Zadanie 10

Mamy rozważyć wszystkie macierze wymiaru 2×2, których kwadrat jest równy $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ Udowodnijmy najpierw następujący lemat:

Lemat. *Jeśli macierz A jest wymiaru 2×2 oraz rk(A)=2, to rk(A^2)=2.*

Dowód. Weźmy dowolną macierz A wymiaru 2×2 i załóżmy, że $\mathrm{rk}(A)=2$. Ponieważ wymiar jest równy rzędowi macierzy, to jest ona odwracalna (tw. 4.28). Skoro jest odwracalna, to jeśli weźmiemy macierz B wymiaru 2×2, to $\mathrm{rk}(A\cdot B)=\mathrm{rk}(A)$ (fakt 4.31). W szczególnym przypadku jeśli weźmiemy $B=A$, to dostajemy $\mathrm{rk}(A^2) = \mathrm{rk}(A) = 2$. □

Dzięki lematowi możemy rozważać tylko macierze A, t. że $\mathrm{rk}(A) = 1 \vee rk(A) = 0$. Od razu możemy zauważyć, że przypadek $rk(A) = 0$ jest trywialny i wtedy $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$.

Niech $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$. Wtedy $A^2=\begin{bmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\c(a+d) & d^2+bc\end{bmatrix}$. Ponieważ $\mathrm{rk}(A)<2$, to wektory $A_1 = (a,c)$ $A_2 = (b,d)$ są liniowo zależne. Wobec tego $ad = bc$. Dalej mamy następujący układ równań:

$$\begin{cases} a^2+bc=0\\ d^2+bc=0\\ b(a+d)=0\\ c(a+d)=0\end{cases}$$

Skoro $ad = bc$, to mamy też

$$\begin{cases} a(a+d)=0\\ d(a+d)=0\end{cases}$$

Z tych równań wnioskujemy, że:

$$a = 0 \vee d = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge d = 0 \Rightarrow b = 0 \vee c = 0$$

Rozpatrzmy teraz przypadki:

1. $b = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge d = 0$ i wobec tego c może być dowolne, co już generuje nam rozwiązania postaci: $\begin{bmatrix}0 & 0\\c & 0\end{bmatrix}$, c – dowolne.
2. (Analogicznie) $c = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge d = 0$ i b może być dowolne, więc mamy rozwiązania postaci: $\begin{bmatrix}0 & b\\0 & 0\end{bmatrix}$, b – dowolne.

Rozważmy jeszcze sytuację, gdy $a, b, c, d \neq 0$. Wyznaczymy wektor $A_1 = (a, c)$ w zależności od $A_2 = (b, d)$:

Skoro $a(a+d) = 0$ oraz $a \neq 0$, to $a = -d$. Dalej, skoro $ad = bc$ i $a = -d$, to $c = \frac{-d^2}{b}$. Mamy więc rozwiązania postaci: $\begin{bmatrix} -d & b \\ \frac{-d^2}{b} & d \end{bmatrix}$, $b, d \neq 0$. Tak więc macierze spełniające równanie $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ są postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, c - dowolne, \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b - dowolne, \begin{bmatrix} -d & b \\ \frac{-d^2}{b} & d \end{bmatrix}, b, d \neq 0.$$