

## Seminár 18

### Téma

Algebraické výrazy a (ne)rovnice IV – zložitejšie nerovnosti

### Ciele

Zoznámiť a precvičiť so študentami riešenie úloh zameraných na dokazovanie zložitejších nerovností, AG-nerovnosť

### Úlohy a riešenia

**Úloha 18.1.** [66-II-4] Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla  $a \leq b \leq c$  platí

$$(-a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3.$$

**Riešenie\*.** Nerovnosť vynásobíme kladným výrazom  $abc$  a po roznásobení ju postupne (ekvivalentne) upravíme:

$$\begin{aligned} -a(bc + ac + ab) + b(bc + ac + ab) + c(bc + ac + ab) &\geq 3abc, \\ -abc - a^2c - a^2b + b^2c + abc + ab^2 + bc^2 + ac^2 + abc &\geq 3abc, \\ (b^2c - abc) + (bc^2 - abc) + (ac^2 - a^2c) + (ab^2 - a^2b) &\geq 0, \\ bc(b - a) + bc(c - a) + ac(c - a) + ab(b - a) &\geq 0. \end{aligned}$$

Vzhľadom na predpoklad  $0 < a \leq b \leq c$  je výsledná, a teda aj pôvodná nerovnosť splnená.

**Iné riešenie\*.** Dokazovanú nerovnosť postupne upravíme, pričom využijeme známu nerovnosť  $b/c + c/b = 2$ , ktorá je pre kladné čísla  $b, c$  ekvivalentná s nerovnosťou  $(b - c)^2 \geq 0$ :

$$\begin{aligned} (-a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &= 1 + \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) + \left( \frac{c}{a} - \frac{a}{c} \right) + \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq \\ &\geq 1 + \frac{b^2 - a^2}{ab} + \frac{c^2 - a^2}{ac} + 2 \geq 3, \end{aligned}$$

pretože zrejme platí aj  $a^2 \leq b^2 \leq c^2$ .

**Iné riešenie\*.** Podľa predpokladov úlohy platia nerovnosti  $-a + b + c \geq c$  a  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$ . Obe nerovnosti (s kladnými stranami) medzi sebou vynásobíme a získame tak

$$(-a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq c \left( \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 + \frac{2c}{b} \geq 3$$

pretože  $c/b \geq 1$  podľa zadania.

**Komentár.** Úvodná úloha slúži na opakovanie, pripomenutie naučených postupov a overenie toho, čo sa študenti doteraz naučili o nerovnostiach. Považujeme za vhodné ukázať všetky tri zmienené postupy riešenia, keďže ekvivalentné úpravy rovníc, využívanie známych rovností aj sčítanie dvoch a viac rovností sú všetko užitočné metódy, ktoré sa oplatí mať v našej riešiteľskej zásobe.

**Úloha 18.2.** [61-II-1] Pre všetky reálne čísla  $x, y, z$  také, že  $x < y < z$ , dokážte nerovnosť

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

**Riešenie\*.** Aby sme mohli použiť vzorec  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ , presuňme najskôr jeden z krajných členov ľavej strany, napríklad člen  $z^2$ , na pravú stranu:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &> (x - y + z)^2 - z^2, \\(x - y)(x + y) &> (x - y + z - z)(x - y + z + z), \\(x - y)(x + y) &> (x - y)(x - y + 2z).\end{aligned}$$

Keďže spoločný činiteľ  $x - y$  oboch strán poslednej nerovnosti je podľa predpokladu úlohy číslo záporné, budeme s dôkazom hotoví, keď ukážeme, že zvyšné činitele spĺňajú opačnú nerovnosť  $x + y < x - y + 2z$ . Tá je však zrejme ekvivalentná s nerovnosťou  $2y < 2z$ , čiže  $y < z$ , ktorá podľa zadania úlohy naozaj platí.

**Iné riešenie\*.** Podľa vzorca pre druhú mocninu trojčlena platí

$$(x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz.$$

Dosaďme to do pravej strany dokazovanej nerovnosti a urobme niekoľko ďalších ekvivalentných úprav:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 + z^2 &> x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \\0 &> 2y^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \\0 &> 2y(y - x) + 2z(x - y), \\0 &> 2(y - x)(y - z).\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť už vyplýva z predpokladov úlohy, podľa ktorých je činiteľ  $y - x$  kladný, zatiaľ čo činiteľ  $y - z$  je záporný.

**Úloha 18.3.** [62-I-2-N1] Ukážte, že nerovnosť  $\frac{1}{2}(u + v) = \sqrt{uv}$  medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch ľubovoľných nezáporných čísel  $u$  a  $v$  vyplýva zo zrejmej nerovnosti  $(a - b)^2 \geq 0$  vhodnou voľbou hodnôt  $a$  a  $b$ .

**Riešenie\*.** Zvoľte  $a = \sqrt{u}$  a  $b = \sqrt{v}$ .

**Úloha 18.4.** [62-I-2-N1] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla  $a, b, c$  platí nerovnosť

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

a zistite, kedy prechádza v rovnosť.

**Riešenie\*.** Ľavú stranu  $L$  dokazovanej nerovnosti najskôr upravíme roznásobením a vzniknuté členy zoskupíme do súčtov dvojíc navzájom prevrátených výrazov:

$$\begin{aligned}L &= \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) = \left(ab + \frac{a}{c} + 1 + \frac{1}{bc}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) = \\&= \left(abc + \frac{1}{abc}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right).\end{aligned}$$

Pretože pre  $u > 0$  je  $u + \frac{1}{u} \geq 2$ , pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď  $u = 1$ , pre výraz  $L$  platí  $L \geq 2 + 2 + 2 + 2 = 8$ , čo sme mali dokázať. Rovnosť  $L = 8$  nastane práve vtedy, keď platí

$$abc + \frac{1}{abc} = a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c} = 2$$

teda, ako sme už spomenuli, práve vtedy, keď  $abc = a = b = c = 1$ , t. j. práve vtedy, keď  $a = b = c = 1$ .

*Poznámka.* Dodajme, že upravená nerovnosť

$$abc + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \geq 8$$

vyplýva okamžite aj z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom ôsmich čísel

$$abc, \quad a, \quad b, \quad c, \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{abc},$$

lebo ich súčin (a teda aj geometrický priemer) je rovný číslu 1, takže ich aritmetický priemer má hodnotu aspoň 1.

**Iné riešenie\*.** V dokazovanej nerovnosti sa najskôr zbavíme zlomkov, a to tak, že obe jej strany vynásobíme kladným číslom  $abc$ . Dostaneme tak ekvivalentnú nerovnosť

$$(ab + 1)(bc + 1)(ac + 1) = 8abc,$$

ktorá má po roznásobení ľavej strany tvar

$$a^2b^2c^2 + a^2bc + ab^2c + abc^2 + ab + ac + bc + 1 \geq 8abc.$$

Poslednú nerovnosť možno upraviť na tvar

$$(abc - 1)^2 + ab(c - 1)^2 + ac(b - 1)^2 + bc(a - 1)^2 \geq 0.$$

Táto nerovnosť už zrejme platí, lebo na ľavej strane máme súčet štyroch nezáporných výrazov. Pritom rovnosť nastane práve vtedy, keď má každý z týchto štyroch výrazov nulovú hodnotu, teda práve vtedy, keď

$$abc - 1 = c - 1 = b - 1 = a - 1 = 0,$$

čiže

$$a = b = c = 1.$$

**Iné riešenie\*.** Danú nerovnosť možno dokázať aj bez roznásobenia jej ľavej strany. Stačí napísať tri AG-nerovnosti

$$\frac{1}{2} \left( a + \frac{1}{b} \right) \geq \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{1}{2} \left( b + \frac{1}{c} \right) \geq \sqrt{\frac{b}{c}}, \quad \frac{1}{2} \left( c + \frac{1}{a} \right) \geq \sqrt{\frac{c}{a}},$$

Ich vynásobením dostaneme

$$\frac{1}{2} \left( a + \frac{1}{b} \right) \cdot \frac{1}{2} \left( b + \frac{1}{c} \right) \cdot \frac{1}{2} \left( c + \frac{1}{a} \right) \geq \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} = 1,$$

odkiaľ po násobení ôsmimi obdržíme dokazovanú nerovnosť. Rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď nastane rovnosť v každej z troch použitých AG-nerovností, teda práve vtedy, keď sa čísla v každej „priemerovanej“ dvojici rovnajú:

$$a = \frac{1}{b}, \quad b = \frac{1}{c}, \quad c = \frac{1}{a}.$$

Z prvých dvoch rovností vyplýva  $a = c$ , po dosadení do tretej rovnosti potom vychádza  $a = c = 1$ , teda aj  $b = 1$ .

**Komentár.** Úloha sa dá riešiť využitím AG nerovnosti, tá však bude obsahom jedného z ďalších seminárov, v ktorom sa (okrem iného) k tejto úlohe vrátíme.

**Úloha 18.5.** [60-II-4] Nech  $x, y, z$  sú kladné reálne čísla. Ukážte, že aspoň jedno z čísel  $x + y + z - xyz$  a  $xy + yz + zx - 3$  je nezáporné.

**Riešenie\*.** Ukážeme, že ak je číslo  $xy + yz + zx - 3$  záporné, je číslo  $x + y + z - xyz$  kladné. Ak  $xy + yz + zx < 3$ , je aspoň jedno z čísel  $xy, yz, zx$  menšie ako 1, napr.  $xy$ . Potom  $x + y + z - xyz = x + y + z(1 - xy)$  je zjavne súčet troch kladných čísel.

**Iné riešenie\*.** Ukážeme, že ak je číslo  $x + y + z - xyz$  záporné, tak číslo  $xy + yz + zx - 3$  je kladné. Predpokladajme, že  $x + y + z < xyz$ . Tým skôr  $x < xyz$ . Po skrátení kladného čísla  $x$  dostaneme  $yz > 1$ . Podobne odvodíme odhady  $xy > 1$  a  $zx > 1$ . Teraz ich stačí sčítať a máme  $xy + yz + zx > 3$ .

**Iné riešenie\*.** Tvrdenie úlohy dokážeme sporom. Predpokladajme, že  $x + y + z < xyz$  a zároveň  $xy + yz + zx < 3$ . Obe tieto nerovnosti sú symetrické, preto môžeme predpokladať, že čísla  $x, y, z$  sú označené tak, že  $z$  je najmenšie. Z druhej nerovnosti dostaneme, že  $xy < 3$ . Potom však  $x + y + z < xyz < 3z$ , teda  $x + y < 2z$ . To je však spor s tým, že číslo  $z$  je najmenšie.

**Iné riešenie\*.** Aritmetický priemer  $c$  čísel  $a, b$  má tú vlastnosť, že sa od neho obe čísla líšia o rovnakú hodnotu  $d$ . Ak nahradíme premenné  $a, b$  v daných nerovnostiach premennými  $c, d$ , zápis nerovností aj dôkaz oboch vzťahov sa zjednoduší. Položme teda  $c = \frac{1}{2}(a + b)$ , potom  $a = c + d$  a  $b = c - d$  (pričom  $d = \frac{1}{2}(a - b)$ , ako sa ľahko môžeme presvedčiť). Takže  $a^2 + b^2 = 2(c^2 + d^2)$ ,  $ab = c^2 - d^2$ , odkiaľ  $a^2 + 3ab + b^2 = 5c^2 - d^2$ . Označme ešte písmenami  $m$  a  $n$  ľavú a pravú stranu prvej z dokazovaných nerovností. Potom

$$m = \sqrt{am} = \sqrt{c^2 - d^2},$$

$$n = \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} = \frac{2(5c^2 - d^2)}{5 \cdot 2c} = c - \frac{d^2}{5c} = \sqrt{\left(c - \frac{d^2}{5c}\right)^2} = \sqrt{\left(c - d^2 \frac{2}{5} - \frac{d^2}{25c^2}\right)}.$$

Keďže z vyjadrenia kladnej hodnoty  $m$  vidíme, že  $d^2 < c^2$ , pre výraz v poslednej zátvorke pod odmocninou platí

$$1 > \frac{2}{5} \geq \frac{2}{5} - \frac{d^2}{25c^2} > \frac{2}{5} - \frac{1}{25} = \frac{9}{25} > 0,$$

čo znamená, že výraz pod odmocninou leží v uzavretom intervale medzi číslami  $c^2 - d^2$  a  $c^2$ . Odtiaľ vyplýva  $m \leq n \leq c$ , pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď  $d = 0$ , t. j. keď  $a = b$ .

*Poznámka.* Z výsledkov súťažnej úlohy vyplýva, že rozdiel medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch kladných čísel možno zdola odhadnúť nezáporným lomeným výrazom takto:

$$\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{a + b}{2} - \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} = \frac{(a - b)^2}{10(a + b)}.$$

Umocnením osamostatnenej odmocniny a ďalšími úpravami môžeme dokázať silnejší odhad rovnakého typu

$$\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(a - b)^2}{4(a + b)}.$$

Inú metódu dôkazov spolu s ďalšími podobnými nerovnosťami nájdete v článku J. Šimšu *Dolní odhady rozdílu průměrů* v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální 65 (1986/87), číslo 10, str. 403 – 407.

**Úloha 18.6.** [61-I-4] Reálne čísla  $a, b, c, d$  vyhovujú rovnici  $ab + bc + cd + da = 16$ .

- Dokážte, že medzi číslami  $a, b, c, d$  sa nájdu dve so súčtom najviac 4.
- Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ?

**Riešenie\*.** a) Z rovnosti  $16 = ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$  vyplýva, že obidva súčty  $a + c$  a  $b + d$  nemôžu byť väčšie ako 4 súčasne, lebo v opačnom prípade by bol ich súčin väčší ako 16. Preto vždy aspoň jeden zo súčtov  $a + c$  alebo  $b + d$  má požadovanú vlastnosť. b) Využijeme všeobecnú rovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}(b - c)^2 + \frac{1}{2}(c - d)^2 + \frac{1}{2}(d - a)^2 + ab + bc + cd + da,$$

o platnosti ktorej sa ľahko presvedčíme úpravou pravej strany. Vzhľadom na nezápornosť druhých mocnín  $(a - b)^2$ ,  $(b - c)^2$ ,  $(c - d)^2$  a  $(d - a)^2$  dostávame pre ľavú stranu rovnosti odhad

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da = 16.$$

Je nájdené číslo 16 najmenšou hodnotou uvažovaných súčtov? Ináč povedané: nastane pre niektorú vyhovujúcu štvoricu v odvodennej nerovnosti rovnosť? Z nášho postupu je jasné, že musíme rozhodnúť, či pre niektorú z uvažovaných štvoric platí  $a - b = b - c = c - d = d - a = 0$ , čiže  $a = b = c = d$ . Pre takú štvoricu má rovnosť  $ab + bc + cd + da = 16$  tvar  $4a^2 = 16$ , čomu vyhovuje  $a = \pm 2$ . Pre vyhovujúce štvorice  $a = b = c = d = 2$  a  $a = b = c = d = -2$  má súčet  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  naozaj hodnotu 16, preto ide o hľadané minimum.

**Úloha 18.7.** [62-I-2] Pre kladné reálne čísla  $a, b, c, d$  platí

$$a + b = c + d, \quad ad = bc, \quad ac + bd = 1.$$

Akú najväčšiu hodnotu môže mať súčet  $a + b + c + d$ ?

**Riešenie\*.** Najskôr ukážeme, že prvé dve rovnosti zo zadania úlohy sú splnené len vtedy, keď platí  $a = c$  a súčasne  $b = d$ . Naozaj, vďaka tomu, že zadané čísla sú kladné (a teda rôzne od nuly), môžeme uvedené rovnosti zapísať ako

$$a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = c\left(1 + \frac{d}{c}\right) \quad \text{a} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Podľa druhej rovnosti vidíme, že súčty v oboch zátvorkách z prvej rovnosti majú rovnakú kladnú hodnotu, takže sa musia rovnať prvé činitele oboch jej strán. Platí teda  $a = c$ , odkiaľ už vyplýva aj rovnosť  $b = d$ . Keď už vieme, že platí  $a = c$  a  $b = d$ , vystačíme ďalej len s premennými  $a$  a  $b$  a nájdeme najväčšiu hodnotu zadaného súčtu

$$S = a + b + c + d = 2(a + b)$$

za jedinej podmienky, totiž že kladné čísla  $a, b$  spĺňajú rovnosť  $a^2 + b^2 = 1$ , ktorá je vyjadrením tretej zadanej rovnosti  $ac + bd = 1$  (prvé dve sú vďaka rovnostiam  $a = c$  a  $b = d$  zrejmé). Všimnime si, že pre druhú mocninu (kladného) súčtu  $S$  platí

$$S^2 = 4(a + b)^2 = 4(a^2 + b^2) + 8ab = 4 \cdot 1 + 8ab = 4(1 + 2ab),$$

takže hodnota  $S$  bude najväčšia práve vtedy, keď bude najväčšia hodnota  $2ab$ . Zo zrejmej nerovnosti  $(a - b)^2 \geq 0$  po roznásobení však dostaneme

$$2ab \leq a^2 + b^2 = 1,$$

pritom rovnosť  $2ab = 1$  nastane práve vtedy, keď bude platiť  $a = b$ , čo pre kladné čísla  $a, b$  spolu s podmienkou  $a^2 + b^2 = 1$  vedie k jedinej vyhovujúcej dvojici  $a = b = 1/\sqrt{2}$ . Najväčšia hodnota výrazu  $2ab$  je teda 1, takže najväčšia hodnota výrazu  $S^2$  je  $4(1 + 1) = 8$ , a teda najväčšia hodnota  $S$  je  $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ . Dosiahne sa pre jedinú prípustnú štvoricu  $a = b = c = d = 1/\sqrt{2}$ .