

## Seminár 21

### Téma

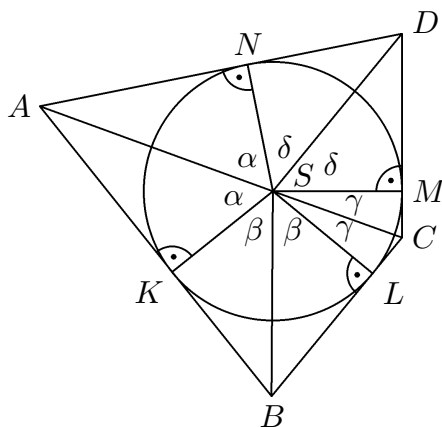
Geometria V – štvoruholníky

### Úlohy a riešenia

**Úloha 21.1.** [57-I-2] Štvoruholníku  $ABCD$  je vpísaná kružnica so stredom  $S$ . Určte rozdiel  $|\angle ASD| - |\angle CSD|$ , ak  $|\angle ASB| - |\angle BSC| = 40^\circ$

**Riešenie\*.** Päť kolmíc spustených zo stredu  $S$  vpísanej kružnice na strany  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  a  $DA$  označme postupne  $K$ ,  $L$ ,  $M$  a  $N$  (obr. 1). Pravouhlé trojuholníky  $ASK$  a  $ASN$  sú zhodné podľa vety *Ssu*. Majú totiž spoločnú preponu  $AS$  a zhodné odvesny  $SK$  a  $SL$ , ktorých dĺžka je rovná polomeru vpísanej kružnice. Zo zhodnosti týchto trojuholníkov vyplýva jednak známe tvrdenie o dĺžkach dotýčníc ( $|AK| = |AN|$ ), jednak zhodnosť uhlov  $ASK$  a  $ASN$ , ktorých spoločnú veľkosť označíme  $\alpha$ :

$$|\angle ASK| = |\angle ASN| = \alpha.$$



Obr. 1

Analogicky zistíme zhodnosť trojuholníkov  $SBK$  a  $SBL$ , ďalej  $SCL$  a  $SCM$ , a nakoniec  $SDM$  a  $SDN$ . Na základe uvedených zhodností môžeme položiť

$$|\angle BSK| = |\angle BSL| = \beta, \quad |\angle CSL| = |\angle CSM| = \gamma, \quad |\angle DSM| = |\angle DSN| = \delta.$$

Odtiaľ a z obr. 1 potom dostávame

$$\begin{aligned} |\angle ASD| - |\angle CSD| &= (\alpha + \delta) - (\gamma + \delta) = \alpha - \gamma = \\ &= (\alpha + \beta) - (\gamma + \beta) = |\angle ASB| - |\angle BSC| = 40^\circ. \end{aligned}$$

**Záver.**  $|\angle ASD| - |\angle CSD| = 40^\circ$ .

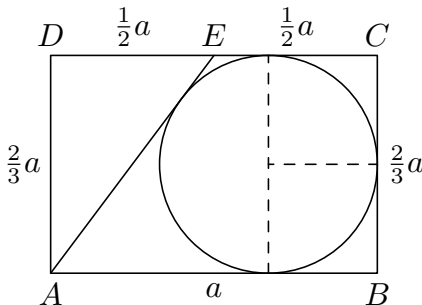
**Komentár.** Úloha je relatívne nezložitým úvodom do seminára a nadväzuje na posledné geometrické stretnutie, ktoré sa zaoberalo opísanými a vpísanými kružnicami trojuholníku. Pre úplnosť len dodajme, že štvoruholník, ktorému je možné vpísať kružnicu, sa nazýva *dotýčnicový*.

**Úloha 21.2.** [61-II-3] Nech  $E$  je stred strany  $CD$  rovnobežníka  $ABCD$ , v ktorom platí  $2|AB| = 3|BC|$ . Dokážte, že ak sa dá do štvoruholníka  $ABCE$  vpísať kružnica, dotýka sa táto kružnica strany  $BC$  v jej strede.

známa rovnost<sup>1</sup>

$$|AB| + |CE| = |BC| + |AE|.$$

V našej situácii pri označení  $a = |AB|$  platí  $|BC| = |AD| = \frac{2}{3}a$  a  $|CE| = |DE| = \frac{1}{2}a$  (obr. 2), odkiaľ po dosadení do uvedenej rovnosti zistíme, že  $|AE| = \frac{5}{6}a$ .



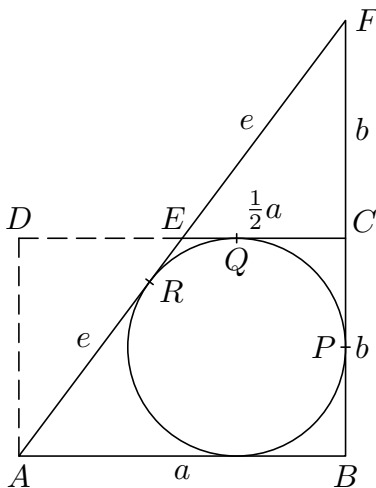
Obr. 2

Teraz si všimneme, že pre dĺžky strán trojuholníka  $ADE$  platí

$$|AD| : |DE| : |AE| = \frac{2}{3}a : \frac{1}{2}a : \frac{5}{6}a = 4 : 3 : 5,$$

takže podľa (obrátenej časti) Pytagorovej vety má trojuholník  $ADE$  pravý uhol pri vrchole  $D$ , a teda rovnobežník  $ABCD$  je obdĺžnik. Dotyčnica  $BC$  kružnice vpísanej štvoruholníku  $ABCE$  je teda kolmá na dve jej (navzájom rovnobežné) dotyčnice  $AB$  a  $CE$ . To už zrejme znamená, že bod dotyku dotyčnice  $BC$  je stredom úsečky  $BC$  (vyplýva to zo zistenej kolmosti vyznačeného priemeru kružnice na jej vyznačený polomer).

**Iné riešenie.** Ukážeme, že požadované tvrdenie možno dokázať aj bez toho, aby sme si všimli, že rovnobežník  $ABCD$  je v danej úlohe obdĺžnikom. Namiesto toho využijeme, že úsečka  $CE$  je stredná priereka trojuholníka  $ABF$ , pričom  $F$  je priesečník polpriamok  $BC$  a  $AE$  (obr. 3), lebo  $CE \parallel AB$  a  $|CE| = \frac{1}{2}|AB|$ . Označme preto  $a = |AB| = 2|CE|$ ,



Obkr. 3

$b = |BC| = |CF|$  a  $e = |AE| = |EF|$  (rovnosť  $2a = 3b$  použijeme až neskôr). Rovnako ako v prvom riešení využijeme rovnosť  $b + e = a + \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$ , ktorá platí pre dĺžky strán dotýčnicového štvoruholníka

<sup>1</sup>Rovnosť sa odvodí rozpísaním dĺžok strán na ich úseky vymedzené bodmi dotyku vpísanej kružnice a následným využitím toho, že každé dva z týchto úsekov, ktoré vychádzajú z rovnakého vrcholu štvoruholníka, sú zhodné.

$ABCE$ . Kružnica jemu vpísaná sa dotýka strán  $BC, CE, AE$  postupne v bodoch  $P, Q, R$  tak, že platia rovnosti

$$|CP| = |CQ|, \quad |EQ| = |ER| \quad \text{a tiež} \quad |FP| = |FR|.$$

Pre súčet zhodných dĺžok  $|FP|$  a  $|FR|$  teda platí

$$\begin{aligned} |FP| + |FR| &= (b + |CP|) + (e + |ER|) = (b + e) + (|CP| + |ER|) = \\ &= \frac{3}{2}a + (|CQ| + |EQ|) = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a = 2a, \end{aligned}$$

čo znamená, že  $|FP| = |FR| = a$ .

Teraz už riešenie úlohy ľahko dokončíme. Rovnosť  $|BP| = \frac{1}{2}b$ , ktorú máme v našej situácii dokázať, vyplýva z rovnosti

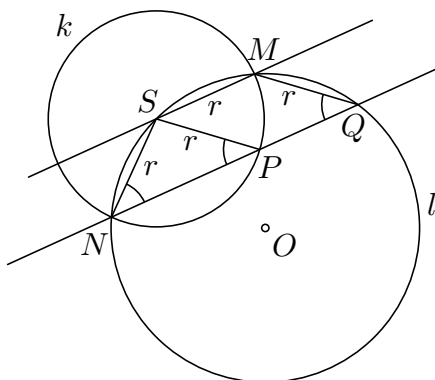
$$|BP| = |BF| - |FP| = 2b - a,$$

keď do nej dosadíme zadaný vzťah  $a = \frac{3}{2}b$ .

**Komentár.** Úloha nadväzuje na predchádzajúcu a využíva rovnosť súčtov dĺžok opačných strán dotýčnicového štvoruholníka. Ďalej študenti uplatnia buď Pytagorovu vetu alebo vedomosti o stredných pričkach v trojuholníku, čo úlohu činí zaujímavou z hľadiska pestrosti.

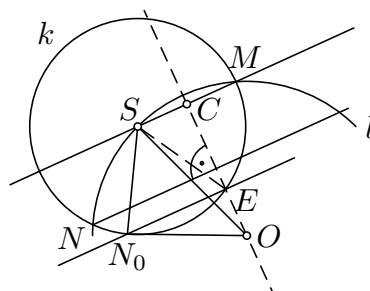
**Úloha 21.3.** [59-II-3] Daná je kružnica  $k$  so stredom  $S$ . Kružnica  $l$  má väčší polomer ako kružnica  $k$ , prechádza jej stredom a pretína ju v bodoch  $M$  a  $N$ . Priamka, ktorá prechádza bodom  $N$  a je rovnobežná s priamkou  $MS$ , vytína na kružniciach tetivy  $NP$  a  $NQ$ . Dokážte, že trojuholník  $MPQ$  je rovnoramenný.

**Riešenie\*.** Polomer kružnice  $k$  označme  $r$ . Označenie vrcholov  $P, Q$  v trojuholníku  $MPQ$  nie je dôležité, preto bez ujmy na všeobecnosti označme  $P$  ten z bodov priamky vedenej bodom  $N$  rovnobežne s priamkou  $MS$ , ktorý leží na kružnici  $k$ . Bod  $Q$  potom leží na kružnici  $l$  a štvoruholník  $NQMS$  je lichobežník vpísaný do kružnice  $l$  (obr. 4). Je teda rovnoramenný s ramenami  $MQ$  a  $NS$  dĺžky  $r$ . Navyše aj úsečky  $SP$  a  $SM$  majú dĺžku  $r$ . Z rovnoramenného trojuholníka  $NPS$  a rovnoramenného lichobežníka  $NQMS$  vyplýva rovnosť uhlov  $|\angle SPN| = |\angle SNP| = |\angle MQP|$ . Priemka  $PQ$  teda pretína priamky  $SP$  a  $MQ$  pod rovnako veľkými uhlami, a preto (podľa vety o súhlasných uhloch) sú priamky  $SP$  a  $MQ$  rovnobežné. Štvoruholník  $PQMS$  je teda rovnobežník, a keďže  $|SM| = |SP| = r$ , je to dokonca kosoštvorec. Odtiaľ je už zrejmé, že trojuholník  $MPQ$  je rovnoramenný s ramenami  $PQ$  a  $MQ$  dĺžky  $r$ .



Obr. 4

**Poznámka.** Existencia tetív  $NP$  a  $NQ$  v zadaní je zaručená vďaka predpokladu, že kružnica  $l$  má väčší polomer ako kružnica  $k$ . Ak označíme  $C$  stred úsečky  $SM$  a  $E$  ten priesečník kružnice  $k$  s osou úsečky  $SM$ , ktorý leží v polrovine  $SMO$ , bude stred  $O$  kružnice  $l$  ležať na polpriamke  $CE$  až za bodom  $E$  (obr. 5). Ďalší priesečník  $N$  oboch



Obr. 5

kružníc preto padne do pásu medzi rovnobežkami  $SM$  a  $N_0E$  v polrovine  $OCS$ , pričom  $N_0$  je štvrtý vrchol kosoštvorca s vrcholmi  $S, M, E$ . Na to stačí ukázať, že kružnica  $l$  pretne polpriamku  $EN_0$  až za bodom  $N_0$ , teda že jej polomer  $OS$  je väčší ako dĺžka úsečky  $ON_0$ . Toto porovnanie dvoch strán trojuholníka  $OSN_0$  jednoducho vyplýva z porovnania jeho vnútorných uhlov: uhol pri vrchole  $N_0$  je najväčší, lebo oba uhly pri protiľahlej strane  $OS$  sú menšie ako  $60^\circ$  (trojuholník  $ESN_0$  je rovnostranný). Ľahko nahliadneme, že každá z rovnobežiek uvedeného pásu pretína každú z oboch kružníc v dvoch bodoch (vždy súmerne združených podľa príslušnej osi kolmej na  $SM$ ). Tým je dokázaná nielen existencia oboch tetív  $NP$  a  $NQ$ , ale aj to, že ich krajné body  $P$  a  $Q$  ležia na rovnakej strane od bodu  $N$  (ako na obr. 4), lebo oba body zrejme ležia v polrovine opačnej k spomenutej polrovine  $OCS$ .

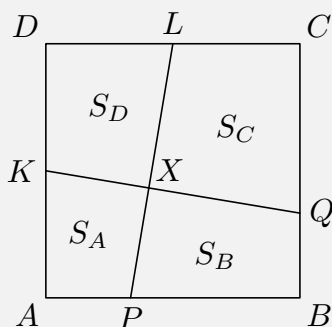
**Komentár.** Diskusia v poznámke je len zaujímavým doplnkom úlohy, existencia tetív je totiž predpokladom zadania a nie je nutné ju dokazovať. Úloha využíva úvahu, že lichobežník, ktorého základne sú rovnobežné tetivy danej kružnice, je rovnoramenný, ktorá môže byť pre študentov zaujímavým uvedením.

**Úloha 21.4.** [60-I-3] Máme štvorec  $ABCD$  so stranou dĺžky 1 cm. Body  $K$  a  $L$  sú stredy strán  $DA$  a  $DC$ . Bod  $P$  leží na strane  $AB$  tak, že  $|BP| = 2|AP|$ . Bod  $Q$  leží na strane  $BC$  tak, že  $|CQ| = 2|BQ|$ . Úsečky  $KQ$  a  $PL$  sa pretínajú v bode  $X$ . Obsahy štvoruholníkov  $APXK$ ,  $BQXP$ ,  $QCLX$  a  $LDKX$  označíme postupne  $S_A, S_B, S_C, S_D$  (obr. 6).

a) Dokážte, že  $S_B = S_D$ .

b) Vypočítajte rozdiel  $S_C - S_A$ .

c) Vysvetlite, prečo neplatí  $S_A + S_C = S_B + S_D$ .



Obr. 6

**Riešenie\*.** a) Štvoruholníky  $ABQK$  a  $DAPL$  sú zhodné (jeden z nich je obrazom druhého v otočení o  $90^\circ$  so stredom v strede štvorca  $ABCD$ ). Preto majú aj rovnaký obsah, čiže  $S_A + S_B = S_A + S_D$ . Z toho hneď dostaneme  $S_B = S_D$ .

b) Ľahko sa nám podarí vypočítať obsah pravouhlého lichobežníka  $ABQK$ , lebo poznáme dĺžky základní aj výšku. Dostaneme

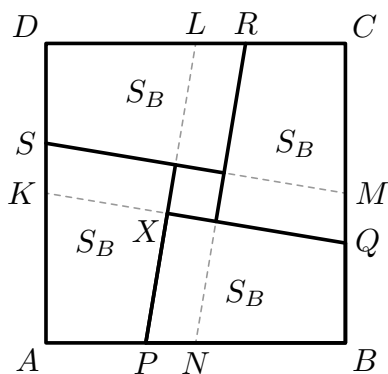
$$S_A + S_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \text{ cm}^2.$$

Podobne výpočtom obsahu lichobežníka  $PBCL$  dostaneme

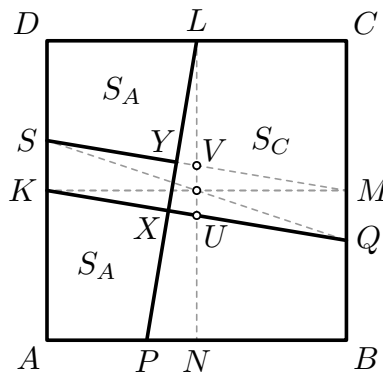
$$S_C + S_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12} \text{ cm}^2.$$

Odčítaním prvej získanej rovnosti od druhej dostávame  $S_C - S_A = \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6} \text{ cm}^2$ .

c) Nerovnosť medzi obsahmi  $S_A + S_C$  a  $S_B + S_D$  (ktorých priame výpočty nie sú v silách žiakov 1. ročníka) môžeme zdôvodniť nasledovným spôsobom: Súčet týchto dvoch obsahov je  $1 \text{ cm}^2$ , takže sa nerovnajú práve vtedy, keď je jeden z nich menší ako  $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$ . Bude to obsah  $S_B + S_D$  (rovný  $2S_B$ , ako už vieme), keď ukážeme, že obsah  $S_B$  je menší ako  $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$ . Urobíme to tak, že do celého štvorca  $ABCD$  umiestnime bez prekrytia štyri kópie štvoruholníka  $PBQX$ . Ako ich umiestnime, vidíme na obr. 7, pričom  $M, N$  sú stredy strán  $BC, AB$  a  $R, S$  body, ktoré delia strany  $CD, DA$  v pomere  $1 : 2$ .



Obr. 7



Obr. 8

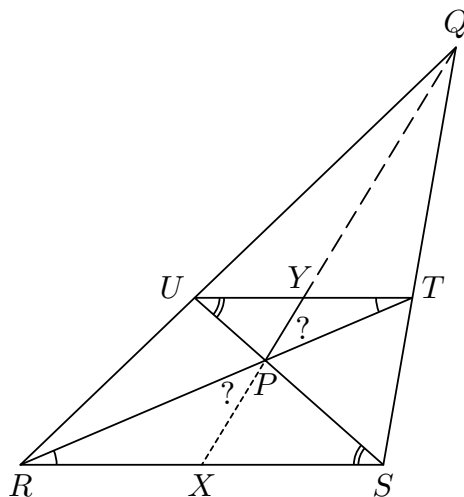
**Iné riešenie** časti c). Tentoraz namiesto nerovnosti  $S_B + S_D < \frac{1}{2} \text{ cm}^2$  dokážeme ekvivalentnú nerovnosť  $S_A + S_C > \frac{1}{2} \text{ cm}^2$ . Preto sa pokúsime „premiestniť“ štvoruholník  $APXK$  tak, aby ležal pri štvoruholníku  $XQCL$  a aby sa ich obsahy dali geometricky sčítať. Uhly  $AKQ$  a  $DLP$  sú zhodné a  $|AK| = |DL|$ , preto môžeme štvoruholník  $APXK$  premiestniť vo štvorci  $ABCD$  do jeho „rohu“  $D$  tak, že k štvoruholníku  $XQCL$  prilahne pozdĺž strany  $LX$  svojou stranou  $LY$ , pričom  $Y$  je priesečník úsečiek  $SM$  a  $PL$  z pôvodného riešenia (obr. 8). Obsah  $S_A + S_C$  je potom obsahom šesťuholníka  $DSYXQC$ . Prečo je väčší ako  $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$ , môžeme zdôvodniť napríklad takto:

Úsečka spájajúca bod  $L$  so stredom  $U$  úsečky  $KQ$  pretne úsečku  $SM$  v jej strede  $V$ . Štvoruholník  $UQMV$  má obsah rovný polovici obsahu rovnobežníka  $KQMS$ , teda rovný obsahu trojuholníka  $KMS$ . Preto má šesťuholník  $DSYXQC$  obsah rovný obsahu štvoruholníka  $KMCD$ , t.j. polovici obsahu štvorca  $ABCD$ . Obsah  $S_A + S_C$  je ešte väčší, a to o obsah štvoruholníka  $XUVY$ . Teda naozaj  $S_A + S_C > \frac{1}{2} \text{ cm}^2$ .

**Komentár.** Prvé dve časti sú príjemným úvahovým rozohriatím k časti tretej, ktorá vyžaduje trochu viac invencie. Demonštruje však zaujímavý prístup k riešeniu a porovnávanie obsahov obrazcov namiesto priameho výpočtu obsahov.

**Úloha 21.5.** [66-I-5-prvá časť] Ak označíme  $X$  a  $Y$  postupne stredy základní  $RS$  a  $TU$  všeobecného lichobežníka  $RSTU$ , tak na úsečke  $XY$  leží priesečník  $P$  uhlopriečok  $RT$  a  $SU$ , a to tak, že  $|PX| : |PY| = |RS| : |TU|$ . Na priamke  $XY$  leží tiež priesečník  $Q$  predĺžených ramien  $RU$  a  $ST$ , a to tak, že  $|QX| : |QY| = |RS| : |TU|$  (obr. 9). Dokážte.

**Riešenie\*.**



Obr. 9

Napriek tomu, že sa podľa obrázka zdá, že bod  $P$  na úsečke  $XY$  naozaj leží, musíme tento poznatok dokázať, teda *odvodiť* argumentáciou nezávislou na presnosti nášho rysovania. Na to určite stačí preukázať, že obe úsečky  $PX$ ,  $PY$  zvierajú s priamkou  $RT$  zhodné uhly (na obrázku vyznačené otáznikmi). Všimnime si, že tieto úsečky sú ťažnicami trojuholníkov  $RSP$  a  $TUP$ , ktoré sa zhodujú vo vnútorných uhloch (vyznačených oblúčikmi) pri rovnobežných stranách  $RS$  a  $TU$ , takže ide o trojuholníky podobné, a to s koeficientom  $k = |TU|/|RS|$ . S rovnakým koeficientom platí aj podobnosť „polovíc“ týchto trojuholníkov vyfatých ich ťažnicami, presnejšie podobnosť  $RXP \sim TYP$ . Z nej už želaná zhodnosť uhlov  $RPX$  a  $TPY$  aj želaná rovnosť  $|PY| = k|PX|$  (vďaka rovnakému koeficientu) vyplýva. Všetko o bode  $P$  je tak dokázané; podobne sa overia aj obe vlastnosti bodu  $Q$  - ukáže sa, že úsečky  $QX$  a  $QY$  zvierajú ten istý uhol s priamkou  $RQ$  a ich dĺžky sú zviazané rovnosťou  $|QY| = k|QX|$ , a to vďaka tomu, že  $QX$  a  $QY$  sú ťažnice v dvoch navzájom podobných trojuholníkoch  $RSQ$  a  $UTQ$ .

**Komentár.** Úloha je prípravou na riešenie záverečného problému tohto seminára a pripomína študentom metódu dôkazu toho, že bod  $P$  leží na priamke úsečke  $XY$ .

**Úloha 21.6.** [66-I-5] V danom trojuholníku  $ABC$  zvolíme vnútri strany  $AC$  body  $K$ ,  $M$  a vnútri strany  $BC$  body  $L$ ,  $N$  tak, že

$$|AK| = |KM| = |MC|, |BL| = |LN| = |NC|.$$

Ďalej označme  $E$  priesečník uhlopriečok lichobežníka  $ABLK$ ,  $F$  priesečník uhlopriečok lichobežníka  $KLNM$  a  $G$  priesečník uhlopriečok lichobežníka  $ABNM$ . Dokážte, že body  $E$ ,  $F$  a  $G$  ležia na ťažnici trojuholníka  $ABC$  z vrcholu  $C$  a určte pomer  $|GF| : |EF|$ .

**Riešenie\*.** Dokázané vlastnosti všeobecného lichobežníka z predchádzajúcej úlohy nám umožnia celkom ľahko vyriešiť zadanú úlohu. Situácia je znázornená na obr. 10. Okrem pomenovaných bodov sme tam ešte označili  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  stredy úsečiek  $AB$ ,  $KL$  a  $MN$ . Keďže trojuholníky  $ABC$ ,  $KLC$



Obr. 10

a  $MNC$  sú navzájom podobné (podľa vety *sus*), platí  $|AB| : |KL| : |MN| = |AC| : |KC| : |MC| = 3 : 2 : 1$ . Podľa zhodných vnútorných uhlov spomenutých troch trojuholníkov platí tiež  $AB \parallel KL$ ,  $KL \parallel MN$ . Štvoruholníky  $ABLK$ ,  $KLNM$  a  $ABNM$  tak sú naozaj lichobežníky (ako je prezradené v zadaní) so základňami  $AB$ ,  $KL$  a  $MN$ , ktorých dĺžky sú v už odvodenom pomere  $3 : 2 : 1$ . Navyše predĺžené ramená všetkých troch lichobežníkov sa pretínajú v bode  $C$ , ktorým preto podľa dokázanej vlastnosti prechádzajú priamky  $S_1S_2$ ,  $S_2S_3$  (a  $S_1S_3$ ), takže ide o jednu priamku, na ktorej body  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  a  $C$  ležia v uvedenom poradí tak, že  $|S_1C| : |S_2C| : |S_3C| = 3 : 2 : 1$ . Z toho vyplýva  $|S_1S_2| = |S_2S_3| (= |S_3C|)$ , takže bod  $S_2$  je stredom úsečky  $S_1S_3$ . Na nej (opäť podľa dokázaného tvrdenia) ležia aj body  $E$ ,  $F$  a  $G$ , pričom pre bod  $E$  medzi bodmi  $S_1$ ,  $S_2$  platí  $|ES_1| : |ES_2| = 3 : 2$ , pre bod  $F$  medzi bodmi  $S_2$ ,  $S_3$  platí  $|FS_2| : |FS_3| = 2 : 1$  a napokon pre bod  $G$  medzi bodmi  $S_1$ ,  $S_3$  platí  $|GS_1| : |GS_3| = 3 : 1$ . Tieto delenia troch úsečiek sme znázornili na obr. 11, kam sme zapísali aj dĺžky vzniknutých úsekov pri voľbe jednotky  $1 = |S_1S_2| = |S_2S_3|$  (pri ktorej  $|S_1S_3| = 2$ ).



Obr. 11

Keďže

$$|S_1F| = |S_1S_2| + |S_2F| = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} > \frac{3}{2} = |S_1G|,$$

platí  $|GF| = |S_1F| - |S_1G| = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$ , čo spolu s rovnosťou  $|EF| = |ES_2| + |S_2F| = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}$  už vedie k určeniu hľadaného pomeru

$$|GF| : |EF| = \frac{1}{6} : \frac{16}{15} = 5 : 32.$$

**Komentár.** Úloha je zložitejšia ako predchádzajúca, ale študenti zoznámení s prípravnou úlohou, zbehlí vo využívaní podobných trojuholníkov a precízni, aby sa nestratili v záverečnom pomerovaní, by si s úlohou poradiť mali.