Seminár 29: Algebraické výrazy a rovnice VII – Kvadratické rovnice

Úlohy a riešenia

Úloha 29.1. [B-57-I-5-N3] Nájdite všetky dvojice (a, b) reálnych čísel, pre ktoré má každá z rovníc $x^2 + (a-2)x + b - 3 = 0$, $x^2 + (a+2)x + 3b - 5 = 0$ dvojnásobný koreň.

Komentár. Jednoduchá úloha na úvod, v ktorej študenti aplikujú znalosti o závislosti medzi hodnotou diskriminantu a počtom riešení kvadratickej rovnice. Ten potom vedie na riešenie sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi.

Úloha 29.2. [B-57-I-5] Určte všetky dvojice a, b reálnych čísel, pre ktoré má každá z kvadratických rovníc

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \qquad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom práve jeden z nich je spoločný obom rovniciam.

Komentár. V úlohe sa k správnemu riešeniu dostaneme pomocou vhodného odčítania dvoch rovníc (a potom vhodnou úpravou takto vzniknutej rovnice). Považujeme za vhodné študentov na tento „trik“ upozorniť, keďže nájde uplatnenie nielen v nasledujúcej úlohe, ale aj v rôznych iných príkladoch.

Úloha 29.3. [B-57-II-1] Uvažujme dve kvadratické rovnice

$$x^2 - ax - b = 0, \qquad x^2 - bx - a = 0$$

s reálnymi parametrami a, b. Zistite, akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže nadobudnúť súčet $a+b$, ak existuje práve jedno reálne číslo x, ktoré súčasne vyhovuje obom rovniciam. Určte ďalej všetky dvojice (a, b) reálnych parametrov, pre ktoré tento súčet tieto hodnoty nadobúda.

Komentár. Úloha nadväzuje na predchádzajúcu, opäť rovnice v zadaní sčítame. Viac ako náročnosťou výpočtu je úloha zaujímavá svojim rozborom, kde je potrebné dať pozor na to, aby študenti správne zvážili oba prípady ($a = b$, $x = 1$).

Úloha 29.4. [B-62-II-1] Pre ľubovoľné reálne čísla $k \neq \pm 1$, $p \neq 0$ a q dokážte tvrdenie: Rovnica

$$x^2 + px + q = 0$$

má v obore reálnych čísel dva korene, z ktorých jeden je k-násobkom druhého, práve vtedy, keď platí $kp^2 = (k\ + 1)^2 q$.

Úloha 29.5. [B-59-I-6] Reálne čísla a, b majú túto vlastnosť: rovnica $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množine reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých rozdiel je kladným koreňom rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

a) Dokážte nerovnosť $b > 3$.

b) Pomocou b vyjadrite korene oboch rovníc.

Komentár. Úloha sa dá vyriešiť relatívne „netrikovo“ vyjadrením koreňov prvej rovnice, dosadením ich rozdielu do druhej rovnice a odpovedajúcou diskusiou. Takýto prístup je síce zrozumiteľný, avšak dosť pracný. Ak študenti neprídu na prvý spôsob riešenia, považujeme za vhodné im ho ukázať ako dobrý príklad toho, ako nám použitie Viètovych vzorcov môže výraznej zjednodušiť výpočet.

Úloha 29.6. [B-64-II-4] Na tabuli je zoznam čísel $1, 2, 3, 4, 5, 6$ a „rovnica“

$$\frac{\square}{\square}x^2 + \frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square} = 0.$$

Marek s Tomášom hrajú nasledujúcu hru. Najskôr Marek vyberie ľubovoľné číslo zo zoznamu, napíše ho do jedného z prázdnych políčok v „rovnici“ a číslo zo zoznamu zotrie. Potom Tomáš vyberie niektoré zo zvyšných čísel, napíše ho do iného prázdneho políčka a v zozname ho zotrie. Nato Marek urobí to isté a nakoniec Tomáš doplní tri zvyšné čísla na tri zvyšné voľné políčka v „rovnici“. Marek vyhrá, ak vzniknutá kvadratická rovnica s racionálnymi koeficientmi bude mať dva rôzne reálne korene, inak vyhrá Tomáš. Rozhodnite, ktorý z hráčov môže vyhrať nezávisle na postupe druhého hráča.

Komentár. Posledná úloha je zaujímavým spojením hľadania víťaznej stratégie a analýzy vlastností diskriminantu kvadratickej rovnice. Študentov necháme riešenie úlohy hľadať samostatne a potom ich vyzveme, aby stratégiu, ktorú našli, použili pri hre so spolužiakmi. Bude zaujímavé pozorovať, či nastane situácia, v ktorej aj neoptimálna stratégia zvíťazí.

Domáca práca

Úloha 29.7. [B-57-S-2] Určte všetky dvojice (a, b) reálnych čísel, pre ktoré majú rovnice

$$x^2 + (3a + b)x + 4a = 0, \qquad x^2 + (3b + a)x + 4b = 0$$

spoločný reálny koreň.

Úloha 29.8. [B-59-S-1] Určte všetky hodnoty reálnych parametrov p, q, pre ktoré má každá z rovníc

$$x(x - p) = 3 + q, \qquad x(x + p) = 3 - q$$

v obore reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých aritmetický priemer je jedným z koreňov zvyšnej rovnice.