Zadanie 1

Ponieważ będziemy korzystać z zasady włączeń i wyłączeń napiszmy wzór na $\sum_k (2^{-k})^n$.

$$\sum_k (2^{-k})^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n\cdot 0} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} + \ldots$$

dla ciągu $a_n = 1$: $A(x) = \frac{1}{1-x}$; $A(2^{-n}) = \sum_k (2^{-k})^n = \frac{1}{1-2^{-n}} = \frac{2^n}{2^n - 1}$

Policzmy sumy po $k \in \mathbb{N}$ takich, że 2 lub 3 lub 5 lub 7 dzieli k:

$$S = \sum 2^{-k\cdot 2} + \sum 2^{-k\cdot 3} + \sum 2^{-k\cdot 5} + \sum 2^{-k\cdot 7} - \sum 2^{-k\cdot 6} - \sum 2^{-k\cdot 10} - \sum 2^{-k\cdot 14} - \sum 2^{-k\cdot 15} - \sum 2^{-k\cdot 21} - \sum 2^{-k\cdot 35} + \sum 2^{-k\cdot 30} + \sum 2^{-k\cdot 42} + \sum 2^{-k\cdot 70} + \sum 2^{-k\cdot 105} - \sum 2^{-k\cdot 210}$$

Nas interesuje jednak $\sum_k 2^{-k} - S$:

$$\sum_k 2^{-k} - S = 2 - \frac{4}{3} - \frac{8}{7} - \frac{32}{31} - \frac{128}{127} + \frac{64}{63} + \frac{1024}{1023} + \frac{2^{14}}{2^{14}-1} + \frac{2^{15}}{2^{15}-1} + \frac{2^{21}}{2^{21}-1} + \frac{2^{35}}{2^{35}-1} - \frac{2^{30}}{2^{30}-1} - \frac{2^{42}}{2^{42}-1} - \frac{2^{70}}{2^{70}-1} - \frac{2^{105}}{2^{105}-1} + \frac{2^{210}}{2^{210}-1}$$

zadanie 4 niech $f(x) = x^a$, ~~[illegible]~~ rozpisujemy względem $(x-1)$:

kolejne pochodne:

$f'(x) = a x^{a-1}$

$f''(x) = a(a-1) x^{a-2}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = a^{\underline{n}} x^{a-n}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

$$x^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\underline{k}}}{k!} (x-1)^k$$

$(x_0 = 1)$

podstawiając $t = x-1$:

$$(1+t)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\underline{k}}}{k!} t^k$$

czyli zamieniając zmienne:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\underline{n}}}{n!} x^n \quad \blacksquare$$

zadanie 5

mnożąc przez x^n i dodając stronami:

a) $a_0 = a_1 = a_2 = 1$

$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n + 1$

$$A(x) - x^2 - x - 1 = x\left(A(x) - x - 1\right) + x^2\left(A(x) - 1\right) + x^3 A(x) + \frac{x^3}{1-x}$$

$$A(x) = A(x)\left(x^3 + x^2 + x\right) - x^2 - x - x^2 + \frac{1}{1-x}$$

$$0 = A(x)\left(x^3 + x^2 + x - 1\right) - 2x^2 - x + \frac{1}{1-x}$$

$$A(x) = \frac{2x^2 + x - \frac{1}{1-x}}{x^3 + x^2 + x - 1}$$

b) $a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + \frac{1}{n+1}$

$a_2 = a_1 + a_0 + 1 \quad / \cdot x^2$

$a_3 = a_2 + a_1 + \frac{1}{2} \quad / \cdot x^3$

$\vdots$

$$A(x) - a_1 x - a_0 = x\left(A(x) - a_0\right) + x^2 A(x) + \left(x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \ldots\right)$$

$$= x\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right) = x\left(-\ln(1-x)\right)$$

$$A(x) - x = A(x)\left(x^2 + x\right) + x\left(-\ln(1-x)\right)$$

$$0 = A(x)\left(x^2 + x - 1\right) + x\left(-\ln(1-x)\right) + x$$

$$A(x) = \frac{-x\left(1 - \ln(1-x)\right)}{x^2 + x - 1}$$

c) $a_0 = 1$

$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$

$$A(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = 1 + x \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}\right) x^n =$$

$$= 1 + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = 1 + x \cdot e^x \cdot A(x) = A(x)$$

$$A(x)\left(xe^x - 1\right) + 1 = 0$$

$$A(x) = \frac{-1}{xe^x - 1}$$

zadanie 6

Nieporządek długości $n+1$ możemy uzyskać na 2 sposoby.
Rozważmy możliwości rozpoczęcia układania nieporządku: Niech $i \neq j$

- na miejsce i wstawiamy liczbę j i na odwrót możemy to zrobić na n sposobów. Reszta to ułożenie nieporządku długości $n-1$
- (n sposobów) na miejsce i wstawiamy liczbę j, ale na miejscu j nie ma liczby i. Należy więc ułożyć nieporządek dla n liczb

wobec tego $d_{n+1} = n d_n + n d_{n-1} = n(d_n + d_{n-1})$

przy czym $a_1 = 0$ i $a_0 = 1$ (ciąg pusty)

teza: $d_n = n d_{n-1} + (-1)^n$

1 Baza: $1 \cdot d_0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0 = d_1$ ✓

2 Krok:

niech $\forall n' < n \quad d_{n'} = n' d_{n'-1} + (-1)^{n'}$

$$d_n = (n-1)\left((n-1)d_{n-2} + (-1)^{n-1} + d_{n-2}\right) = (n-1)\left(n d_{n-2} + (-1)^{n-1}\right) =$$

$$= n(n-1)d_{n-2} + (n-1)(-1)^{n+1} = n\left((n-1)d_{n-2} + (-1)^{n-1}\right) + (-1)^n =$$

$$= n d_{n-1} + (-1)^n \blacksquare$$

zadanie 12

teza: $P(x) = R(x) \cdot P(x^2)$

$P(x)$ – l. podziałów wszystkich

$R(x)$ – l. podziałów na różne składniki

$$R(x) \cdot P(x^2) = \prod_i (1+x^i) \cdot \prod_i \frac{1}{1-x^{2i}} = \frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ldots} =$$

$$= \frac{\frac{(1-x^2)}{1-x} \cdot \frac{(1-x^4)}{1-x^2} \cdot \frac{(1-x^6)}{1-x^3} \cdot \ldots}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ldots} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots} = P(x) \blacksquare$$

Zadanie 14

$\left[{n \atop k}\right]$ – liczba ~~cykli~~ permutacji n-elem. z rozkładem na k cykli

teza: $\left[{n \atop k}\right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right]$

Zgodnie z powyższą interpretacją kombinatoryczną: n elementów podzielonych na k cykli możemy uzyskać na 2 sposoby:

Niech n-1 elementów jest podzielonych na k-1 cykli, wówczas mamy następujące możliwości:

- „dorzucamy" 1 element do któregoś z istniejących cykli możemy to zrobić na n-1 sposobów (*)
- n-ty element nie będzie należał do żadnego z istniejących już cykli. Stworzy on cykl sam ze sobą. (**)

Na mocy (*) i (**) łatwo zauważyć, że:

$$\left[{n \atop k}\right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right]$$

II) teza: $x(x+1)\ldots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[{n \atop k}\right] x^k$

1) Baza: $n=1$: $\sum_{k=0}^{\infty} \left[{1 \atop k}\right] x^k = \left[{1 \atop 0}\right] + \left[{1 \atop 1}\right] x = x$ ✓

2) Krok: zał. że $\forall_{n' \leq n}$ $x(x+1)\ldots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[{n \atop k}\right] x^k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[{n+1 \atop k}\right] x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(n\left[{n \atop k}\right] + \left[{n \atop k-1}\right]\right) x^k =$$

$$= n\sum_{k=0}^{\infty} \left[{n \atop k}\right] x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left[{n \atop k}\right] x^{k+1} = n\cdot\left(x(x+1)\ldots(x+n-1)\right) + x\left(x(x+1)\ldots(x+n-1)\right) =$$

$$= (n+x)\left(x(x+1)\ldots(x+n-1)\right) \blacksquare$$