# Seminár 4: Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti I – úprava výrazov

## Úlohy a riešenia

**Úloha 4.1.** [65-I-3-N1] Pre ľubovoľné reálne čísla $x, y$ a $z$ dokážte nezápornosť hodnoty každého z výrazov

$$x^2z^2 + y^2 - 2xyz,\ x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 2x - 12y - 6z + 13,\ 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz$$

a zistite tiež, kedy je dotyčná hodnota rovná nule.

**Úloha 4.2.** [63-I-1-N1-N4] a) Určte najmenšiu hodnotu výrazu $V = 5 + (x - 2)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Pre ktoré $x$ ju výraz nadobúda?

b) Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $W = 9 - ab$, kde $a, b$ sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 6$. Pre ktoré hodnoty $a, b$ je $W$ minimálne?

c) Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $Y = 12 - ab$, kde $a, b$ sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 6$. Pre ktoré hodnoty $a, b$ je $Y$ minimálne?

d) Určte najväčšiu možnú hodnotu výrazu $K = 5 + ab$, kde $a, b$ sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 8$. Pre ktoré hodnoty $a, b$ je $K$ maximálne?

**Úloha 4.3.** [63-I-1] Určte, akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $V = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$, ak reálne čísla $a, b, c$ spĺňajú dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 6, \\ -a + b - c &= 2. \end{aligned}$$

**Úloha 4.4.** [63-S-1] Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz $V = ab + bc + cd + da$, ak reálne čísla $a, b, c, d$ spĺňajú dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} 2a - 5b + 2c - 5d &= 4, \\ 3a + 4b + 3c + 4d &= 6. \end{aligned}$$

**Úloha 4.5.** [65-I-3]

a) Nájdite všetky reálne čísla $x$ a $y$, pre ktoré daný výraz nadobúda svoju najmenšiu hodnotu.

b) Určte všetky dvojice celých nezáporných čísel $x$ a $y$, pre ktoré je hodnota daného výrazu rovná číslu 16.

## Domáca práca

**Úloha 4.6.** [65-II-1] Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$3x^2 - 12xy + y^4,$$

v ktorom $x$ a $y$ sú ľubovoľné celé nezáporné čísla.

**Úloha 4.7.** [65-I-3-D1, resp. B-61-S-1] V obore celých čísel vyriešte rovnicu

$$x^2 + y^2 + x + y = 4.$$