Seminár 18: Algebraické výrazy a (ne)rovnice IV – zložitejšie nerovnosti

Úlohy a riešenia

Úloha 18.1. [61-II-1] **Riešenie*.** Aby sme mohli použiť vzorec $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, presuňme najskôr jeden z krajných členov ľavej strany, napríklad člen z^2, na pravú stranu:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &> (x-y+z)^2 - z^2, \\ (x-y)(x+y) &> (x-y+z-z)(x-y+z+z), \\ (x-y)(x+y) &> (x-y)(x-y+2z). \end{aligned}$$

Keďže spoločný činiteľ $x-y$ oboch strán poslednej nerovnosti je podľa predpokladu úlohy číslo záporné, budeme s dôkazom hotoví, keď ukážeme, že zvyšné činitele spĺňajú opačnú nerovnosť $x+y < x-y+2z$. Tá je však zrejme ekvivalentná s nerovnosťou $2y < 2z$, čiže $y < z$, ktorá podľa zadania úlohy naozaj platí.

Iné riešenie*. Podľa vzorca pre druhú mocninu trojčlena platí

$$(x-y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz.$$

Dosaďme to do pravej strany dokazovanej nerovnosti a urobme niekoľko ďalších ekvivalentných úprav:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + z^2 &> x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \\ 0 &> 2y^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \\ 0 &> 2y(y-x) + 2z(x-y), \\ 0 &> 2(y-x)(y-z). \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť už vyplýva z predpokladov úlohy, podľa ktorých je činiteľ $y-x$ kladný, zatiaľ čo činiteľ $y-z$ je záporný.

Komentár. Úloha sa dá vyriešiť jednoduchým použitím ekvivalentných úprav a diskusiou v závere, v ktorej je potrebné nezabudnúť na predpoklady z úvodu zadania. Ak študenti sami neprídu na dôkaz pomocou použitia vzorca $A^2 - B^2$, je vhodné im ho ukázať, keďže tak budeme demonštrovať viacero odlišných prístupov k riešeniu úlohy. Zároveň úloha nevyžaduje špeciálne vedomosti a je tak príjemným prepojením tohto a minulého seminára o nerovnostiach.

Úloha 18.2. [66-II-4] **Riešenie*.** Nerovnosť vynásobíme kladným výrazom abc a po roznásobení ju postupne (ekvivalentne) upravíme:

$$\begin{aligned} -a(bc+ac+ab) + b(bc+ac+ab) + c(bc+ac+ab) &\geq 3abc, \\ -abc - a^2c - a^2b + b^2c + abc + ab^2 + bc^2 + ac^2 + abc &\geq 3abc, \\ (b^2c - abc) + (bc^2 - abc) + (ac^2 - a^2c) + (ab^2 - a^2b) &\geq 0, \\ bc(b-a) + bc(c-a) + ac(c-a) + ab(b-a) &\geq 0. \end{aligned}$$

Vzhľadom na predpoklad $0 < a \leq b \leq c$ je výsledná, a teda aj pôvodná nerovnosť splnená.

Iné riešenie*. Dokazovanú nerovnosť postupne upravíme, pričom využijeme známu nerovnosť $b/c + c/b \geq 2$, ktorá je pre kladné čísla b, c ekvivalentná s nerovnosťou $(b-c)^2 \geq 0$:

$$(-a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1 + \left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{b^2 - a^2}{ab} + \frac{c^2 - a^2}{ac} + 2 \geq 3,$$

pretože zrejme platí aj $a^2 \leq b^2 \leq c^2$.

Iné riešenie*. Podľa predpokladov úlohy platia nerovnosti $-a + b + c \geq c$ a $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$. Obe nerovnosti (s kladnými stranami) medzi sebou vynásobíme a získame tak

$$(-a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq c\left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{2c}{b} \geq 3$$

pretože $c/b \geq 1$ podľa zadania.

Komentár. Ďalšia úloha, ktorú je možné rozlúsknuť spektrom rozličných prístupov. Ak študenti zvolia len cestu ekvivalentných úprav, ukážeme im aj riešenie, ktoré využíva nerovnosť $b/c + c/b \geq 2$ z predchádzajúceho seminára o nerovnostiach, rovnako ako riešenie pomocou vynásobenia nerovností medzi sebou. Takto dáme študentom príležitosť poznať aj iné prístupy, ktoré môžu byť užitočné pri ďalšom riešení úloh.

Úloha 18.3. [60-II-4] **Riešenie*.** Ukážeme, že ak je číslo $xy + yz + zx - 3$ záporné, je číslo $x + y + z - xyz$ kladné. Ak $xy + yz + zx < 3$, je aspoň jedno z čísel xy, yz, zx menšie ako 1, napr. xy. Potom $x + y + z - xyz = x + y + z(1 - xy)$ je zjavne súčet troch kladných čísel.

Iné riešenie*. Ukážeme, že ak je číslo $x + y + z - xyz$ záporné, tak číslo $xy + yz + zx - 3$ je kladné. Predpokladajme, že $x + y + z < xyz$. Tým skôr $x < xyz$. Po skrátení kladného čísla x dostaneme $yz > 1$. Podobne odvodíme odhady $xy > 1$ a $zx > 1$. Teraz ich stačí sčítať a máme $xy + yz + zx > 3$.

Iné riešenie*. Tvrdenie úlohy dokážeme sporom. Predpokladajme, že $x + y + z < xyz$ a zároveň $xy + yz + zx < 3$. Obe tieto nerovnosti sú symetrické, preto môžeme predpokladať, že čísla x, y, z sú označené tak, že z je najmenšie. Z druhej nerovnosti dostaneme, že $xy < 3$. Potom však $x + y + z < xyz < 3z$, teda $x + y < 2z$. To je však spor s tým, že číslo z je najmenšie.

Komentár. Úloha je zaujímavá tým, že na prvý pohľad nemusí vyzerať ako úloha o nerovnostiach a tiež študentom nemusí byť úplne jasné, z ktorého konca úlohu uchopiť. Môže to byť tiež dobrá príležitosť na ukážku toho, ako sa dá uplatniť dôkaz sporom.

Úloha 18.4. [61-I-4] **Riešenie*.** a) Z rovnosti $16 = ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$ vyplýva, že obidva súčty $a + c$ a $b + d$ nemôžu byť väčšie ako 4 súčasne, lebo v opačnom prípade by bol ich súčin väčší ako 16. Preto vždy aspoň jeden zo súčtov $a + c$ alebo $b + d$ má požadovanú vlastnosť. b) Využijeme všeobecnú rovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}(b - c)^2 + \frac{1}{2}(c - d)^2 + \frac{1}{2}(d - a)^2 + ab + bc + cd + da,$$

o platnosti ktorej sa ľahko presvedčíme úpravou pravej strany. Vzhľadom na nezápornosť druhých mocnín $(a - b)^2$, $(b - c)^2$, $(c - d)^2$ a $(d - a)^2$ dostávame pre ľavú stranu rovnosti odhad

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da = 16.$$

Je nájdené číslo 16 najmenšou hodnotou uvažovaných súčtov? Ináč povedané: nastane pre niektorú vyhovujúcu štvoricu v odvodenej nerovnosti rovnosť? Z nášho postupu je jasné, že musíme rozhodnúť, či pre niektorú z uvažovaných štvoríc platí $a - b = b - c = c - d = d - a = 0$, čiže $a = b = c = d$. Pre takú štvoricu má rovnosť $ab + bc + cd + da = 16$ tvar $4a^2 = 16$, čomu vyhovuje $a = \pm 2$. Pre vyhovujúce štvorice $a = b = c = d = 2$ a $a = b = c = d = -2$ má súčet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ naozaj hodnotu 16, preto ide o hľadané minimum.

Komentár. Ďalšia úloha, ktorá nepracuje s priamym dokazovaním nerovností, avšak využíva fakt, ktorý sme si osvojili už pri prvom nerovnostnom seminári, a to že druhá mocnina ľubovoľného reálneho čísla je vždy nezáporná. To nám potom pomohlo uskutočniť odhad hodnoty súčtu zo zadania úlohy. Na tomto mieste považujeme sa vhodné študentom zmieniť, že odhadovanie hodnôt je ďalším miestom, kde sa znalosti o nerovnostiach výborne uplatnia, ako ukáže aj nasledujúca úloha.

Úloha 18.5. [62-I-2] **Riešenie*.** Najskôr ukážeme, že prvé dve rovnosti zo zadania úlohy sú splnené len vtedy, keď platí $a = c$ a súčasne $b = d$. Naozaj, vďaka tomu, že zadané čísla sú kladné (a teda rôzne od nuly), môžeme uvedené rovnosti zapísať ako

$$a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = c\left(1 + \frac{d}{c}\right) \quad \text{a} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Podľa druhej rovnosti vidíme, že súčty v oboch zátvorkách z prvej rovnosti majú rovnakú kladnú hodnotu, takže sa musia rovnať prvé činitele oboch jej strán. Platí teda $a = c$, odkiaľ už vyplýva aj rovnosť $b = d$. Keď už vieme, že platí $a = c$ a $b = d$, vystačíme ďalej len s premennými a a b a nájdeme najväčšiu hodnotu zadaného súčtu

$$S = a + b + c + d = 2(a + b)$$

za jedinej podmienky, totiž že kladné čísla a, b spĺňajú rovnosť $a^2 + b^2 = 1$, ktorá je vyjadrením tretej zadanej rovnosti $ac + bd = 1$ (prvé dve sú vďaka rovnostiam $a = c$ a $b = d$ zrejmé). Všimnime si, že pre druhú mocninu (kladného) súčtu S platí

$$S^2 = 4(a + b)^2 = 4(a^2 + b^2) + 8ab = 4 \cdot 1 + 8ab = 4(1 + 2ab),$$

takže hodnota S bude najväčšia práve vtedy, keď bude najväčšia hodnota $2ab$. Zo zrejmej nerovnosti $(a - b)^2 \geq 0$ po roznásobení však dostaneme

$$2ab \leq a^2 + b^2 = 1,$$

pritom rovnosť $2ab = 1$ nastane práve vtedy, keď bude platiť $a = b$, čo pre kladné čísla a, b spolu s podmienkou $a^2 + b^2 = 1$ vedie k jedinej vyhovujúcej dvojici $a = b = 1/\sqrt{2}$. Najväčšia hodnota výrazu $2ab$ je teda 1, takže najväčšia hodnota výrazu S^2 je $4(1 + 1) = 8$, a teda najväčšia hodnota S je $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Dosiahne sa pre jedinú prípustnú štvoricu $a = b = c = d = 1/\sqrt{2}$.

Komentár. Druhá z dvojice úloh, v ktorej majú študenti nájsť najväčšiu/najmenšiu hodnotu. Podobne ako v predchádzajúcej úlohe nám k tomu pomôže nezápornosť druhej mocniny reálneho čísla, tu ju však musíme skombinovať ešte s ďalšími závermi z úlohy. Predpokladáme, že úloha pre študentov bude výzvou a pravdepodobne budú potrebovať niekoľkých miestach poradiť (napr. skúmanie druhej mocniny súčtu S je netriviálnym nápadom).

Úloha 18.6. [62-I-2-N1] **Riešenie*.** Zvoľme $a = \sqrt{u}$ a $b = \sqrt{v}$. Vyjdime zo zrejmej nerovnosti $(\sqrt{u} - \sqrt{v}) \geq 0$ a tú ďalej ekvivalentne upravujme:

$$\begin{aligned} (\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 &\geq 0, \\ u - 2\sqrt{uv} + v &\geq 0, \\ \frac{u + v}{2} &\geq \sqrt{uv}. \end{aligned}$$

Komentár. Vyššie dokázaná nerovnosť je špeciálnym prípadom tzv. AG-nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom ľubovoľných nezáporných čísel. Jej všeobecnejší tvar pre viac ako dve čísla však v tomto momente nepovažujeme za dôležité so študentami pokrývať, keďže AG-nerovnosť sa v úlohách kategórie C vyskytla v posledných rokoch veľmi zriedka (a aj vtedy bolo nerovnosti možné dokázať inými metódami). Je to však veľmi užitočný nástroj, ktorému by sme sa venovali v pokračovaní seminára vo vyšších ročníkoch.

Jeho využitie budeme demonštrovať v nasledujúcej úlohe.

Úloha 18.7. [62-I-2-N1] **Riešenie*.** Ľavú stranu L dokazovanej nerovnosti najskôr upravíme roznásobením a vzniknuté členy zoskupíme do súčtov dvojíc navzájom prevrátených výrazov:

$$L = \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) = \left(ab + \frac{a}{c} + 1 + \frac{1}{bc}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) =$$
$$= \left(abc + \frac{1}{abc}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right).$$

Pretože pre $u > 0$ je $u + \frac{1}{u} \geq 2$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $u = 1$, pre výraz L platí $L \geq 2 + 2 + 2 + 2 = 8$, čo sme mali dokázať. Rovnosť $L = 8$ nastane práve vtedy, keď platí

$$abc + \frac{1}{abc} = a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c} = 2$$

teda, ako sme už spomenuli, práve vtedy, keď $abc = a = b = c = 1$, t. j. práve vtedy, keď $a = b = c = 1$.

Poznámka. Dodajme, že upravená nerovnosť

$$abc + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \geq 8$$

vyplýva okamžite aj z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom ôsmich čísel

$$abc, \quad a, \quad b, \quad c, \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{abc},$$

lebo ich súčin (a teda aj geometrický priemer) je rovný číslu 1, takže ich aritmetický priemer má hodnotu aspoň 1.

Iné riešenie*. V dokazovanej nerovnosti sa najskôr zbavíme zlomkov, a to tak, že obe jej strany vynásobíme kladným číslom abc. Dostaneme tak ekvivalentnú nerovnosť

$$(ab + 1)(bc + 1)(ac + 1) = 8abc,$$

ktorá má po roznásobení ľavej strany tvar

$$a^2b^2c^2 + a^2bc + ab^2c + abc^2 + ab + ac + bc + 1 \geq 8abc.$$

Poslednú nerovnosť možno upraviť na tvar

$$(abc - 1)^2 + ab(c - 1)^2 + ac(b - 1)^2 + bc(a - 1)^2 \geq 0.$$

Táto nerovnosť už zrejme platí, lebo na ľavej strane máme súčet štyroch nezáporných výrazov. Pritom rovnosť nastane práve vtedy, keď má každý z týchto štyroch výrazov nulovú hodnotu, teda práve vtedy, keď

$$abc - 1 = c - 1 = b - 1 = a - 1 = 0,$$

čiže

$$a = b = c = 1.$$

Iné riešenie*. Danú nerovnosť možno dokázať aj bez roznásobenia jej ľavej strany. Stačí napísať tri AG-nerovnosti

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{b}\right) \geq \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{c}\right) \geq \sqrt{\frac{b}{c}}, \quad \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{\frac{c}{a}},$$

Ich vynásobením dostaneme

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{c}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{a}\right)\geq\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}=1,$$

odkiaľ po násobení ôsmimi obdržíme dokazovanú nerovnosť. Rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď nastane rovnosť v každej z troch použitých AG-nerovností, teda práve vtedy, keď sa čísla v každej „priemerovanej“ dvojici rovnajú:

$$a=\frac{1}{b},\qquad b=\frac{1}{c},\qquad c=\frac{1}{a}.$$

Z prvých dvoch rovností vyplýva $a=c$, po dosadení do tretej rovnosti potom vychádza $a=c=1$, teda aj $b=1$.

Komentár. Študenti možno úlohu vyriešia iným spôsobom než využitím AG-nerovnosti. V tom prípade však riešenie predvedieme, aby študenti získali predstavu, ako sa táto nerovnosť dá efektívne využívať.