Seminár 18

Téma

Algebraické výrazy a (ne)rovnice IV – zložitejšie nerovnosti

Ciele

Zoznámiť a precvičiť so študentami riešenie úloh zameraných na dokazovanie zložitejších nerovností, AG-nerovnosť

Úlohy a riešenia

Úloha 18.1. [66-II-4] Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla $a \leq b \leq c$ platí

$$(-a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3.$$

Riešenie*. Nerovnosť vynásobíme kladným výrazom abc a po roznásobení ju postupne (ekvivalentne) upravíme:

$$\begin{aligned}
-a(bc+ac+ab)+b(bc+ac+ab)+c(bc+ac+ab) &\geq 3abc,\\
-abc-a^2c-a^2b+b^2c+abc+ab^2+bc^2+ac^2+abc &\geq 3abc,\\
(b^2c-abc)+(bc^2-abc)+(ac^2-a^2c)+(ab^2-a^2b) &\geq 0,\\
bc(b-a)+bc(c-a)+ac(c-a)+ab(b-a) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Vzhľadom na predpoklad $0 < a \leq b \leq c$ je výsledná, a teda aj pôvodná nerovnosť splnená.

Iné riešenie*. Dokazovanú nerovnosť postupne upravíme, pričom využijeme známu nerovnosť $b/c + c/b = 2$, ktorá je pre kladné čísla b, c ekvivalentná s nerovnosťou $(b-c)^2 \geq 0$:

$$(-a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1+\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq$$

$$\geq 1+\frac{b^2-a^2}{ab}+\frac{c^2-a^2}{ac}+2 \geq 3,$$

pretože zrejme platí aj $a^2 \leq b^2 \leq c^2$.

Iné riešenie*. Podľa predpokladov úlohy platia nerovnosti $-a+b+c \geq c$ a $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{b}+\frac{1}{c}$. Obe nerovnosti (s kladnými stranami) medzi sebou vynásobíme a získame tak

$$(-a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq c\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1+\frac{2c}{b} \geq 3$$

pretože $c/b \geq 1$ podľa zadania.

Komentár. Úvodná úloha slúži na opakovanie, pripomenutie naučených postupov a overenie toho, čo sa študenti doteraz naučili o nerovnostiach. Považujeme za vhodné ukázať všetky tri zmienené postupy riešenia, keďže ekvivalentné úrpavy rovníc, využívanie známych rovností aj sčítanie dvoch a viac rovností sú všetko užitočné metódy, ktoré sa oplatí mať v našej riešiteľskej zásobe.