Zadanie 11

Mamy macierze stochastyczne $M_1 \dots M_k$ (wymiaru $n \times n$ każda) oraz dodatnie liczby $\alpha_1 \dots \alpha_k$ takie, że $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. Mamy pokazać, że $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i M_i = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \ldots + \alpha_k M_k$ to także macierz stochastyczna.

Lemat. *Jeśli $V_1 \dots V_k$ są wektorami stochastycznymi (każdy po n elementów) oraz $\alpha_1 \dots \alpha_k$ takie, że $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, to wektor $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_k V_k$ również jest stochastyczny.*

Dowód.

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_k V_k = \alpha_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_k \begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \\ \vdots \\ v_{kn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 v_{11} + \alpha_2 v_{21} + \cdots + \alpha_k v_{k1} \\ \alpha_1 v_{12} + \alpha_2 v_{22} + \cdots + \alpha_k v_{k2} \\ \vdots \\ \alpha_1 v_{1n} + \alpha_2 v_{2n} + \cdots + \alpha_k v_{kn} \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że wszystkie elementy uzyskanego wektora są nieujemne, ponieważ $\alpha_1 \dots \alpha_k$ są nieujemne oraz wszystkie v_{xy} również są nieujemne. $(*)$
Policzmy teraz sumę elementów powyższego wektora:

$$\alpha_1(v_{11} + v_{12} + \ldots + v_{1n}) + \alpha_2(v_{21} + v_{22} + \ldots + v_{2n}) + \ldots + \alpha_k(v_{k1} + v_{k2} + \ldots + v_{kn}) =$$
$$= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1$$

ponieważ każdy z wektorów $V_1 \dots V_k$ jest stochastyczny, czyli suma jego elementów jest równa 1. Z tego oraz z $(*)$ wynika, że uzyskany wektor jest stochastyczny. $\square$

Mając udowodniony lemat wystarczy zauważyć, że każdą macierz $M_1 \dots M_k$ można przedstawić jako zestawienie wektorów: $M_i = \left[V_{i1}|V_{i2}|\dots|V_{in}\right]$ oraz że mnożenie macierzy przez skalar α_i to mnożenie każdego jej wektora przez α_i: $\alpha_i M_i = \left[\alpha_i V_{i1}|\alpha_i V_{i2}|\dots|\alpha_i V_{in}\right]$. Wobec tego:

$$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \ldots + \alpha_k M_k =$$
$$\left[\alpha_1 V_{11}|\alpha_1 V_{12}|\dots|\alpha_1 V_{1n}\right] + \left[\alpha_2 V_{21}|\alpha_2 V_{22}|\dots|\alpha_2 V_{2n}\right] + \ldots + \left[\alpha_k V_{k1}|\alpha_k V_{k2}|\dots|\alpha_k V_{kn}\right] =$$
$$\left[\alpha_1 V_{11} + \alpha_2 V_{21} + \ldots + \alpha_k V_{k1}|\alpha_1 V_{12} + \alpha_2 V_{22} + \ldots + \alpha_k V_{k2}|\dots|\alpha_1 V_{1n} + \alpha_2 V_{2n} + \ldots + \alpha_k V_{kn}\right]$$

Wiemy, że w każdej z macierzy $M_1 \dots M_k$ każdy wektor jest stochastyczny, oraz że $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ więc z lematu wnioskujemy, że każdy wektor macierzy $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i M_i$ jest stochastyczny, czyli cała ta macierz jest stochastyczna.