

## Seminár 11

### Téma

Geometria III – obsahy trojuholníkov a štvoruholníkov

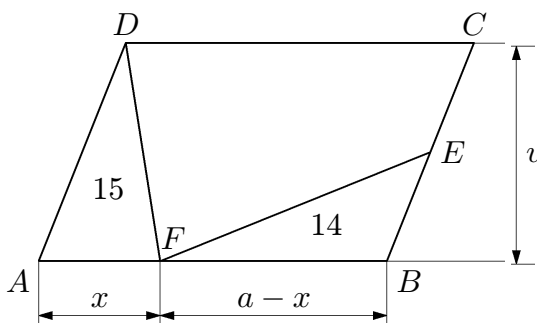
### Ciele

Precvičenie úloh zaoberajúcich sa obsahmi trojuholníkov a štvoruholníkov, rôznorodé určovanie obsahu, príp. pomeru obsahov trojuholníkov v úlohách.

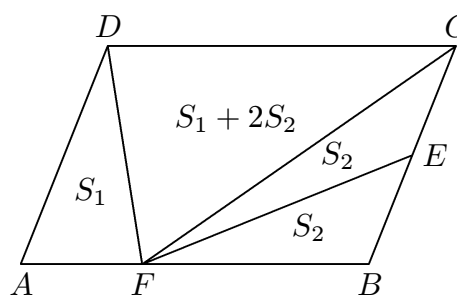
### Úlohy a riešenia

**Úloha 11.1.** [57-S-2] V danom rovnobežníku  $ABCD$  je bod  $E$  stred strany  $BC$  a bod  $F$  leží vnútri strany  $AB$ . Obsah trojuholníka  $AFD$  je  $15 \text{ cm}^2$  a obsah trojuholníka  $FBE$  je  $14 \text{ cm}^2$ . Určte obsah štvoruholníka  $FECD$ .

**Riešenie\*.** Označme  $v$  vzdialenosť bodu  $C$  od priamky  $AB$ ,  $a = |AB|$  a  $x = |AF|$ . Pre obsahy trojuholníkov  $AFD$  a  $FBE$  (obr. 1) platí  $\frac{1}{2}x \cdot v = 15$ ,  $\frac{1}{2}(a - x) \cdot \frac{1}{2}v = 14$ . Odtiaľ  $xv = 30$ ,  $av - xv = 56$ . Sčítaním oboch rovností nájdeme obsah rovnobežníka  $ABCD$ :  $S_{ABCD} = av = 86 \text{ cm}^2$ . Obsah štvoruholníka  $FECD$  je teda  $S_{FECD} = S_{ABCD} - (S_{AFD} + S_{FBE}) = 57 \text{ cm}^2$ .



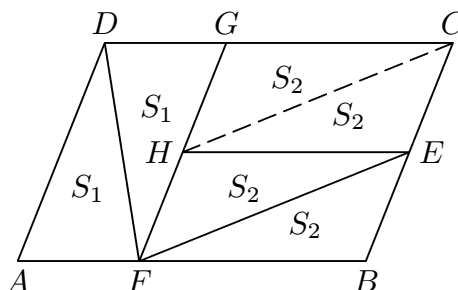
Obr. 1



Obr. 2

**Iné riešenie.** Trojuholníky  $BEF$  a  $ECF$  majú spoločnú výšku z vrcholu  $F$  a zhodné základne  $BE$  a  $EC$ . Preto sú obsahy oboch trojuholníkov rovnaké. Z obr. 2 vidíme, že obsah trojuholníka  $CDF$  je polovicou obsahu rovnobežníka  $ABCD$  (oba útvary majú spoločnú základňu  $CD$  a rovnakú výšku). Druhá polovicu tvorí súčet obsahov trojuholníkov  $AFD$  a  $BCF$ . Odtiaľ  $S_{FECD} = S_{ECF} + S_{CDF} = S_{ECF} + (S_{AFD} + S_{BCF}) = S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57 \text{ cm}^2$ .

**Iné riešenie.** Do rovnobežníka dokreslíme úsečky  $FG$  a  $EH$  rovnobežné so stranami  $BC$  a  $AB$  tak, ako znázorňuje obr. 3.



Obr. 3

Rovnobežníky  $AFGD$  a  $FBEH$  sú svojimi uhlopriečkami  $DF$  a  $EF$  rozdelené na dvojice zhodných trojuholníkov. Takže  $S_{GDF} = S_{AFD} = 15 \text{ cm}^2$  a  $S_{HFE} = S_{BEF} = 14 \text{ cm}^2$ . Zo zhodnosti rovnobežníkov  $HECG$  a  $FBEH$  navyše ľahko usúdime, že všetky štyri trojuholníky  $FBE$ ,  $EHF$ ,  $HEC$  a  $CGH$  sú zhodné, takže obsah štvoruholníka  $FECD$  je  $S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57 \text{ cm}^2$ .

**Komentár.** Úloha je zaradená ako rozcvička pred komplexnejšími problémami, nie je totiž veľmi náročná na vyriešenie. Pekne tiež demonštruje, že niekedy nám vhodný prístup, náčrtok alebo správne nakreslená priamka v obrázku riešenie úlohy významne zjednoduší.

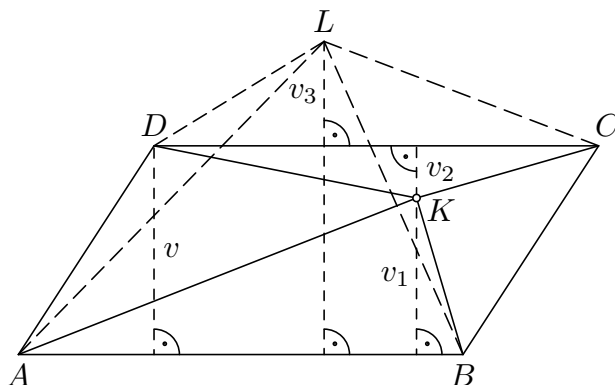
**Úloha 11.2.** [62-II-2] Vnútri rovnobežníka  $ABCD$  je daný bod  $K$  a v páse medzi rovnobežkami  $BC$  a  $AD$  v polrovine opačnej k  $CDA$  je daný bod  $L$ . Obsahy trojuholníkov  $ABK$ ,  $BCK$ ,  $DAK$  a  $DCL$  sú  $S_{ABK} = 18 \text{ cm}^2$ ,  $S_{BCK} = 8 \text{ cm}^2$ ,  $S_{DAK} = 16 \text{ cm}^2$ ,  $S_{DCL} = 36 \text{ cm}^2$ . Vypočítajte obsahy trojuholníkov  $CDK$  a  $ABL$ .

**Riešenie\*.** Trojuholníky  $ABK$  a  $CDK$  majú zhodné strany  $AB$  a  $CD$  a súčet ich výšok  $v_1$  a  $v_2$  (vzdialeností bodu  $K$  od priamky  $AB$ , resp.  $CD$ ) je rovný výške  $v$  rovnobežníka  $ABCD$  (vzdialenosti rovnobežných priamok  $AB$  a  $CD$ , obr. 4). Preto súčet ich obsahov dáva polovicu súčtu obsahu daného rovnobežníka:

$$S_{ABK} + S_{CDK} = \frac{1}{2}|AB|v_1 + \frac{1}{2}|CD|v_2 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v_1 + v_2) = \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Podobne aj  $S_{BCK} + S_{DAK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ , teda

$$S_{CDK} = S_{BCK} + S_{DAK} - S_{ABK} = 6 \text{ cm}^2.$$



Obr. 4

Trojuholníky  $ABL$  a  $DCL$  majú zhodné strany  $AB$  a  $CD$ . Ak  $v_3$  označuje príslušnú výšku druhého z nich, je výška prvého z nich rovná  $v + v_3$ , takže pre rozdiel obsahov týchto trojuholníkov platí

$$\begin{aligned} S_{ABL} - S_{DCL} &= \frac{1}{2}|AB| \cdot (v + v_3) - \frac{1}{2}|CD| \cdot v_3 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v + v_3 - v_3) = \\ &= \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{BCK} + S_{DAK}. \end{aligned}$$

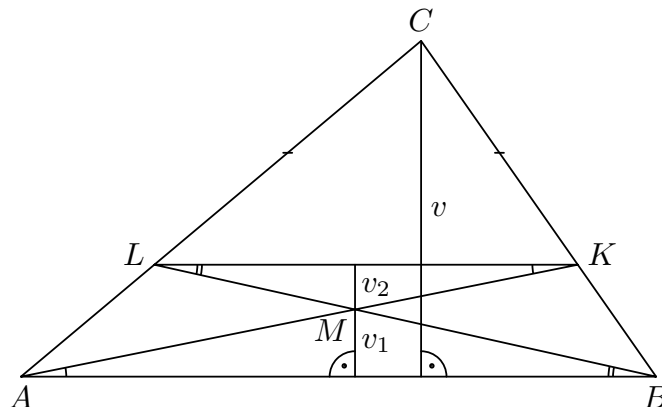
Odtiaľ vyplýva

$$S_{ABL} = S_{BCK} + S_{DAK} + S_{DCL} = 60 \text{ cm}^2.$$

**Komentár.** Úloha precvičuje použitie tvrdenia, ktoré sme dokázali v prvom geometrickom seminári, a to, že ak majú dva trojuholníky základňu rovnakej dĺžky, potom ich obsahy sú v rovnakom pomere ako ich výšky na túto základňu.

**Úloha 11.3.** [64-S-2] Označme  $K$  a  $L$  postupne body strán  $BC$  a  $AC$  trojuholníka  $ABC$ , pre ktoré platí  $|BK| = \frac{1}{3}|BC|$ ,  $|AL| = \frac{1}{3}|AC|$ . Nech  $M$  je priesečník úsečiek  $AK$  a  $BL$ . Vypočítajte pomer obsahov trojuholníkov  $ABM$  a  $ABC$ .

**Riešenie\*.** Označme  $v$  výšku trojuholníka  $ABC$  na stranu  $AB$ ,  $v_1$  výšku trojuholníka  $ABM$  na stranu  $AB$  a  $v_2$  výšku trojuholníka  $KLM$  na stranu  $KL$  (obr. 5). Z podobnosti trojuholníkov  $LKC$  a  $ABC$  (zaručenej vetou *sus*) vyplýva, že  $|KL| = \frac{2}{3}|AB|$ . Z porovnania ich výšok zo spoločného vrcholu  $C$  vidíme, že výška  $v$  trojuholníka  $ABC$  je rovná trojnásobku vzdialenosti pričky  $KL$  od strany  $AB$ , teda  $v = 3(v_1 + v_2)$ . Keďže  $AK$  a  $BL$  sú pričky rovnobežiek  $KL$  a  $AB$ , vyplýva zo zhodnosti prislúchajúcich striedavých uhlov podobnosť trojuholníkov  $ABM$  a  $KLM$ .



Obr. 5

Keďže  $|KL| = \frac{2}{3}|AB|$ , je tiež  $v_2 = \frac{2}{3}v_1$ , a preto  $v_1 + v_2 = \frac{5}{3}v_1$ , čiže

$$v = 3(v_1 + v_2) = 5v_1.$$

Trojuholníky  $ABM$  a  $ABC$  majú spoločnú stranu  $AB$ , preto ich obsahy sú v pomere výšok na túto stranu, takže obsah trojuholníka  $ABC$  je päťkrát väčší ako obsah trojuholníka  $ABM$ .

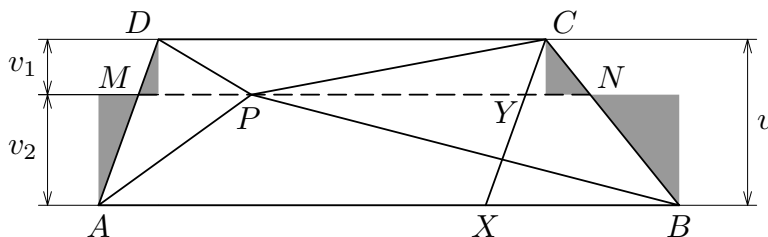
**Komentár.** Ďalšia úloha, ktorá precvičuje rovnaké tvrdenie ako predchádzajúca. Pomery výšok je tentoraz potrebné určiť z podobnosti trojuholníkov. Tu sa teda uplatnia znalosti precvičované na minulom seminárnom stretnutí.

**Úloha 11.4.** [64-II-3] Daný je lichobežník  $ABCD$  so základňami  $AB$ ,  $CD$ , pričom  $2|AB| = 3|CD|$ .

a) Nájdite bod  $P$  vnútri lichobežníka tak, aby obsahy trojuholníkov  $ABP$  a  $CDP$  boli v pomere 3 : 1 a aj obsahy trojuholníkov  $BCP$  a  $DAP$  boli v pomere 3 : 1.

b) Pre nájdený bod  $P$  určte postupný pomer obsahov trojuholníkov  $ABP$ ,  $BCP$ ,  $CDP$  a  $DAP$ .

**Riešenie\*.** Predpokladajme, že bod  $P$  má požadované vlastnosti. Priamka rovnobežná so základňami lichobežníka a prechádzajúca bodom  $P$  pretína ramená  $AD$  a  $BC$  postupne v bodoch  $M$  a  $N$  (obr. 6). Označme  $v$  výšku daného lichobežníka,  $v_1$  výšku trojuholníka  $CDP$  a  $v_2$  výšku trojuholníka  $ABP$ .



Obr. 6

a) Keďže obsahy trojuholníkov  $ABP$  a  $CDP$  sú v pomere 3 : 1, platí

$$\frac{|AB|v_2}{2} : \frac{|CD|v_1}{2} = 3 : 1, \quad \text{čiže} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Z vyznačených dvojíc podobných pravouhlých trojuholníkov vyplýva, že v práve určenom pomere 2 : 1 výšok  $v_2$  a  $v_1$  delí aj bod  $M$  rameno  $AD$  a bod  $N$  rameno  $BC$  (v prípade pravého uhla pri jednom z vrcholov  $A$  či  $B$  je to zrejmé rovno). Tým je konštrukcia bodov  $M$  a  $N$ , a teda aj úsečky  $MN$  určená. Teraz zistíme, v akom pomere ju delí uvažovaný bod  $P$ .

Keďže obsahy trojuholníkov  $BCP$  a  $DAP$  sú v pomere 3 : 1, platí

$$\left(\frac{|NP|v_1}{2} + \frac{|NP|v_2}{2}\right) : \left(\frac{|MP|v_1}{2} + \frac{|MP|v_2}{2}\right) = 3 : 1,$$

$$\frac{|NP|(v_1 + v_2)}{2} : \frac{|MP|(v_1 + v_2)}{2} = 3 : 1, \quad |NP| : |MP| = 3 : 1.$$

Tým je konštrukcia (jediného) vyhovujúceho bodu  $P$  úplne opísaná.

b) Doplňme trojuholník  $DAC$  na rovnobežník  $DAXC$ . Jeho strana  $CX$  delí priečku  $MN$  na dve časti, a keďže  $v_1 = \frac{1}{3}v$ , môžeme dĺžku priečky  $MN$  vyjadriť ako  $|MN| = |MY| + |YN| = |AX| + \frac{1}{3}|XB| = |CD| + \frac{1}{3}(|AB| - |CD|) = \frac{1}{3}|AB| + \frac{2}{3}|CD| = \frac{7}{6}|CD|$ , lebo podľa zadania platí  $|AB| = \frac{3}{2}|CD|$ . Preto

$$|MP| = \frac{1}{4}|MN| = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{6}|CD| = \frac{7}{24}|CD|,$$

takže pre pomer obsahov trojuholníkov  $CDP$  a  $DAP$  platí

$$\frac{|CD|v_1}{2} : \frac{|MP|(v_1 + v_2)}{2} = (|CD|v_1) : \left(\frac{7}{24} \cdot |CD| \cdot 3v_1\right) = 1 : \frac{7}{8} = 8 : 7.$$

Pomer obsahov trojuholníkov  $BCP$  a  $CDP$  je teda 21 : 8 a pomer obsahov trojuholníkov  $ABP$  a  $BCP$  je tak 24 : 21. Postupný pomer obsahov trojuholníkov  $ABP$ ,  $BCP$ ,  $CDP$  a  $DAP$  je preto 24 : 21 : 8 : 7.

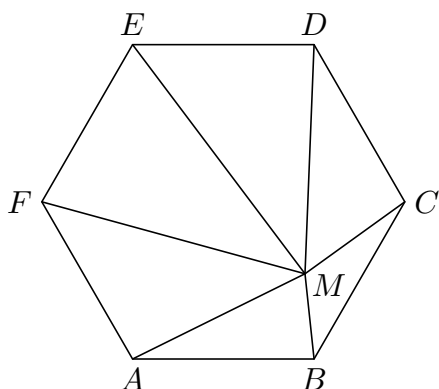
**Komentár.** Táto komplexná úloha je vrcholom tohto seminárneho stretnutia. Vyžaduje umnú prácu s pomermi obsahov, podobnými trojuholníkmi aj netriviálny nápad doplnenia trojuholníka  $DAC$  na rovnobežník. Je tak vhodné skôr než samostatne úlohu riešiť spoločne na tabuľu. Študentom tiež pripomenieme, že podobne ako v úvodnej úlohe, aj tu našlo vhodné rozdelenie zadaného útvaru svoje opodstatnenie a prispelo k úspešnému rozklúsknutiu problému.

**Úloha 11.5.** [62-I-6] Vnútri pravidelného šesťuholníka  $ABCDEF$  s obsahom  $30 \text{ cm}^2$  je zvolený bod  $M$ . Obsahy trojuholníkov  $ABM$  a  $BCM$  sú postupne  $3 \text{ cm}^2$  a  $2 \text{ cm}^2$ . Určte obsahy trojuholníkov  $CDM$ ,  $DEM$ ,  $EFM$  a  $FAM$ .

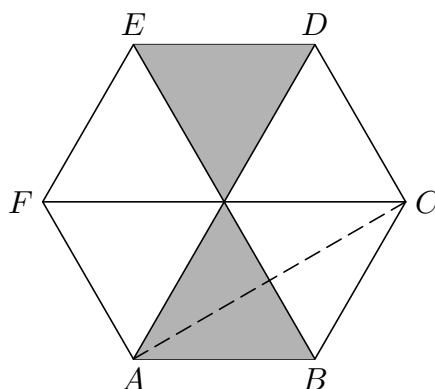
**Riešenie\*.** Úloha je o obsahu šiestich trojuholníkov, na ktoré je daný pravidelný šesťuholník rozdelený spojnicami jeho vrcholov s bodom  $M$  (obr. 7). Celý šesťuholník s daným obsahom, ktorý označíme  $S$ , možno rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov s obsahom  $S/6$  (obr. 8). Ak označíme  $r$  ich stranu,  $v$  vzdialenosť rovnobežiek  $AB$ ,  $CD$  a  $v_1$  vzdialenosť bodu  $M$  od priamky  $AB$ , dostaneme

$$S_{ABM} + S_{EDM} = \frac{1}{2}rv_1 + \frac{1}{2}r(v - v_1) = \frac{1}{2}rv = \frac{S}{3},$$

lebo  $S/3$  je súčet obsahov dvoch vyfarbených rovnostranných trojuholníkov. Vďaka symetrii majú tú istú hodnotu  $S/3$  aj súčty  $S_{BCM} + S_{EFM}$  a  $S_{CDM} + S_{FAM}$ . Odtiaľ už dostávame prvé dva neznáme obsahy  $S_{DEM} = S/3 - S_{ABM} = 7 \text{ cm}^2$  a  $S_{EFM} = S/3 - S_{BCM} = 8 \text{ cm}^2$ .



Obr. 7



Obr. 8

Ako určiť zvyšné dva obsahy  $S_{CDM}$  a  $S_{FAM}$ , keď zatiaľ poznáme len ich súčet  $S/3$ ? Všimnime si, že súčet zadáných obsahov trojuholníkov  $ABM$  a  $BCM$  má významnú hodnotu  $S/6$ , ktorá je aj obsahom trojuholníka  $ABC$  (to vyplýva opäť z obr. 8). Taká zhoda obsahov znamená práve to, že bod  $M$  leží na uhlopriečke  $AC$ . Trojuholníky  $ABM$  a  $BCM$  tak majú zhodné výšky zo spoločného vrcholu  $B$  a to isté platí aj pre výšky trojuholníkov  $CDM$  a  $FAM$  z vrcholov  $F$  a  $D$  (t.j. bodov, ktoré majú od priamky  $AC$  rovnakú vzdialenosť). Pre pomery obsahov týchto dvojíc trojuholníkov tak dostávame

$$\frac{S_{CDM}}{S_{FAM}} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{S_{BCM}}{S_{ABM}} = \frac{2}{3}.$$

V súčte  $S_{CDM} + S_{FAM}$  majúcom hodnotu  $S/3$  sú teda sčítance v pomere  $2 : 3$ . Preto  $S_{CDM} = 4 \text{ cm}^2$  a  $S_{FAM} = 6 \text{ cm}^2$ .

**Komentár.** Úloha je odľahčeným a netradičným príkladom využitia princípu, na ktorom sme stavali celé toto seminárne stretnutie: súčty obsahov „protiľahlých“ trojuholníkov sú stále rovnaké. Posledná časť úlohy vyžaduje netriviálny nápad a študenti tak možno budú potrebovať malú radu.

## Domáca práca

**Úloha 11.6.** [65-I-4] Vnútri strán  $AB$ ,  $AC$  daného trojuholníka  $ABC$  sú zvolené postupne body  $E$ ,  $F$ , pričom  $EF \parallel BC$ . Úsečka  $EF$  je potom rozdelená bodom  $D$  tak, že platí

$$p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|.$$

- Ukážte, že pomer obsahov trojuholníkov  $ABC$  a  $ABD$  je pre  $p = 2 : 3$  rovnaký ako pre  $p = 3 : 2$ .
- Zdôvodnite, prečo pomer obsahov trojuholníkov  $ABC$  a  $ABD$  má hodnotu aspoň 4.

**Riešenie\*.** Pre spoločnú hodnotu  $p$  oboch pomerov zo zadania platí

$$|ED| = p|DF| \quad \text{a zároveň} \quad |BE| = p|EA|. \quad (1)$$

Pred vlastným riešením oboch úloh a) a b) vyjadríme pomocou daného čísla  $p$  skúmaný pomer obsahov trojuholníkov  $ABC$  a  $ABD$ . Ten je rovný – keďže trojuholníky majú spoločnú stranu  $AB$  – pomeru dĺžok ich výšok  $CC_0$  a  $DD_0$  (obr. XXX), ktorý je rovnaký ako

OBRAZOK

pomer dĺžok úsečiek  $BC$  a  $ED$ , a to na základe podobnosti pravouhlých trojuholníkov  $BCC_0$  a  $EDD_0$  podľa vety *uu* (uplatnenej vďaka  $BC \parallel ED$ ).<sup>1</sup> Platí teda rovnosť

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{|BC|}{|ED|}. \quad (2)$$

<sup>1</sup>V prípade pravých uhlov  $ABC$  a  $AED$  to platí triviálne, lebo vtedy  $B = C_0$  a  $E = D_0$ .

Vráťme sa teraz k rovnostiam (1), podľa ktorých

$$|EF| = (1+p)|DF| \quad \text{a} \quad |AB| = (1+p)|EA|,$$

a všimnime si, že trojuholníky  $ABC$  a  $AEF$  majú spoločný uhol pri vrchole  $A$  a zhodné uhly pri vrchole  $C$  a  $F$  (pretože  $BC \parallel EF$ ), takže sú podľa vety *uu* podobné. Preto pre dĺžky ich strán platí

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|EF|}, \quad \text{čiže} \quad 1+p = \frac{|BC|}{(1+p)|DF|}, \quad \text{odkiaľ} \quad |BC| = (1+p)^2|DF|.$$

Keď vydelíme posledný vzťah hodnotou  $|ED|$ , ktorá je rovná  $p|DF|$  podľa (1), získame podiel z pravej strany (2) a tým aj hľadané vyjadrenie

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{(1+p)^2}{p}. \quad (3)$$

a) Algebraickou úpravou zlomku zo vzťahu (3)

$$\frac{(1+p)^2}{p} = \frac{1+2p+p^2}{p} = 2+p+\frac{1}{p}$$

zistíme, že hodnota pomeru  $S_{ABC} : S_{ABD}$  je pre akékoľvek dve navzájom prevrátené hodnoty  $p$  a  $1/p$  rovnaká, teda nielen pre hodnoty  $2/3$  a  $3/2$ , ako sme mali ukázať.

b) Podľa vzťahu (3) je našou úlohou overiť pre každé  $p > 0$  nerovnosť

$$\frac{(1+p)^2}{p} \geq 4, \quad \text{čiže} \quad (1+p)^2 \geq 4p.$$

To je však zrejmé ekvivalentné s nerovnosťou  $(1-p)^2 \geq 0$ , ktorá skutočne platí, nech je základ druhej mocniny akýkoľvek (rovnosť nastane jedine pre  $p = 1$ ).

Dodajme, že pre iný dôkaz bolo možné využiť aj vyššie uvedené „symetrické“ vyjadrenie

$$\frac{(1+p)^2}{p} = 2+p+\frac{1}{p}$$

a uplatniť naň dobre známu nerovnosť  $p+1/p \geq 2$ , ktorej platnosť pre každé  $p > 0$  vyplýva napr. z porovnania aritmetického a geometrického priemeru dvojice čísel  $p$  a  $1/p$ , nazývaného AG-nerovnosť:

$$\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right) \geq \sqrt{p \cdot \frac{1}{p}} = 1, \quad \text{pretože všeobecne} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \quad (\forall a, b \geq 0).$$

## Doplňujúce zdroje a materiály

Rovnako ako v predchádzajúcich geometrických seminároch ostávame v odporúčaní verní publikáciám [?] a [?].