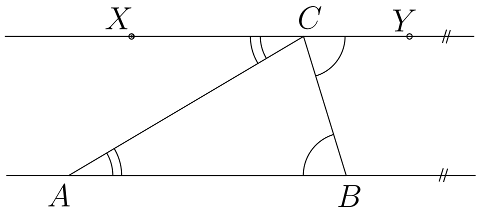
Seminár 10: Geometria I – základné poznatky

Úlohy a riešenia

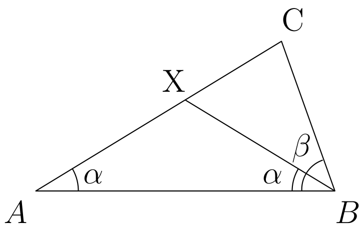
Úloha 10.1. **Riešenie.** Veďme rovnobežku XY so stranou AB vrcholom C trojuholníka ABC, tak že bod C leží medzi bodmi X a Y (obr. 1). Potom $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle ACX|$ a $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle BCY|$, pretože



Obr. 1:

ide o dvojice striedavých uhlov. Keďže $|\measuredangle ACX| + |\measuredangle ACB| + |\measuredangle BCY| = 180°$, pretože uhol XCY je priamy, platí aj $|\measuredangle BAC| + |\measuredangle ABC| + |\measuredangle ACB| = 180°$.

Úloha 10.2. [66-I-3-N1] **Riešenie*.** Ak je $\alpha < \beta$, môžeme nájsť vnútorný bod X strany AC, pre ktorý platí $|\measuredangle ABX| = \alpha$, a teda $|AX| = |BX|$, takže z trojuholníkovej nerovnosti $|BC| < |BX| + |XC|$ už vyplýva $a < b$.



Obr. 2:

Úloha 10.3. [63-I-4-N3] **Riešenie.** a) Označme rovnakú výšku dvoch trojuholníkov v. V trojuholníku T_1 je táto výškou na základňu a_1, v trojuholníku T_2 na základňu a_2. Pomer obsahov týchto trojuholníkov je potom

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{\frac{1}{2}a_1 v}{\frac{1}{2}a_2 v} = \frac{a_1}{a_2},$$

čo sme chceli dokázať.

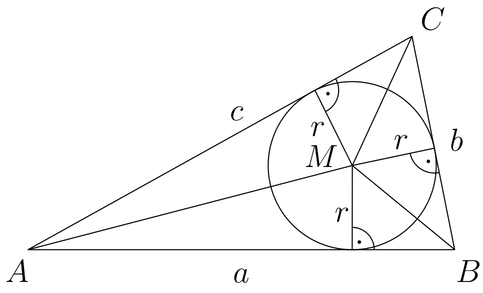
b) Označme zhodnú základňu dvoch trojuholníkov z, v trojuholníku T_1 je výška na túto základňu v_1, v trojuholníku T_2 je výška na túto základňu v_2. Pomer obsahov trojuholníkov T_1 a T_2 je

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{\frac{1}{2}z v_1}{\frac{1}{2}z v_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

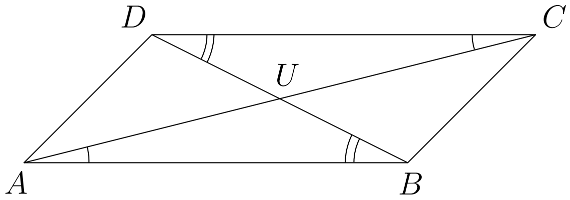
čo je pomer príslušných výšok.

Úloha 10.4. [61-I-5-N1] **Riešenie*.** Stred M vpísanej kružnice rozdeľuje uvažovaný trojuholník ABC na tri menšie trojuholníky BCM, ACM, ABM s obsahmi $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$, ktorých súčet je S, odkiaľ vyplýva dokazovaný vzorec.

Úloha 10.5. **Riešenie.** Označme U priesečník uhlopriečok AC a BD rovnobežníka $ABCD$ (obr. 4). Keďže uhly ABD a BDC sú striedavé, majú rovnakú veľkosť. Podobne uhly BAC a ACD sú rovnako



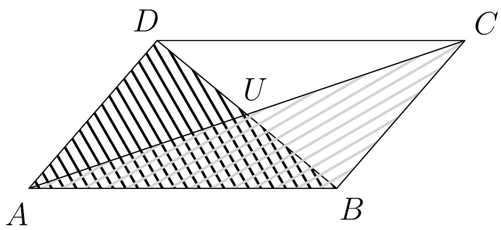
Obr. 3:



Obr. 4:

veľké, pretože sú takisto dvojicou striedavých uhlov. Potom sú trojuholníky ABU a CDU zhodné, keďže sa zhodujú v jednej strane $|AB| = |CD|$ a v dvoch k nej priľahlých uhloch. Preto aj $|AU| = |UC|$, $|BU| = |UD|$ a tvrdenie je dokázané.

Úloha 10.6. [58-I-4-N1] **Riešenie.** Rovnosť obsahov trojuholníkov ADU a BCU je ekvivalentná s rovnosťou obsahov trojuholníkov ABC a ABD so spoločnou stranou AB, pretože $S_{ABC} = S_{ABU} + S_{BCU}$ a $S_{ABD} = S_{ABU} + S_{AUD}$ (obr. 5). Trojuholníky ABC a ABD majú spoločnú základňu AB, takže ich obsahy budú rovnaké práve vtedy, ak výšky na túto stranu budú rovnaké, resp. ak body C a D budú od priamky AB rovnako vzdialené. To nastane len v prípade, ak body C a D ležia na priamke rovnobežnej s priamkou AB, čo sme chceli dokázať.



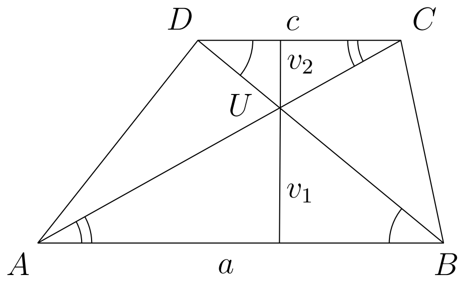
Obr. 5:

Úloha 10.7. [64-I-4-N1] **Riešenie.** Trojuholníky ABU a CDU sú zrejme podobné ($|\angle BAU| = |\angle UCD|$, $|\angle ABU| = |\angle CDU|$, $|\angle AUB| = |\angle CUD|$, pretože prvé dve sú dvojice striedavých uhlov, posledné dva sú uhly vrcholové) s koeficientom podobnosti $k = a/c$. Preto pre výšku v_1 na stranu AB v trojuholníku ABU a výšku v_2 na stranu CD v trojuholníku CDU platí $v_1/v_2 = k$, resp. $v_1 = kv_2 = (av_2)/c$. Potom pre pomer obsahov trojuholníkov ABU a CDU máme

$$\frac{S_{ABU}}{S_{CDU}} = \frac{\frac{1}{2}av_1}{\frac{1}{2}cv_2} = \frac{a\frac{av_2}{c}}{cv_2} = \frac{a^2}{c^2}.$$

Záverečný komentár

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že študenti budú o(c)hromení množstvom nových poznatkov v tomto seminári. Dúfame však, že sa tak nestane, keďže veľká väčšina obsahu by mala byť prinajmenšom povedomá, ak nie úplne zrozumiteľná. Seminár tiež patrí k tým menej náročným, avšak je veľmi dôležitou prípravou pred tvrdšími orieškami.



Obr. 6:

Úloha 10.8. [58-I-2-D1] **Riešenie.** Trojuholník DSE je pravouhlý rovnoramenný s pravým uhlom pri vrchole S, pretože odvesny DS a ES ležia na osiach navzájom kolmých strán. Odvesny majú dĺžku $\frac{c}{2}$, pretože sú to polomery kružnice opísanej trojuholníku ABC. Obsah trojuholníka DSE je $\frac{1}{2} \cdot |DS| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{8}$.

Úloha 10.9. [58-I-2-D2] **Riešenie.** Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a > b$. Najprv vyjadríme výšku v pomocou dĺžok základní a odvesien. Nech je P päta výšky z bodu D na stranu AB. Potom $|AP| = (a - c)/2$. Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku APD máme

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + v^2 = b^2,$$

odkiaľ $v = \sqrt{b^2 - (\frac{a-c}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - (a-c)^2}$ a preto pre obsah lichobežníka dostávame

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+c) \cdot v = \frac{1}{4}(a+c)\sqrt{4b^2 - (a-c)^2}.$$