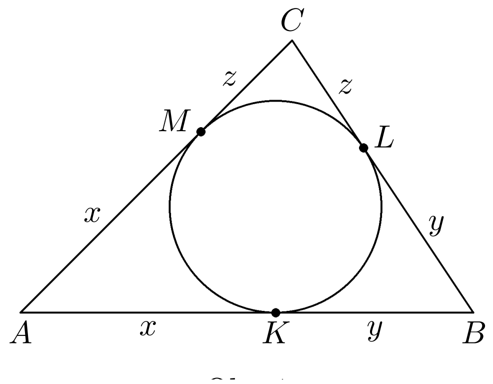
Seminár 13: Geometria IV – kružnica vpísaná a opísaná trojuholníku

Úlohy a riešenia

Úloha 13.1. [57-II-1] **Riešenie*.** Označme $x = |AK| = |AM|$, $y = |BL| = |BK|$, $z = |CM| = |CL|$ (obr. 1) zhodné úseky dotyčníc z jednotlivých vrcholov trojuholníka ku vpísanej kružnici. Zrejme



Obr. 1:

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y. \tag{1}$$

Z uvedených rovností vidíme, že daná podmienka

$$b + c < 3a \tag{2}$$

je ekvivalentná nerovnosti

$$x < y + z, \tag{3}$$

čo je nutná podmienka existencie trojuholníka so stranami dĺžok x, y a z.

Dosadením z 1 do podmienok $b \leq c$ a $a \leq b$ zistíme, že $z \leq y$ a $y \leq x$. To znamená, že ďalšie dve trojuholníkové nerovnosti $y < z + x$ a $z < x + y$ sú automaticky splnené, takže nerovnosť 3, a tým aj 2 je podmienkou postačujúcou. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

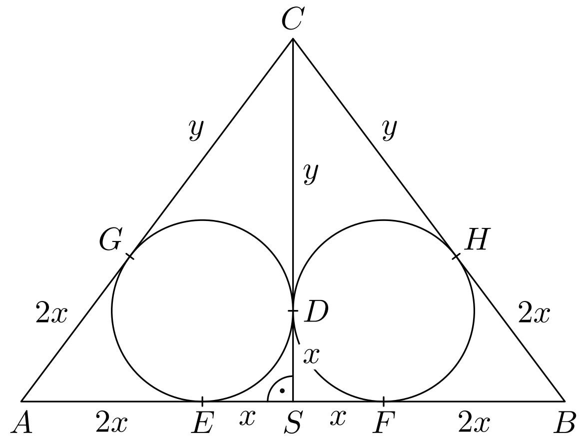
Komentár. Úloha využíva poznatok, že spojnice vrcholov a bodov dotyku so stredom vpísanej kružnice rozdelia trojuholník na tri dvojice zhodných trojuholníkov. Ten využijeme v nasledujúcej úlohe aj domácej práci. Okrem toho, aj keď úloha nie je na výpočet nijako extrémne náročná, je študentov potrebné upozorniť, že dokazujú ekvivalenciu, takže nerovnosť zo zadania musí byť nielen podmienkou nutnou, ale aj postačujúcou.

Úloha 13.2. [61-S-2] **Riešenie*.** Vďaka súmernosti podľa priamky CS sa obe vpísané kružnice dotýkajú výšky CS v rovnakom bode, ktorý označíme D. Body dotyku týchto kružníc s úsečkami AS, BS, AC, BC označíme postupne E, F, G, H (obr. 2). Pre vyjadrenie všetkých potrebných dĺžok ešte zavedieme označenie $x = |SD|$ a $y = |CD|$. Vzhľadom na symetriu dotyčníc z daného bodu k danej kružnici platia rovnosti

$$|SD| = |SE| = |SF| = x \quad \text{a} \quad |CD| = |CG| = |CH| = y.$$

Úsečka EF má preto dĺžku $2x$, ktorá je podľa zadania zároveň dĺžkou úsečiek AE a BF, a teda aj dĺžkou úsečiek AG a BH (opäť vďaka symetrii dotyčníc). Odtiaľ už bezprostredne vyplývajú rovnosti

$$|AB| = 6x, \quad |AC| = |BC| = 2x + y \quad \text{a} \quad |CS| = x + y.$$



Obr. 2:

Závislosť medzi dĺžkami x a y zistíme použitím Pytagorovej vety pre pravouhlý trojuholník ACS (s odvesnou A dĺžky $3x$):

$$(2x+y)^2 = (3x)^2 + (x+y)^2.$$

Roznásobením a ďalšími úpravami odtiaľ dostaneme (x a y sú kladné hodnoty)

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4xy + y^2 &= 9x^2 + x^2 + 2xy + y^2, \\ 2xy &= 6x^2, \\ y &= 3x. \end{aligned}$$

Hľadaný pomer tak má hodnotu

$$|AB| : |CS| = 6x : (x+y) = 6x : 4x = 3 : 2.$$

Poznamenajme, že prakticky rovnaký postup celého riešenia možno zapísať aj pri štandardnom označení $c = |AB|$ a $v = |CS|$. Keďže podľa zadania platí $|AE| = \frac{1}{3}c$, a teda $|SE| = \frac{1}{6}c$, z rovnosti $|SD| = |SE|$ vyplýva $|CD| = |CS| - |SD| = v - \frac{1}{6}c$, odkiaľ

$$|AC| = |AG| + |CG| = |AE| + |CD| = \tfrac{1}{3}c + (v - \tfrac{1}{6}c) = v \ + \tfrac{1}{6}c,$$

takže z Pytagorovej vety pre trojuholník ACS,

$$(v + \tfrac{1}{6}c)^2 = (\tfrac{1}{2}c)^2 + v^2,$$

vychádza $3v = 2c$, čiže $c : v \ = 3 : 2$.

Komentár. Úloha vychádza z poznatku, ktorý si študenti osvojili v úlohe predchádzajúcej a pridáva k nemu ešte prácu s Pytagorovou vetou a manipuláciu s algebraickými výrazmi, takže tvorí prirodzené pokračovanie úlohy predchádzajúcej.

Úloha 13.3. [62-S-1] **Riešenie*.** Ukážeme, že sa oba obsahy rovnajú. Označme A, B, C vrcholy daného trojuholníka a r a R zodpovedajúce polomery jeho vpísanej a opísanej kružnice; dĺžku jeho strany označme a. Obe uvedené kružnice majú spoločný stred S. Označme ešte P bod dotyku vpísanej kružnice so stranou AB. Keďže trojuholník ABC je rovnostranný, je P zároveň stredom strany AB. Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku PSB dostávame

$$R^2 - r^2 = (\tfrac{1}{2}a)^2,$$

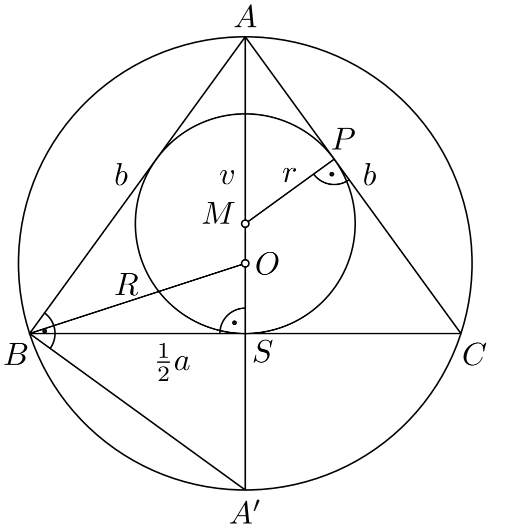
čo je ekvivalentné s dokazovaným tvrdením $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi\big(\frac{1}{2}a\big)^2 = T$.

Poznámka. Rovnostranný trojuholník so stranou a má výšku veľkosti $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, takže skúmané polomery sú $R = \frac{2}{3}v\big(= \frac{1}{3}a\sqrt{3}\big)$ a $r = \frac{1}{3}v\big(= \frac{1}{6}a\sqrt{3}\big)$, a preto

$$S = \pi(R^2 - r^2) = \pi\big(\tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{9}\big)v^2 = \pi \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{3}{4}a^2 = \pi\big(\tfrac{1}{2}a\big)^2 = T.$$

Komentár. Úloha je relatívne jednoduchá, využíva znalosť o bode dotyku vpísanej kružnice a taktiež pripravuje študentov na nasledujúcu zložitejšiu analýzu.

Úloha 13.4. [61-I-5] **Riešenie*.** Označme S stred základne BC daného rovnoramenného trojuholníka ABC, O stred jeho opísanej kružnice, M stred vpísanej kružnice a P pätu kolmice z bodu M na rameno AC (obr. 3). Z pravouhlého trojuholníka BSA pomocou Pytagorovej vety vyjadríme



Obr. 3:

veľkosť v výšky AS, pričom v pravouhlom trojuholníku BSO s preponou dĺžky R pre odvesnu OS platí $|OS| = ||AS| - |AO|| = |v - R|$ (musíme si uvedomiť, že v tupouhlom trojuholníku ABC bude bod S ležať medzi bodmi A a O!). Dostávame tak dve rovnosti

$$v^2 = b^2 - \frac{a^2}{4},$$
$$R^2 = \frac{a^2}{4} + (v - R)^2;$$

ich sčítaním vyjde

$$v^2 + R^2 = b^2 + (v - R)^2, \qquad \text{čiže} \qquad b^2 = 2vR.$$

Dosadením z prvej rovnice $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ do poslednej rovnosti dostaneme hľadaný vzorec pre R.

Dodajme, že rovnosť $b^2 = 2vR$, ktorú sme práve odvodili a z ktorej už ľahko vyplýva vzorec pre polomer R, je Euklidovou vetou o odvesne AB pravouhlého trojuholníka ABA' s preponou AA', ktorá je priemerom kružnice opísanej trojuholníku ABC (obr. 3).

Nájdený vzorec pre polomer R zapíšeme prehľadne spolu s druhým hľadaným vzorcom pre polomer r, ktorého odvodeniu sa ešte len budeme venovať:

$$R = \frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \qquad \text{a} \qquad r = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)}. \tag{4}$$

Druhý zo vzorcov 4 sa dá získať okamžite zo známeho vzťahu $r = 2S/(a+b+c)$ pre polomer r kružnice vpísanej do trojuholníka so stranami a, b, c a obsahom S; v našom prípade stačí len dosadiť $b = c$ a $2S = av$, kde $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ podľa úvodnej časti riešenia.

Ďalšie dva spôsoby odvodenia druhého zo vzorcov 4 založíme na úvahe o pravouhlom trojuholníku AMP, ktorého strany majú dĺžky

$$|AM| = v - r, \qquad |MP| = r, \qquad |AP| = |AC| - |PC| = b - |SC| = b - \frac{a}{2}.$$

Pre tento trojuholník môžeme napísať Pytagorovu vetu alebo využiť jeho podobnosť s trojuholníkom ACS, konkrétne zapísať rovnosť sínusov ich spoločného uhla pri vrchole A. Podľa toho dostaneme rovnice

$$(v - r)^2 = r^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{r}{v - r} = \frac{\frac{1}{2}a}{b},$$

ktoré sú obidve lineárne vzhľadom na neznámu r a majú riešenie

$$r = \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)^2, \qquad \text{resp.} \qquad r = \frac{av}{a + 2b}.$$

Po dosadení za v v oboch prípadoch dostaneme hľadaný vzorec pre r. V druhom prípade je to zrejmé, v prvom to ukážeme:

$$r = \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{v^2 - b^2 + ab - \frac{1}{4}a^2}{2v} = \frac{2ab - a^2}{4v} =$$
$$= \frac{a(2b - a)}{2\sqrt{(2b - a)(2b + a)}} = \frac{a\sqrt{2b - a}}{2\sqrt{2b + a}} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)}.$$

Ešte ostáva dokázať nerovnosť $R \geq 2r$. Využijeme na to odvodené vzorce 4, z ktorých dostávame (pripomíname, že $2b > a > 0$)

$$\frac{R}{2r} = R \cdot \frac{1}{2r} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \cdot \frac{a + 2b}{a\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{b^2}{a(2b - a)}.$$

Nerovnosť $R \geq 2r$ teda platí práve vtedy, keď $b^2 \geq a(2b - a)$. Posledná nerovnosť je však ekvivalentná s nerovnosťou $(a - b)^2 \geq 0$, ktorej platnosť je už zrejmá. Tým je dôkaz nerovnosti $R \geq 2r$ hotový. Navyše vidíme, že rovnosť v nej nastane jedine v prípade, keď $(a - b)^2 = 0$, čiže $a = b$, teda práve vtedy, keď je pôvodný trojuholník nielen rovnoramenný, ale dokonca rovnostranný.

Komentár. Úloha poskytuje mnoho prístupov k riešeniu a bude zaujímavé nechať študentov porovnať ich výsledky. Spája tiež zistenia z predchádzajúcich úloh, v niektorých prípadoch študenti využijú Euklidovu vetu a nezaobídu sa ani bez zručnej manipulácie s algebraickými výrazmi.

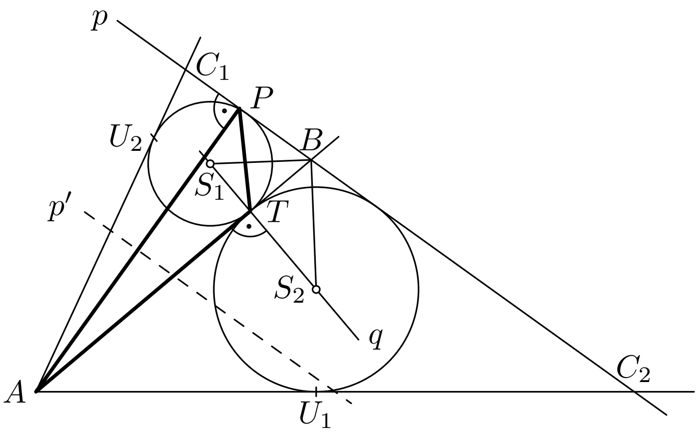
Úloha 13.5. [63-I-2] **Riešenie*.** Vrchol B je určený polpriamkou AT a kolmicou p na výšku AP v bode P (obr. 4), na ktorej leží strana BC. Pritom bod T musí byť vnútorným bodom úsečky AB. Stred S kružnice vpísanej trojuholníku ABC potom dostaneme ako priesečník kolmice q na priamku AT v bode T s osou uhla ohraničeného priamkou p a polpriamkou BA. Jej polomer bude mať veľkosť $|ST|$.

Ostáva zostrojiť vrchol C hľadaného trojuholníka ABC. Ten bude ležať jednak na priamke p, jednak na druhej dotyčnici vpísanej kružnice z vrcholu A, ktorá je súmerne združená so stranou AB podľa priamky AS. Stačí teda zostrojiť bod U dotyku strany AC s kružnicou vpísanou ako obraz bodu T v uvedenej osovej súmernosti.

Odtiaľ vyplýva *konštrukcia*:

1. p: $P \in p$ a $p \perp AP$;

2. B: $B \in AT \cap p$, bod B musí ležať na polpriamke AT za bodom T;



Obr. 4:

3. q: $T \in q$ a $q \perp AT$;

4. u_1, u_2: dve (navzájom kolmé) osi rôznobežiek AB, p;

5. S_1, S_2: $S_1 \in q \cap u_1$, $S_2 \in q \cap u_2$;

6. U_1, U_2: obrazy bodu T v súmernostiach podľa priamok AS_1 a AS_2;

7. C_1, C_2: priesečníky priamky p s polpriamkami AU_1 a AU_2;

8. trojuholníky ABC_1 a ABC_2.

Diskusia. Bod B konštruovaný v 2. kroku existuje, len ak uhol PAT je ostrý (inak ani polpriamka AT nepretne priamku p) a zároveň bod T leží vnútri polroviny pA, čo je ekvivalentné s tým, že aj uhol APT je ostrý. Body S_1, S_2 existujú vždy a sú rôzne, lebo ležia v opačných polrovinách určených priamkou AB. Kružnica vpísaná leží celá v trojuholníku ABC, a teda i v páse určenom priamkou p a priamkou s ňou rovnobežnou, ktorá prechádza vrcholom A, takže stred S vpísanej kružnice musí padnúť do pásu tvoreného priamkou p a priamkou p' s ňou rovnobežnou, ktorá rozpoľuje výšku AP. V takom prípade dotyčnica ku kružnici $(S; |ST|)$ (súmerne združená s dotyčnicou AB podľa priamky AS) určite pretne priamku p v hľadanom vrchole C.

Diskusiu zhrnieme takto: Ak pre vnútorné uhly trojuholníka APT platí $|\measuredangle PAT| \geq 90°$ alebo $|\measuredangle APT| \geq 90°$, nemá úloha riešenie. Ak platí $|\measuredangle PAT| < 90°$ a zároveň $|\measuredangle APT| < 90°$, je počet riešení 0 až 2 podľa toho, koľko zo zostrojených bodov S_1 a S_2 leží medzi rovnobežkami p a p'.

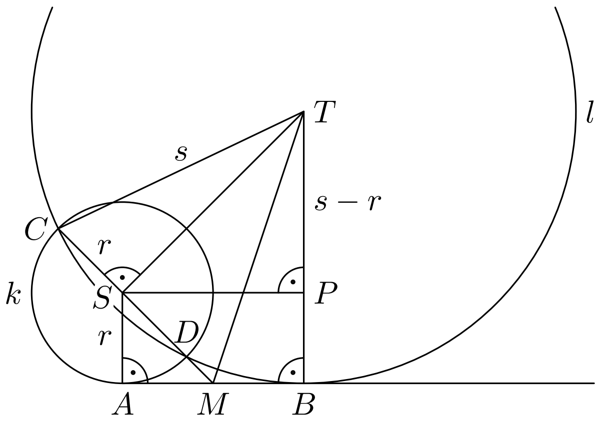
Komentár. V posledných rokoch sa v MO nevyskytlo veľké množstvo konštrukčných úloh. Napriek tomu však považujeme za dôležité vyriešiť so študentmi aspoň jeden takýto problém a poukázať na to, že zostrojením vyhovujúceho útvaru riešenie úlohy nekončí a je potrebné uviesť aj diskusiu, ktorá je častokrát aspoň tak náročná ako vhodná konštrukcia. Zaradenie úlohy v tomto seminári považujeme za vhodné tiež preto, lebo úloha využíva vlastnosti kružnice vpísanej, a tak so cťou uzavrie toto seminárne stretnutie.

Úloha 13.6. [59-I-4] **Riešenie*.** Keďže kružnica l má ako tetivu priemer CD kružnice k a dané kružnice nie sú totožné, platí pre ich polomery nerovnosť $s > r$. Ak označíme P pätu kolmice z bodu S na úsečku BT (obr. 5), tak z Pytagorovej vety pre pravouhlé trojuholníky CST a SPT vyplýva

$$|ST|^2 = s^2 - r^2 \quad \text{a} \quad |ST|^2 = |SP|^2 + (s - r)^2. \tag{5}$$

Odtiaľ pre veľkosť úsečky SP vychádza

$$|SP|^2 = (s^2 - r^2) - (s - r)^2 = 2r(s - r).$$



Obr. 5:

A keďže $ABPS$ je pravouholník, dostávame

$$|AB| = |SP| = \sqrt{2r(s-r)}.$$

Z pravouhlých trojuholníkov AMS a MTS ďalej podľa prvej rovnosti v 5 vyplýva

$$|AM|^2 = |SM|^2 - r^2 = |MT|^2 - |ST|^2 - r^2 = |MT|^2 - s^2,$$

pritom z pravouhlého trojuholníka MBT máme

$$|BM|^2 = |MT|^2 - s^2.$$

Preto $|AM| = |BM|$ a bod M je teda stredom úsečky AB.

Poznámka. Záver, že M je stredom úsečky AB, vyplýva okamžite aj z mocnosti bodu M k obom kružniciam (bod M leží na tzv. chordále oboch kružníc). Tieto pojmy sú však pre súťažiacich kategórie C zväčša neznáme a nebudú nutné ani pre riešenia ďalších súťažných kôl.

Úloha 13.7. [61-I-2] **Riešenie*.** Využijeme všeobecný poznatok, že body dotyku vpísanej kružnice delia hranicu trojuholníka na šesť úsečiek, a to tak, že každé dve z nich, ktoré vychádzajú z toho istého vrcholu trojuholníka, sú zhodné. (Dotyčnice z daného bodu k danej kružnici sú totiž súmerne združené podľa spojnice daného bodu so stredom danej kružnice.)

V našej úlohe je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená na úseky, ktorých dĺžky označíme $3x$ a $4x$; dĺžku úsekov z vrcholu oproti najdlhšej strane označíme y (obr. 6). Strany trojuholníka majú teda dĺžky $7x$, $4x+y$ a $3x+y$, kde x, y sú neznáme kladné čísla (dĺžky berieme bez jednotiek). Ak má byť $7x$ dĺžka najdlhšej strany, musí platiť $7x > 4x+y$, čiže $3x > y$. Zdôraznime, že hľadané čísla x, y nemusia byť nutne celé, podľa zadania to však platí o číslach $7x$, $4x+y$ a $3x+y$. Údaj o obvode trojuholníka zapíšeme rovnosťou

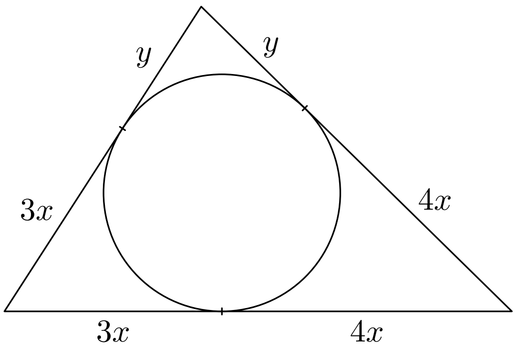
$$72 = 7x + (3x+y) + (4x+y), \quad \text{čiže} \quad 36 = 7x + y.$$

Pretože $7x$ je celé číslo, je celé i číslo $y = 36 - 7x$; a pretože podľa zadania i čísla $4x+y$ a $3x+y$ sú celé, je celé i číslo $x = (4x+y)-(3x+y)$. Preto od tohto okamihu už hľadáme dvojice celých kladných čísel x, y, pre ktoré platí

$$3x > y \quad \text{a} \quad 7x + y = 36.$$

Odtiaľ vyplýva $7x < 36 < 7x + 3x = 10x$, teda $x \leq 5$ a súčasne $x \geq 4$.

Pre $x = 4$ je $y = 8$ a $(7x, 4x+y, 3x+y) = (28, 24, 20)$, pre $x = 5$ je $y = 1$ a $(7x, 4x++y, 3x+y) = = (35, 21, 16)$. Strany trojuholníka sú teda $(28, 24, 20)$ alebo $(35, 21, 16)$. (Trojuholníkové nerovnosti sú zrejme splnené.)



Obr. 6: