Seminár 18: Algebraické výrazy a (ne)
rovnice ${\rm IV}-{\rm zložitej\check{s}ie}$ nerovnosti

Úlohy a riešenia

Úloha 18.1. [61-II-1] Pre všetky reálne čísla x, y, z také, že x < y < z, dokážte nerovnosť

$$x^{2} - y^{2} + z^{2} > (x - y + z)^{2}$$
.

Úloha 18.2. [66-II-4] Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla $a \le b \le c$ platí

$$(-a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 3.$$

Úloha 18.3. [60-II-4] Nech x, y, z sú kladné reálne čísla. Ukážte, že aspoň jedno z čísel x+y+z-xyz a xy+yz+zx-3 je nezáporné.

Úloha 18.4. [61-I-4] Reálne čísla a, b, c, d vyhovujú rovnici ab + bc + cd + da = 16.

- a) Dokážte, že medzi číslami a,b,c,d sa nájdu dve so súčtom najviac 4.
- b) Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$?

Úloha 18.5. [62-I-2] Pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí

$$a+b=c+d$$
, $ad=bc$, $ac+bd=1$.

Akú najväčšiu hodnotu môže mať súčet a + b + c + d?

Úloha 18.6. [62-I-2-N1] Ukážte, že nerovnosť $\frac{1}{2}(u+v) \ge \sqrt{uv}$ medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch ľubovoľných nezáporných čísel u a v vyplýva zo zrejmej nerovnosti $(a-b)^2 \ge 0$ vhodnou voľbou hodnoty a a b.

Úloha 18.7. [62-I-2-N1] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c platí nerovnosť

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \ge 8$$

a zistite, kedy prechádza v rovnosť.