Seminár 5

Téma

Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti II – nerovnosti

Úlohy a riešenia

Úloha 5.1. [58-S-1] Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné čísla a, b, c platí

$$(a+bc)(b+ac) \geq ab(c+1)^2.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť.

Úloha 5.2. [66-I-1-N1] Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla x, y a z platia nerovnosti

a) $2xyz \leq x^2 + y^2 z^2$,

b) $(x^2 - y^2)^2 \geq 4xy(x-y)^2$.

Úloha 5.3. [66-I-1-N2] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b platí nerovnosť

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Úloha 5.4. [62-I-2-N1] Dokážte nerovnosť

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} \geq \frac{8}{(a+b)(c+d)}$$

pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c, d.

Úloha 5.5. [66-I-1] Dokážte, že pre ľubovoľné reálne číslo a platí nerovnosť

$$a^2 + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geq a + 1.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 5.6. [59-I-5] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leq \frac{a+b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť.

Domáca práca

Úloha 5.7. [59-II-2] Dokážte, že pre ľubovoľné čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$ platí nerovnosť

$$(a^2+1)(b^2+1) - (a-1)^2(b-1)^2 \geq 4$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

Úloha 5.8. [66-I-1-D3, resp. 58-I-6] Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$