

Seminár 10

Téma

Geometria I – základné poznatky

Ciele

Zopakovať a upevniť základné poznatky z planimetrie, ktoré by študenti mali mať zo základnej školy. Venovať sa vlastnostiam uhlov, trojuholníkov, štvoruholníkov a kružníc. Niektoré z poznatkov odvodiť.

Úvodný komentár. Keďže planimetria nie je súčasťou osnov 1. ročníka gymnázií, je potrebné poznatky žiakov z tejto oblasti o to starostlivejšie zopakovať. Geometrické úlohy majú veľmi často najhoršiu úspešnosť v krajských kolách MO, čo môže mať viacero dôvodov. Nepopierateľne však študentom tréning pomôže, preto je geometrii v priebehu roka venovaných 6 + 1 seminárov.

Zo zmienovaných dôvodov má preto tento seminár odlišnú štruktúru ako predchádzajúce – viac ako riešenie úloh z olympiád sa venujeme opakovaniu základných vlastností uhlov, trojuholníkov, štvoruholníkov a kružníc, ktorých znalosti budú nenahraditeľné v ďalších piatich geometrických seminároch. Spolu so študentmi tak vytvoríme základnú výbavu, ktorá im pomôže v boji s geometrickými záťažnosťami.

Študenti by mali mať nasledujúce znalosti (voľne spracované podľa [?]):

▷ uhly

- chápať pojmy vrcholové, vedľajšie, súhlasné a striedavé uhly, vedieť nájsť dvojice takých uhlov a používať ich pri riešení úloh,

▷ trojuholníky

- poznať základné vlastnosti strán a vnútorných uhlov trojuholníka: trojuholníková nerovnosť, súčet vnútorných uhlov,
- vedieť popísať rozdiely medzi ostrouhlým, pravouhlým, tupouhlým, všeobecným, rovnoramenným a rovnostranným trojuholníkom,
- chápať pojmy os uhla, os strany, výška, ťažnica, stredná priečka, kružnica vpísaná a opísaná trojuholníku a poznať ich vlastnosti,
- poznať a vedieť používať vzorec na výpočet obsahu trojuholníka,
- poznať a vhodne používať vety o zhodnosti (sss , sus , usu , Ssu) a podobnosti (sss , sus , uu , Ssu) trojuholníkov,
- poznať a používať Pytagorovu vetu pre pravouhlý trojuholník,

▷ štvoruholníky

- vedieť popísať všeobecný štvoruholník a jeho špecifické prípady: rovnobežník, štvorec, obdĺžnik, kosoštvorec, kosodĺžnik, lichobežník,
- poznať základné vzorce pre výpočet obsahu rôznych rovnobežníkov a lichobežníkov,
- vedieť, že uhlopriečky v pravouholníku a rovnobežníku sa polia a vedieť tento fakt využiť pri riešení úloh,

▷ kružnice a kruhy

- chápať pojmy kružnica, kruh, kružnicový oblúk, dotyčnica, sečnica, tetiva, stredový a obvodový uhol,
- poznať a vedieť používať Talesovu kružnicu,

▷ riešenie konštrukčných úloh

- náčrt, rozbor, popis konštrukcie, diskusia o počte riešení.

Komentár. Skôr než frontálny výklad je vhodné nechať skladať mozaiku vedomostí študentov. Ak pracujeme s malou skupinou, môžeme o vyššie spomenutých bodoch diskutovať všetci spoločne. Ak seminár navštevuje väčšie množstvo záujemcov o matematiku, rozdelíme študentov na menšie skupiny, pričom každá spracuje poznatky o zadanej neprázdnej podmnožine vyššie spomenutých oblastí. Tie si potom študenti navzájom odprezentujú, vedúci seminára nepresnosti vhodnými otázkami koriguje.

Komentár. V druhej polovici seminára niektoré zo základných tvrdení, ktoré budeme v priebehu ďalších stretnutí využívať, dokážeme.

Úlohy a riešenia

Úloha 10.1. [anonymous 1] Dokážte, že súčet veľkostí vnútorných uhlov ľubovoľného trojuholníka je 180° .

Riešenie. Vedme rovnobežku XY so stranou AB vrcholom C trojuholníka ABC , tak že bod C leží medzi bodmi X a Y ((obr.1)).

(DOPLNIŤ Obr. 1)

Potom $|\angle BAC| = |\angle ACX|$ a $|\angle ABC| = |\angle BCY|$, pretože ide o dvojice striedavých uhlov. Keďže $|\angle ACX| + |\angle ACB| + |\angle BCY| = 180^\circ$, pretože uhol XCY je priamy, platí aj $|\angle BAC| + |\angle ABC| + |\angle ACB| = 180^\circ$.

Úloha 10.2. [66-I-3-N1] Z trojuholníkových nerovností medzi dĺžkami strán ľubovoľného trojuholníka odvodte známe pravidlo $\alpha < \beta \Rightarrow a < b$ o porovnaní veľkostí vnútorných uhlov a dĺžok protiľahlých strán v ľubovoľnom trojuholníku ABC .

Riešenie*. Ak je $\alpha < \beta$, môžeme nájsť vnútorný bod X strany AC , pre ktorý platí $|\angle ABX| = \alpha$, a teda $|AX| = |BX|$, takže z trojuholníkovej nerovnosti $|BC| < |BX| + |XC|$ už vyplýva $a < b$.

(DOPLNIŤ Obr. 2)

Úloha 10.3. [63-I-4-N3] Dokážte vety:

- Ak majú dva trojuholníky rovnakú výšku, potom pomer ich obsahov sa rovná pomeru dĺžok príslušných základní.
- Ak majú dva trojuholníky zhodné základne, potom pomer ich obsahov sa rovná pomeru príslušných výšok.

Riešenie. a) Označme rovnakú výšku dvoch trojuholníkov v . V trojuholníku T_1 je táto výškou na základňu a_1 , v trojuholníku T_2 na základňu a_2 . Pomer obsahov týchto trojuholníkov je potom

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{\frac{1}{2}a_1v}{\frac{1}{2}a_2v} = \frac{a_1}{a_2},$$

čo sme chceli dokázať.

b) Označme zhodnú základňu dvoch trojuholníkov z , v trojuholníku T_1 je výška na túto základňu v_1 , v trojuholníku T_2 je výška na túto základňu v_2 . Pomer obsahov trojuholníkov T_1 a T_2 je

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{\frac{1}{2}zv_1}{\frac{1}{2}zv_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

čo je pomer príslušných výšok.

Úloha 10.4. [61-I-5-N1] Pre všeobecný trojuholník ABC so stranami a, b, c a obsahom S platí pre polomer r vpísanej kružnice vzorec $r = 2S/(a + b + c)$. Dokážte.

Riešenie*. Stred M vpísanej kružnice rozdeľuje uvažovaný trojuholník ABC na tri menšie trojuholníky BCM, ACM, ABM s obsahmi $\frac{1}{2}ar, \frac{1}{2}br, \frac{1}{2}cr$, ktorých súčet je S , odkiaľ vyplýva dokazovaný vzorec.

(DOPLNIŤ Obr.3)

Úloha 10.5. [anonymous 2] Dokážte, že uhlopriečky v rovnobežníku sa navzájom polia.

Riešenie. Označme U priesečník uhlopriečok AC a BD rovnobežníka $ABCD$ ((Obr. 4)).

(DOPLNIŤ Obr. 4)

Keďže uhly ABD a BDC sú striedavé, majú rovnakú veľkosť. Podobne uhly BAC a ACD sú rovnako veľké, pretože sú takisto dvojicou striedavých uhlov. Potom sú trojuholníky ABU a CDU zhodné, keďže sa zhodujú v jednej strane $|AB| = |CD|$ a v dvoch k nej priľahlých uhloch. Preto aj $|AU| = |UC|$, $|BU| = |UD|$ a tvrdenie je dokázané.

Úloha 10.6. [58-I-4-N1] Označme U priesečník uhlopriečok daného konvexného štvoruholníka $ABCD$. Dokážte, že priamky AB a CD sú rovnobežné práve vtedy, keď trojuholníky ADU a BCU majú rovnaký obsah.

Riešenie. Rovnosť obsahov trojuholníkov ADU a BCU je ekvivalentná s rovnosťou obsahov trojuholníkov ABC a ABD so spoločnou stranou AB , pretože $S_{ABC} = S_{ABU} + S_{BCU}$ a $S_{ABD} = S_{ABU} + S_{AUD}$. Trojuholníky ABC a ABD majú spoločnú základňu AB , takže ich obsahy budú rovnaké práve vtedy, ak výšky na túto stranu budú rovnaké, resp. ak body C a D budú od priamky AB rovnako vzdialené. To nastane len v prípade, ak body C a D ležia na priamke rovnobežnej s priamkou AB , čo sme chceli dokázať.

(DOPLNIŤ Obr. 5)

Úloha 10.7. [64-I-4-N1] Lichobežník $ABCD$ má základne s dĺžkami $|AB| = a$ a $|CD| = c$ a jeho uhlopriečky sa pretínajú v bode U . Aký je pomer obsahov trojuholníkov ABU a CDU ?

Riešenie.

(DOPLNIŤ Obr.6)

Trojuholníky ABU a CDU sú zrejme podobné ($|\angle BAU| = |\angle UCD|$, $|\angle ABU| = |\angle CDU|$, $|\angle AUB| = |\angle CUD|$, pretože prvé dve sú dvojice striedavých uhlov, posledné dva sú uhly vrcholové) s koeficientom podobnosti $k = a/c$. Preto pre výšku v_1 na stranu AB v trojuholníku ABU a výšku v_2 na stranu CD v trojuholníku CDU platí $v_1/v_2 = k$, resp. $v_1 = kv_2 = (av^2)/c$. Potom pre pomer obsahov trojuholníkov ABU a CDU máme

$$\frac{S_{ABU}}{S_{CDU}} = \frac{\frac{1}{2}av_1}{\frac{1}{2}cv_2} = \frac{a \frac{a}{cv_2}}{cv_2} = \frac{a^2}{c^2}.$$

Záverečný komentár Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že študenti budú o(c)hromení množstvom nových poznatkov v tomto seminári. Dúfame však, že sa tak nestane, keďže veľká väčšina obsahu by mala byť prinajmenšom povedomá, ak nie úplne zrozumiteľná. Seminár tiež patrí k tým menej náročným, avšak je veľmi dôležitou prípravou pred tvrdšími orieškami.

Domáca práca

Úloha 10.8. [58-I-2-D1] Nech k je kružnica opísaná pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB dĺžky c . Označme S stred strany AB a D a E priesečníky osí strán BC a AC s jedným oblúkom AB kružnice k . Vyjadrite obsah trojuholníka DSE pomocou dĺžky prepony c .

Riešenie. Trojuholník DSE je pravouhlý rovnoramenný s pravým uhlom pri vrchole S , pretože odvesny DS a ES ležia na osiach navzájom kolmých strán. Odvesny majú dĺžku $\frac{c}{2}$, pretože sú to polomery kružnice opísanej trojuholníku ABC . Obsah trojuholníka DSE je $\frac{1}{2} \cdot |DS| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{8}$.

Úloha 10.9. [58-I-2-D2] Vyjadrite obsah rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ so základňami AB a CD pomocou dĺžok a , c jeho základní a dĺžky b jeho ramien.

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a > b$. Najprv vyjadríme výšku v pomocou dĺžok základní a odvesien. Nech je P päta výšky z bodu D na stranu AB . Potom $|AP| = (a - c)/2$. Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku APD máme

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + v^2 = b^2,$$

odkiaľ $v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - (a-c)^2}$ a preto pre obsah lichobežníka dostávame

$$S_{ABCD} = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{1}{4}(a+c)\sqrt{4b^2 - (a-c)^2}.$$

Úloha 10.10. [anonymous 3] Použitím viet o podobnosti trojuholníkov a Pytagorovej vety odvodte Euklidove vety o odvesne a o výške pravouhlého trojuholníka.

Riešenie. Prehľadné odvodenie je možné nájsť v [?].

Doplňujúce zdroje a materiály

Ak študenti budú stále neistí v používaní základných geometrických poznatkov, je možné ich odkázať na základ školské učebnice geometrie, v ktorých nájdú aj jednoduchšie príklady na precvičenie, príp. vhodným doplnkom geometrického vzdelania je aj publikácia [?].