

Seminár 21

Téma

Geometria V – štvoruholníky

Ciele

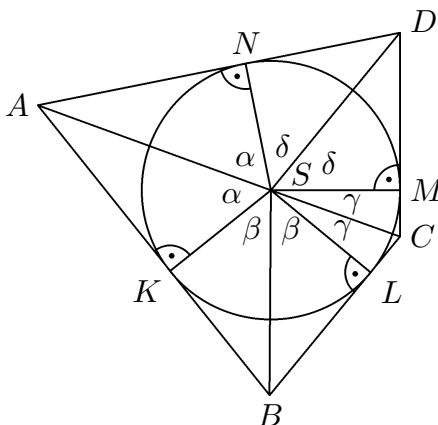
Uplatniť znalosti z predchádzajúcich geometrických seminárov pri riešení úloh o štvoruholníkoch.

Úlohy a riešenia

Úloha 21.1. [57-I-2] Štvoruholníku $ABCD$ je vpísaná kružnica so stredom S . Určte rozdiel $|\angle ASD| - |\angle CSD|$, ak $|\angle ASB| - |\angle BSC| = 40^\circ$

Riešenie*. Päť kolmíc spustených zo stredu S vpísanej kružnice na strany AB , BC , CD a DA označme postupne K , L , M a N (obr. 1). Pravouhlé trojuholníky ASK a ASN sú zhodné podľa vety *Ssu*. Majú totiž spoločnú preponu AS a zhodné odvesny SK a SL , ktorých dĺžka je rovná polomeru vpísanej kružnice. Zo zhodnosti týchto trojuholníkov vyplýva jednak známe tvrdenie o dĺžkach dotyčníc ($|AK| = |AN|$), jednak zhodnosť uhlov ASK a ASN , ktorých spoločnú veľkosť označíme α :

$$|\angle ASK| = |\angle ASN| = \alpha.$$



Obr. 1

Analogicky zistíme zhodnosť trojuholníkov SBK a SBL , ďalej SCL a SCM , a nakoniec SDM a SDN . Na základe uvedených zhodností môžeme položiť

$$|\angle BSK| = |\angle BSL| = \beta, \quad |\angle CSL| = |\angle CSM| = \gamma, \quad |\angle DSM| = |\angle DSN| = \delta.$$

Odtiaľ a z obr. 1 potom dostávame

$$\begin{aligned} |\angle ASD| - |\angle CSD| &= (\alpha + \delta) - (\gamma + \delta) = \alpha - \gamma = \\ &= (\alpha + \beta) - (\gamma + \beta) = |\angle ASB| - |\angle BSC| = 40^\circ. \end{aligned}$$

Záver. $|\angle ASD| - |\angle CSD| = 40^\circ$.

Komentár. Úloha je relatívne nezložitým úvodom do seminára a nadväzuje na posledné geometrické stretnutie, ktoré sa zaoberalo opísanými a vpísanými kružnicami trojuholníku. Pre úplnosť len dodajme, že štvoruholník, ktorému je možné vpísať kružnicu, sa nazýva *dotyčnicový*.

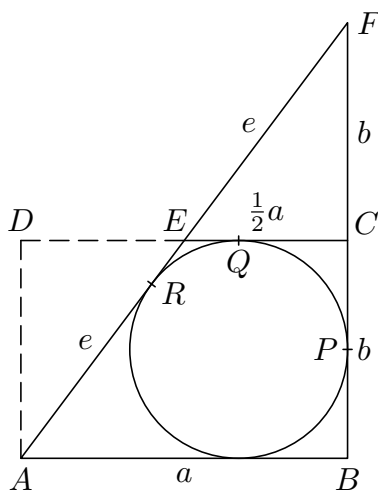
Riešenie*. Keďže štvoruholník $ABCE$ je podľa zadania dotýčnicový, pre dĺžky jeho strán platí známa rovnosť¹

$$|AB| + |CE| = |BC| + |AE|.$$

Figure 1 shows a rectangle $ABCD$ with a circle inscribed inside. The circle is tangent to the bottom side AB and the right side BC . A line segment AE is drawn from vertex A to point E on the top side DC . The circle is tangent to AE at point F . The radius of the circle is labeled as a . The distance from D to E is labeled as $\frac{1}{2}a$, and the distance from E to C is labeled as $\frac{1}{2}a$. The height of the rectangle is labeled as $\frac{2}{3}a$. The bottom side AB is labeled as a . Dashed lines indicate the center of the circle and its radius.

$$|AD| : |DE| : |AE| = \frac{2}{3}a : \frac{1}{2}a : \frac{5}{6}a = 4 : 3 : 5,$$

Iné riešenie. Ukážeme, že požadované tvrdenie možno dokázať aj bez toho, aby sme si všimli, že rovnobežník $ABCD$ je v danej úlohe obdĺžnikom. Namiesto toho využijeme, že úsečka CE je stredná prička trojuholníka ABF , pričom F je priesečník polpriamok BC a AE (obr. 3), lebo $CE \parallel AB$ a $|CE| = \frac{1}{2}|AB|$. Označme preto $a = |AB| = 2|CE|$,



2

$b = |BC| = |CF|$ a $e = |AE| = |EF|$ (rovnosť $2a = 3b$ použijeme až neskôr). Rovnako ako v prvom riešení využijeme rovnosť $b + e = a + \frac{1}{2}a (= \frac{3}{2}a)$, ktorá platí pre dĺžky strán dotýčnicového štvoruholníka $ABCE$. Kružnica jemu vpísaná sa dotýka strán BC, CE, AE postupne v bodoch P, Q, R tak, že platia rovnosti

$$|CP| = |CQ|, \quad |EQ| = |ER| \quad \text{a tiež} \quad |FP| = |FR|.$$

Pre súčet zhodných dĺžok $|FP|$ a $|FR|$ teda platí

$$\begin{aligned} |FP| + |FR| &= (b + |CP|) + (e + |ER|) = (b + e) + (|CP| + |ER|) = \\ &= \frac{3}{2}a + (|CQ| + |EQ|) = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a = 2a, \end{aligned}$$

čo znamená, že $|FP| = |FR| = a$.

Teraz už riešenie úlohy ľahko dokončíme. Rovnosť $|BP| = \frac{1}{2}b$, ktorú máme v našej situácii dokázať, vyplýva z rovnosti

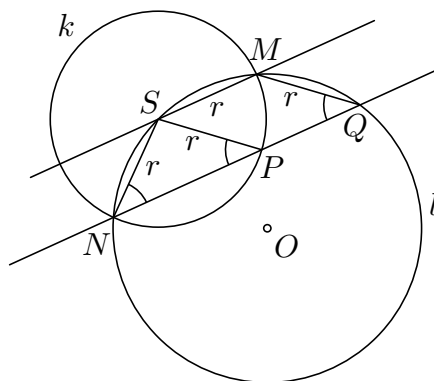
$$|BP| = |BF| - |FP| = 2b - a,$$

keď do nej dosadíme zadaný vzťah $a = \frac{3}{2}b$.

Komentár. Úloha nadväzuje na predchádzajúcu a využíva rovnosť súčtov dĺžok opačných strán dotýčnicového štvoruholníka. Ďalej študenti uplatnia buď Pytagorovu vetu alebo vedomosti o stredných pričkach v trojuholníku, čo úlohu činí zaujímavou z hľadiska pestrosti.

Úloha 21.3. [59-II-3] Daná je kružnica k so stredom S . Kružnica l má väčší polomer ako kružnica k , prechádza jej stredom a pretína ju v bodoch M a N . Priamka, ktorá prechádza bodom N a je rovnobežná s priamkou MS , vytína na kružniciach tetivy NP a NQ . Dokážte, že trojuholník MPQ je rovnoramenný.

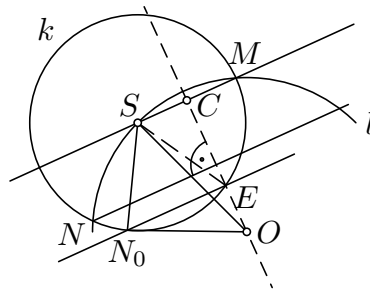
Riešenie*. Polomer kružnice k označme r . Označenie vrcholov P, Q v trojuholníku MPQ nie je dôležité, preto bez ujmy na všeobecnosti označme P ten z bodov priamky vedenej bodom N rovnobežne s priamkou MS , ktorý leží na kružnici k . Bod Q potom leží na kružnici l a štvoruholník $NQMS$ je lichobežník vpísaný do kružnice l (obr. 4). Je teda rovnoramenný s ramenami MQ a NS dĺžky r . Navyše aj úsečky SP a SM majú dĺžku r . Z rovnoramenného trojuholníka NPS a rovnoramenného lichobežníka $NQMS$ vyplýva rovnosť uhlov $|\angle SPN| = |\angle SNP| = |\angle MQP|$. Priemka PQ teda pretína priamky SP a MQ pod rovnako veľkými uhlami, a preto (podľa vety o súhlasných uhlach) sú priamky SP a MQ rovnobežné. Štvoruholník $PQMS$ je teda rovnobežník, a keďže $|SM| = |SP| = r$, je to dokonca kosoštvorec. Odtiaľ je už zrejmé, že trojuholník MPQ je rovnoramenný s ramenami PQ a MQ dĺžky r .



Obr. 4

Poznámka. Existencia tetív NP a NQ v zadaní je zaručená vďaka predpokladu, že kružnica l má väčší polomer ako kružnica k . Ak označíme C stred úsečky SM a E ten priesečník kružnice k s osou úsečky

SM , ktorý leží v polrovine SMO , bude stred O kružnice l ležať na polpriamke CE až za bodom E (obr. 5). Ďalší priesečník N oboch



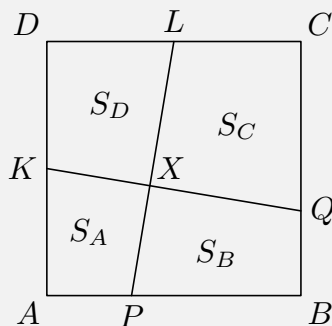
Obz. 5

kružníc preto padne do pásu medzi rovnobežkami SM a N_0E v polrovine OCS , pričom N_0 je štvrtý vrchol kosoštvorca s vrcholmi S, M, E . Na to stačí ukázať, že kružnica l pretne polpriamku EN_0 až za bodom N_0 , teda že jej polomer OS je väčší ako dĺžka úsečky ON_0 . Toto porovnanie dvoch strán trojuholníka OSN_0 jednoducho vyplýva z porovnania jeho vnútorných uhlov: uhol pri vrchole N_0 je najväčší, lebo oba uhly pri protifaľnej strane OS sú menšie ako 60° (trojuholník ESN_0 je rovnostranný). Ľahko nahliadneme, že každá z rovnobežiek uvedeného pásu pretína každú z oboch kružníc v dvoch bodoch (vždy súmerne združených podľa príslušnej osi kolmej na SM). Tým je dokázaná nielen existencia oboch tetív NP a NQ , ale aj to, že ich krajné body P a Q ležia na rovnakej strane od bodu N (ako na obr. 4), lebo oba body zrejme ležia v polrovine opačnej k spomenutej polrovine OCS .

Komentár. Diskusia v poznámke je len zaujímavým doplnkom úlohy, existencia tetív je totiž predpokladom zadania a nie je nutné ju dokazovať. Úloha využíva úvahu, že lichobežník, ktorého základne sú rovnobežné tetivy danej kružnice, je rovnoramenný, ktorá môže byť pre študentov zaujímavým uvedením.

Úloha 21.4. [60-I-3] Máme štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 1 cm. Body K a L sú stredy strán DA a DC . Bod P leží na strane AB tak, že $|BP| = 2|AP|$. Bod Q leží na strane BC tak, že $|CQ| = 2|BQ|$. Úsečky KQ a PL sa pretínajú v bode X . Obsahy štvoruholníkov $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ a $LDKX$ označíme postupne S_A , S_B , S_C , S_D (obr. 6).

- Dokážte, že $S_B = S_D$.
- Vypočítajte rozdiel $S_C - S_A$.
- Vysvetlite, prečo neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$.



Obr. 6

Riešenie*. a) Štvoruholníky $ABQK$ a $DAPL$ sú zhodné (jeden z nich je obrazom druhého v otočení o 90° so stredom v strede štvorca $ABCD$). Preto majú aj rovnaký obsah, čiže $S_A + S_B = S_A + S_D$. Z toho hneď dostaneme $S_B = S_D$.

b) Ľahko sa nám podarí vypočítať obsah pravouhlého lichobežníka $ABQK$, lebo poznáme dĺžky základní aj výšku. Dostaneme

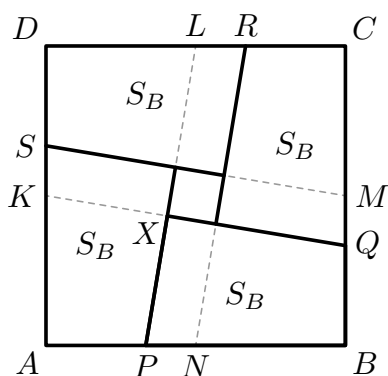
$$S_A + S_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \text{ cm}^2.$$

Podobne výpočtom obsahu lichobežníka $PBCL$ dostaneme

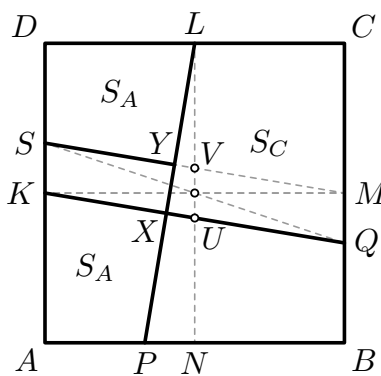
$$S_C + S_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12} \text{ cm}^2.$$

Odčítaním prvej získanej rovnosti od druhej dostávame $S_C - S_A = \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6} \text{ cm}^2$.

c) Nerovnosť medzi obsahmi $S_A + S_C$ a $S_B + S_D$ (ktorých priame výpočty nie sú v silách žiakov 1. ročníka) môžeme zdôvodniť nasledovným spôsobom: Súčet týchto dvoch obsahov je 1 cm^2 , takže sa nerovnajú práve vtedy, keď je jeden z nich menší ako $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$. Bude to obsah $S_B + S_D$ (rovný $2S_B$, ako už vieme), keď ukážeme, že obsah S_B je menší ako $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$. Urobíme to tak, že do celého štvorca $ABCD$ umiestnime bez prekrytia štyri kópie štvoruholníka $PBQX$. Ako ich umiestnime, vidíme na obr. 7, pričom M, N sú stredy strán BC, AB a R, S body, ktoré delia strany CD, DA v pomere $1 : 2$.



Obr. 7



Obr. 8

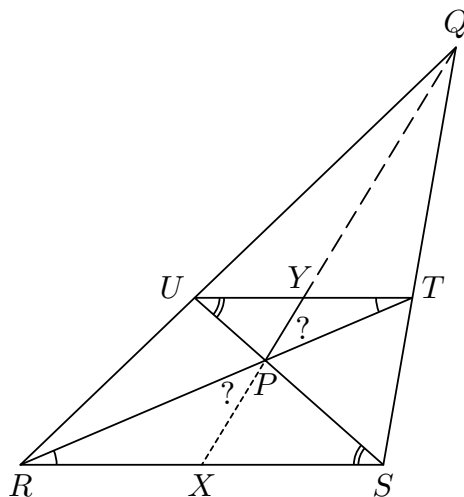
Iné riešenie časti c). Tentoraz namiesto nerovnosti $S_B + S_D < \frac{1}{2} \text{ cm}^2$ dokážeme ekvivalentnú nerovnosť $S_A + S_C > \frac{1}{2} \text{ cm}^2$. Preto sa pokúsime „premiestniť“ štvoruholník $APXK$ tak, aby ležal pri štvoruholníku $XQCL$ a aby sa ich obsahy dali geometricky sčítať. Uhly AKQ a DLP sú zhodné a $|AK| = |DL|$, preto môžeme štvoruholník $APXK$ premiestniť vo štvorci $ABCD$ do jeho „rohu“ D tak, že k štvoruholníku $XQCL$ priladne pozdĺž strany LX svojou stranou LY , pričom Y je priesečník úsečiek SM a PL z pôvodného riešenia (obr. 8). Obsah $S_A + S_C$ je potom obsahom šesťuholníka $DSYXQC$. Prečo je väčší ako $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$, môžeme zdôvodniť napríklad takto:

Úsečka spájajúca bod L so stredom U úsečky KQ pretne úsečku SM v jej strede V . Štvoruholník $UQMV$ má obsah rovný polovici obsahu rovnobežníka $KQMS$, teda rovný obsahu trojuholníka KMS . Preto má šesťuholník $DSVUQC$ obsah rovný obsahu štvoruholníka $KMCD$, t.j. polovici obsahu štvorca $ABCD$. Obsah $S_A + S_C$ je ešte väčší, a to o obsah štvoruholníka $XUVY$. Teda naozaj $S_A + S_C > \frac{1}{2} \text{ cm}^2$.

Komentár. Prvé dve časti sú príjemným úvahovým rozohriatím k časti tretej, ktorá vyžaduje trochu viac invencie. Demonštruje však zaujímavý prístup k riešeniu a porovnávanie obsahov obrazcov namiesto priameho výpočtu obsahov.

Úloha 21.5. [66-I-5-prvá časť] Ak označíme X a Y postupne stredy základní RS a TU všeobecného lichobežníka $RSTU$, tak na úsečke XY leží priesečník P uhlopriečok RT a SU , a to tak, že $|PX| : |PY| = |RS| : |TU|$. Na priamke XY leží tiež priesečník Q predĺžených ramien RU a ST , a to tak, že $|QX| : |QY| = |RS| : |TU|$ (obr. 9). Dokážte.

Riešenie*.



Obr. 9

Napriek tomu, že sa podľa obrázka zdá, že bod P na úsečke XY naozaj leží, musíme tento poznatok dokázať, teda *odvodiť* argumentáciou nezávislou na presnosti nášho rysovania. Na to určite stačí preukázať, že obe úsečky PX , PY zvierajú s priamkou RT zhodné uhly (na obrázku vyznačené otáznikmi). Všimnime si, že tieto úsečky sú ťažnicami trojuholníkov RSP a TUP , ktoré sa zhodujú vo vnútorných uhloch (vyznačených oblúčikmi) pri rovnobežných stranách RS a TU , takže ide o trojuholníky podobné, a to s koeficientom $k = |TU|/|RS|$. S rovnakým koeficientom platí aj podobnosť „polovíc“ týchto trojuholníkov vyfatých ich ťažnicami, presnejšie podobnosť $RXP \sim TYP$. Z nej už želaná zhodnosť uhlov RPX a TPY aj želaná rovnosť $|PY| = k|PX|$ (vďaka rovnakému koeficientu) vyplýva. Všetko o bode P je tak dokázané; podobne sa overia aj obe vlastnosti bodu Q - ukáže sa, že úsečky QX a QY zvierajú ten istý uhol s priamkou RQ a ich dĺžky sú zviazané rovnosťou $|QY| = k|QX|$, a to vďaka tomu, že QX a QY sú ťažnice v dvoch navzájom podobných trojuholníkoch RSQ a UTQ .

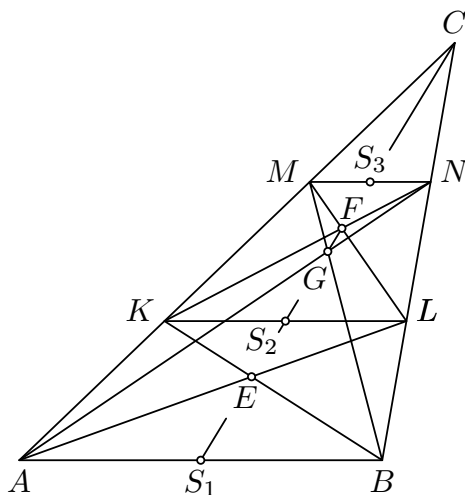
Komentár. Úloha je prípravou na riešenie záverečného problému tohto seminára a pripomína študentom metódu dôkazu toho, že bod P leží na priamke úsečke XY .

Úloha 21.6. [66-I-5] V danom trojuholníku ABC zvolíme vnútri strany AC body K , M a vnútri strany BC body L , N tak, že

$$|AK| = |KM| = |MC|, |BL| = |LN| = |NC|.$$

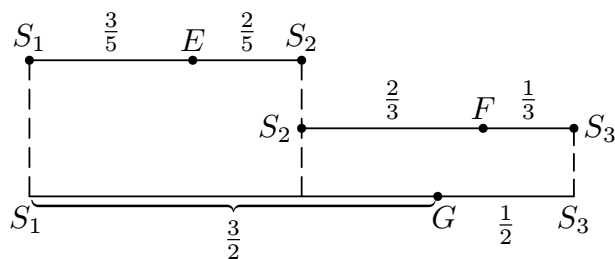
Ďalej označme E priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABLK$, F priesečník uhlopriečok lichobežníka $KLNM$ a G priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABNM$. Dokážte, že body E , F a G ležia na ťažnici trojuholníka ABC z vrcholu C a určte pomer $|GF| : |EF|$.

Riešenie*. Dokázané vlastnosti všeobecného lichobežníka z predchádzajúcej úlohy nám umožnia celkom ľahko vyriešiť zadanú úlohu. Situácia je znázornená na obr. 10. Okrem pomenovaných bodov sme tam ešte označili S_1 , S_2 , S_3 stredy úsečiek AB , KL a MN . Keďže trojuholníky ABC , KLC



Obr. 10

a MNC sú navzájom podobné (podľa vety *sus*), platí $|AB| : |KL| : |MN| = |AC| : |KC| : |MC| = 3 : 2 : 1$. Podľa zhodných vnútorných uhlov spomenutých troch trojuholníkov platí tiež $AB \parallel KL$, $KL \parallel MN$. Štvoruholníky $ABLK$, $KLNM$ a $ABNM$ tak sú naozaj lichobežníky (ako je prezradené v zadaní) so základňami AB , KL a MN , ktorých dĺžky sú v už odvodenom pomere $3 : 2 : 1$. Navyše predĺžené ramená všetkých troch lichobežníkov sa pretínajú v bode C , ktorým preto podľa dokázanej vlastnosti prechádzajú priamky S_1S_2 , S_2S_3 (a S_1S_3), takže ide o jednu priamku, na ktorej body S_1 , S_2 , S_3 a C ležia v uvedenom poradí tak, že $|S_1C| : |S_2C| : |S_3C| = 3 : 2 : 1$. Z toho vyplýva $|S_1S_2| = |S_2S_3| (= |S_3C|)$, takže bod S_2 je stredom úsečky S_1S_3 . Na nej (opäť podľa dokázaného tvrdenia) ležia aj body E , F a G , pričom pre bod E medzi bodmi S_1 , S_2 platí $|ES_1| : |ES_2| = 3 : 2$, pre bod F medzi bodmi S_2 , S_3 platí $|FS_2| : |FS_3| = 2 : 1$ a napokon pre bod G medzi bodmi S_1 , S_3 platí $|GS_1| : |GS_3| = 3 : 1$. Tieto delenia troch úsečiek sme znázornili na obr. 11, kam sme zapísali aj dĺžky vzniknutých úsekov pri voľbe jednotky $1 = |S_1S_2| = |S_2S_3|$ (pri ktorej $|S_1S_3| = 2$).



Obr. 11

Keďže

$$|S_1F| = |S_1S_2| + |S_2F| = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} > \frac{3}{2} = |S_1G|,$$

platí $|GF| = |S_1F| - |S_1G| = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$, čo spolu s rovnosťou $|EF| = |ES_2| + |S_2F| = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}$ už vedie k určeniu hľadaného pomeru

$$|GF| : |EF| = \frac{1}{6} : \frac{16}{15} = 5 : 32.$$

Komentár. Úloha je zložitejšia ako predchádzajúca, ale študenti zoznámení s prípravnou úlohou, zbehlí vo využívaní podobných trojuholníkov a precízni, aby sa nestratili v záverečnom pomerovaní, by si s úlohou poradiť mali.