Seminár 28

Téma

Algebra – sústavy rovníc, rovnice s parametrom

Ciele

Úlohy a riešenia

Úloha 28.1. [B-66-II-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí

$$a + \frac{66}{a} = b + \frac{66}{b}.$$

Riešenie*. Anulovaním pravej strany upravíme danú rovnicu na tvar

$$a - b + 66\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = (a-b)\left(1 - \frac{66}{ab}\right) = \frac{1}{ab}(a-b)(ab-66) = 0.$$

Z toho vyplýva, že hľadané dvojice (a, b) prirodzených čísel sú práve tie, pre ktoré platí $a = b$ alebo $ab = 66$.

Úlohe teda vyhovuje nekonečne veľa dvojíc prirodzených čísel tvaru $(a, b) = (k, k)$, pričom k je ľubovoľné prirodzené číslo, a keďže číslo $66 = 2\cdot3\cdot11$ má osem deliteľov, tak aj osem dvojíc $(a, b) \in \{(1, 66)$, $(2, 33)$, $(3, 22)$, $(6, 11)$, $(11, 6)$, $(22, 3)$, $(33, 2)$, $(66, 1)\}$.

Úloha 28.2. [B-58-II-1] V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x + y &= 1,\\ x - y &= a,\\ -4ax + 4y &= z^2 + 4 \end{aligned}$$

s neznámymi x, y, z a reálnym parametrom a.

Riešenie*. Sčítaním prvej a druhej rovnice danej sústavy dostaneme $2x = 1 + a$, odčítaním druhej rovnice od prvej $2y = 1 - a$. Odtiaľ

$$x = \frac{1}{2}(1 + a), \qquad y = \frac{1}{2}(1 - a). \tag{1}$$

Keď dosadíme za x a y do tretej rovnice pôvodnej sústavy, dostaneme rovnicu

$$-2a(1 + a) + 2(1 - a) = z^2 + 4, \qquad \text{čiže} \qquad z^2 + 2a^2 + 4a + 2 = 0,$$

ktorú upravíme na tvar

$$z^2 + 2(a + 1)^2 = 0.$$

Oba sčítance na ľavej strane poslednej rovnice sú nezáporné čísla. Ich súčet je 0 práve vtedy, keď $z = 0$, $a = -1$. Dosadením týchto hodnôt do 1 dostaneme $x = 0, y = 1$.

Záver. Daná sústava rovníc má riešenie iba pre $a = -1$, a to $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$. Skúška pri tomto postupe nie je nutná.

Úloha 28.3. [B-60-S-1] V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$\sqrt{x + 3} + \sqrt{x} = p$$

s neznámou x a reálnym parametrom p.

Riešenie*. Aby bola ľavá strana rovnice definovaná, musia byť oba výrazy pod odmocninami nezáporné, čo je splnené práve pre všetky $x \geq 0$. Pre nezáporné x potom $p = \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \geq \sqrt{3}$, rovnica môže teda mať riešenie iba pre $p \geq \sqrt{3}$.

Upravujme danú rovnicu:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} + \sqrt{x+3} &= p, \\ 2x + 3 + 2\sqrt{x(x+3)} &= p^2, \\ 2\sqrt{x(x+3)} &= p^2 - 2x - 3, \\ 4x(x+3) &= (p^2 - 2x - 3)^2, \\ 4x^2 + 12x &= p^4 + 4x^2 + 9 - 4p^2x - 6p^2 + 12x, \\ x &= \frac{(p^2-3)^2}{4p^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Keďže sme danú rovnicu umocňovali na druhú, je nutné sa presvedčiť skúškou, že vypočítané x je pre hodnotu parametra $p \geq \sqrt{3}$ riešením pôvodnej rovnice:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2} + 3} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} &= \sqrt{\frac{p^4 - 6p^2 + 9 + 12p^2}{4p^2}} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(p^2+3)^2}{4p^2}} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} = \frac{p^2+3}{2p} + \frac{p^2-3}{2p} = p. \end{aligned}$$

Pri predposlednej úprave sme využili podmienku $p \geq \sqrt{3}$ (a teda aj $p^2 - 3 \geq 0$ a $p > 0$), takže $\sqrt{(p^2-3)^2} = p^2 - 3$ a $\sqrt{4p^2} = 2p$.

Poznámka. Namiesto skúšky stačí overiť, že pre nájdené x sú všetky umocňované výrazy nezáporné, teda vlastne stačí overiť, že

$$p^2 - 2x - 3 = \frac{(p^2-3)(p^2+3)}{2p^2} \geq 0.$$

Pre $p \geq \sqrt{3}$ to tak naozaj je.

Vynechať skúšku možno aj takouto úvahou: Funkcia $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$ je zrejme rastúca, v bode 0 (ktorý je krajným bodom jej definičného oboru) nadobúda hodnotu $\sqrt{3}$ a zhora je neohraničená. Preto každú hodnotu $p \geq \sqrt{3}$ nadobúda pre práve jedno $x \geq 0$. Z toho vyplýva, že pre $p \geq \sqrt{3}$ má zadaná rovnica práve jedno riešenie, a teda (jediné) nájdené riešenie 2 musí vyhovovať.

Úloha 28.4. [B-58-I-2] Určte všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= y^2 + z^2, \\ z^2 + zy &= y^2 + x^2. \end{aligned}$$

Riešenie*. Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme po úprave

$$(z - x)(2z + 2x + y) = 0.$$

Sú preto možné dva prípady, ktoré rozoberieme samostatne.

a) Prípad $z - x = 0$. Dosadením $z = x$ do prvej rovnice sústavy dostaneme $x^2 + xy = y^2 + x^2$, čiže $y(x - y) = 0$. To znamená, že platí $y = 0$ alebo $x = y$. V prvom prípade dostávame trojice $(x, y, z) = (x, 0, x)$, v druhom $(x, y, z) = (x, x, x)$; také trojice sú riešeniami danej sústavy pre ľubovoľné reálne číslo x, ako ľahko overíme dosadením (aj keď taká skúška pri našom postupe vlastne nie je nutná).

b) Prípad $2z + 2x + y = 0$. Dosadením $y = -2x - 2z$ do prvej rovnice sústavy dostaneme

$$x^2 + x(-2x - 2z) = (-2x - 2z)^2 + z^2, \qquad \text{čiže} \qquad 5(x + z)^2 = 0.$$

Posledná rovnica je splnená práve vtedy, keď $z = -x$, vtedy však $y = -2x - 2z = 0$.Dostávame trojice $(x, y, z) = (x, 0, -x)$, ktoré sú riešeniami danej sústavy pre každé reálne x, ako overíme dosadením. (O takej skúške platí to isté čo v prípade (a)).)

Odpoveď. Všetky riešenia (x, y, z) danej sústavy sú trojice troch typov:

$$(x, x, x), \quad (x, 0, x), \quad (x, 0, -x),$$

kde x je ľubovoľné reálne číslo.

Iné riešenie*. Obe rovnice sústavy sčítame. Po úprave dostaneme rovnicu

$$y(x + z - 2y) = 0$$

a opäť rozlíšime dve možnosti.

a) Prípad $y = 0$. Z prvej rovnice sústavy ihneď vidíme, že $x^2 = z^2$, čiže $z = \pm x$. Skúškou overíme, že každá z trojíc $(x, 0, x)$ a $(x, 0, -x)$ je pre ľubovoľné reálne x riešením.

b) Prípad $x + z - 2y = 0$. Dosadením $y = \frac{1}{2}(x + z)$ do prvej rovnice sústavy dostaneme

$$x^2 + x(x + z)^2 = \frac{(x + z)^2}{4} + z^2, \qquad \text{po úprave} \qquad x^2 = z^2.$$

Platí teda $z = -x$ alebo $z = x$. Dosadením do rovnosti $x+z-2y = 0$ v prvom prípade dostaneme $y = 0$, v druhom prípade $y = x$. Zodpovedajúce trojice $(x, 0, -x)$ a (x, x, x) sú riešeniami pre každé reálne x (prvé z nich sme však našli už v časti (a))).

Úloha 28.5. [B-60-I-1] V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= z + 1,\\ \sqrt{y^2 + z^2} &= x + 1,\\ \sqrt{z^2 + x^2} &= y + 1.\end{aligned}$$

Riešenie*. Umocnením a odčítaním prvých dvoch rovností dostaneme $x^2 - z^2 = (z + 1)^2 - (x + 1)^2$, čo upravíme na $2(x^2 - z^2) + 2(x - z) = 0$, čiže

$$(x - z)(x + z + 1) = 0. \tag{3}$$

Analogicky by sme dostali ďalšie dve rovnice, ktoré vzniknú z 3 cyklickou zámenou neznámych $x \to y \to z$. Vzhľadom na túto symetriu (daná sústava sa nezmení dokonca pri ľubovoľnej permutácii neznámych) stačí rozobrať len nasledovné dve možnosti:

Ak $x = y = z$, prejde pôvodná sústava na jedinú rovnicu $\sqrt{2x^2} = x + 1$, ktorá má dve riešenia $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Každá z trojíc $(1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm 2)$ je zrejme riešením pôvodnej sústavy.

Ak sú niektoré dve z čísel x, y, z rôzne, napríklad $x \neq z$, vyplýva z 3 rovnosť $x+z = -1$. Dosadením $x+1 = -z$ do druhej rovnice sústavy dostávame $y = 0$ a potom z tretej rovnice máme $x^2+(x+1)^2 = 1$, čiže $x(x + 1) = 0$. Posledná rovnica má dve riešenia $x = 0$ a $x = -1$, ktorým zodpovedajú $z = -1$ a $z = 0$. Ľahko overíme, že obe nájdené trojice $(0, 0, -1)$ a $(-1, 0, 0)$ sú riešeniami danej sústavy, rovnako aj trojica $(0, -1, 0)$, ktorú dostaneme ich permutáciou.

Daná sústava má päť riešení: $(0, 0, -1), (0, -1, 0), (-1, 0, 0), (1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ a $(1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$.