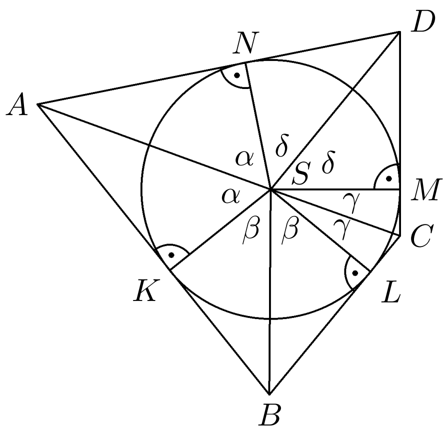
Seminár 22: Geometria V – štvoruholníky

Úlohy a riešenia

Úloha 22.1. [57-I-2] **Riešenie*.** Päty kolmíc spustených zo stredu S vpísanej kružnice na strany AB, BC, CD a DA označme postupne K, L, M a N (obr. 1). Pravouhlé trojuholníky ASK a ASN sú zhodné podľa vety Ssu. Majú totiž spoločnú preponu AS a zhodné odvesny SK a SL, ktorých dĺžka je rovná polomeru vpísanej kružnice. Zo zhodnosti týchto trojuholníkov vyplýva jednak známe tvrdenie o dĺžkach dotyčníc ($|AK| = |AN|$), jednak zhodnosť uhlov ASK a ASN, ktorých spoločnú veľkosť označíme α:

$$|\measuredangle ASK| = |\measuredangle ASN| = \alpha.$$

Analogicky zistíme zhodnosť trojuholníkov SBK a SBL, ďalej SCL a SCM, a nakoniec SDM a



Obr. 1:

SDN. Na základe uvedených zhodností môžeme položiť

$$|\measuredangle BSK| = |\measuredangle BSL| = \beta, \quad |\measuredangle CSL| = |\measuredangle CSM| = \gamma, \quad |\measuredangle DSM| = |\measuredangle DSN| = \delta.$$

Odtiaľ a z obr. 1 potom dostávame

$$\begin{aligned} |\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD| &= (\alpha+\delta) - (\gamma+\delta) = \alpha - \gamma = \\ &= (\alpha+\beta) - (\gamma+\beta) = |\measuredangle ASB| - |\measuredangle BSC| = 40^\circ. \end{aligned}$$

Záver. $|\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD| = 40^\circ$.

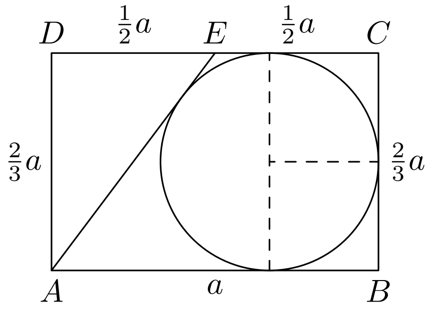
Komentár. Úloha je relatívne nezložitým úvodom do seminára a nadväzuje na posledné geometrické stretnutie, ktoré sa zaoberalo opísanými a vpísanými kružnicami trojuholníku. Pre úplnosť len dodajme, že štvoruholník, ktorému je možné vpísať kružnicu, sa nazýva *dotyčnicový*.

Úloha 22.2. [61-II-3] **Riešenie*.** Keďže štvoruholník $ABCE$ je podľa zadania dotyčnicový, pre dĺžky jeho strán platí známa rovnosť[1]

$$|AB| + |CE| = |BC| + |AE|.$$

V našej situácii pri označení $a = |AB|$ platí $|BC| = |AD| = \frac{2}{3}a$ a $|CE| = |DE| = \frac{1}{2}a$ (obr. 2), odkiaľ po dosadení do uvedenej rovnosti zistíme, že $|AE| = \frac{5}{6}a$. Teraz si všimneme, že pre dĺžky strán

[1]Rovnosť sa odvodí rozpísaním dĺžok strán na ich úseky vymedzené bodmi dotyku vpísanej kružnice a následným využitím toho, že každé dva z týchto úsekov, ktoré vychádzajú z rovnakého vrcholu štvoruholníka, sú zhodné.



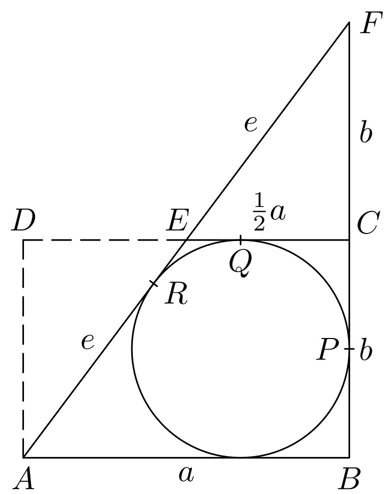
Obr. 2:

trojuholníka ADE platí

$$|AD| : |DE| : |AE| = \frac{2}{3}a : \frac{1}{2}a : \frac{5}{6}a = 4 : 3 : 5,$$

takže podľa (obrátenej časti) Pytagorovej vety má trojuholník ADE pravý uhol pri vrchole D, a teda rovnobežník $ABCD$ je obdĺžnik. Dotyčnica BC kružnice vpísanej štvoruholníku $ABCE$ je teda kolmá na dve jej (navzájom rovnobežné) dotyčnice AB a CE. To už zrejme znamená, že bod dotyku dotyčnice BC je stredom úsečky BC (vyplýva to zo zistenej kolmosti vyznačeného priemeru kružnice na jej vyznačený polomer).

Iné riešenie*. Ukážeme, že požadované tvrdenie možno dokázať aj bez toho, aby sme si všimli, že rovnobežník $ABCD$ je v danej úlohe obdĺžnikom. Namiesto toho využijeme, že úsečka CE je stredná priečka trojuholníka ABF, pričom F je priesečník polpriamok BC a AE (obr. 3), lebo $CE \parallel AB$ a $|CE| = \frac{1}{2}|AB|$. Označme preto $a = |AB| = 2|CE|$, $b = |BC| = |CF|$ a $e = |AE| = |EF|$ (rovnosť



Obr. 3:

$2a = 3b$ použijeme až neskôr). Rovnako ako v prvom riešení využijeme rovnosť $b + e = a + \frac{1}{2}a (= \frac{3}{2}a)$, ktorá platí pre dĺžky strán dotyčnicového štvoruholníka $ABCE$. Kružnica jemu vpísaná sa dotýka strán BC, CE, AE postupne v bodoch P, Q, R tak, že platia rovnosti

$$|CP| = |CQ|, \quad |EQ| = |ER| \quad \text{a tiež} \quad |FP| = |FR|.$$

Pre súčet zhodných dĺžok $|FP|$ a $|FR|$ teda platí

$$|FP| + |FR| = (b + |CP|) + (e + |ER|) = (b + e) + (|CP| + |ER|) =$$
$$= \frac{3}{2}a + (|CQ| + |EQ|) = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a = 2a,$$

čo znamená, že $|FP| = |FR| = a$.

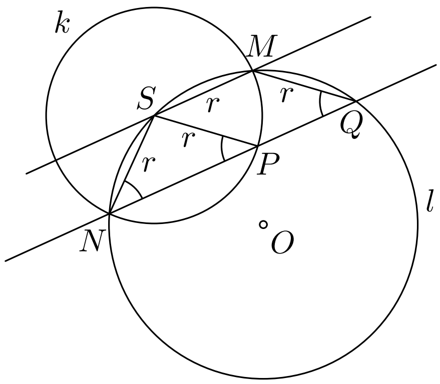
Teraz už riešenie úlohy ľahko dokončíme. Rovnosť $|BP| = \frac{1}{2}b$, ktorú máme v našej situácii dokázať, vyplýva z rovnosti

$$|BP| = |BF| - |FP| = 2b - a,$$

keď do nej dosadíme zadaný vzťah $a = \frac{3}{2}b$.

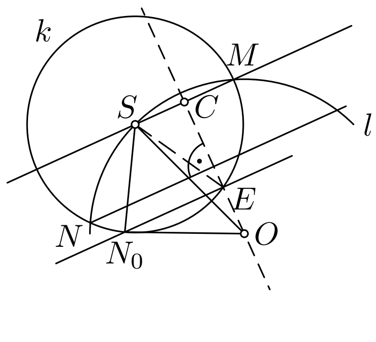
Komentár. Úloha nadväzuje na predchádzajúcu a využíva rovnosť súčtov dĺžok opačných strán dotyčnicového štvoruholníka. Ďalej študenti uplatnia buď Pytagorovu vetu alebo vedomosti o stredných priečkach v trojuholníku, čo úlohu činí zaujímavou z hľadiska pestrosti.

Úloha 22.3. [59-II-3] **Riešenie*.** Polomer kružnice k označme r. Označenie vrcholov P, Q v trojuholníku MPQ nie je dôležité, preto bez ujmy na všeobecnosti označme P ten z bodov priamky vedenej bodom N rovnobežne s priamkou MS, ktorý leží na kružnici k. Bod Q potom leží na kružnici l a štvoruholník $NQMS$ je lichobežník vpísaný do kružnice l (obr. 4). Je teda rovnoramenný s ramenami MQ a NS dĺžky r. Navyše aj úsečky SP a SM majú dĺžku r. Z rovnoramenného trojuholníka NPS a rovnoramenného lichobežníka $NQMS$ vyplýva rovnosť uhlov $|\measuredangle SPN| = |\measuredangle SNP| = |\measuredangle MQP|$. Priečka PQ teda pretína priamky SP a MQ pod rovnako veľkými uhlami, a preto (podľa vety o súhlasných uhloch) sú priamky SP a MQ rovnobežné. Štvoruholník $PQMS$ je teda rovnobežník, a keďže $|SM| = |SP| = r$, je to dokonca kosoštvorec. Odtiaľ je už zrejmé, že trojuholník MPQ je rovnoramenný s ramenami PQ a MQ dĺžky r.



Obr. 4:

Poznámka. Existencia tetív NP a NQ v zadaní je zaručená vďaka predpokladu, že kružnica l má väčší polomer ako kružnica k. Ak označíme C stred úsečky SM a E ten priesečník kružnice k s osou úsečky SM, ktorý leží v polrovine SMO, bude stred O kružnice l ležať na polpriamke CE až za bodom E (obr. 5). Ďalší priesečník N oboch kružníc preto padne do pásu medzi rovnobežkami SM a N_0E



Obr. 5:

v polrovine OCS, pričom N_0 je štvrtý vrchol kosoštvorca s vrcholmi S, M, E. Na to stačí ukázať, že kružnica l pretne polpriamku EN_0 až za bodom N_0, teda že jej polomer OS je väčší ako dĺžka úsečky ON_0. Toto porovnanie dvoch strán trojuholníka OSN_0 jednoducho vyplýva z porovnania jeho vnútorných uhlov: uhol pri vrchole N_0 je najväčší, lebo oba uhly pri protiľahlej strane OS sú menšie ako $60°$ (trojuholník ESN_0 je rovnostranný). Ľahko nahliadneme, že každá z rovnobežiek uvedeného pásu pretína každú z oboch kružníc v dvoch bodoch (vždy súmerne združených podľa príslušnej osi kolmej na SM). Tým je dokázaná nielen existencia oboch tetív NP a NQ, ale aj to, že ich krajné body P a Q ležia na rovnakej strane od bodu N (ako na obr. 4), lebo oba body zrejme ležia v polrovine opačnej k spomenutej polrovine OCS.

Komentár. Diskusia v poznámke je len zaujímavým doplnkom úlohy, existencia tetív je totiž predpokladom zadania a nie je nutné ju dokazovať. Úloha využíva úvahu, že lichobežník, ktorého základne sú rovnobežné tetivy danej kružnice, je rovnoramenný, ktorá môže byť pre študentov zaujímavým uvedomením.

Úloha 22.4. [60-I-3] **Riešenie*.** a) Štvoruholníky $ABQK$ a $DAPL$ sú zhodné (jeden z nich je obrazom druhého v otočení o $90°$ so stredom v strede štvorca $ABCD$). Preto majú aj rovnaký obsah, čiže $S_A + S_B = S_A + S_D$. Z toho hneď dostaneme $S_B = S_D$.

b) Ľahko sa nám podarí vypočítať obsah pravouhlého lichobežníka $ABQK$, lebo poznáme dĺžky základní aj výšku. Dostaneme

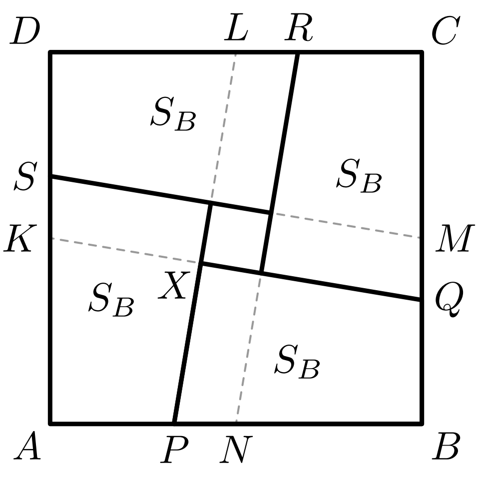
$$S_A + S_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}\,\mathrm{cm}^2.$$

Podobne výpočtom obsahu lichobežníka $PBCL$ dostaneme

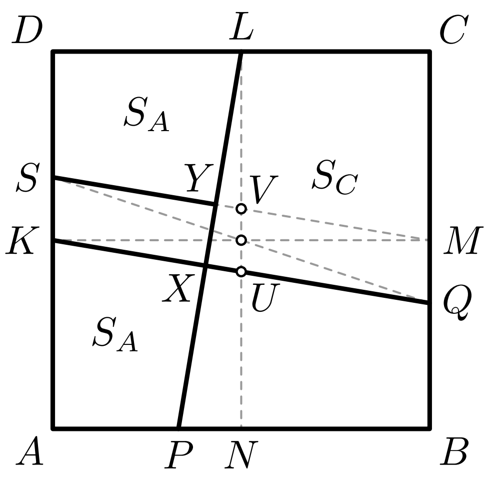
$$S_C + S_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}\,\mathrm{cm}^2.$$

Odčítaním prvej získanej rovnosti od druhej dostávame $S_C - S_A = \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}\,\mathrm{cm}^2$.

c) Nerovnosť medzi obsahmi $S_A + S_C$ a $S_B + S_D$ (ktorých priame výpočty nie sú v silách žiakov 1. ročníka) môžeme zdôvodniť nasledovným spôsobom: Súčet týchto dvoch obsahov je $1\,\mathrm{cm}^2$, takže sa nerovnajú práve vtedy, keď je jeden z nich menší ako $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Bude to obsah $S_B + S_D$ (rovný $2S_B$, ako už vieme), keď ukážeme, že obsah S_B je menší ako $\frac{1}{4}\,\mathrm{cm}^2$. Urobíme to tak, že do celého štvorca $ABCD$ umiestnime bez prekrytia štyri kópie štvoruholníka $PBQX$. Ako ich umiestnime, vidíme na obr. 6, pričom M, N sú stredy strán BC, AB a R, S body, ktoré delia strany CD, DA v pomere $1 : 2$.



Obr. 6:



Obr. 7:

Iné riešenie* časti c). Tentoraz namiesto nerovnosti $S_B + S_D < \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$ dokážeme ekvivalentnú nerovnosť $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Preto sa pokúsime „premiestniť“ štvoruholník $APXK$ tak, aby ležal pri štvoruholníku $XQCL$ a aby sa ich obsahy dali geometricky sčítať. Uhly AKQ a DLP sú zhodné a $|AK| = |DL|$, preto môžeme štvoruholník $APXK$ premiestniť vo štvorci $ABCD$ do jeho „rohu“ D tak, že k štvoruholníku $XQCL$ priľahne pozdĺž strany LX svojou stranou LY, pričom Y je priesečník úsečiek SM a PL z pôvodného riešenia (obr. 7). Obsah $S_A + S_C$ je potom obsahom šesťuholníka $DSYXQC$. Prečo je väčší ako $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$, môžeme zdôvodniť napríklad takto:

Úsečka spájajúca bod L so stredom U úsečky KQ pretne úsečku SM v jej strede V. Štvoruholník $UQMV$ má obsah rovný polovici obsahu rovnobežníka $KQMS$, teda rovný obsahu trojuholníka KMS. Preto má šesťuholník $DSVUQC$ obsah rovný obsahu štvoruholníka $KMCD$, t. j. polovici obsahu štvorca $ABCD$. Obsah $S_A + S_C$ je ešte väčší, a to o obsah štvoruholníka $XUVY$. Teda naozaj $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

Komentár. Prvé dve časti sú príjemným úvahovým rozohriatím k časti tretej, ktorá vyžaduje trochu viac invencie. Demonštruje však zaujímavý prístup k riešeniu a porovnávanie obsahov obrazcov namiesto priameho výpočtu obsahov.