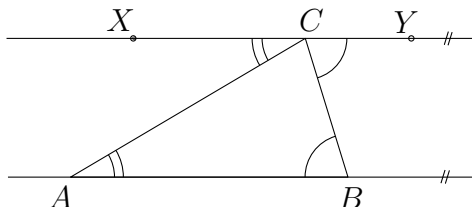


## Seminár 10: Geometria I – základné poznatky

### Úlohy a riešenia

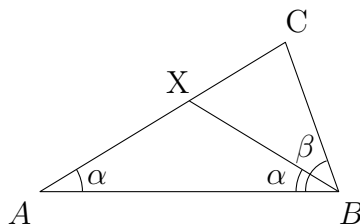
**Úloha 10.1.** seminar10,geomlah **Riešenie.** Veďme rovnobežku  $XY$  so stranou  $AB$  vrcholom  $C$  trojuholníka  $ABC$ , tak že bod  $C$  leží medzi bodmi  $X$  a  $Y$  (obr. 1). Potom  $|\angle BAC| = |\angle ACX|$  a



Obr. 1:

$|\angle ABC| = |\angle BCY|$ , pretože ide o dvojicu striedavých uhlov. Keďže  $|\angle ACX| + |\angle ACB| + |\angle BCY| = 180^\circ$ , pretože uhol  $XCX$  je priamy, platí aj  $|\angle BAC| + |\angle ABC| + |\angle ACB| = 180^\circ$ .

**Úloha 10.2.** [66-I-3-N1] seminar10,geomlah,domacekolo,navodna **Riešenie\*.** Ak je  $\alpha < \beta$ , môžeme nájsť vnútorný bod  $X$  strany  $AC$ , pre ktorý platí  $|\angle ABX| = \alpha$ , a teda  $|AX| = |BX|$ , takže z trojuholníkovej nerovnosti  $|BC| < |BX| + |XC|$  už vyplýva  $a < b$ .



Obr. 2:

**Úloha 10.3.** [63-I-4-N3] seminar10,geomlah,domacekolo,navodna **Riešenie.** a) Označme rovnakú výšku dvoch trojuholníkov  $v$ . V trojuholníku  $T_1$  je táto výškou na základňu  $a_1$ , v trojuholníku  $T_2$  na základňu  $a_2$ . Pomer obsahov týchto trojuholníkov je potom

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{\frac{1}{2}a_1v}{\frac{1}{2}a_2v} = \frac{a_1}{a_2},$$

čo sme chceli dokázať.

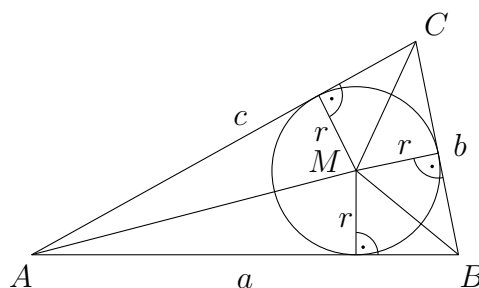
b) Označme zhodnú základňu dvoch trojuholníkov  $z$ , v trojuholníku  $T_1$  je výška na túto základňu  $v_1$ , v trojuholníku  $T_2$  je výška na túto základňu  $v_2$ . Pomer obsahov trojuholníkov  $T_1$  a  $T_2$  je

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{\frac{1}{2}zv_1}{\frac{1}{2}zv_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

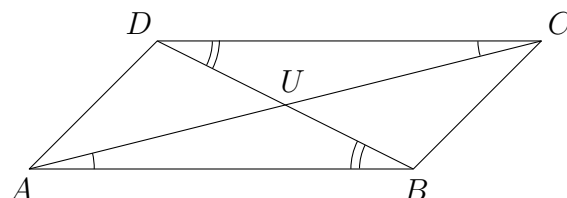
čo je pomer príslušných výšok.

**Úloha 10.4.** [61-I-5-N1] seminar10,geomlah,domacekolo,navodna **Riešenie\*.** Stred  $M$  vpísanej kružnice rozdeľuje uvažovaný trojuholník  $ABC$  na tri menšie trojuholníky  $BCM$ ,  $ACM$ ,  $ABM$  s obsahmi  $\frac{1}{2}ar$ ,  $\frac{1}{2}br$ ,  $\frac{1}{2}cr$ , ktorých súčet je  $S$ , odkiaľ vyplýva dokazovaný vzorec.

**Úloha 10.5.** seminar10,geomlah **Riešenie.** Označme  $U$  priesečník uhlopriečok  $AC$  a  $BD$  rovnobežníka  $ABCD$  (obr. 4). Keďže uhly  $ABD$  a  $BDC$  sú striedavé, majú rovnakú veľkosť. Podobne uhly



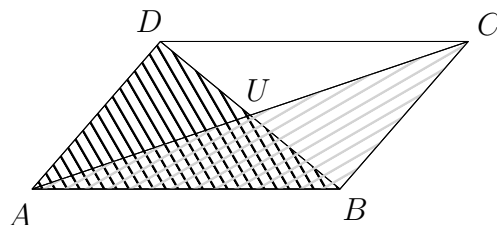
Obr. 3:



Obr. 4:

$BAC$  a  $ACD$  sú rovnako veľké, pretože sú takisto dvojicou striedavých uhlov. Potom sú trojuholníky  $ABU$  a  $CDU$  zhodné, keďže sa zhodujú v jednej strane  $|AB| = |CD|$  a v dvoch k nej priľahlých uhloch. Preto aj  $|AU| = |UC|$ ,  $|BU| = |UD|$  a tvrdenie je dokázané.

**Úloha 10.6.** [58-I-4-N1] seminar10,geomlah,obsahy,domacekolo,navodna **Riešenie.** Rovnosť obsahov trojuholníkov  $ADU$  a  $BCU$  je ekvivalentná s rovnosťou obsahov trojuholníkov  $ABC$  a  $ABD$  so spoločnou stranou  $AB$ , pretože  $S_{ABC} = S_{ABU} + S_{BCU}$  a  $S_{ABD} = S_{ABU} + S_{AUD}$  (obr. 5). Trojuholníky  $ABC$  a  $ABD$  majú spoločnú základňu  $AB$ , takže ich obsahy budú rovnaké práve vtedy, ak výšky na túto stranu budú rovnaké, resp. ak body  $C$  a  $D$  budú od priamky  $AB$  rovnako vzdialené. To nastane len v prípade, ak body  $C$  a  $D$  ležia na priamke rovnobežnej s priamkou  $AB$ , čo sme chceli dokázať.



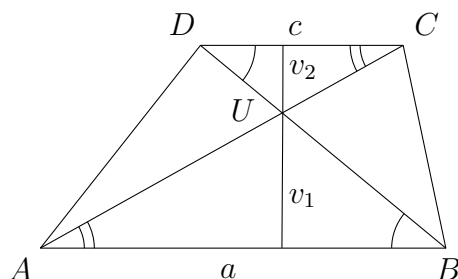
Obr. 5:

**Úloha 10.7.** [64-I-4-N1] seminar10,geomlah,domacekolo,navodna **Riešenie.** Trojuholníky  $ABU$  a  $CDU$  sú zrejme podobné ( $|\angle BAU| = |\angle UCD|$ ,  $|\angle ABU| = |\angle CDU|$ ,  $|\angle AUB| = |\angle CUD|$ , pretože prvé dve sú dvojice striedavých uhlov, posledné dva sú uhly vrcholové) s koeficientom podobnosti  $k = a/c$ . Preto pre výšku  $v_1$  na stranu  $AB$  v trojuholníku  $ABU$  a výšku  $v_2$  na stranu  $CD$  v trojuholníku  $CDU$  platí  $v_1/v_2 = k$ , resp.  $v_1 = kv_2 = (av_2)/c$ . Potom pre pomer obsahov trojuholníkov  $ABU$  a  $CDU$  máme

$$\frac{S_{ABU}}{S_{CDU}} = \frac{\frac{1}{2}av_1}{\frac{1}{2}cv_2} = \frac{a\frac{av_2}{c}}{cv_2} = \frac{a^2}{c^2}.$$

### Záverečný komentár

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že študenti budú o(c)hromení množstvom nových poznatkov v tomto seminári. Dúfame však, že sa tak nestane, keďže veľká väčšina obsahu by mala byť prinajmenšom povedomá, ak nie úplne zrozumiteľná. Seminár tiež patrí k tým menej náročným, avšak je veľmi dôležitou prípravou pred tvrdšími orieškami.



Obr. 6:

**Úloha 10.8.** [58-I-2-D1] seminar10,geomlah,domacekolo,doplnujuca **Riešenie.** Trojuholník  $DSE$  je pravouhlý rovnoramenný s pravým uhlom pri vrchole  $S$ , pretože odvesny  $DS$  a  $ES$  ležia na osiach navzájom kolmých strán. Odvesny majú dĺžku  $\frac{c}{2}$ , pretože sú to polomery kružnice opísanej trojuholníku  $ABC$ . Obsah trojuholníka  $DSE$  je  $\frac{1}{2} \cdot |DS| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{8}$ .

**Úloha 10.9.** [58-I-2-D2] seminar10,geomlah,domacekolo,doplnujuca **Riešenie.** Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že  $a > b$ . Najprv vyjadríme výšku  $v$  pomocou dĺžok základní a odvesien. Nech je  $P$  päta výšky z bodu  $D$  na stranu  $AB$ . Potom  $|AP| = (a - c)/2$ . Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku  $APD$  máme

$$\left(\frac{a - c}{2}\right)^2 + v^2 = b^2,$$

odkiaľ  $v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - (a - c)^2}$  a preto pre obsah lichobežníka dostávame

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v = \frac{1}{4}(a + c)\sqrt{4b^2 - (a - c)^2}.$$