Seminár 20: Teória čísel IV – prvočísla

Ciele

Precvičiť so študentmi rôzne úlohy o prvočíslach, pri riešení ktorých sa uplatnia poznatky o deliteľnosti nadobudnuté v seminároch 7 a 8.

Úlohy a riešenia

Úloha 20.1. [63-I-3-N2] Číslo n je súčinom dvoch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme menšie z nich o 1 a druhé ponecháme, ich súčin sa zväčší o 7. Určte číslo n.

Riešenie. Označme $p < q$ prvočísla zo zadania. Potom platí $(p+1)q = pq + 7$. Po roznásobení ľavej strany a odčítaní výrazu pq od oboch strán rovnosti dostávame $q = 7$. Prvočíslo p má byť menšie ako q, preto $p \in \{2, 3, 5\}$ a hľadaným číslom n je tak jedno z čísel 14, 21 alebo 35.

Úloha 20.2. [63-I-3-N4] Číslo n je súčinom dvoch prvočísel. Ak zväčšíme každé z nich o 1, ich súčin sa zväčší o 35. Určte číslo n.

Riešenie. Podobne ako v predchádzajúcom prípade označme $p \leq q$ (nie nutne rôzne) prvočísla zo zadania a to prepíšme do tvaru rovnosti $(p+1)(q+1) = pq + 35$. Po úprave dostávame $p + q = 34$. Hľadáme teda dvojice prvočísel, ktorých súčet bude 34. Takými sú jedine 3 a 31, 5 a 29, 11 a 23, 17 a 17. Riešením úlohy je potom $n \in \{93, 145, 253, 289\}$.

Komentár. Úvodné dve jednoduché úlohy majú prípravný charakter na úlohu nasledujúcu a sú skôr rozcvičkou, než náročnou aplikáciou vedomostí o prvočíslach.

Úloha 20.3. [63-I-3] Číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme dve menšie z nich o 1 a najväčšie ponecháme nezmenené, zväčší sa ich súčin o 915. Určte číslo n.

Riešenie*. Nech $n = pqr, p < q < r$. Rovnosť $(p+1)(q+1)r = pqr + 915$ ekvivalentne upravíme na tvar $(p+q+1) \cdot r = 915 = 3 \cdot 5 \cdot 61$, z ktorého vyplýva, že prvočíslo r môže nadobudnúť len niektorú z hodnôt 3, 5 a 61. Pre $r = 3$ ale z poslednej rovnice dostávame $(p+q+1) \cdot 3 = 3 \cdot 5 \cdot 61$, čiže $p+q = 304$. To je spor s tým, že r je najväčšie. Analogicky zistíme, že nemôže byť ani $r = 5$. Je teda $r = 61$ a $p+q = 14$. Vyskúšaním všetkých možností pre p a q vyjde $p = 3$, $q = 11$, $r = 61$ a $n = 3 \cdot 11 \cdot 61 = 2013$.

Komentár. Úloha vyžaduje vhodnú manipuláciu rovnosti zo zadania a potom už len dostatočne pozornú analýzu vzniknutých možností.

Úloha 20.4. [64-S-3] Nájdite najmenšie prirodzené číslo n s ciferným súčtom 8, ktoré sa rovná súčinu troch rôznych prvočísel, pričom rozdiel dvoch najmenších z nich je 8.

Riešenie*. Hľadané číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel, ktoré označíme p, q, r, $p < q < r$. Číslo $n = pqr$ má ciferný súčet 8, ktorý nie je deliteľný tromi, preto ani n nie je deliteľné tromi a teda $p, q, r \neq 3$. Napokon hľadané číslo n nie je deliteľné ani dvoma, pretože by muselo byť $p = 2$ a $q = p + 8 = 10$, čo nie je prvočíslo. Musí teda byť $p = 5$.

Ak je $p = 5$, je $q = p + 8 = 13$, takže $r \in \{17, 19, 23, 29, 31, \ldots\}$ a $n \in \{1105, 1235, 1495, 1885, 2015, \ldots\}$. V tejto množine je zrejme najmenšie číslo s ciferným súčtom 8 číslo 2015.

Ak je $p > 5$, je $p = 11$ najmenšie prvočíslo také, že aj $q = p + 8$ je prvočíslo. Preto $p = 11$, $q = 19$, a teda $r = 23$, takže pre zodpovedajúce čísla n platí $n = 11 \cdot 19 \cdot 23 = 4807 > 2015$.

Komentár. Úloha príjemne spája poznatky o deliteľnosti a prvočíslach a nemala by pre študentov byť neprekonateľnou výzvou.

Úloha 20.5. [57-S-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b väčších ako 1 tak, aby ich súčet aj súčin boli mocniny prvočísel.

Riešenie*. Z podmienky pre súčin vyplýva, že a aj b sú mocninami toho istého prvočísla p: $a = p^r$, $b = p^s$, pričom r, s sú celé kladné čísla. Keby bolo p nepárne, bol by súčet $a + b$ deliteľný okrem čísla p aj číslom 2, takže by nebol mocninou prvočísla. Teda $p = 2$. Ak $r < s$, je súčet $a + b = 2^r(1 + 2^{s-r})$ opäť číslo párne deliteľné nepárnym číslom väčším ako 1, nie je teda mocninou prvočísla. K rovnakému záveru dôjdeme aj v prípade, keď $r > s$. Ostáva preto jediná možnosť: $a = b = 2^r$, pričom r je celé kladné číslo. Skúška $a + b = 2^r + 2^r = 2^{r+1}$ a $ab = 2^{2r}$ potvrdzuje, že riešením sú všetky dvojice $(a, b) = (2^r, 2^r)$, kde r je celé kladné číslo.

Úloha 20.6. [65-I-1-D2, resp. 55-II-4] Nájdite všetky dvojice prvočísel p a q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + 145p^2$.

Riešenie*. Pre prvočísla p, q má platiť $q(q-1) = p(145p-1)$, takže prvočíslo p delí $q(q-1)$. Prvočíslo p nemôže deliť prvočíslo q, pretože to by znamenalo, že $p = q$, a teda $145p = p$, čo nie je možné. Preto p delí $q-1$, t. j. $q-1 = kp$ pre nejaké prirodzené k. Po dosadení do daného vzťahu dostaneme podmienku

$$p = \frac{k + 1}{145 - k^2}.$$

Vidíme, že menovateľ zlomku na pravej strane je kladný jedine pre $k \leq 12$, zároveň však pre $k \leq 11$ je jeho čitateľ menší ako menovateľ: $k + 1 \leq 12 < 24 \leq 145k^2$. Iba pre $k = 12$ tak vyjde p prirodzené a prvočíslo, $p = 13$. Potom $q = 157$, čo je tiež prvočíslo. Úloha má jediné riešenie.

Komentár. Úloha opäť ukazuje, že upravenie podmienok zo zadania do vhodného tvaru, o ktorom môžeme ďalej diskutovať, je často kľúčovým krokom v riešení. V tomto prípade ide o podmienku $q = kp+1$ a následný rozbor hodnôt v čitateli a menovateli zlomku. To by v študentoch malo umocniť dojem, že zručné narábanie s algebraickými výrazmi nájde svoje široké uplatnenie.

Úloha 20.7. [62-I-5] Určte všetky celé čísla n, pre ktoré $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo.

Riešenie*. Ukážeme, že jedinými celými číslami, ktoré vyhovujú úlohe, sú $n = 0$ a $n = 1$.

Upravme najskôr výraz $V = 2n^3 - 3n^2 + n + 3$ nasledujúcim spôsobom:

$$V = (n^3 - 3n^2 + 2n) + (n^3 - n) + 3 = (n - 2)(n - 1)n + (n - 1)n(n + 1) + 3.$$

Oba súčiny $(n - 2)(n - 1)n$ a $(n - 1)n(n + 1)$ v upravenom výraze V sú deliteľné tromi pre každé celé číslo n (v oboch prípadoch sa jedná o súčin troch po sebe idúcich celých čísel), takže výraz V je pre všetky celé čísla n deliteľný tromi. Hodnota výrazu V je preto prvočíslom práve vtedy, keď $V = 3$, teda práve vtedy, keď súčet oboch spomenutých súčinov je rovný nule:

$$0 = (n - 2)(n - 1)n + (n - 1)n(n + 1) = n(n - 1)[(n - 2) + (n + 1)] = n(n - 1)(2n - 1).$$

Poslednú podmienku však spĺňajú iba dve celé čísla n, a to $n = 0$ a $n = 1$. Tým je úloha vyriešená.

Poznámka. Fakt, že výraz V je deliteľný tromi pre ľubovoľné celé n, môžeme odvodiť aj tak, že doňho postupne dosadíme $n = 3k$, $n = 3k + 1$ a $n = 3k + 2$, pričom k je celé číslo, rozdelíme teda všetky celé čísla n na tri skupiny podľa toho, aký dávajú zvyšok po delení tromi.

Komentár. Aj keď vzorové riešenie môže vyzerať trikovo, po vyskúšaní niekoľko málo hodnôt n je vždy hodnota zo zadania deliteľná 3, čo by študentov mohlo priviesť na myšlienku skúsiť dokázať deliteľnosť čísla zo zadania tromi.

Poznámka. Fakt, že výraz V je deliteľný tromi pre ľubovoľné celé n, môžeme odvodiť aj tak, že doňho postupne dosadíme $n = 3k$, $n = 3k + 1$ a $n = 3k + 2$, pričom k je celé číslo, rozdelíme teda všetky celé čísla n na tri skupiny podľa toho, aký dávajú zvyšok po delení tromi.

Úloha 20.8. [[HKŠ11], príklad 2.3, str. 174] Nájdite všetky prvočísla, ktoré sú súčasne súčtom a rozdielom dvoch vhodných prvočísel.

Riešenie*. Predpokladajme, že prvočíslo p je súčasne súčtom aj rozdielom dvoch prvočísel. Potom je však $p > 2$ a teda je p nepárne. Pretože je p zároveň súčet aj rozdiel dvoch prvočísel, jedno z nich musí byť vždy párne, teda 2. Takže hľadáme prvočísla p, p_1, p_2 tak, že $p = p_1 + 2 = p_2 - 2$, teda $p_1, p, p - 2$ sú tri po sebe idúce nepárne čísla a teda práve jedno z nich je deliteľné troma (študenti by si mali rozmyslieť prečo). Avšak troma je deliteľné jediné prvočíslo 3, odkiaľ vzhľadom na to, že $p_1 \geq 1$ vyplýva $p_1 = 3$, $p = 5$ a $p_2 = 7$. Jediné prvočíslo vyhovujúce zadaniu je teda $p = 5$.

Komentár. Úloha, ktorá vyžaduje viac uvažovania, než tvrdého počítania, je zaujímavá práve jediným výsledkom.

Úloha 20.9. [[Thi86], príklad 3, str. 95] Nájdite celočíselné riešenia rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p},$$

kde p je pevne dané prvočíslo.

Riešenie*. Ak existujú vôbec nejaké riešenia vyšetrovanej rovnice, potom sú nenulové. Preto môžeme rovnicu upraviť na ekvivalentný tvar $yx - px - py = 0$, resp. $(x - p)(y - p) - p^2 = 0$, a teda

$$(x - p)(y - p) = p^2.$$

Odtiaľ je vidieť, že celočíselné riešenia môžeme dostať len vtedy, ak $x - p$ prebehne všetkých deliteľov čísla p^2, pričom $y - p$ prebehne doplnkové delitele. Pretože je p prvočíslo, musí byť nutne

$$x - p \in \{1, p, p^2, -1, -p, -p^2\}.$$

Pretože $x \neq 0$, odpadá $x - p = -p$. Ostáva teda

$$x \in \{1 + p, 2p, p + p^2, p - 1, p - p^2\} \quad \text{a teda} \quad y \in \{p + p^2, 2p, 1 + p, p - p^2, p - 1\}.$$

Tieto hodnoty sú skutočne riešením, o čom sa môžeme presvedčiť skúškou.

Komentár. Úloha, v ktorej opäť predtým, než uplatníme znalosti o deliteľnosti, príp. prvočíslach, musíme umne upraviť východiskový tvar rovnice.

Domáca práca

Úloha 20.10. [65-I-1] Nájdite všetky možné hodnoty súčinu prvočísel p, q, r, pre ktoré platí

$$p^2 - (q+r)^2 = 637.$$

Riešenie*. Ľavú stranu danej rovnice rozložíme na súčin podľa vzorca pre $A^2 - B^2$. V takto upravenej rovnici

$$(p+q+r)(p-q-r) = 637$$

už ľahko rozoberieme všetky možnosti pre dva celočíselné činitele naľavo. Prvý z nich je väčší a kladný, preto aj druhý musí byť kladný (lebo taký je ich súčin), takže podľa rozkladu na súčin prvočísel čísla $637 = 7^2 \cdot 13$ ide o jednu z dvojíc $(637, 1)$, $(91, 7)$ alebo $(49, 13)$. Prvočíslo p je zrejme aritmetickým priemerom oboch činiteľov, takže sa musí rovnať jednému z čísel $\frac{1}{2}(637+1) = 319$, $\frac{1}{2}(91+7) = 49$, $\frac{1}{2}(49+13) = 31$. Prvé dve z nich však prvočísla nie sú ($319 = 11 \cdot 29$ a $49 = 7^2$), tretie áno. Takže nutne $p = 31$ a prislúchajúce rovnosti $31 + q + r = 49$ a $31 - q - r = 13$ platia práve vtedy, keď $q + r = 18$. Také dvojice prvočísel $\{q, r\}$ sú iba $\{5, 13\}$ a $\{7, 11\}$ (stačí prebrať všetky možnosti, alebo si uvedomiť, že jedno z prvočísel q, r musí byť aspoň $18 : 2 = 9$, nanajvýš však $18 - 2 = 16$). Súčin pqr tak má práve dve možné hodnoty, a to $31 \cdot 5 \cdot 13 = 2015$ a $31 \cdot 7 \cdot 11 = 2387$.

Doplňujúce zdroje a materiály

Ďalšie zaujímavé príklady je možné nájsť v [HKŠ11], paragraf 2 a taktiež v [Hol10].

Citácie

[HKŠ11] J. Herman, R. Kučera a J. Šimša. *Metody řešení matematických úloh I.* Brno: MUNI Press, 2011. ISBN: 978-80-210-8536-7.

[Hol10] D. A. Holton. *A First Step to Mathematical Olympiad Problems.* 1st edition. Danvers, USA: World Scientific, 2010. ISBN: 981-4273-87-2.

[Thi86] R. Thiele. *Matematické důkazy.* 2. nezměněné vydání. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1986.