

Seminár 31: Geometria VII – stredové, obvodové, úsekové uhly, tetivové štvoruholníky

Ciele

Zopakovať, príp. študentov zoznámiť s vlastnosťami stredových, obvodových a úsekových uhlov a ich využitím pri riešení úloh.

Úvodný komentár

Predtým, ako sa so študentmi pustíme do riešenia úloh, je vhodné predstaviť, príp. spoločne zopakovať vlastnosti uhlov, ktorými sa budeme v seminári zaoberať. Vhodným materiálom je [?], kapitola 8.

Úlohy a riešenia

Úloha 31.1. [B-66-II-3] V rovine sú dané kružnice k a l , ktoré sa pretínajú v bodoch E a F . Dotyčnica ku kružnici l zostrojená v bode E pretína kružnicu k v bode H ($H \neq E$). Na oblúku EH kružnice k , ktorý neobsahuje bod F , zvolíme bod C ($E \neq C \neq H$) a priesečník priamky CE s kružnicou l označme D ($D \neq E$). Dokážte, že trojuholníky DEF a CHF sú podobné.

Riešenie*. Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou HF kružnice k vyplýva $|\angle HCF| = |\angle HEF|$. Uhol HEF je zároveň úsekovým uhlom prislúchajúcim tetive EF kružnice l , ktorý je však zhodný s obvodovým uhlom EDF (obr. 1). Celkovo tak platí

$$|\angle HCF| = |\angle HEF| = |\angle EDF|. \quad (1)$$



Obr. 1:

Vzhľadom na to, že $CEFH$ je tetivový štvoruholník, je jeho vnútorný uhol pri vrchole H zhodný s vonkajším uhlom pri jeho protiľahlom vrchole E . Platí teda

$$|\angle CHF| = |\angle DEF|. \quad (2)$$

Z rovností 1 a 2 vyplýva na základe vety *uu* podobnosť trojuholníkov DEF a CHF . Tým je dôkaz hotový.

Komentár. Úloha je relatívne jednoduchou aplikáciou poznatkov o stredových, obvodových a úsekových uhloch, preto dobre poslúži ako úvodná úloha seminára. Zároveň sa v úlohe vyskytuje spoločná tetiva dvoch kružníc, ktorá je prvkom mnohých geometrických úloh v kategórii B, takže je príjemné, že sa študenti s týmto prípadom zoznámia hneď na začiatku.

Úloha 31.2. [B-65-II-2] Daná je úsečka AB , jej stred C a vnútri úsečky AB bod D . Kružnice $k(C, |BC|)$ a $m(B, |BD|)$ sa pretínajú v bodoch E a F . Zdôvodnite, prečo je polpriamka FD osou uhla AFE .

Riešenie*. Kružnica k je Tálesovou kružnicou nad priemerom AB , takže trojuholník ABF je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole F . Inými slovami, priamka AF je kolmá na polomer BF kružnice



Obr. 2:

m , a preto sa priamka AF dotýka kružnice m v bode F (obr. 2). Z rovnosti úsekového uhla zovretého tetivou DF s dotyčnicou AF a obvodového uhla nad tou istou tetivou máme (ako už je vyznačené na obrázku)

$$|\angle AFD| = |\angle DEF|.$$

Zo súmernosti úsečky EF podľa osi AB tak vyplýva

$$|\angle AFD| = |\angle DEF| = |\angle DFE|,$$

čo znamená, že FD je osou uhla AFE .

Iné riešenie*. Označme β veľkosť uhla ABF a dopočítajme veľkosti uhlov DFE a AFE . Trojuholník DBF je rovnoramenný, lebo jeho ramená BD a BF sú polomery kružnice m , preto

$$|\angle DFB| = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Keďže podobne aj trojuholník EBF je rovnoramenný s osou BD , platí

$$|\angle EFB| = 90^\circ - \beta.$$

Spojením oboch predchádzajúcich rovností tak dostávame

$$|\angle DFE| = |\angle DFB| - |\angle EFB| = \frac{\beta}{2}.$$

Z vlastností Tálesovej kružnice k nad priemerom AB vieme, že uhol AFB je pravý. Pritom jeho časť uhol EFB má, ako sme už zistili, veľkosť $90^\circ - \beta$, takže jeho druhá časť, uhol AFE , má veľkosť β , čo je presne dvojnásobok veľkosti uhla DFE . Tým sme dokázali, že priamka FD je osou uhla AFE .

Iné riešenie*. Nad oblúkom AE kružnice k sa zhodujú uhly ABE a AFE (obr. 3). Oblúku DE kružnice m prislúcha obvodový uhol DFE a stredový uhol DBE . Spolu tak dostávame

$$|\angle DFE| = \frac{1}{2}|\angle DBE| = \frac{1}{2}|\angle ABE| = \frac{1}{2}|\angle AFE|,$$

čo dokazuje, že FD je osou uhla AFE .

Komentár. Úlohu je možné riešiť viacerými rôznymi spôsobmi, preto je to opäť vhodný priestor na to, aby si študenti svoje riešenia porovnali a skúsili obhájiť pred spolužiakmi. V úlohe sa znova vyskytla spoločná tetiva dvoch kružníc, pekne tak nadväzuje na úlohu predchádzajúcu.



Obr. 3:

Úloha 31.3. [B-65-I-5] Vrcholy konvexného šesťuholníka $ABCDEF$ ležia na kružnici, pričom $|AB| = |CD|$. Úsečky AE a CF sa pretínajú v bode G a úsečky BE a DF sa pretínajú v bode H . Dokážte, že úsečky GH , AD a BC sú navzájom rovnobežné.

Riešenie*. Najskôr ukážeme, že $AD \parallel BC$. Keďže $|AB| = |CD|$, sú obvodové uhly nad tetivami AB a CD kružnice opísanej šesťuholníku $ABCDEF$ zhodné (obr. 4), teda $|\angle ADB| = |\angle DBC|$; to sú však striedavé uhly pričky BD priamok AD a BC , preto $AD \parallel BC$. Ostáva ukázať, že $GH \parallel AD$. Využitím zhodných obvodových uhlov nad tetivami AB a CD pri vrchoch E a F dostávame



Obr. 4:

$$|\angle GEH| = |\angle AEB| = |\angle CFD| = |\angle GFH|,$$

čo znamená, že body E , F , G a H ležia na jednej kružnici, pretože vrcholy zhodných uhlov GEH a GFH ležia v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou GH . Z toho vyplýva, že uhly EFH a EGH nad jej tetivou EH sú zhodné. To spolu so zhodnosťou uhlov EFD a EAD nad tetivou ED pôvodnej kružnice (obr. 4) vedie na zhodnosť súhlasných uhlov EGH a EAD pričky AE priamok GH a AD , ktoré sú teda naozaj rovnobežné. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Komentár. Umiestnenie vrcholov šesťuholníka na kružnici priam nabáda, aby študenti hľadali dvojice rovnakých uhlov, ktoré im potom pomôžu vyvodiť závery o (ne)rovnobežnosti skúmaných úsečiek. Zároveň úloha obsahuje zaujímavú druhú časť, kedy objavíme, že body E, F, G, H ležia na jednej kružnici.

Úloha 31.4. [B-58-I-5] Trojuholníku ABC je opísaná kružnica k . Os strany AB pretne kružnicu k v bode K , ktorý leží v polrovine opačnej k polrovine ABC . Osi strán AC a BC pretnú priamku CK postupne v bodoch P a Q . Dokážte, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné.

Riešenie*. Označme α, β, γ zvyčajným spôsobom veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC (obr. 5). Bod K leží na osi úsečky AB , preto $|AK| = |KB|$. Trojuholník AKB je rovnoramenný so základňou AB , jeho vnútorné uhly pri vrchoch A a B sú teda zhodné. Podľa vety o obvodových



Obr. 5:

uhlov sú zhodné aj uhly BCK a BAK , resp. ACK a ABK , preto sú zhodné aj uhly BCK a ACK . Polpriamka CK je teda osou uhla ACB :

$$|\angle ACK| = |\angle BCK| = \frac{\gamma}{2}.$$

Keďže bod P leží na osi strany AC , je trojuholník ACP rovnoramenný a jeho vnútorné uhly pri základni AC majú veľkosť $\frac{1}{2}\gamma$, takže jeho vonkajší uhol APK pri vrchole P má veľkosť $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma = \gamma$. Rovnako z rovnoramenného trojuholníka BCQ odvodíme, že aj veľkosť uhla BQK je γ . Podľa vety o obvodových uhloch sú zhodné uhly ABC a AKC , teda uhol AKC (čiže uhol AKP) má veľkosť β a – celkom analogicky – uhol BKQ má veľkosť α .

V každom z trojuholníkov AKP a BKQ už poznáme veľkosti dvoch vnútorných uhlov (β, γ , resp. α, γ), takže vidíme, že zostávajúce uhly KAP a KBQ majú veľkosti α , resp. β .

Z predošlého vyplýva, že trojuholníky AKP a BKQ sú zhodné podľa vety *usu*, lebo majú zhodné strany AK a KB aj obe dvojice k nim príslušných vnútorných uhlov.

K uvedenému postupu dodajme, že výpočet uhlov KAP a KBQ cez uhly APK a BQK možno obísť takto: zhodnosť uhlov KAP a BAC (resp. KBQ a ABC) vyplýva zo zhodnosti uhlov KAB a PAC (resp. KBA a QBC).

Komentár. Posledná úloha seminára pekne kombinuje vlastnosti uhlov a zhodnosť trojuholníkov, je tak dôstojným zakončením tohto geometrického stretnutia.

Domáca práca