

## Seminár 13: Geometria IV – kružnica vpísaná a opísaná trojuholníku

### Úlohy a riešenia

**Úloha 13.1.** [57-II-1] Trojuholník  $ABC$  spĺňa pri zvyčajnom označení dĺžok strán podmienku  $a \leq b \leq c$ . Vpísaná kružnica sa dotýka strán  $AB$ ,  $BC$  a  $AC$  postupne v bodoch  $K$ ,  $L$  a  $M$ . Dokážte, že z úsečiek  $AK$ ,  $BL$  a  $CM$  možno zostrojiť trojuholník práve vtedy, keď platí  $b + c < 3a$ .

**Úloha 13.2.** [61-S-2] Označme  $S$  stred základne  $AB$  daného rovnoramenného trojuholníka  $ABC$ . Predpokladajme, že kružnice vpísané trojuholníkom  $ACS$ ,  $BCS$  sa dotýkajú priamky  $AB$  v bodoch, ktoré delia základňu  $AB$  na tri zhodné diely. Vypočítajte pomer  $|AB| : |CS|$ .

**Úloha 13.3.** [62-S-1] Danému rovnostrannému trojuholníku vpíšme a opíšme kružnicu. Označme  $S$  obsah vzniknutého medzikružia a  $T$  obsah kruhu, ktorého priemer je zhodný s dĺžkou strany daného trojuholníka. Ktorý z obsahov  $S$ ,  $T$  je väčší? Svoju odpoveď zdôvodnite.

**Úloha 13.4.** [61-I-5] Daný je rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky  $a$  a ramenami dĺžky  $b$ . Pomocou nich vyjadrite polomer  $R$  kružnice opísanej a polomer  $r$  kružnice vpísanej tomuto trojuholníku. Potom ukážte, že platí  $R \geq 2r$  a zistite, kedy nastane rovnosť.

**Úloha 13.5.** [63-I-2] V rovine sú dané body  $A$ ,  $P$ ,  $T$  neležiace na jednej priamke. Zostrojte trojuholník  $ABC$  tak, aby  $P$  bola päta jeho výšky z vrcholu  $A$  a  $T$  bod dotyku strany  $AB$  s kružnicou jemu vpísanou. Uveďte diskusiu o počte riešení vzhľadom na polohu daných bodov.

**Úloha 13.6.** [59-I-4] Kružnica  $k(S; r)$  sa dotýka priamky  $AB$  v bode  $A$ . Kružnica  $l(T; s)$  sa dotýka priamky  $AB$  v bode  $B$  a pretína kružnicu  $k$  v krajných bodoch  $C$ ,  $D$  jej priemeru. Vyjadrite dĺžku a úsečky  $AB$  pomocou polomerov  $r$ ,  $s$ . Dokážte ďalej, že priesečník  $M$  priamok  $CD$ ,  $AB$  je stredom úsečky  $AB$ .

**Úloha 13.7.** [61-I-2] Dĺžky strán trojuholníka sú v metroch vyjadrené celými číslami. Určte ich, ak má trojuholník obvod 72 m a ak je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená bodom dotyku vpísanej kružnice v pomere 3 : 4.