

## Seminár 9

### Téma

Geometria I – základné poznatky

### Ciele

Zopakovať a upevniť základné poznatky z planimetrie, ktoré by študenti mali mať zo základnej školy. Venovať sa vlastnostiam uhlov, trojuholníkov, štvoruholníkov a kružníc. Niektoré z poznatkov odvodiť.

### Úlohy a riešenia

**Úvodný komentár.** Keďže planimetria nie je súčasťou osnov 1. ročníka gymnázií, je potrebné poznatky žiakov z tejto oblasti o to starostlivejšie zopakovať. Geometrické úlohy majú veľmi často najhoršiu úspešnosť v krajských kolách MO, čo môže mať viacero dôvodov. Nepopierateľne však študentom tréning pomôže, preto je geometrii v priebehu roka venovaných 6 + 1 seminárov.

Zo zmienených dôvodov má preto tento seminár odlišnú štruktúru ako predchádzajúce – viac ako riešeniu úloh z olympiád sa venujeme opakovaniu základných vlastností uhlov, trojuholníkov, štvoruholníkov a kružníc, ktorých znalosti budú nenahraditeľné v ďalších piatich geometrických seminároch. Spolu so študentmi tak vytvoríme základnú výbavu, ktorá im pomôže v boji s geometrickými záťažnosťami.

Študenti by mali mať nasledujúce znalosti (voľne spracované podľa [XX]TODO):

#### ▷ uhly

- chápať pojmy vrcholové, vedľajšie, súhlasné a striedavé uhly, vedieť nájsť dvojice takých uhlov a používať ich pri riešení úloh,

#### ▷ trojuholníky

- poznať základné vlastnosti strán a vnútorných uhlov trojuholníka: trojuholníková nerovnosť, súčet vnútorných uhlov,
- vedieť popísať rozdiely medzi ostrouhlým, pravouhlým, tupouhlým, všeobecným, rovnoramenným a rovnostranným trojuholníkom,
- chápať pojmy os uhla, os strany, výška, ťažnica, stredná prieka, kružnica vpísaná a opísaná trojuholníku a poznať ich vlastnosti,
- poznať a vedieť používať vzorec na výpočet obsahu trojuholníka,
- poznať a vhodne používať vety o zhodnosti (*sss*, *sus*, *usu*, *Ssu*) a podobnosti (*sss*, *sus*, *uu*, *Ssu*) trojuholníkov,
- poznať a používať Pytagorovu vetu pre pravouhlý trojuholník,

#### ▷ štvoruholníky

- vedieť popísať všeobecný štvoruholník a jeho špecifické prípady: rovnobežník, štvorec, obdĺžnik, kosoštvorec, kosodĺžnik, lichobežník,
- poznať základné vzorce pre výpočet obsahu rôznych rovnobežníkov a lichobežníkov,
- vedieť, že uhlopriečky v pravouholníku a rovnobežníku sa polia a vedieť tento fakt využiť pri riešení úloh,

#### ▷ kružnice a kruhy

- chápať pojmy kružnica, kruh, kružnicový oblúk, dotýčnica, sečnica, tetiva, stredový a obvodový uhol,
- poznať a vedieť používať Talesovu kružnicu,

#### ▷ riešenie konštrukčných úloh

- náčrt, rozbor, popis konštrukcie, diskusia o počte riešení.

**Komentár.** Skôr než frontálny výklad je vhodné nechať skladať mozaiku vedomostí študentov. Ak pracujeme s malou skupinou, môžeme o vyššie spomenutých bodoch diskutovať všetci spoločne. Ak seminár navštevuje väčšie množstvo záujemcov o matematiku, rozdelíme študentov na menšie skupiny, pričom každá spracuje poznatky o zadanej neprázdnej podmnožine vyššie spomenutých oblastí. Tie si potom študenti navzájom odprezentujú, vedúci seminára nepresnosti vhodnými otázkami koriguje.

**Komentár.** V druhej polovici seminára niektoré zo základných tvrdení, ktoré budeme v priebehu ďalších stretnutí využívať, dokážeme.

## Domáca práca

**Úloha 9.1.** [58-I-2-D1] Nech  $k$  je kružnica opísaná pravouhlému trojuholníku  $ABC$  s preponou  $AB$  dĺžky  $c$ . Označme  $S$  stred strany  $AB$  a  $D$  a  $E$  priesečníky osí strán  $BC$  a  $AC$  s jedným oblúkom  $AB$  kružnice  $k$ . Vyjadrite obsah trojuholníka  $DSE$  pomocou dĺžky prepony  $c$ .

**Riešenie.** Trojuholník  $DSE$  je pravouhlý rovnoramenný s pravým uhlom pri vrchole  $S$ , pretože odvesny  $DS$  a  $ES$  ležia na osiach navzájom kolmých strán. Odvesny majú dĺžku  $\frac{c}{2}$ , pretože sú to polomery kružnice opísanej trojuholníku  $ABC$ . Obsah trojuholníka  $DSE$  je  $\frac{1}{2} \cdot |DS| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{8}$ .

**Úloha 9.2.** [58-I-2-D2] Vyjadrite obsah rovnoramenného lichobežníka  $ABCD$  so základňami  $AB$  a  $CD$  pomocou dĺžok  $a$ ,  $c$  jeho základní a dĺžky  $b$  jeho ramien.

**Riešenie.** Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že  $a > b$ . Najprv vyjadríme výšku  $v$  pomocou dĺžok základní a odvesien. Nech je  $P$  päta výšky z bodu  $D$  na stranu  $AB$ . Potom  $|AP| = (a - c)/2$ . Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku  $APD$  máme

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + v^2 = b^2,$$

odkiaľ  $v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - (a-c)^2}$  a preto pre obsah lichobežníka dostávame

$$S_{ABCD} = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{1}{4}(a+c)\sqrt{4b^2 - (a-c)^2}.$$

## Doplňujúce zdroje a materiály

Ak študenti budú stále neistiť v používaní základných geometrických poznatkov, je možné ich odkázať na základňoškolské učebnice geometrie, v ktorých nájdu aj jednoduchšie príklady na precvičenie, príp. vhodným doplnkom geometrického vzdelania je aj publikácia [?].