Zadanie 6

BezierCoeffs(p, t) : [wielomian stopnia $n \leq 50$, zm. t] $\longrightarrow$ [$c_0, c_1, \dots c_k$]

wektor [$c_0, c_1, \dots c_n$] t.że $\quad p(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_i^n(t)$

obliczamy $w(t) = p(t) \cdot q(t)$ przy czym $p \in \Pi_{50}$, $q \in \Pi_2$

$$w(t) = \sum_{i=0}^{50} c_i B_i^{50}(t) \cdot \sum_{j=0}^{2} d_j B_j^2(t)$$

policzmy najpierw: $B_i^a \cdot B_j^b = \binom{a}{i} t^i (1-t)^{a-i} \cdot \binom{b}{j} t^j (1-t)^{b-j}$

$$= \binom{a}{i}\binom{b}{j} t^{i+j} (1-t)^{(a+b)-(i+j)} =$$

$$= \underbrace{\frac{\binom{a}{i}\binom{b}{j}}{\binom{a+b}{i+j}}}_{k} B_{i+j}^{a+b} = k \cdot B_{i+j}^{a+b}$$

w naszym przypadku:

$$B_i^{50} \cdot B_j^2 = \frac{\binom{50}{i}\binom{2}{j}}{\binom{52}{i+j}} B_{i+j}^{52}$$

$$\omega(t) = \sum_{i=0}^{50} \sum_{j=0}^{2} c_i d_j k_{ij} B_{i+j}^{52}(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{50} c_i \left(d_0 k_{i0} B_i^{52}(t) + d_1 k_{i1} B_{i+1}^{52}(t) + d_2 k_{i2} B_{i+2}^{52}(t) \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{52} B_i^{52}(t) \left(d_0 k_{i,0} c_i + d_1 c_{i-1} k_{i-1,1} + d_2 c_{i-2} k_{i-2,2} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{52} B_i^{52}(t) \sum_{j=0}^{2} d_j c_{i-j} k_{i-j,j}$$

przy czym jeśli $i<j$, to

$$k_{i-j,x} = 0, \quad c_{i-j} = 0$$

W powyższym przykładzie mnożyliśmy przez wielomian $q \in \Pi_2$.

$$k_{i,j} = \frac{\binom{50}{i}\binom{2}{j}}{\binom{52}{i+j}}$$

i oprócz tego $c_k = 0$ dla $k > 50$

Gdyby q był wyższego stopnia, np. $q \in \Pi_{50}$ liczylibyśmy analogicznie (oczywiście zmieniając odpowiednio indeksy sumowania).