Seminár 6

Téma

Teória čísel I – úlohy o deliteľnosti

Ciele

Úlohy a riešenia

Úvodný komentár. Keďže ide o prvé stretnutie zo série seminárov zameraných na elementárnu teóriu čísel, je potrebné so študentmi zopakovať základné znalosti, ktoré by mali mať zo základnej školy:

- ▷ chápať rozdiel medzi číslom a cifrou,
- ▷ používať rozvinutý a skrátený zápis čísla v desiatkovej sústave,
- ▷ rozumieť pojmom prvočíslo a zložené číslo,
- ▷ vedieť určiť najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ daných dvoch celých čísel,
- ▷ poznať pravidlá deliteľnosti číslami 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

Študenti by mali byť schopní zdôvodniť všetky pravidlá deliteľnosti. Ak si ich nepamätajú, môže byť táto úloha vhodnou rozcvičkou pred riešením pripravených problémov.

Takisto je vhodné zjednotiť značenie, ktoré budeme používať. Fakt, že celé číslo a delí celé číslo b budeme zapisovať v tvare $a \mid b$. V tomto texte tiež označujeme (a, b) najväčší spoločný deliteľ čísel a a b a $[a, b]$ ich najmenší spoločný násobok.

Pripomenieme tiež, že ak pre prirodzené čísla a, b, c platí $a \mid (b \cdot c)$ a zároveň $(a, b) = 1$, musí nutne $a \mid c$. Toto tvrdenie budeme v priebehu seminárov využívať často, je preto dôležité, aby ho študenti vzali za svoje. Vyzbrojení všetkými spomenutými znalosťami sa môžeme pustiť do riešenia úloh.

Úloha 6.1. [[?], 4.2, problem 38, str. 115] Nech N je päťciferné kladné číslo také, že $N = \overline{a679b}$. Ak je N deliteľné 72, určte prvú cifru a a poslednú cifru b.

Úloha 6.2. [66-I-2-N1] Dokážte, že v nekonečnom rade čísel

$$1 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 4, 3 \cdot 4 \cdot 5, 4 \cdot 5 \cdot 6, \ldots,$$

je číslo prvé deliteľom všetkých čísel ďalších.

Úloha 6.3. [63-I-5-N1] Dokážte, že pre každé prirodzené n je číslo $n^3 + 2n$ deliteľné tromi.

Úloha 6.4. [63-I-5-N2] Dokážte, že pre každé nepárne číslo n je číslo $n^2 - 1$ deliteľné ôsmimi.

Úloha 6.5. [63-I-5-N3+63-I-5-N4, resp. C-55-I-1]

a) Dokážte, že pre všetky celé kladné čísla m je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný šesťdesiatimi.

b) Určte všetky kladné celé čísla m, pre ktoré je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 120.

Úloha 6.6. [59-II-1] Dokážte, že pre ľubovoľné celé čísla n a k väčšie ako 1 je číslo $n^{k+2} - n^k$ deliteľné dvanástimi.

Úloha 6.7. [58-S-3] Keď isté dve prirodzené čísla v rovnakom poradí sčítame, odčítame, vydelíme a vynásobíme a všetky štyri výsledky sčítame, dostaneme 2 009. Určte tieto dve čísla.

Úloha 6.8. [66-I-2-N2] Nájdite všetky celé $d > 1$, pri ktorých hodnoty výrazov $U(n) = n^3 + 17n^2 - 1$ a $V(n) = n^3 + 4n^2 + 12$ dávajú po delení číslom d rovnaké zvyšky, nech je celé číslo n zvolené akokoľvek.

Úloha 6.9. [66-I-2-D1] Pre ktoré prirodzené čísla n nie je výraz $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ násobkom ôsmich?

Úloha 6.10. [66-I-2] Nájdite najväčšie prirodzené číslo d, ktoré má tú vlastnosť, že pre ľubovoľné prirodzené číslo n je hodnota výrazu

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$$

deliteľná číslom d.

Domáca práca

Úloha 6.11. [66-S-2] Označme M množinu všetkých hodnôt výrazu $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$, pričom n je nepárne prirodzené číslo. Nájdite všetky možné zvyšky po delení číslom 48, ktoré dávajú prvky množiny M.

Úloha 6.12. [60-I-2] Dokážte, že výrazy $23x + y$, $19x + 3y$ sú deliteľné číslom 50 pre rovnaké dvojice prirodzených čísel x, y.

Doplňujúce zdroje a materiály

Výborným zdrojom úloh jednoduchých aj zložitejších je publikácia [**[?]**], najmä jej časti 4.1, 4.2 a 4.3, ktoré obsahujú mnoho jednoduchších aj zložitejších príkladov na dokazovanie deliteľnosti, spoločné delitele a násobky aj úlohy o ciferných zápisoch, preto môže byť vhodným doplnením banky úloh nielen pre tento, ale aj nasledujúce dva semináre.