Seminár 23: Geometria VI – miš-maš

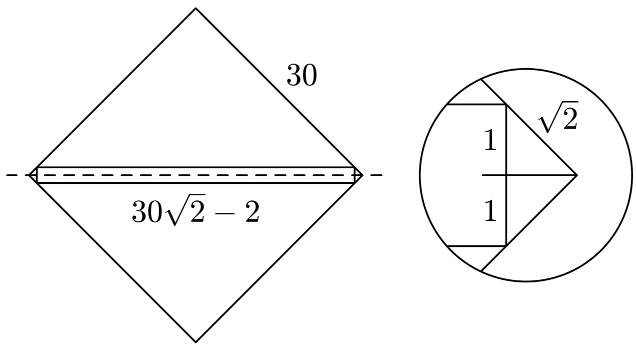
Ciele

Precvičenie geometrických poznatkov, rôznorodné netradičné úlohy

Úlohy a riešenia

Úloha 23.1. [66-II-3] Dokážte, že obdĺžnik s rozmermi 32×120 sa dá zakryť siedmimi zhodnými štvorcami so stranou 30.

Riešenie*. Štyrmi štvorcami so stranou 30 zrejme zakryjeme obdĺžnik 30×120. Zvyšnú časť 2×120 rozdelíme na tri zhodné časti, konkrétne obdĺžniky 2×40, a ukážeme, ako každý z nich (rovnako) pokryť jedným z troch zvyšných štvorcov so stranou 30. Dosiahneme to, keď štvorec položíme na obdĺžnik tak, že obe uhlopriečky štvorca budú ležať na osiach súmernosti dotyčného obdĺžnika. Stačí potom ukázať, že obdĺžnik so stranou 2 vpísaný do štvorca podľa obr. 1 má druhú stranu dlhšiu ako 40. Jej dĺžka je zrejme $30\sqrt{2} - 2$ (od uhlopriečky štvorca odčítame na každej strane 1 ako veľkosť výšky pravouhlého



Obr. 1:

trojuholníka so stranami 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, pozri zväčšenú časť obr. 1), takže stačí ukázať, že $30\sqrt{2} - 2 \geq 40$. To je ekvivalentné s nerovnosťou $5\sqrt{2} \geq 7$, čiže $50 \geq 49$, čo je splnené. Daný obdĺžnik 32×120 teda naozaj možno zakryť siedmimi štvorcami so stranou 30.

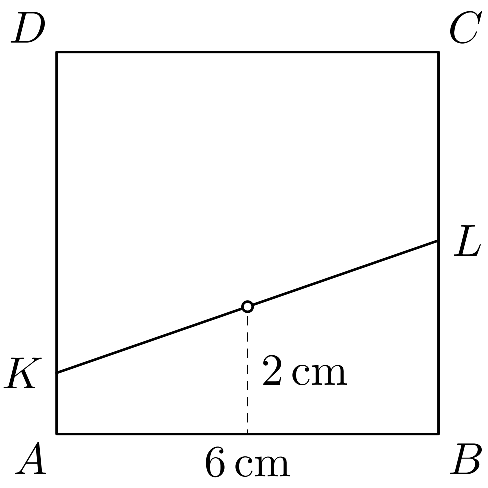
Úloha 23.2. [60-S-2] Daný je štvorec so stranou dĺžky 6 cm. Nájdite množinu stredov všetkých priečok štvorca, ktoré ho delia na dva štvoruholníky, z ktorých jeden má obsah $12\,\mathrm{cm}^2$. (Priečka štvorca je úsečka, ktorej krajné body ležia na stranách štvorca.)

Riešenie*. Ak priečka delí štvorec na dva štvoruholníky, musia ich koncové body ležať na protiľahlých stranách štvorca. V takom prípade sú oba štvoruholníky lichobežníkmi alebo pravouholníkmi (pre potreby tohto riešenia budeme pravouholník považovať za špeciálny lichobežník). Označme daný štvorec $ABCD$, koncové body priečky označme K a L. Predpokladajme, že bod K leží na strane AD, potom bod L leží na strane BC. Jeden zo štvoruholníkov $KABL$ a $KDCL$ má podľa zadania obsah $12\,\mathrm{cm}^2$; nech je to napr. lichobežník $KABL$.

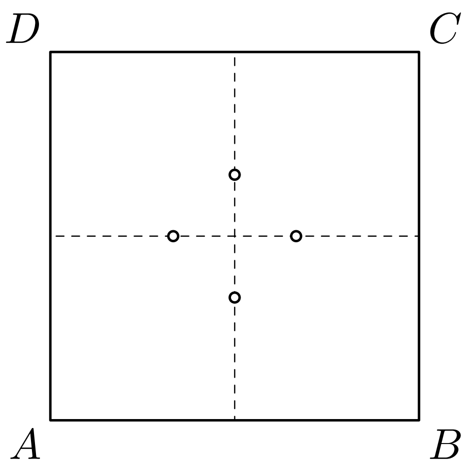
Obsah lichobežníka vypočítame ako súčin jeho výšky s dĺžkou strednej priečky. Výška je v našom prípade rovná dĺžke strany štvorca čiže 6 cm. Jeho stredná priečka má teda dĺžku 2 cm. Z toho vyplýva, že stred úsečky KL musí ležať na osi strany AB vo vzdialenosti 2 cm od stredu strany AB (obr. 2). Platí to aj naopak: Ak stred úsečky KL leží v opísanej polohe, bude štvoruholník $KABL$ lichobežník s obsahom $12\,\mathrm{cm}^2$.

Ak budeme namiesto lichobežníka $KABL$ uvažovať lichobežník $KDCL$, vyjde stred priečky KL na osi úsečky CD vo vzdialenosti 2 cm od stredu strany CD.

Ak priečka KL spája body na stranách AB a CD, dostaneme ďalšie dva možné body ležiace na spojnici stredov úsečiek AD a BC. Hľadanú množinu teda tvoria štyri body, ktoré ležia na priečkach



Obr. 2:



Obr. 3:

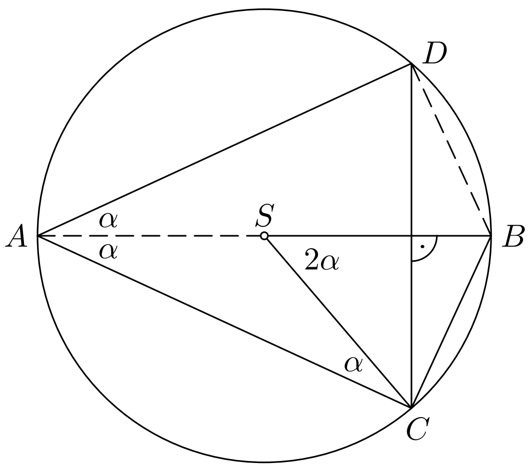
spájajúcich stredy protiľahlých strán štvorca vo vzdialenosti 1 cm od jeho stredu (obr. 3).

Úloha 23.3. [65-S-3] V kružnici so stredom S zostrojíme priemer AB a ľubovoľnú naň kolmú tetivu CD. Zdôvodnite, prečo je obvod trojuholníka ACD menší ako dvojnásobok obvodu trojuholníka SBC.

Riešenie*. Želaný vzťah medzi obvodmi trojuholníkov ACD a SBC vyplynie, keď pre dĺžky ich strán objavíme nerovnosti

$$|AC| < 2|SB|, \quad |AD| < 2|SC| \quad \text{a} \quad |CD| < 2|BC|.$$

Prvé dve z nich sú dôsledkom toho, že tetivy AC a AD danej kružnice sú kratšie ako jej priemer AB (obr. 4), tretia nerovnosť zapísaná v tvare $\frac{1}{2}|CD| < |BC|$ je nerovnosťou medzi dĺžkami odvesny a prepony dvoch zhodných pravouhlých trojuholníkov, na ktoré je trojuholník BCD rozdelený priamkou AB, ktorá je totiž (vďaka predpokladu $AB \perp CD$) osou tetivy CD. Dodajme, že rovnako dobre možno využiť aj trojuholníkovú nerovnosť $|CD| < |BC| + |BD| = 2|BC|$. **Iné riešenie*.** Označme α veľkosti

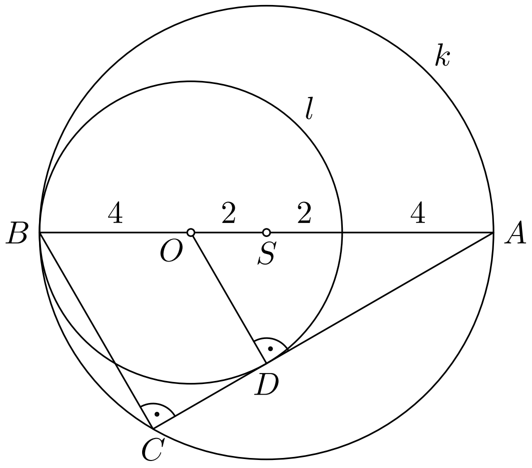


Obr. 4:

vnútorných uhlov pri základni AC rovnoramenného trojuholníka SAC. Potom jeho vonkajší uhol pri vrchole S, čiže uhol CSB, má veľkosť 2α, ktorú má aj uhol CAD, pretože polpriamka AB je jeho osou (obr. 4). Rovnoramenné trojuholníky ACD a SCB sa tak zhodujú vo vnútorných uhloch pri svojich hlavných vrcholoch A a S, a sú teda podobné. Preto je pomer ich obvodov rovný pomeru dĺžok ich ramien, a ten má naozaj hodnotu menšiu ako 2, lebo ramená trojuholníka ACD sú kratšie ako priemer danej kružnice, zatiaľ čo ramená trojuholníka SCB majú dĺžku jej polomeru.

Úloha 23.4. [59-S-2] Kružnice $k(S; 6\,\mathrm{cm})$ a $l(O; 4\,\mathrm{cm})$ majú vnútorný dotyk v bode B. Určte dĺžky strán trojuholníka ABC, pričom bod A je priesečník priamky OB s kružnicou k a bod C je priesečník kružnice k s dotyčnicou z bodu A ku kružnici l.

Riešenie*. Bod dotyku kružnice l s dotyčnicou z bodu A označme D (obr. 5). Z vlastností dotyčnice ku kružnici vyplýva, že uhol ADO je pravý. Zároveň je pravý aj uhol ACB (Tálesova veta). Trojuholníky



Obr. 5:

ABC a AOD sú tak podobné podľa vety uu, lebo sa zhodujú v uhloch ACB, ADO a v spoločnom uhle pri vrchole A. Z uvedenej podobnosti vyplýva

$$\frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|AO|}. \tag{1}$$

Zo zadaných číselných hodnôt vychádza $|OD| = |OB| = 4\,\mathrm{cm}$, $|OS| = |SB| - |OB| = 2\,\mathrm{cm}$, $|OA| = |OS| + |SA| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|AB| = 12\,\mathrm{cm}$. Podľa 1 je teda $|BC| : 4\,\mathrm{cm} = 12 : 8$ a odtiaľ $|BC| = 6\,\mathrm{cm}$. Z Pytagorovej vety pre trojuholník ABC nakoniec zistíme, že $|AC| = \sqrt{12^2 - 6^2}\,\mathrm{cm} = 6\,\mathrm{cm}$.

Úloha 23.5. [63-II-4] Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$ s bodom$E$ vnútri strany AB tak, že platí $|\measuredangle ADE| = |\measuredangle DEC| = |\measuredangle ECB|$. Obsahy trojuholníkov AED a CEB sú postupne $18\,\mathrm{cm}^2$ a $8\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah trojuholníka ECD.

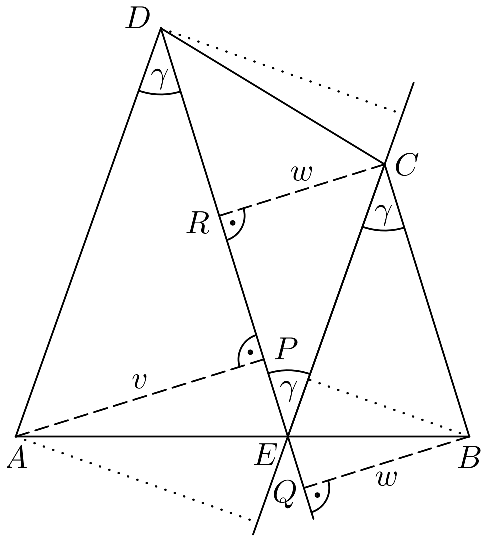
Riešenie*. Hľadaný obsah trojuholníka ECD označme S. Uhol DEC je striedavý s uhlami ADE a ECB, odtiaľ $AD \parallel EC$ a $ED \parallel BC$ (obr. 6). Trojuholníky EDA a EDC majú spoločnú stranu ED, pomer ich obsahov je teda rovný pomeru prislúchajúcich výšok. Ak navyše postupne označíme P, Q a R kolmé priemety vrcholov A, B a C na priamku DE a označíme $v = |AP|$, $w = |BQ| = |CR|$, dostaneme z podobných pravouhlých trojuholníkov AEP a BEQ úmeru

$$\frac{18}{S} = \frac{v}{w} = \frac{|AE|}{|EB|}.$$

Analogicky pre trojuholníky ECD a ECB zistíme, že

$$\frac{8}{S} = \frac{|EB|}{|AE|}.$$

(V obr. 6 sú prislúchajúce priemety iba naznačené, ale jedná sa o ten istý výpočet ako v predošlom odseku, len v ňom zameníme zodpovedajúce body $A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D$ a prislúchajúce obsahy trojuholníkov



Obr. 6:

AED a BEC.) Dokopy teda je $S : 8 = 18 : S$ čiže $S^2 = 144$, takže trojuholník ECD má obsah $S = 12\,\mathrm{cm}^2$.