Seminár 7

Téma

Teória čísel II – úlohy o najmenšom spoločnom násobku a najväčšom spoločnom deliteli

Ciele

Zoznámiť sa s metódami riešenia príkladov o spoločných deliteľoch a násobkoch, upevniť znalosti zo seminára predchádzajúceho.

Úlohy a riešenia

Úloha 7.1. [61-I-3-N1] Určte, pre ktoré prirodzené čísla a, b platí $(a, b) = 10$ a zároveň $[a, b] = 150$.

Úloha 7.2. [69-I-5-N1] Nech d je najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel a a b. Ukážte, že čísla a/d a b/d sú celé a nesúdeliteľné.

Úloha 7.3. [60-I-5-N2] Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b platí vzťah

$$[a, b] \cdot (a, b) = ab.$$

Úloha 7.4. [64-I-5-N4] Platí pre každé tri prirodzené čísla a, b, c a ich najväčší spoločný deliteľ d a ich najmenší spoločný násobok n rovnosť $abc = nd$?

Úloha 7.5. [64-I-5-N5] Ak majú prirodzené čísla a, b najväčšieho spoločného deliteľa d, majú rovnakého najväčšieho spoločného deliteľa aj čísla a, b, $a - b$, $a + b$. Dokážte. Platí rovnaké tvrdenie pre najmenší spoločný násobok?

Úloha 7.6. [61-I-3-N4, resp. 50-C-II-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí $a + b + [a, b] + (a, b) = 50$.

Úloha 7.7. [61-S-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí rovnosť množín

$$\{a \cdot [a, b], b \cdot (a, b)\} = \{45, 180\}.$$

Úloha 7.8. [64-I-5] Rozdiel dvoch prirodzených čísel je 2010 a ich najväčší spoločný deliteľ je 2014-krát menší ako ich najmenší spoločný násobok. Určte všetky také dvojice čísel.

Úloha 7.9. [60-I-5-D3] Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel a, b, pre ktoré má výraz

$$\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$$

celočíselnú hodnotu.

Úloha 7.10. [60-I-5] Dokážte, že najmenší spoločný násobok $[a, b]$ a najväčší spoločný deliteľ (a, b) ľubovoľných dvoch kladných celých čísel a, b spĺňajú nerovnosť

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geq 2ab.$$

Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť.

Domáca práca

Úloha 7.11. [61-I-3] Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí množinová rovnosť

$$\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\} = \{2,3,5,60,90,180\},$$

pričom (x, y) a $[x, y]$ označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel x a y.

Úloha 7.12. [63-S-2] Čísla 1, 2, ..., 10 rozdeľte na dve skupiny tak, aby najmenší spoločný násobok súčinu všetkých čísel prvej skupiny a súčinu všetkých čísel druhej skupiny bol čo najmenší.

Doplňujúce zdroje a materiály

Materiály vhodné na ďalšie počítanie nájdeme v minulom seminári. Keďže témy sú si veľmi blízke, publikácie zvyčajne obsahujú úlohy zamerané na obe témy.