Seminár 11

Téma

Geometria III – obsahy trojuholníkov a štvoruholníkov

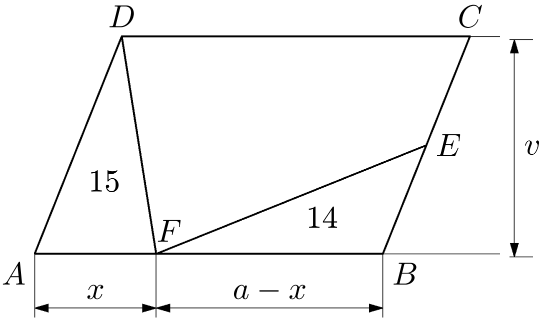
Ciele

Precvičenie úloh zaoberajúcich sa obsahmi trojuholníkov a štvoruholníkov, rôznorodé určovanie obsahu, príp. pomeru obsahov trojuholníkov v úlohách.

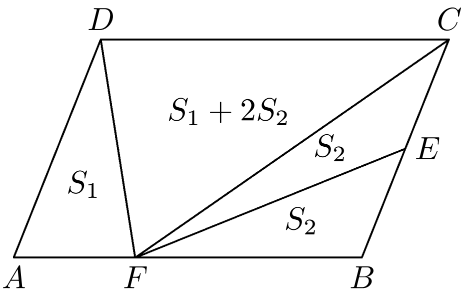
Úlohy a riešenia

Úloha 11.1. [57-S-2] V danom rovnobežníku $ABCD$ je bod E stred strany BC a bod F leží vnútri strany AB. Obsah trojuholníka AFD je $15\,\mathrm{cm}^2$ a obsah trojuholníka FBE je $14\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah štvoruholníka $FECD$.

Riešenie*. Označme v vzdialenosť bodu C od priamky AB, $a = |AB|$ a $x = |AF|$. Pre obsahy trojuholníkov AFD a FBE (obr. 1) platí $\frac{1}{2}x \cdot v = 15$, $\frac{1}{2}(a-x) \cdot \frac{1}{2}v = 14$. Odtiaľ $xv = 30$, $av - xv = 56$. Sčítaním oboch rovností nájdeme obsah rovnobežníka $ABCD$: $S_{ABCD} = av = 86\,\mathrm{cm}^2$. Obsah štvoruholníka $FECD$ je teda $S_{FECD} = S_{ABCD} - (S_{AFD} + S_{FBE}) = 57\,\mathrm{cm}^2$.



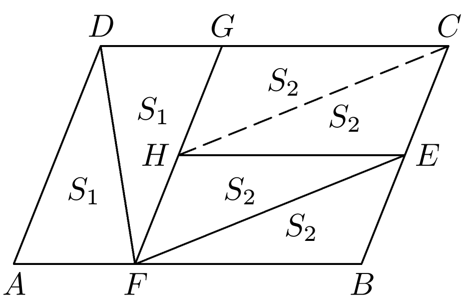
Obr. 1



Obr. 2

Iné riešenie. Trojuholníky BEF a ECF majú spoločnú výšku z vrcholu F a zhodné základne BE a EC. Preto sú obsahy oboch trojuholníkov rovnaké. Z obr. 2 vidíme, že obsah trojuholníka CDF je polovicou obsahu rovnobežníka $ABCD$ (oba útvary majú spoločnú základňu CD a rovnakú výšku). Druhú polovicu tvorí súčet obsahov trojuholníkov AFD a BCF. Odtiaľ $S_{FECD} = S_{ECF} + S_{CDF} = S_{ECF} + (S_{AFD} + S_{BCF}) = S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.

Iné riešenie. Do rovnobežníka dokreslíme úsečky FG a EH rovnobežné so stranami BC a AB tak, ako znázorňuje obr. 3.



Obr. 3

Rovnobežníky $AFGD$ a $FBEH$ sú svojimi uhlopriečkami DF a EF rozdelené na dvojice zhodných trojuholníkov. Takže $S_{GDF} = S_{AFD} = 15\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{HFE} = S_{BEF} = 14\,\mathrm{cm}^2$. Zo zhodnosti rovnobežníkov $HECG$ a $FBEH$ navyše ľahko usúdime, že všetky štyri trojuholníky FBE, EHF, HEC a CGH sú zhodné, takže obsah štvoruholníka $FECD$ je $S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.

Komentár. Úloha je zaradená ako rozcvička pred komplexnejšími problémami, nie je totiž veľmi náročná na vyriešenie. Pekne tiež demonštruje, že niekedy nám vhodný prístup, náčrtok alebo správne nakreslená priamka v obrázku riešenie úlohy významne zjednoduší.

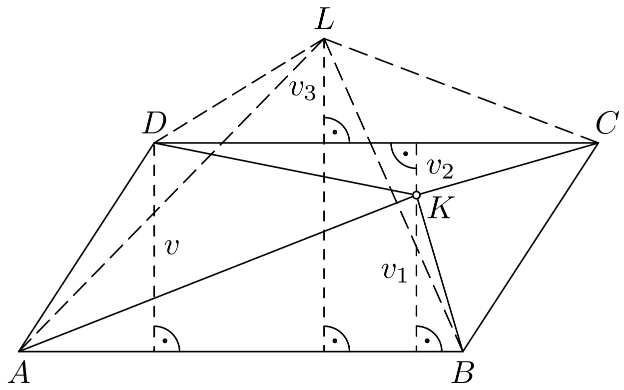
Úloha 11.2. [62-II-2] Vnútri rovnobežníka $ABCD$ je daný bod K a v páse medzi rovnobežkami BC a AD v polrovine opačnej k CDA je daný bod L. Obsahy trojuholníkov ABK, BCK, DAK a DCL sú $S_{ABK} = 18\,\mathrm{cm}^2$, $S_{BCK} = 8\,\mathrm{cm}^2$, $S_{DAK} = 16\,\mathrm{cm}^2$, $S_{DCL} = 36\,\mathrm{cm}^2$. Vypočítajte obsahy trojuholníkov CDK a ABL.

Riešenie*. Trojuholníky ABK a CDK majú zhodné strany AB a CD a súčet ich výšok v_1 a v_2 (vzdialeností bodu K od priamky AB, resp. CD) je rovný výške v rovnobežníka $ABCD$ (vzdialenosti rovnobežných priamok AB a CD, obr. 4). Preto súčet ich obsahov dáva polovicu súčtu obsahu daného rovnobežníka:

$$S_{ABK} + S_{CDK} = \frac{1}{2}|AB|v_1 + \frac{1}{2}|CD|v_2 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v_1 + v_2) = \frac{1}{2}|AB| \cdot v \ = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Podobne aj $S_{BCK} + S_{DAK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, teda

$$S_{CDK} = S_{BCK} + S_{DAK} - S_{ABK} = 6\,\mathrm{cm}^2.$$



Obr. 4

Trojuholníky ABL a DCL majú zhodné strany AB a CD. Ak v_3 označuje príslušnú výšku druhého z nich, je výška prvého z nich rovná $v + v_3$, takže pre rozdiel obsahov týchto trojuholníkov platí

$$S_{ABL} - S_{DCL} = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v \ + v_3) - \frac{1}{2}|CD| \cdot v_3 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v \ + v_3 - v_3) =$$
$$= \frac{1}{2}|AB| \cdot v \ = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{BCK} + S_{DAK}.$$

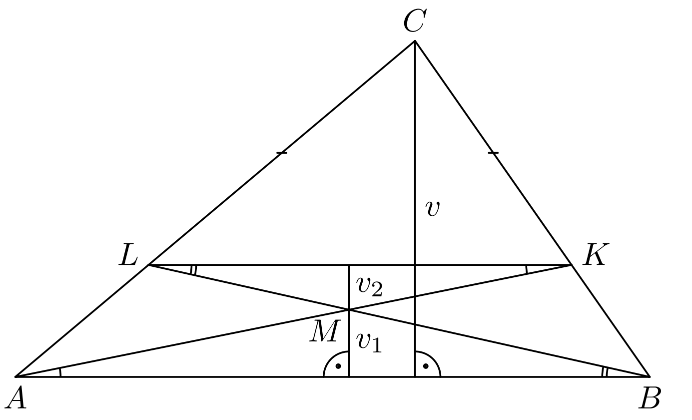
Odtiaľ vyplýva

$$S_{ABL} = S_{BCK} + S_{DAK} + S_{DCL} = 60\,\mathrm{cm}^2.$$

Komentár. Úloha precvičuje použitie tvrdenia, ktoré sme dokázali v prvom geometrickom seminári, a to, že ak majú dva trojuholníky základňu rovnakej dĺžky, potom ich obsahy sú v rovnakom pomere ako ich výšky na túto základňu.

Úloha 11.3. [64-S-2] Označme K a L postupne body strán BC a AC trojuholníka ABC, pre ktoré platí $|BK| = \frac{1}{3}|BC|$, $|AL| = \frac{1}{3}|AC|$. Nech M je priesečník úsečiek AK a BL. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníkov ABM a ABC.

Riešenie*. Označme v výšku trojuholníka ABC na stranu AB, v_1 výšku trojuholníka ABM na stranu AB a v_2 výšku trojuholníka KLM na stranu KL (obr. 5). Z podobnosti trojuholníkov LKC a ABC (zaručenej vetou *sus*) vyplýva, že $|KL| = \frac{2}{3}|AB|$. Z porovnania ich výšok zo spoločného vrcholu C vidíme, že výška v trojuholníka ABC je rovná trojnásobku vzdialenosti priečky KL od strany AB, teda $v = 3(v_1+v_2)$. Keďže AK a BL sú priečky rovnobežiek KL a AB, vyplýva zo zhodnosti prislúchajúcich striedavých uhlov podobnosť trojuholníkov ABM a KLM.



Obr. 5

Keďže $|KL| = \frac{2}{3}|AB|$, je tiež $v_2 = \frac{2}{3}v_1$, a preto $v_1 + v_2 = \frac{5}{3}v_1$, čiže

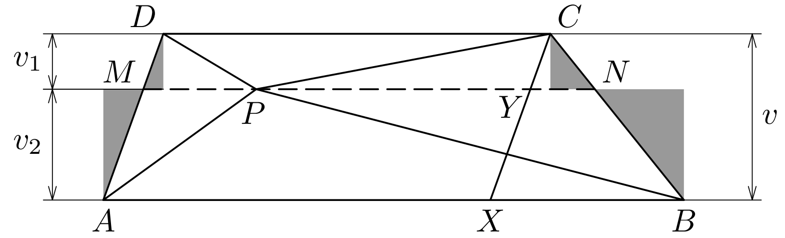
$$v = 3(v_1 + v_2) = 5v_1.$$

Trojuholníky ABM a ABC majú spoločnú stranu AB, preto ich obsahy sú v pomere výšok na túto stranu, takže obsah trojuholníka ABC je päťkrát väčší ako obsah trojuholníka ABM.

Komentár. Ďalšia úloha, ktorá precvičuje rovnaké tvrdenie ako predchádzajúca. Pomery výšok je tentoraz potrebné určiť z podobnosti trojuholníkov. Tu sa teda uplatnia znalosti precvičované na minulom seminárnom stretnutí.

Úloha 11.4. [64-II-3] Daný je lichobežník $ABCD$ so základňami AB, CD, pričom $2|AB| = 3|CD|$.
a) Nájdite bod P vnútri lichobežníka tak, aby obsahy trojuholníkov ABP a CDP boli v pomere $3:1$ a aj obsahy trojuholníkov BCP a DAP boli v pomere $3:1$.
b) Pre nájdený bod P určte postupný pomer obsahov trojuholníkov ABP, BCP, CDP a DAP.

Riešenie*. Predpokladajme, že bod P má požadované vlastnosti. Priamka rovnobežná so základňami lichobežníka a prechádzajúca bodom P pretína ramená AD a BC postupne v bodoch M a N (obr. 6). Označme v výšku daného lichobežníka, v_1 výšku trojuholníka CDP a v_2 výšku trojuholníka ABP.



Obr. 6

a) Keďže obsahy trojuholníkov ABP a CDP sú v pomere $3:1$, platí

$$\frac{|AB|v_2}{2} : \frac{|CD|v_1}{2} = 3:1, \qquad \text{čiže} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Z vyznačených dvojíc podobných pravouhlých trojuholníkov vyplýva, že v práve určenom pomere $2:1$ výšok v_2 a v_1 delí aj bod M rameno AD a bod N rameno BC (v prípade pravého uhla pri jednom z vrcholov A či B je to zrejmé rovno). Tým je konštrukcia bodov M a N, a teda aj úsečky MN určená. Teraz zistíme, v akom pomere ju delí uvažovaný bod P.

Keďže obsahy trojuholníkov BCP a DAP sú v pomere $3:1$, platí

$$\left(\frac{|NP|v_1}{2} + \frac{|NP|v_2}{2}\right) : \left(\frac{|MP|v_1}{2} + \frac{|MP|v_2}{2}\right) = 3:1,$$

$$\frac{|NP|(v_1+v_2)}{2} : \frac{|MP|(v_1+v_2)}{2} = 3:1, \qquad |NP|:|MP| = 3:1.$$

Tým je konštrukcia (jediného) vyhovujúceho bodu P úplne opísaná.

b) Doplňme trojuholník DAC na rovnobežník $DAXC$. Jeho strana CX delí priečku MN na dve časti, a keďže $v_1 = \frac{1}{3}v$, môžeme dĺžku priečky MN vyjadriť ako $|MN| = |MY| + |YN| = |AX| + \frac{1}{3}|XB| = |CD| + \frac{1}{3}(|AB| - |CD|) = \frac{1}{3}|AB| + \frac{2}{3}|CD| = \frac{7}{6}|CD|$, lebo podľa zadania platí $|AB| = \frac{3}{2}|CD|$. Preto

$$|MP| = \frac{1}{4}|MN| = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{6}|CD| = \frac{7}{24}|CD|,$$

takže pre pomer obsahov trojuholníkov CDP a DAP platí

$$\frac{|CD|v_1}{2} : \frac{|MP|(v_1+v_2)}{2} = (|CD|v_1) : \left(\frac{7}{24}\cdot|CD|\cdot 3v_1\right) = 1 : \frac{7}{8} = 8:7.$$

Pomer obsahov trojuholníkov BCP a CDP je teda $21:8$ a pomer obsahov trojuholníkov ABP a BCP je tak $24:21$. Postupný pomer obsahov trojuholníkov ABP, BCP, CDP a DAP je preto $24:21:8:7$.

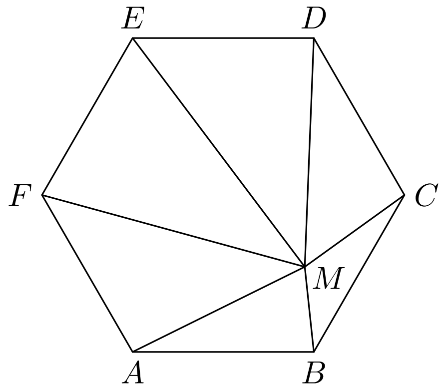
Komentár. Táto komplexná úloha je vrcholom tohto seminárneho stretnutia. Vyžaduje umnú prácu s pomermi obsahov, podobnými trojuholníkmi aj netriviálny nápad doplnenia trojuholníka DAC na rovnobežník. Je tak vhodné skôr než samostatne úlohu riešiť spoločne na tabuľu. Študentom tiež pripomenieme, že podobne ako v úvodnej úlohe, aj tu našlo vhodné rozdelenie zadaného útvaru svoje opodstatnenie a prispelo k úspešnému rozklúsknutiu problému.

Úloha 11.5. [62-I-6] Vnútri pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ s obsahom $30\,\mathrm{cm}^2$ je zvolený bod M. Obsahy trojuholníkov ABM a BCM sú postupne $3\,\mathrm{cm}^2$ a $2\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsahy trojuholníkov CDM, DEM, EFM a FAM.

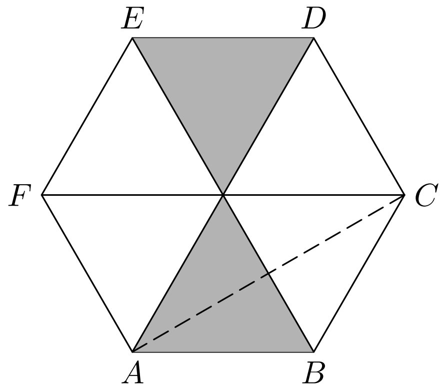
Riešenie*. Úloha je o obsahu šiestich trojuholníkov, na ktoré je daný pravidelný šesťuholník rozdelený spojnicami jeho vrcholov s bodom M (obr. 7). Celý šesťuholník s daným obsahom, ktorý označíme S, možno rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov s obsahom $S/6$ (obr. 8). Ak označíme r ich stranu, v vzdialenosť rovnobežiek AB, CD a v_1 vzdialenosť bodu M od priamky AB, dostaneme

$$S_{ABM} + S_{EDM} = \frac{1}{2}rv_1 + \frac{1}{2}r(v - v_1) = \frac{1}{2}rv = \frac{S}{3},$$

lebo $S/3$ je súčet obsahov dvoch vyfarbených rovnostranných trojuholníkov. Vďaka symetrii majú tú istú hodnotu $S/3$ aj súčty $S_{BCM} + S_{EFM}$ a $S_{CDM} + S_{FAM}$. Odtiaľ už dostávame prvé dva neznáme obsahy $S_DEM = S/3 - S_{ABM} = 7\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{EFM} = S/3 - S_{BCM} = 8\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 7



Obr. 8

Ako určiť zvyšné dva obsahy S_{CDM} a S_{FAM}, keď zatiaľ poznáme len ich súčet $S/3$? Všimnime si, že súčet zadaných obsahov trojuholníkov ABM a BCM má významnú hodnotu $S/6$, ktorá je aj obsahom trojuholníka ABC (to vyplýva opäť z obr. 8). Taká zhoda obsahov znamená práve to, že bod M leží na uhlopriečke AC. Trojuholníky ABM a BCM tak majú zhodné výšky zo spoločného vrcholu B a to isté platí aj pre výšky trojuholníkov CDM a FAM z vrcholov F a D (t. j. bodov, ktoré majú od priamky AC rovnakú vzdialenosť). Pre pomery obsahov týchto dvojíc trojuholníkov tak dostávame

$$\frac{S_{CDM}}{S_{FAM}} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{S_{BCM}}{S_{ABM}} = \frac{2}{3}.$$

V súčte $S_{CDM} + S_{FAM}$ majúcom hodnotu $S/3$ sú teda sčítance v pomere $2:3$. Preto $S_{CDM} = 4\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{FAM} = 6\,\mathrm{cm}^2$.

Komentár. Úloha je odľahčeným a netradičným príkladom využitia princípu, na ktorom sme stavali celé toto seminárne stretnutie: súčty obsahov „protiľahlých" trojuholníkov sú stále rovnaké. Posledná časť úlohy vyžaduje netriviálny nápad a študenti tak možno budú potrebovať malú radu.

Domáca práca

Úloha 11.6. [65-I-4] Vnútri strán AB, AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body E, F, pričom $EF \parallel BC$. Úsečka EF je potom rozdelená bodom D tak, že platí

$$p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|.$$

a) Ukážte, že pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD je pre $p = 2:3$ rovnaký ako pre $p = 3:2$.
b) Zdôvodnite, prečo pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD má hodnotu aspoň 4.

Riešenie*. Pre spoločnú hodnotu p oboch pomerov zo zadania platí

$$|ED| = p|DF| \quad \text{a zároveň} \quad |BE| = p|EA|. \qquad (1)$$

Pred vlastným riešením oboch úloh a) a b) vyjadríme pomocou daného čísla p skúmaný pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD. Ten je rovný – keďže trojuholníky majú spoločnú stranu AB – pomeru dĺžok ich výšok CC_0 a DD_0 (obr. XXX), ktorý je rovnaký ako
OBRAZOK
pomer dĺžok úsečiek BC a ED, a to na základe podobnosti pravouhlých trojuholníkov BCC_0 a EDD_0 podľa vety uu (uplatnenej vďaka $BC \parallel ED$).[1] Platí teda rovnosť

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{|BC|}{|ED|}. \qquad (2)$$

[1] V prípade pravých uhlov ABC a AED to platí triviálne, lebo vtedy $B = C_0$ a $E = D0$.

Vráťme sa teraz k rovnostiam (1), podľa ktorých

$$|EF| = (1+p)|DF| \quad \text{a} \quad |AB| = (1+p)|EA|,$$

a všimnime si, že trojuholníky ABC a AEF majú spoločný uhol pri vrchole A a zhodné uhly pri vrcholoch C a F (pretože $BC \parallel EF$), takže sú podľa vety uu podobné. Preto pre dĺžky ich strán platí

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|EF|}, \quad \text{čiže} \quad 1+p = \frac{|BC|}{(1+p)|DF|}, \quad \text{odkiaľ} \quad |BC| = (1+p)^2|DF|.$$

Keď vydelíme posledný vzťah hodnotou $|ED|$, ktorá je rovná $p|DF|$ podľa (1), získame podiel z pravej strany (2) a tým aj hľadané vyjadrenie

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{(1+p)^2}{p}. \qquad (3)$$

a) Algebraickou úpravou zlomku zo vzťahu (3)

$$\frac{(1+p)^2}{p} = \frac{1+2p+p^2}{p} = 2+p+\frac{1}{p}$$

zisťujeme, že hodnota pomeru $S_{ABC} : S_{ABD}$ je pre akékoľvek dve navzájom prevrátené hodnoty p a $1/p$ rovnaká, teda nielen pre hodnoty $2/3$ a $3/2$, ako sme mali ukázať.

b) Podľa vzťahu (3) je našou úlohou overiť pre každé $p > 0$ nerovnosť

$$\frac{(1+p)^2}{p} \geq 4, \quad \text{čiže} \quad (1+p)^2 \geq 4p.$$

To je však zrejme ekvivalentné s nerovnosťou $(1-p)^2 \geq 0$, ktorá skutočne platí, nech je základ druhej mocniny akýkoľvek (rovnosť nastane jedine pre $p = 1$).

Dodajme, že pre iný dôkaz bolo možné využiť aj vyššie uvedené „symetrické“ vyjadrenie

$$\frac{(1+p)^2}{p} = 2+p+\frac{1}{p}$$

a uplatniť naň dobre známu nerovnosť $p + 1/p \geq 2$, ktorej platnosť pre každé $p > 0$ vyplýva napr. z porovnania aritmetického a geometrického priemeru dvojice čísel p a $1/p$, nazývaného AG-nerovnosť:

$$\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right) \geq \sqrt{p\cdot\frac{1}{p}} = 1, \quad \text{pretože všeobecne} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\cdot b} \quad (\forall a,b \geq 0).$$

Doplňujúce zdroje a materiály

Rovnako ako v predchádzajúcich geometrických seminároch ostávame v odporúčaniach verní publikáciám [[?]] a [[?]].