Seminár 29: Algebraické výrazy a rovnice VI – sústavy rovníc, rovnice s parametrom

Úloha 29.1. [B-66-II-1] seminar29,rovnice **Riešenie*.** Anulovaním pravej strany upravíme danú rovnicu na tvar

$$a-b+66\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=(a-b)\left(1-\frac{66}{ab}\right)=\frac{1}{ab}(a-b)(ab-66)=0.$$

Z toho vyplýva, že hľadané dvojice (a,b) prirodzených čísel sú práve tie, pre ktoré platí $a=b$ alebo $ab=66$.

Úlohe teda vyhovuje nekonečne veľa dvojíc prirodzených čísel tvaru $(a,b)=(k,k)$, pričom k je ľubovoľné prirodzené číslo, a keďže číslo $66=2\cdot 3\cdot 11$ má osem deliteľov, tak aj osem dvojíc $(a,b)\in\{(1,66),$ $(2,33)$, $(3,22)$, $(6,11)$, $(11,6)$, $(22,3)$, $(33,2)$, $(66,1)\}$.

Komentár. Úloha je relatívne jednoduchá a vhodná ako rozcvička na začiatok seminára. Pripomenie študentom metódu riešenia rovníc rozkladom na súčin výrazov, ktorý je rovný nule. Zároveň v záverečnej diskusii zľahka využijú vedomosti o deliteľnosti prirodzených čísel.

Úloha 29.2. [B-58-II-1] seminar29,rovnice **Riešenie*.** Sčítaním prvej a druhej rovnice danej sústavy dostaneme $2x=1+a$, odčítaním druhej rovnice od prvej $2y=1-a$. Odtiaľ

$$x=\frac{1}{2}(1+a),\qquad y=\frac{1}{2}(1-a). \tag{1}$$

Keď dosadíme za x a y do tretej rovnice pôvodnej sústavy, dostaneme rovnicu

$$-2a(1+a)+2(1-a)=z^2+4,\qquad\text{čiže}\qquad z^2+2a^2+4a+2=0,$$

ktorú upravíme na tvar

$$z^2+2(a+1)^2=0.$$

Oba sčítance na ľavej strane poslednej rovnice sú nezáporné čísla. Ich súčet je 0 práve vtedy, keď $z=0$, $a=-1$. Dosadením týchto hodnôt do 1 dostaneme $x=0, y=1$.

Záver. Daná sústava rovníc má riešenie iba pre $a=-1$, a to $x=0$, $y=1$, $z=0$. Skúška pri tomto postupe nie je nutná.

Komentár. Úloha vyžaduje umné narábanie so sústavou troch rovníc tak, aby bolo možné uskutočniť záverečnú diskusiu o existencii riešenia pre rôzne hodnoty parametra a. Je tiež vhodné so študentami prediskutovať, prečo v tomto prípade nie je nutné robiť skúšku správnosti.

Úloha 29.3. [B-60-S-1] seminar29,rovnice **Riešenie*.** Aby bola ľavá strana rovnice definovaná, musia byť oba výrazy pod odmocninami nezáporné, čo je splnené práve pre všetky $x\geq 0$. Pre nezáporné x potom $p=\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\geq\sqrt{3}$, rovnica môže teda mať riešenie iba pre $p\geq\sqrt{3}$.

Upravujme danú rovnicu:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}+\sqrt{x+3}&=p,\\ 2x+3+2\sqrt{x(x+3)}&=p^2,\\ 2\sqrt{x(x+3)}&=p^2-2x-3,\\ 4x(x+3)&=(p^2-2x-3)^2,\\ 4x^2+12x&=p^4+4x^2+9-4p^2x-6p^2+12x,\\ x&=\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}. \end{aligned}\tag{2}$$

Keďže sme danú rovnicu umocňovali na druhú, je nutné sa presvedčiť skúškou, že vypočítané x je pre hodnotu parametra $p \geq \sqrt{3}$ riešením pôvodnej rovnice:

$$\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}+3}+\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}}=\sqrt{\frac{p^4-6p^2+9+12p^2}{4p^2}}+\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{(p^2+3)^2}{4p^2}}+\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}}=\frac{p^2+3}{2p}+\frac{p^2-3}{2p}=p.$$

Pri predposlednej úprave sme využili podmienku $p \geq \sqrt{3}$ (a teda aj $p^2-3 \geq 0$ a $p > 0$), takže $\sqrt{(p^2-3)^2}=p^2-3$ a $\sqrt{4p^2}=2p$.

Poznámka. Namiesto skúšky stačí overiť, že pre nájdené x sú všetky umocňované výrazy nezáporné, teda vlastne stačí overiť, že

$$p^2-2x-3=\frac{(p^2-3)(p^2+3)}{2p^2} \geq 0.$$

Pre $p \geq \sqrt{3}$ to tak naozaj je.

Vynechať skúšku možno aj takouto úvahou: Funkcia $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$ je zrejme rastúca, v bode 0 (ktorý je krajným bodom jej definičného oboru) nadobúda hodnotu $\sqrt{3}$ a zhora je neohraničená. Preto každú hodnotu $p \geq \sqrt{3}$ nadobúda pre práve jedno $x \geq 0$. Z toho vyplýva, že pre $p \geq \sqrt{3}$ má zadaná rovnica práve jedno riešenie, a teda (jediné) nájdené riešenie 2 musí vyhovovať.

Komentár. Úloha nie je algebraicky náročná, vyžaduje však starostlivú diskusiu definičného oboru, ktorý potom vyústi v obmedzenie hodnôt parametra p. Dôležitou súčasťou riešenia je v tomto prípade aj skúška správnosti, prípadne diskusia, ktorá je uvedená v závere prezentovaného riešenia˙

Úloha 29.4. [B-58-I-2] seminar29,rovnice **Riešenie*.** Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme po úprave

$$(z-x)(2z+2x+y)=0.$$

Sú preto možné dva prípady, ktoré rozoberieme samostatne.

a) Prípad $z-x=0$. Dosadením $z=x$ do prvej rovnice sústavy dostaneme $x^2+xy=y^2+x^2$, čiže $y(x-y)=0$. To znamená, že platí $y=0$ alebo $x=y$. V prvom prípade dostávame trojice $(x,y,z)=(x,0,x)$, v druhom $(x,y,z)=(x,x,x)$; také trojice sú riešeniami danej sústavy pre ľubovoľné reálne číslo x, ako ľahko overíme dosadením (aj keď taká skúška pri našom postupe vlastne nie je nutná).

b) Prípad $2z+2x+y=0$. Dosadením $y=-2x-2z$ do prvej rovnice sústavy dostaneme

$$x^2+x(-2x-2z)=(-2x-2z)^2+z^2, \quad \text{čiže} \quad 5(x+z)^2=0.$$

Posledná rovnica je splnená práve vtedy, keď $z=-x$, vtedy však $y=-2x-2z=0$.Dostávame trojice $(x,y,z)=(x,0,-x)$, ktoré sú riešeniami danej sústavy pre každé reálne x, ako overíme dosadením. (O takej skúške platí to isté čo v prípade a).

Odpoveď. Všetky riešenia (x,y,z) danej sústavy sú trojice troch typov:

$$(x,x,x), \quad (x,0,x), \quad (x,0,-x),$$

kde x je ľubovoľné reálne číslo.

Iné riešenie*. Obe rovnice sústavy sčítame. Po úprave dostaneme rovnicu

$$y(x+z-2y)=0$$

a opäť rozlíšime dve možnosti.

a) Prípad $y = 0$. Z prvej rovnice sústavy ihneď vidíme, že $x^2 = z^2$, čiže $z = \pm x$. Skúškou overíme, že každá z trojíc $(x, 0, x)$ a $(x, 0, -x)$ je pre ľubovoľné reálne x riešením.

b) Prípad $x + z - 2y = 0$. Dosadením $y = \frac{1}{2}(x + z)$ do prvej rovnice sústavy dostaneme

$$x^2 + x(x+z)^2 = \frac{(x+z)^2}{4} + z^2, \qquad \text{po úprave} \qquad x^2 = z^2.$$

Platí teda $z = -x$ alebo $z = x$. Dosadením do rovnosti $x+z-2y = 0$ v prvom prípade dostaneme $y = 0$, v druhom prípade $y = x$. Zodpovedajúce trojice $(x, 0, -x)$ a (x, x, x) sú riešeniami pre každé reálne x (prvé z nich sme však našli už v časti a).

Úloha 29.5. [B-60-I-1] seminar29,rovnice **Riešenie*.** Umocnením a odčítaním prvých dvoch rovností dostaneme $x^2 - z^2 = (z+1)^2 - (x+1)^2$, čo upravíme na $2(x^2 - z^2) + 2(x - z) = 0$, čiže

$$(x - z)(x + z + 1) = 0. \tag{3}$$

Analogicky by sme dostali ďalšie dve rovnice, ktoré vzniknú z 3 cyklickou zámenou neznámych $x \to y \to z$. Vzhľadom na túto symetriu (daná sústava sa nezmení dokonca pri ľubovoľnej permutácii neznámych) stačí rozobrať len nasledovné dve možnosti:

Ak $x = y = z$, prejde pôvodná sústava na jedinú rovnicu $\sqrt{2x^2} = x + 1$, ktorá má dve riešenia $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Každá z trojíc $(1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm 2)$ je zrejme riešením pôvodnej sústavy.

Ak sú niektoré dve z čísel x, y, z rôzne, napríklad $x \neq z$, vyplýva z 3 rovnosť $x+z = -1$. Dosadením $x+1 = -z$ do druhej rovnice sústavy dostávame $y = 0$ a potom z tretej rovnice máme $x^2+(x+1)^2 = 1$, čiže $x(x + 1) = 0$. Posledná rovnica má dve riešenia $x = 0$ a $x = -1$, ktorým zodpovedajú $z = -1$ a $z = 0$. Ľahko overíme, že obe nájdené trojice $(0, 0, -1)$ a $(-1, 0, 0)$ sú riešeniami danej sústavy, rovnako aj trojica $(0, -1, 0)$, ktorú dostaneme ich permutáciou.

Daná sústava má päť riešení: $(0, 0, -1), (0, -1, 0), (-1, 0, 0), (1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ a $(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$.

Komentár. Posledné dve úlohy seminára kombinujú princípy z prvých dvoch úloh: vhodné sčítanie a odčítanie rovníc medzi sebou a úpravu na súčin členov, ktorý je rovný nule. Dôležité však je, aby boli študenti pozorní pri vyvodzovaní záverov a pokryli v ich riešení všetky možnosti. Zároveň je posledná úloha pekným príkladom symetrie, je vhodné so študentami prediskutovať, ako táto úlohu zjednodušuje.