

Seminár 18

Téma

Algebraické výrazy a (ne)rovnice IV – zložitejšie nerovnosti

Ciele

Zoznámiť a precvičiť so študentami riešenie úloh zameraných na dokazovanie zložitejších nerovností, AG-nerovnosť

Úlohy a riešenia

(DOKONČIŤ.)

Úloha 18.1. [66-II-4] Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla $a \leq b \leq c$ platí

$$(-a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3.$$

Riešenie*. Nerovnosť vynásobíme kladným výrazom abc a po roznásobení ju postupne (ekvivalentne) upravíme:

$$\begin{aligned} -a(bc + ac + ab) + b(bc + ac + ab) + c(bc + ac + ab) &\geq 3abc, \\ -abc - a^2c - a^2b + b^2c + abc + ab^2 + bc^2 + ac^2 + abc &\geq 3abc, \\ (b^2c - abc) + (bc^2 - abc) + (ac^2 - a^2c) + (ab^2 - a^2b) &\geq 0, \\ bc(b - a) + bc(c - a) + ac(c - a) + ab(b - a) &\geq 0. \end{aligned}$$

Vzhľadom na predpoklad $0 < a \leq b \leq c$ je výsledná, a teda aj pôvodná nerovnosť splnená.

Iné riešenie*. Dokazovanú nerovnosť postupne upravíme, pričom využijeme známu nerovnosť $b/c + c/b = 2$, ktorá je pre kladné čísla b, c ekvivalentná s nerovnosťou $(b - c)^2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} (-a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &= 1 + \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} - \frac{a}{c} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq \\ &\geq 1 + \frac{b^2 - a^2}{ab} + \frac{c^2 - a^2}{ac} + 2 \geq 3, \end{aligned}$$

pretože zrejme platí aj $a^2 \leq b^2 \leq c^2$.

Iné riešenie*. Podľa predpokladov úlohy platia nerovnosti $-a + b + c \geq c$ a $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$. Obe nerovnosti (s kladnými stranami) medzi sebou vynásobíme a získame tak

$$(-a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq c \left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 + \frac{2c}{b} \geq 3$$

pretože $c/b \geq 1$ podľa zadania.

Komentár. Úvodná úloha slúži na opakovanie, pripomenutie naučených postupov a overenie toho, čo sa študenti doteraz naučili o nerovnostiach. Považujeme za vhodné ukázať všetky tri zmienené postupy riešenia, keďže ekvivalentné úpravy rovníc, využívanie známych rovností aj sčítanie dvoch a viac rovností sú všetko užitočné metódy, ktoré sa oplatí mať v našej riešiteľskej zásobe.