Zadanie 16 ...

Mamy: $x_0, x_1 \dots x_n$
$y_0, y_1 \dots y_n$

1) Istnienie:

Mamy $\lambda_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$; jest to wielomian st. n

• $\lambda_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1$

• $\lambda_i(x_{k\neq i}) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x_k - x_0}{x_i - x_0} \cdot \dots \cdot \frac{x_k - x_k}{x_i - x_k} \cdot \dots = 0$

weźmy $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \lambda_i(x)$; też jest stopnia n

Łatwo zauważyć, że $\forall i : L_n(x_i) = y_i$:

$L_n(x_i) = y_0 \lambda_0(x_0) + y_1 \lambda_1(x_1) + \dots + y_i \lambda_i(x_i) + \dots + y_n \lambda_n(x) =$

$= 0 + 0 \dots + y_i \cdot 1 + \dots + 0 = y_i$

Mamy więc wielomian st. n, który dla $n+1$ węzłów $x_0 \dots x_n$ spełnia $L_n(x_i) = y_i$, czyli znaleźliśmy rozwiązanie zadania interpolacyjnego.

2) Jednoznaczność: niech $w, v \in \Pi_n$

oraz $w(x_i) = v(x_i)$ dla $i = 0 \dots n$

rozważmy $u(x) = w(x) - v(x)$

$u \in \Pi_n$, ponieważ jest różnicą wielomianów $\in \Pi_n$

ma także $n+1$ miejsc zerowych w $x_0, x_1 \dots x_n$

wobec tego musi zachodzić $u(x) \equiv 0$ czyli

$$w(x) \equiv v(x) \quad \blacksquare$$