle = 0$, to również $\alpha\langle u, v\rangle = 0$, czyli $\alpha\vec{u} \in U^\perp$.
3. $U^\perp$ jest zamknięty na dodawanie:
   Weźmy dowolne wektory $u_1, u_2 \in U^\perp$; musimy pokazać, że również $u_1 + u_2 \in U^\perp$. Weźmy dowolny wektor $\vec{v} \in U$; wtedy $\langle v, u_1\rangle = \langle v, u_2\rangle = 0$. Policzmy teraz iloczyn skalarny v i $u_1 + u_2$: $\langle v, u_1 + u_2\rangle = \sum_{i=1}^n v_i(u_{1i} + u_{2i}) = \sum_{i=1}^n v_i u_{1i} + v_i u_{2i} = \sum_{i=1}^n v_i u_{1i} + \sum_{i=1}^n v_i u_{2i} = \langle v, u_1\rangle + \langle v, u_2\rangle = 0$. Tak więc skoro $\langle v, u_1 + u_2\rangle = 0$, gdzie $\vec{v}$ to dowolny wektor z U, to $u_1 + u_2 \in U^\perp$.

□

Fakt 2. *Jeśli $\mathbb{W}$ podprzestrzenią $\mathbb{F}^n$ ($\mathbb{W} \leq \mathbb{F}^n$), to $dim\mathbb{W}^\perp + dim\mathbb{W} = n$.*

Dowód. Niech $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{W}$ (co daje nam $\dim\mathbb{W} = k$), macierz $M = \left[\vec{v}_1|\vec{v}_2|\cdots\vec{v}_k\right]$ oraz L - przekształcenie liniowe zdefiniowane jako $L(v) = M^T v$. Musimy pokazać, że $\dim\mathbb{W}^\perp = n - k$.
Zauważmy, że $\dim(\ker(L))+\dim(\mathrm{Im}(L))=\dim(\mathbb{F}^n)=n$ (z własności przekształcenia liniowego). Ponieważ wektory (poziome) z M^T tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{W}$, mamy: rk(M^T)=k. Wiemy, że rząd przekształcenia liniowego L jest równy rzędowi macierzy, która definiuje to przekształcenie, oraz że rząd przekształcenia liniowego to wymiar obrazu tego przekształcenia. Zapiszmy to:
$\mathrm{rk}(M^T)=\mathrm{rk}(L)=\dim(\mathrm{Im}(L)) = \mathrm{k}$. Dostajemy więc:
$\dim(\ker(L))=n-\dim(\mathrm{Im}(L))=n-k$. Dla udowodnienia naszego faktu wystarczy teraz pokazać, że $\ker(L)= \mathbb{W}^\perp$:

$\subseteq$ Weźmy dowolny wektor $\vec{u} \in \ker(L)$. Z definicji: $L(u) = M^T u = \vec{0}$, czyli dla każdego wektora $\vec{v}_i$ z bazy $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k$ mamy $\sum_{j=1}^{n} v_{ij} u_j = \langle v_i, u \rangle = 0$. Wektor $\vec{u}$ jest więc prostopadły do każdego wektora z bazy $\mathbb{W}$, czyli należy do $\mathbb{W}^\perp$.

$\supseteq$ Weźmy dowolny wektor $\vec{u} \in \mathbb{W}^\perp$. Jest on prostopadły do każdego wektora z bazy przestrzeni $\mathbb{W}$, czyli $\langle v_1, u \rangle = \langle v_2, u \rangle = \ldots = \langle v_k, u \rangle = 0$. Łatwo więc zauważyć, że $M^T u = \vec{0}$, czyli $L(v) = \vec{0} \equiv \vec{u} \in \ker(L)$

Udowodniliśmy, że $\ker(L) = \mathbb{W}^\perp$, a skoro $\dim(\ker(L)) = n - k$, to także $\dim(\mathbb{W}^\perp) = n - k$
$\square$

Fakt 3. *$\mathbb{W} = (\mathbb{W}^\perp)^\perp$, gdzie $\mathbb{W}$ to podprzestrzeń $\mathbb{F}^n$*

Dowód. Wystarczy udowodnić dwie własności:

1. $\mathbb{W} \leq (\mathbb{W}^\perp)^\perp$
   Weźmy dowolny wektor $\vec{w} \in \mathbb{W}$. Wiemy, że wszystkie wektory należące do $\mathbb{W}^\perp$ są prostopadłe do $\vec{w}$. Natomiast do $(\mathbb{W}^\perp)^\perp$ należą wszystkie wektory, które są prostopadłe do każdego wektora z $\mathbb{W}^\perp$, więc w szczególności wektor $\vec{w}$.

2. $\dim(\mathbb{W}) = \dim((\mathbb{W}^\perp)^\perp)$
   Niech $\dim(\mathbb{W}) = k$. Wtedy (z faktu 2.) $\dim(\mathbb{W}^\perp) = n - k$, czyli $\dim((\mathbb{W}^\perp)^\perp) = n - (n - k) = k$

Tak więc $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią $(\mathbb{W}^\perp)^\perp$ mającą ten sam wymiar; wobec tego $\mathbb{W} = (\mathbb{W}^\perp)^\perp$
$\square$