

## Seminár 23: Geometria VI – miš-maš

### Ciele

Precvičenie geometrických poznatkov, rôznorodné netradičné úlohy

### Úlohy a riešenia

**Úloha 23.1.** [66-II-3] Dokážte, že obdĺžnik s rozmermi  $32 \times 120$  sa dá zakryť siedmimi zhodnými štvorcami so stranou 30.

**Riešenie\*.** Štyrmi štvorcami so stranou 30 zrejme zakryjeme obdĺžnik  $30 \times 120$ . Zvyšnú časť  $2 \times 120$  rozdelíme na tri zhodné časti, konkrétne obdĺžniky  $2 \times 40$ , a ukážeme, ako každý z nich (rovnako) pokryť jedným z troch zvyšných štvorcov so stranou 30. Dosiahneme to, keď štvorec položíme na obdĺžnik tak, že obe uhlopriečky štvorca budú ležať na osiach súmernosti dotyčného obdĺžnika. Stačí potom ukázať, že obdĺžnik so stranou 2 vpísaný do štvorca podľa obr. 1 má druhú stranu dlhšiu ako 40. Jej dĺžka je zrejme  $30\sqrt{2} - 2$  (od uhlopriečky štvorca odčítame na každej strane 1 ako veľkosť výšky pravouhlého



Obr. 1:

trojuholníka so stranami  $2, \sqrt{2}, \sqrt{2}$ , pozri zväčšenú časť obr. 1), takže stačí ukázať, že  $30\sqrt{2} - 2 \geq 40$ . To je ekvivalentné s nerovnosťou  $5\sqrt{2} \geq 7$ , čiže  $50 \geq 49$ , čo je splnené. Daný obdĺžnik  $32 \times 120$  teda naozaj možno zakryť siedmimi štvorcami so stranou 30.

**Úloha 23.2.** [60-S-2] Daný je štvorec so stranou dĺžky 6 cm. Nájdite množinu stredov všetkých priecok štvorca, ktoré ho delia na dva štvoruholníky, z ktorých jeden má obsah  $12 \text{ cm}^2$ . (Prička štvorca je úsečka, ktorej krajné body ležia na stranách štvorca.)

**Riešenie\*.** Ak prička delí štvorec na dva štvoruholníky, musia ich koncové body ležať na protiľahlých stranách štvorca. V takom prípade sú oba štvoruholníky lichobežníkmi alebo pravouholníkmi (pre potreby tohto riešenia budeme pravouholník považovať za špeciálny lichobežník). Označme daný štvorec  $ABCD$ , koncové body pričky označme  $K$  a  $L$ . Predpokladajme, že bod  $K$  leží na strane  $AD$ , potom bod  $L$  leží na strane  $BC$ . Jeden zo štvoruholníkov  $KABL$  a  $KDCL$  má podľa zadania obsah  $12 \text{ cm}^2$ ; nech je to napr. lichobežník  $KABL$ .

Obsah lichobežníka vypočítame ako súčin jeho výšky s dĺžkou strednej pričky. Výška je v našom prípade rovná dĺžke strany štvorca čiže 6 cm. Jeho stredná prička má teda dĺžku 2 cm. Z toho vyplýva, že stred úsečky  $KL$  musí ležať na osi strany  $AB$  vo vzdialenosti 2 cm od stredu strany  $AB$  (obr. 2). Platí to aj naopak: Ak stred úsečky  $KL$  leží v opísanej polohe, bude štvoruholník  $KABL$  lichobežník s obsahom  $12 \text{ cm}^2$ .

Ak budeme namiesto lichobežníka  $KABL$  uvažovať lichobežník  $KDCL$ , vyjde stred pričky  $KL$  na osi úsečky  $CD$  vo vzdialenosti 2 cm od stredu strany  $CD$ .

Ak prička  $KL$  spája body na stranách  $AB$  a  $CD$ , dostaneme ďalšie dva možné body ležiace na spojnici stredov úsečiek  $AD$  a  $BC$ . Hľadanú množinu teda tvoria štyri body, ktoré ležia na pričkach



Obr. 2:



Obr. 3:

spájajúcich stredy protiľahlých strán štvorca vo vzdialenosti 1 cm od jeho stredu (obr. 3).

**Úloha 23.3.** [65-S-3] V kružnici so stredom  $S$  zostrojíme priemer  $AB$  a ľubovoľnú naň kolmú tetivu  $CD$ . Zdôvodnite, prečo je obvod trojuholníka  $ACD$  menší ako dvojnásobok obvodu trojuholníka  $SBC$ .

**Riešenie\*.** Želaný vzťah medzi obvodmi trojuholníkov  $ACD$  a  $SBC$  vyplynie, keď pre dĺžky ich strán objavíme nerovnosti

$$|AC| < 2|SB|, \quad |AD| < 2|SC| \quad \text{a} \quad |CD| < 2|BC|.$$

Prvé dve z nich sú dôsledkom toho, že tetivy  $AC$  a  $AD$  danej kružnice sú kratšie ako jej priemer  $AB$  (obr. 4), tretia nerovnosť zapísaná v tvare  $\frac{1}{2}|CD| < |BC|$  je nerovnosťou medzi dĺžkami odvesny a prepony dvoch zhodných pravouhlých trojuholníkov, na ktoré je trojuholník  $BCD$  rozdelený priamkou  $AB$ , ktorá je totiž (vďaka predpokladu  $AB \perp CD$ ) osou tetivy  $CD$ . Dodajme, že rovnako dobre možno využiť aj trojuholníkovú nerovnosť  $|CD| < |BC| + |BD| = 2|BC|$ . **Iné riešenie\*.** Označme  $\alpha$  veľkosti



Obr. 4:

vnútorných uhlov pri základni  $AC$  rovnoramenného trojuholníka  $SAC$ . Potom jeho vonkajší uhol pri vrchole  $S$ , čiže uhol  $CSB$ , má veľkosť  $2\alpha$ , ktorú má aj uhol  $CAD$ , pretože polpriamka  $AB$  je jeho osou (obr. 4). Rovnoramenné trojuholníky  $ACD$  a  $SCB$  sa tak zhodujú vo vnútorných uhloch pri svojich hlavných vrcholoch  $A$  a  $S$ , a sú teda podobné. Preto je pomer ich obvodov rovný pomeru dĺžok ich

ramien, a ten má naozaj hodnotu menšiu ako 2, lebo ramená trojuholníka  $ACD$  sú kratšie ako priemer danej kružnice, zatiaľ čo ramená trojuholníka  $SCB$  majú dĺžku jej polomeru.

**Úloha 23.4.** [59-S-2] Kružnice  $k(S; 6\text{ cm})$  a  $l(O; 4\text{ cm})$  majú vnútorný dotyk v bode  $B$ . Určte dĺžky strán trojuholníka  $ABC$ , pričom bod  $A$  je priesečník priamky  $OB$  s kružnicou  $k$  a bod  $C$  je priesečník kružnice  $k$  s dotýčnicou z bodu  $A$  ku kružnici  $l$ .

**Riešenie\*.** Bod dotyku kružnice  $l$  s dotýčnicou z bodu  $A$  označme  $D$  (obr. 5). Z vlastností dotýčnice ku kružnici vyplýva, že uhol  $ADO$  je pravý. Zároveň je pravý aj uhol  $ACB$  (Tálesova veta). Trojuholníky



Obr. 5:

$ABC$  a  $AOD$  sú tak podobné podľa vety  $uu$ , lebo sa zhodujú v uhloch  $ACB$ ,  $ADO$  a v spoločnom uhle pri vrchole  $A$ . Z uvedenej podobnosti vyplýva

$$\frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|AO|}. \quad (1)$$

Zo zadaných číselných hodnôt vychádza  $|OD| = |OB| = 4\text{ cm}$ ,  $|OS| = |SB| - |OB| = 2\text{ cm}$ ,  $|OA| = |OS| + |SA| = 8\text{ cm}$  a  $|AB| = 12\text{ cm}$ . Podľa 1 je teda  $|BC| : 4\text{ cm} = 12 : 8$  a odtiaľ  $|BC| = 6\text{ cm}$ . Z Pytagorovej vety pre trojuholník  $ABC$  nakoniec zistíme, že  $|AC| = \sqrt{12^2 - 6^2}\text{ cm} = 6\text{ cm}$ .

**Úloha 23.5.** [63-II-4] Daný je konvexný štvoruholník  $ABCD$  s bodom  $E$  vnútri strany  $AB$  tak, že platí  $|\angle ADE| = |\angle DEC| = |\angle ECB|$ . Obsahy trojuholníkov  $AED$  a  $CEB$  sú postupne  $18\text{ cm}^2$  a  $8\text{ cm}^2$ . Určte obsah trojuholníka  $ECD$ .

**Riešenie\*.** Hľadaný obsah trojuholníka  $ECD$  označme  $S$ . Uhol  $DEC$  je striedavý s uhlami  $ADE$  a  $ECB$ , odtiaľ  $AD \parallel EC$  a  $ED \parallel BC$  (obr. 6). Trojuholníky  $EDA$  a  $EDC$  majú spoločnú stranu  $ED$ , pomer ich obsahov je teda rovný pomeru príslúchajúcich výšok. Ak navyše postupne označíme  $P, Q$  a  $R$  kolmé priemety vrcholov  $A, B$  a  $C$  na priamku  $DE$  a označíme  $v = |AP|$ ,  $w = |BQ| = |CR|$ , dostaneme z podobných pravouhlých trojuholníkov  $AEP$  a  $BEQ$  úmeru

$$\frac{18}{S} = \frac{v}{w} = \frac{|AE|}{|EB|}.$$

Analogicky pre trojuholníky  $ECD$  a  $ECB$  zistíme, že

$$\frac{8}{S} = \frac{|EB|}{|AE|}.$$

(V obr. 6 sú príslúchajúce priemety iba naznačené, ale jedná sa o ten istý výpočet ako v predošlom odseku, len v ňom zameníme zodpovedajúce body  $A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D$  a príslúchajúce obsahy trojuholníkov



Obr. 6:

$AED$  a  $BEC$ .) Dokopy teda je  $S : 8 = 18 : S$  čiže  $S^2 = 144$ , takže trojuholník  $ECD$  má obsah  $S = 12 \text{ cm}^2$ .