

# Seminár 30

## Téma

Kvadratické rovnice

## Úlohy a riešenia

**Úloha 30.1.** [57-I-5] Určte všetky dvojice  $a, b$  reálnych čísel, pre ktoré má každá z kvadratických rovníc

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom práve jeden z nich je spoločný obom rovniciam.

**Úloha 30.2.** [57-S-5] Určte všetky dvojice  $(a, b)$  reálnych čísel, pre ktoré majú rovnice

$$x^2 + (3a + b)x + 4a = 0, \quad x^2 + (3b + a)x + 4b = 0$$

spoločný reálny koreň.

**Úloha 30.3.** [59-I-6] Reálne čísla  $a, b$  majú túto vlastnosť: rovnica  $x^2 - ax + b - 1 = 0$  má v množine reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých rozdiel je kladným koreňom rovnice  $x^2 - ax + b + 1 = 0$ .

a) Dokážte nerovnosť  $b > 3$ .

b) Pomocou  $b$  vyjadrite korene oboch rovníc.

**Úloha 30.4.** [59-S-1] Určte všetky hodnoty reálnych parametrov  $p, q$ , pre ktoré má každá z rovníc

$$x(x - p) = 3 + q, \quad x(x + p) = 3 - q$$

v obore reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých aritmetický priemer je jedným z koreňov zvyšnej rovnice.

**Úloha 30.5.** [62-II-1] Pre ľubovoľné reálne čísla  $k \neq \pm 1$ ,  $p \neq 0$  a  $q$  dokážte tvrdenie: Rovnica

$$x^2 + px + q = 0$$

má v obore reálnych čísel dva korene, z ktorých jeden je  $k$ -násobkom druhého, práve vtedy, keď platí  $kp^2 = (k + 1)^2 q$ .

**Úloha 30.6.** [64-II-4] Na tabuli je zoznam čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 a „rovnica“

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} x^2 + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} x + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = 0.$$

Marek s Tomášom hrajú nasledujúcu hru. Najskôr Marek vyberie ľubovoľné číslo zo zoznamu, napíše ho do jedného z prázdnych políček v „rovnici“ a číslo zo zoznamu zotrie. Potom Tomáš vyberie niektoré zo zvyšných čísel, napíše ho do iného prázdneho políčka a v zozname ho zotrie. Nato Marek urobí to isté a nakoniec Tomáš doplní tri zvyšné čísla na tri zvyšné voľné políčka v „rovnici“. Marek vyhrá, ak vzniknutá kvadratická rovnica s racionálnymi koeficientmi bude mať dva rôzne reálne korene, inak vyhrá Tomáš. Rozhodnite, ktorý z hráčov môže vyhrať nezávisle na postupe druhého hráča.

## Domáca práca

Úlohou študentov bude vyhľadať, skonzultovať a zaslať vedúcemu seminára jeden príklad, problém alebo úlohu, ktorá sa viaže k témam algebry a teórie čísel, ktorými sme sa v seminári zaberali. Tieto úlohy budú použité ako zadania, ktoré využijeme v nasledujúcom seminári. Študenti môžu hľadať inšpiráciu v starších kolách MO, rôznych knižných publikáciách, zbierkach korešpondenčných seminárov alebo môžu úlohu dokonca sami vymyslieť.