

## Seminár 10: Geometria I – základné poznatky

### Ciele

Zopakovať a upevniť základné poznatky z planimetrie, ktoré by študenti mali mať zo základnej školy. Venovať sa vlastnostiam uhlov, trojuholníkov, štvoruholníkov a kružníc. Niektoré z poznatkov odvodiť.

### Úvodný komentár

Keďže planimetria častokrát nie je súčasťou osnov 1. ročníka gymnázií, je potrebné poznatky žiakov z tejto oblasti o to starostlivejšie zopakovať. Geometrické úlohy majú veľmi často najhoršiu úspešnosť v krajských kolách MO, čo môže mať viacero dôvodov. Nepopierateľne však študentom tréning pomôže, preto je geometrii v priebehu roka venovaných 8 seminárov.

Zo zmienených dôvodov má preto tento seminár odlišnú štruktúru ako predchádzajúce – viac ako riešenie úloh z olympiád sa venujeme opakovaniu základných vlastností uhlov, trojuholníkov, štvoruholníkov a kružníc, ktorých znalosti budú nenahraditeľné v ďalších piatich geometrických seminároch. Spolu so študentmi tak vytvoríme základnú výbavu, ktorá im pomôže v boji s geometrickými záťažnosťami.

Študenti by mali mať nasledujúce znalosti (voľne spracované podľa [?]):

#### ▷ uhly

- chápať pojmy vrcholové, vedľajšie, súhlasné a striedavé uhly, vedieť nájsť dvojice takých uhlov a používať ich pri riešení úloh,

#### ▷ trojuholníky

- poznať základné vlastnosti strán a vnútorných uhlov trojuholníka: trojuholníková nerovnosť, súčet vnútorných uhlov,
- vedieť popísať rozdiely medzi ostrouhlým, pravouhlým, tupouhlým, všeobecným, rovnoramenným a rovnostranným trojuholníkom,
- chápať pojmy os uhla, os strany, výška, ťažnica, stredná priečka, kružnica vpísaná a opísaná trojuholníku a poznať ich vlastnosti,
- poznať a vedieť používať vzorec na výpočet obsahu trojuholníka,
- poznať a vhodne používať vety o zhodnosti ( $sss$ ,  $sus$ ,  $usu$ ,  $Ssu$ ) a podobnosti ( $sss$ ,  $sus$ ,  $uu$ ,  $Ssu$ ) trojuholníkov,
- poznať a používať Pytagorovu vetu pre pravouhlý trojuholník,

#### ▷ štvoruholníky

- vedieť popísať všeobecný štvoruholník a jeho špecifické prípady: rovnobežník, štvorec, obdĺžnik, kosoštvorec, kosodĺžnik, lichobežník,
- poznať základné vzorce pre výpočet obsahu rôznych rovnobežníkov a lichobežníkov,
- vedieť, že uhlopriečky v pravouholníku a rovnobežníku sa polia a vedieť tento fakt využiť pri riešení úloh,

#### ▷ kružnice a kruhy

- chápať pojmy kružnica, kruh, kružnicový oblúk, dotyčnica, sečnica, tetiva, stredový a obvodový uhol,
- poznať a vedieť používať Talesovu kružnicu,

#### ▷ riešenie konštrukčných úloh

- náčrt, rozbor, popis konštrukcie, diskusia o počte riešení.

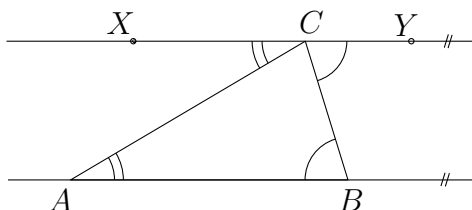
**Komentár.** Skôr než frontálny výklad je vhodné nechať skladať mozaiku vedomostí študentov. Ak pracujeme s malou skupinou, môžeme o vyššie spomenutých bodoch diskutovať všetci spoločne. Ak seminár navštevuje väčšie množstvo záujemcov o matematiku, rozdelíme študentov na menšie skupiny, pričom každá spracuje poznatky o zadanej neprázdnej podmnožine vyššie spomenutých oblastí. Tie si potom študenti navzájom odprezentujú, vedúci seminára nepresnosťmi vhodnými otázkami koriguje. Táto časť by mala zaberať približne polovicu, príp. dve tretiny času vyhradeného na seminár.

**Komentár.** V druhej polovici (až poslednej tretine seminára) niektoré zo základných tvrdení, ktoré budeme v priebehu ďalších stretnutí využívať, dokážeme.

## Úlohy a riešenia

**Úloha 10.1.** [anonymous 1] Dokážte, že súčet veľkostí vnútorných uhlov ľubovoľného trojuholníka je  $180^\circ$ .

**Riešenie.** Veďme rovnobežku  $XY$  so stranou  $AB$  vrcholom  $C$  trojuholníka  $ABC$ , tak že bod  $C$  leží medzi bodmi  $X$  a  $Y$  (obr. 1). Potom  $|\angle BAC| = |\angle ACX|$  a  $|\angle ABC| = |\angle BCY|$ , pretože ide o dvojice

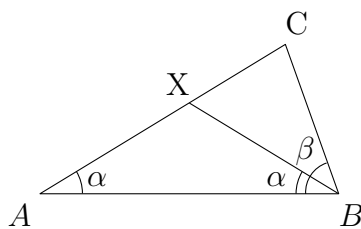


Obr. 1:

striedavých uhlov. Keďže  $|\angle ACX| + |\angle ACB| + |\angle BCY| = 180^\circ$ , pretože uhol  $XCY$  je priamy, platí aj  $|\angle BAC| + |\angle ABC| + |\angle ACB| = 180^\circ$ .

**Úloha 10.2.** [66-I-3-N1] Z trojuholníkových nerovností medzi dĺžkami strán ľubovoľného trojuholníka odvoďte známe pravidlo  $\alpha < \beta \Rightarrow a < b$  o porovnaní veľkostí vnútorných uhlov a dĺžok protiľahlých strán v ľubovoľnom trojuholníku  $ABC$ .

**Riešenie\*.** Ak je  $\alpha < \beta$ , môžeme nájsť vnútorný bod  $X$  strany  $AC$ , pre ktorý platí  $|\angle ABX| = \alpha$ , a teda  $|AX| = |BX|$ , takže z trojuholníkovej nerovnosti  $|BC| < |BX| + |XC|$  už vyplýva  $a < b$ .



Obr. 2:

**Úloha 10.3.** [63-I-4-N3] Dokážte vety:

- Ak majú dva trojuholníky rovnakú výšku, potom pomer ich obsahov sa rovná pomeru dĺžok príslušných základní.
- Ak majú dva trojuholníky zhodné základne, potom pomer ich obsahov sa rovná pomeru príslušných výšok.

**Riešenie.** a) Označme rovnakú výšku dvoch trojuholníkov  $v$ . V trojuholníku  $T_1$  je táto výškou na

základňu  $a_1$ , v trojuholníku  $T_2$  na základňu  $a_2$ . Pomer obsahov týchto trojuholníkov je potom

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{\frac{1}{2}a_1v}{\frac{1}{2}a_2v} = \frac{a_1}{a_2},$$

čo sme chceli dokázať.

b) Označme zhodnú základňu dvoch trojuholníkov  $z$ , v trojuholníku  $T_1$  je výška na túto základňu  $v_1$ , v trojuholníku  $T_2$  je výška na túto základňu  $v_2$ . Pomer obsahov trojuholníkov  $T_1$  a  $T_2$  je

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{\frac{1}{2}zv_1}{\frac{1}{2}zv_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

čo je pomer príslušných výšok.

**Úloha 10.4.** [61-I-5-N1] Pre všeobecný trojuholník  $ABC$  so stranami  $a, b, c$  a obsahom  $S$  platí pre polomer  $r$  vpísanej kružnice vzorec  $r = 2S/(a + b + c)$ . Dokážte.

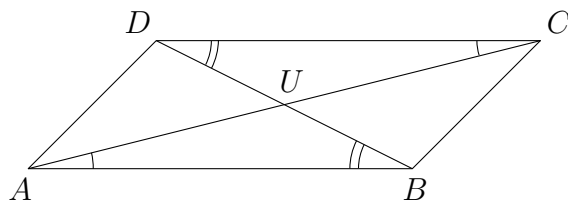
**Riešenie\*.** Stred  $M$  vpísanej kružnice rozdeľuje uvažovaný trojuholník  $ABC$  na tri menšie trojuholníky  $BCM, ACM, ABM$  s obsahmi  $\frac{1}{2}ar, \frac{1}{2}br, \frac{1}{2}cr$ , ktorých súčet je  $S$ , odkiaľ vyplýva dokazovaný vzorec.



Obr. 3:

**Úloha 10.5.** [anonymous 2] Dokážte, že uhlopriečky v rovnobežníku sa navzájom polia.

**Riešenie.** Označme  $U$  priesečník uhlopriečok  $AC$  a  $BD$  rovnobežníka  $ABCD$  (obr. 4). Keďže uhly

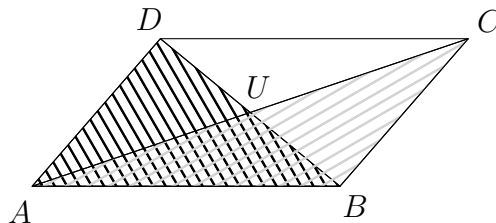


Obr. 4:

$ABD$  a  $BDC$  sú striedavé, majú rovnakú veľkosť. Podobne uhly  $BAC$  a  $ACD$  sú rovnako veľké, pretože sú takisto dvojicou striedavých uhlov. Potom sú trojuholníky  $ABU$  a  $CDU$  zhodné, keďže sa zhodujú v jednej strane  $|AB| = |CD|$  a v dvoch k nej priľahlých uhloch. Preto aj  $|AU| = |UC|$ ,  $|BU| = |UD|$  a tvrdenie je dokázané.

**Úloha 10.6.** [58-I-4-N1] Označme  $U$  priesečník uhlopriečok daného konvexného štvoruholníka  $ABCD$ . Dokážte, že priamky  $AB$  a  $CD$  sú rovnobežné práve vtedy, keď trojuholníky  $ADU$  a  $BCU$  majú rovnaký obsah.

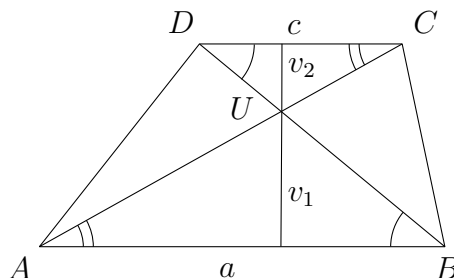
**Riešenie.** Rovnosť obsahov trojuholníkov  $ADU$  a  $BCU$  je ekvivalentná s rovnosťou obsahov trojuholníkov  $ABC$  a  $ABD$  so spoločnou stranou  $AB$ , pretože  $S_{ABC} = S_{ABU} + S_{BCU}$  a  $S_{ABD} = S_{ABU} + S_{AUD}$  (obr. 5). Trojuholníky  $ABC$  a  $ABD$  majú spoločnú základňu  $AB$ , takže ich obsahy budú rovnaké práve vtedy, ak výšky na túto stranu budú rovnaké, resp. ak body  $C$  a  $D$  budú od priamky  $AB$  rovnako vzdialené. To nastane len v prípade, ak body  $C$  a  $D$  ležia na priamke rovnobežnej s priamkou  $AB$ , čo sme chceli dokázať.



Obr. 5:

**Úloha 10.7.** [64-I-4-N1] Lichobežník  $ABCD$  má základne s dĺžkami  $|AB| = a$  a  $|CD| = c$  a jeho uhlopriečky sa pretínajú v bode  $U$ . Aký je pomer obsahov trojuholníkov  $ABU$  a  $CDU$ ?

**Riešenie.** Trojuholníky  $ABU$  a  $CDU$  sú zrejmé podobné ( $|\angle BAU| = |\angle UCD|$ ,  $|\angle ABU| = |\angle CDU|$ ,



Obr. 6:

$|\angle AUB| = |\angle CUD|$ , pretože prvé dve sú dvojice striedavých uhlov, posledné dva sú uhly vrcholové) s koeficientom podobnosti  $k = a/c$ . Preto pre výšku  $v_1$  na stranu  $AB$  v trojuholníku  $ABU$  a výšku  $v_2$  na stranu  $CD$  v trojuholníku  $CDU$  platí  $v_1/v_2 = k$ , resp.  $v_1 = kv_2 = (av_2)/c$ . Potom pre pomer obsahov trojuholníkov  $ABU$  a  $CDU$  máme

$$\frac{S_{ABU}}{S_{CDU}} = \frac{\frac{1}{2}av_1}{\frac{1}{2}cv_2} = \frac{a \frac{av_2}{c}}{cv_2} = \frac{a^2}{c^2}.$$

**Záverečný komentár** Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že študenti budú o(c)hromení množstvom nových poznatkov v tomto seminári. Dúfame však, že sa tak nestane, keďže veľká väčšina obsahu by mala byť prinajmenšom povedomá, ak nie úplne zrozumiteľná. Seminár tiež patrí k tým menej náročným, avšak je veľmi dôležitou prípravou pred tvrdšími orieškami.

## Domáca práca

**Úloha 10.8.** [58-I-2-D1] Nech  $k$  je kružnica opísaná pravouhlému trojuholníku  $ABC$  s preponou  $AB$  dĺžky  $c$ . Označme  $S$  stred strany  $AB$  a  $D$  a  $E$  priesečníky osí strán  $BC$  a  $AC$  s jedným oblúkom  $AB$  kružnice  $k$ . Vyjadrite obsah trojuholníka  $DSE$  pomocou dĺžky prepony  $c$ .

**Riešenie.** Trojuholník  $DSE$  je pravouhlý rovnoramenný s pravým uhlom pri vrchole  $S$ , pretože odvesny  $DS$  a  $ES$  ležia na osiach navzájom kolmých strán. Odvesny majú dĺžku  $\frac{c}{2}$ , pretože sú to polomery

kružnice opísanej trojuholníku  $ABC$ . Obsah trojuholníka  $DSE$  je  $\frac{1}{2} \cdot |DS| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{8}$ .

**Úloha 10.9.** [58-I-2-D2] Vyjadrite obsah rovnoramenného lichobežníka  $ABCD$  so základňami  $AB$  a  $CD$  pomocou dĺžok  $a$ ,  $c$  jeho základní a dĺžky  $b$  jeho ramien.

**Riešenie.** Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že  $a > b$ . Najprv vyjadríme výšku  $v$  pomocou dĺžok základní a odvesien. Nech je  $P$  päta výšky z bodu  $D$  na stranu  $AB$ . Potom  $|AP| = (a - c)/2$ . Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku  $APD$  máme

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + v^2 = b^2,$$

odkiaľ  $v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - (a-c)^2}$  a preto pre obsah lichobežníka dostávame

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+c) \cdot v = \frac{1}{4}(a+c)\sqrt{4b^2 - (a-c)^2}.$$

**Úloha 10.10.** [anonymous 3] Použitím viet o podobnosti trojuholníkov a Pytagorovej vety odvoďte Euklidove vety o odvesne a o výške pravouhlého trojuholníka.

**Riešenie.** Prehľadné odvodenie je možné nájsť v [?].

## Doplňujúce zdroje a materiály

Ak študenti budú stále neistí v používaní základných geometrických poznatkov, je možné ich odkázať na základnoškolské učebnice geometrie, v ktorých nájdú aj jednoduchšie príklady na precvičenie, príp. vhodným doplnkom geometrického vzdelania je aj publikácia [?].