Seminár 32

Téma

Geometria VIII – výpočtové úlohy

Ciele

Precvičiť komplexnejšie úlohy zahŕňajúce geometrické výpočty

Úlohy a riešenia

(DOPLNIŤ komentáre.)

Úloha 32.1. [B-59-II-1] Kružnica $l(T;s)$ prechádza stredom kružnice $k(S;2cm)$. Kružnica $m(U;t)$ sa zvonka dotýka kružníc k a l, pričom $US \perp ST$. Polomery s a t vyjadrené v centimetroch sú celé čísla. Určte ich.

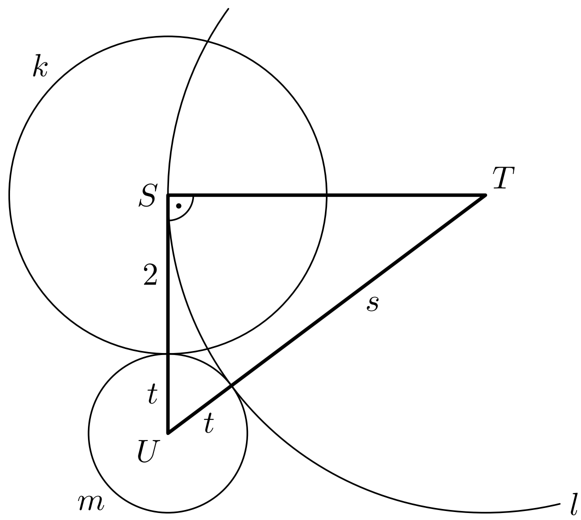
Riešenie*. Trojuholník UST je pravouhlý. Jeho prepona UT má dĺžku $s+t$, dĺžky odvesien sú $|US| = t+2$, $|ST| = s$ (obr. 1). Podľa Pytagorovej vety platí

$$(s+t)^2 = (t+2)^2 + s^2.$$

Úpravami postupne dostávame

$$\begin{aligned} s^2 + 2st + t^2 &= t^2 + 4t + 4 + s^2, \\ st &= 2t + 2, \\ t(s-2) &= 2. \end{aligned}$$

Čísla t a $s-2$ sú celé, preto t musí byť deliteľom čísla 2. Keďže t je kladné, sú len dve možnosti; ak $t = 1\,\text{cm}$, tak $s = 4\,\text{cm}$, a ak $t = 2\,\text{cm}$, tak $s = 3\,\text{cm}$.



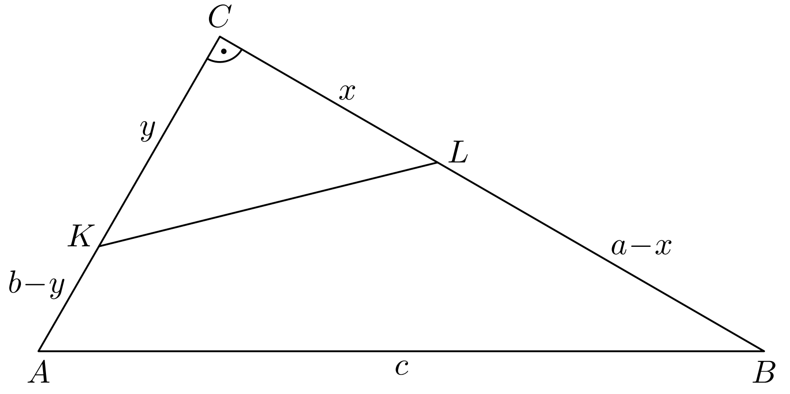
Obr. 1:

Úloha 32.2. [B-66-S-2] Na odvesnách AC a BC daného pravouhlého trojuholníka ABC určte postupne body K a L tak, aby súčet

$$|AK|^2 + |KL|^2 + |LB|^2$$

nadobúdal najmenšiu možnú hodnotu a vyjadrite ju pomocou $c = |AB|$.

Riešenie*. V súlade s obr. 2 označme $x = |CL|$, $y = |CK|$, potom $|BL| = a - x$, a $|AK| = b - y$, pričom a, b sú postupne dĺžky odvesien BC, AC. Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku



Obr. 2:

KLC dostaneme $|KL|^2 = x^2 + y^2$, takže skúmaný súčet môžeme upraviť nasledujúcim spôsobom:

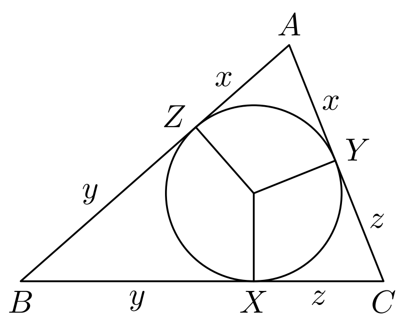
$$\begin{aligned}|AK|^2 + |KL|^2 + |LB|^2 &= (b-y)^2 + x^2 + y^2 + (a-x)^2 = \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = \\ &= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{a^2+b^2}{2} = \\ &= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{2}.\end{aligned}$$

Vďaka nezápornosti druhých mocnín z toho vidíme, že skúmaný výraz nadobúda svoju najmenšiu hodnotu, konkrétne $\frac{1}{2}c$, práve vtedy, keď $x = \frac{1}{2}a$ a súčasne $y = \frac{1}{2}b$, teda práve vtedy, keď body K, L sú postupne stredmi odvesien AC, BC daného pravouhlého trojuholníka ABC.

Záver. Najmenšia možná hodnota skúmaného súčtu je rovná $\frac{1}{1}c^2$. Túto hodnotu dostaneme práve vtedy, keď body K, L budú postupne stredmi odvesien AC, BC daného pravouhlého trojuholníka.

Úloha 32.3. [B-63-S-3] Na priamke a, na ktorej leží strana BC trojuholníka ABC, sú dané body dotyku všetkých troch jemu pripísaných kružníc (body B a C nie sú známe). Nájdite na tejto priamke bod dotyku kružnice vpísanej.

V danom trojuholníku ABC označme X, Y, Z body dotyku vpísanej kružnice s jeho stranami a $x = |AY| = |AZ|$, $y = |BX| = |BZ|$, $z = |CX| = |CY|$ zhodné úseky dotyčníc k vpísanej kružnici z jednotlivých vrcholov (obr. 3). Ak označíme
zvyčajným spôsobom a, b, c dĺžky jednotlivých strán, platí



Obr. 3:

$$a = y + z, \qquad b = z + x, \qquad c = x + y.$$

Sčítaním týchto troch rovníc dostaneme (pomocou s ako zvyčajne označujeme polovičný obvod trojuholníka)

$$2s = a + b + c = 2x + 2y + 2z,$$

takže nám vyjde

$$x + y + z = s, \quad x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c. \tag{1}$$

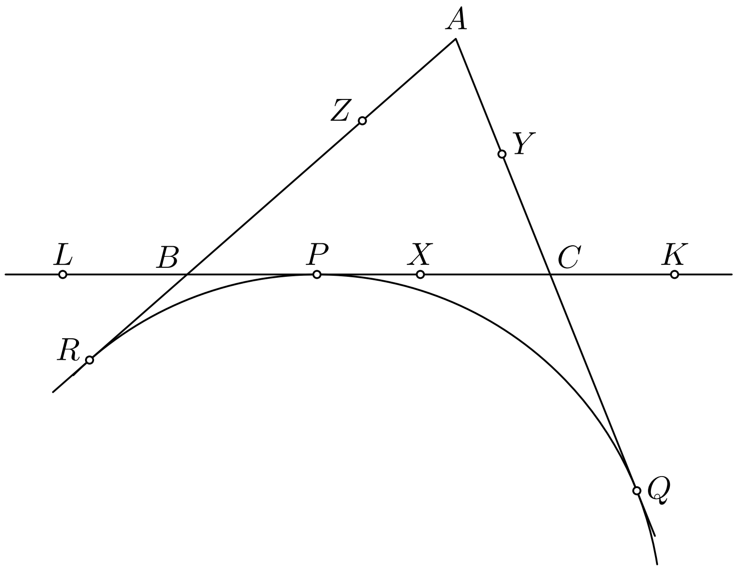
Pozrime sa teraz na pripísanú kružnicu trojuholníku ABC, ktorá sa dotýka jeho strany BC v bode P a polpriamok AB a AC v bodoch R a Q (obr. 4). Zo zhodnosti úsekov príslušných dotyčníc k tejto kružnici máme

$$|AR| = |AQ|, \quad |BR| = |BP|, \quad |CP| = |CQ|,$$

odkiaľ vychádza

$$\begin{aligned} 2|AR| = |AR| + |AQ| &= |AB| + |BR| + |AC| + |CQ| = \\ &= |AB| + |BP| + |AC| + |CP| = a + b + c = 2s, \end{aligned}$$

čiže $|AR| = |AQ| = s$. Z tejto rovnosti ale vyplýva, že $|BP| = |BR| = s - c$, čo je podľa 1 zároveň dĺžka z úsečky CX, teda $|BP| = |CX|$. To znamená, že body P a X sú súmerne združené podľa stredu úsečky BC. Analogicky by sme odvodili rovnosti $|BK| = s$ a $|CL| = s$ pre body dotyku K a L kružníc

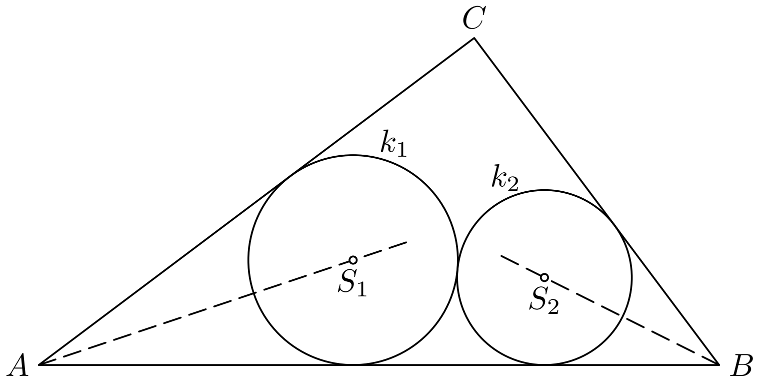


Obr. 4:

pripísaných stranám CA a AB (obr. 4) trojuholníka ABC s priamkou a. Z týchto posledných rovností však vidíme, že $|BL| = s - a = |CK|$, teda aj body K a L sú súmerne združené podľa stredu úsečky BC. Body K a L sú známe (z troch daných bodov na priamke sú to tie dva krajné), poznáme teda aj stred S strany BC (je to stred úsečky KL) a bod X nájdeme ako obraz tretieho daného bodu P v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky BC.

Úloha 32.4. [B-65-I-3] V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB a odvesnami dĺžok $|AC| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|BC| = 3\,\mathrm{cm}$ ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ tak, že k_1 sa dotýka strán AB a AC, zatiaľ čo k_2 sa dotýka strán AB a BC. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu polomeru r_2.

Riešenie*. Majme také dve kružnice, ktoré spĺňajú predpoklady úlohy (obr. 5). Zrejme stred S_1 leží na osi uhla BAC a stred S_2 na osi uhla ABC. Ďalej si uvedomme, že veľkosť polomeru r_1 kružnice k_1 je priamo úmerná dĺžke úsečky AS_1 a podobne veľkosť r_2 priamo úmerná dĺžke úsečky BS_2. Keď zväčšíme polomer jednej z kružníc, musí sa nutne polomer druhej kružnice zmenšiť.



Obr. 5:

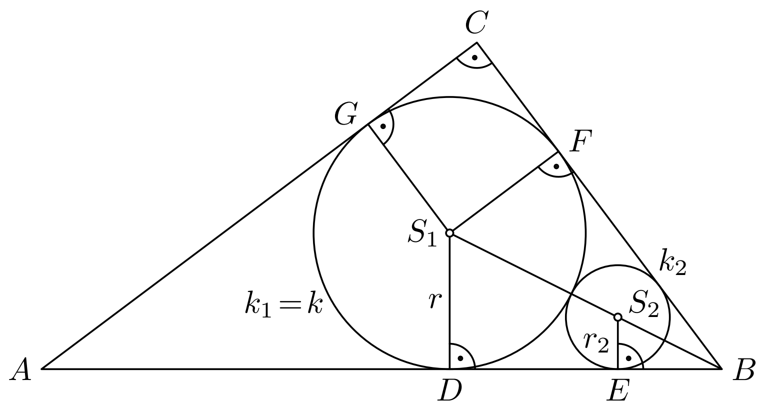
Kružnica k_2 nemôže mať polomer väčší ako najväčšia kružnica, ktorú možno do trojuholníka ABC vpísať. Takou kružnicou je zrejme kružnica k do trojuholníka ABC vpísaná. A naopak najmenší polomer bude mať kružnica k_2, ak zvolíme $k_1 = k$. (Že v oboch opísaných prípadoch pre $k_2 = k$ aj pre $k_1 = k$ existuje príslušná „vpísaná“ kružnica k_1, resp. k_2, je vcelku zrejmé.)

Stačí teda vypočítať polomer r kružnice k do trojuholníka ABC vpísanej a polomer kružnice k_2, ktorá sa dotýka kružnice k a strán AB a BC daného trojuholníka.

Polomer r vpísanej kružnice vypočítame napríklad zo vzorca $2S_{ABC} = ro$, pričom S_{ABC} označuje obsah trojuholníka ABC a o jeho obvod.Obsah daného pravouhlého trojuholníka ABC s preponou AB je pri zvyčajnom označení dĺžok strán rovný $\frac{1}{2}ab$. Prepona v trojuholníku ABC má (v centimetroch) podľa Pytagorovej vety veľkosť $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. Maximálny polomer kružnice k_2 je teda

$$r = \frac{2S_{ABC}}{o} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{3 \cdot 4}{3+4+5} = 1.$$

Pre výpočet polomeru r_2 kružnice k_2, ktorá sa dotýka kružnice k a strán AB a BC, označme D a E body, v ktorých sa kružnice k a k_2 dotýkajú strany AB, a F, G dotykové body kružnice k postupne so stranami BC a AC (obr. 6). Keďže daný trojuholník je pravouhlý, je S_1FCG štvorec so stranou



Obr. 6:

dĺžky $r = 1$, takže $|BF| = |BD| = 2$ a podľa Pytagorovej vety $|BS_1| = \sqrt{5}$. Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov BES_2 a BDS_1 potom vyplýva

$$\frac{r_2}{|BS_2|} = \frac{r}{|BS_1|}, \quad \text{čiže} \quad \frac{r_2}{\sqrt{5} - r_2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Po úprave tak pre hľadanú hodnotu neznámej r_2 dostaneme lineárnu rovnicu

$$r_2(\sqrt{5}+1) = \sqrt{5} - 1,$$

ktorú ešte zjednodušíme vynásobením $\sqrt{5}-1$. Zistíme tak, že najmenšia možná hodnota polomeru kružnice k_2 je rovná

$$r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

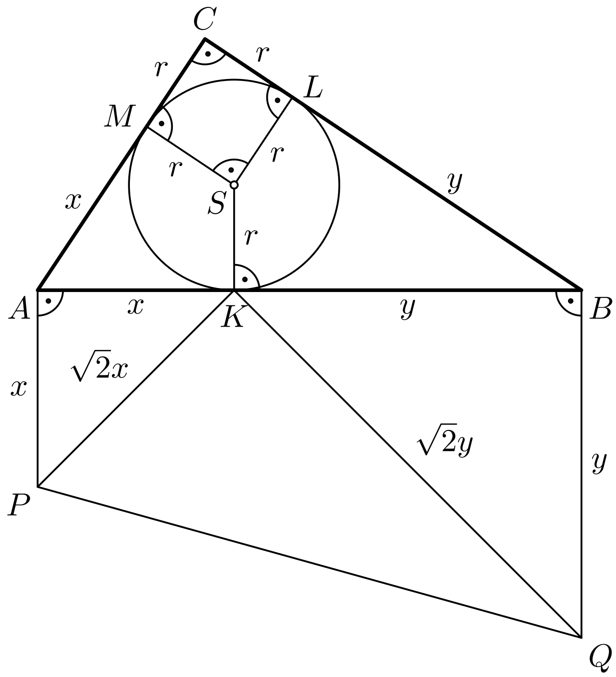
Úloha 32.5. [B-61-II-3] Pravouhlému trojuholníku ABC je vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka prepony AB v bode K. Úsečku AK otočíme o $90°$ do polohy AP a úsečku BK otočíme o $90°$ do polohy BQ tak, aby body P, Q ležali v polrovine opačnej k polrovine ABC.

a) Dokážte, že obsahy trojuholníkov ABC a PQK sú rovnaké.

b) Dokážte, že obvod trojuholníka ABC nie je väčší ako obvod trojuholníka PQK.Kedy nastane rovnosť obvodov?

Riešenie*. a) Označme S stred a r polomer kružnice vpísanej trojuholníku ABC a L, M body dotyku tejto kružnice postupne so stranami BC, CA (obr. 7). Ak označíme $|AK| = x$, $|BK| = y$, tak $|AP| = |AM| = x$, $|KP| = x\sqrt{2}$, $|BQ| = |BL| = y$, $|KQ| = y\sqrt{2}$. Keďže oba uhly AKP, BKQ majú veľkosť $45°$, je trojuholník PQK pravouhlý, takže jeho obsah je

$$S_{PQK} = \frac{x\sqrt{2}y\sqrt{2}}{2} = xy.$$



Obr. 7:

Štvoruholník $SLCM$ je štvorec so stranou dĺžky r a $|AM| = x$, $|BL| = y$. Obsah trojuholníka ABC je rovný súčtu obsahov trojuholníkov ABS, BCS a CAS, teda

$$S_{ABC} = \frac{(x+y)r + (y+r)r + (x+r)r}{2} = (x+y+r)r.$$

Obsah trojuholníka ABC je zároveň rovný

$$S_{ABC} = \frac{|AC|\cdot|BC|}{2} = \frac{(x+r)(y+r)}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{(x+y+r)r}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{S_{ABC}}{2}.$$

Odtiaľ dostávame $S_{ABC} = xy$, čiže $S_{ABC} = S_{PQK}$, čo sme mali dokázať.

b) V trojuholníku ABC sú dĺžky strán $a = y + r$, $b = x + r$, $c = x + y$. Obvod trojuholníka ABC je $a + b + |AB|$, obvod trojuholníka PQK je $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + |PQ|$.

Zrejme platí $|AB| \leq |PQ|$ ($|AB|$ je vzdialenosťou rovnobežiek AP, BQ, (obr. 7). Rovnosť nastane jedine v prípade $|AP| = |BQ|$, čiže $x = y$. Ešte dokážeme, že $a + b \leq x\sqrt{2} + y\sqrt{2}$, teda že $a + b \leq c\sqrt{2}$. Posledná nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou, ktorú dostaneme jej umocnením na druhú, pretože obe jej strany sú kladné. Dostaneme tak $a^2 + b^2 + 2ab \leq 2c^2$. Keďže v pravouhlom trojuholníku ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$, máme dokázať nerovnosť $2ab \leq a^2 + b^2$, ktorá je však ekvivalentná s nerovnosťou $0 \leq (a - b)^2$. Tá platí pre všetky reálne čísla a, b a rovnosť v nej nastane jedine pre $a = b$, t. j. $x = y$.

Celkovo vidíme, že obvod trojuholníka ABC je menší alebo rovný obsahu trojuholníka PQK a rovnosť nastane práve vtedy, keď je pravouhlý trojuholník ABC rovnoramenný.

Domáca práca

Keďže v nasledujúcom seminári je naplánované opakovanie, úlohou študentov bude si zbežne zopakovať, čomu sme sa posledných 9 mesiacov venovali. Zmyslom domácej práce nie je opätovné prepočítavanie všetkých príkladov, ale skôr získanie prehľadu a nadhľadu nad študovanými témami.