

# Seminár 21

## Téma

Geometria V – štvoruholníky

## Úlohy a riešenia

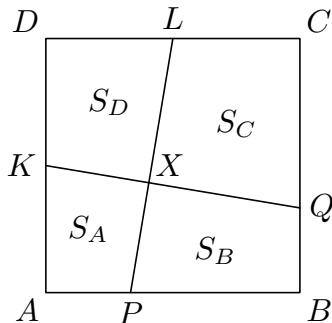
**Úloha 21.1.** [57-I-2] Štvoruholníku  $ABCD$  je vpísaná kružnica so stredom  $S$ . Určte rozdiel  $|\angle ASD| - |\angle CSD|$ , ak  $|\angle ASB| - |\angle BSC| = 40^\circ$

**Úloha 21.2.** [61-II-3] Nech  $E$  je stred strany  $CD$  rovnobežníka  $ABCD$ , v ktorom platí  $2|AB| = 3|BC|$ . Dokážte, že ak sa dá do štvoruholníka  $ABCE$  vpísať kružnica, dotýka sa táto kružnica strany  $BC$  v jej strede.

**Úloha 21.3.** [59-II-3] Daná je kružnica  $k$  so stredom  $S$ . Kružnica  $l$  má väčší polomer ako kružnica  $k$ , prechádza jej stredom a pretína ju v bodoch  $M$  a  $N$ . Priamka, ktorá prechádza bodom  $N$  a je rovnobežná s priamkou  $MS$ , vytína na kružniciach tetivy  $NP$  a  $NQ$ . Dokážte, že trojuholník  $MPQ$  je rovnoramenný.

**Úloha 21.4.** [60-I-3] Máme štvorec  $ABCD$  so stranou dĺžky 1 cm. Body  $K$  a  $L$  sú stredy strán  $DA$  a  $DC$ . Bod  $P$  leží na strane  $AB$  tak, že  $|BP| = 2|AP|$ . Bod  $Q$  leží na strane  $BC$  tak, že  $|CQ| = 2|BQ|$ . Úsečky  $KQ$  a  $PL$  sa pretínajú v bode  $X$ . Obsahy štvoruholníkov  $APXK$ ,  $BQXP$ ,  $QCLX$  a  $LDKX$  označíme postupne  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_C$ ,  $S_D$  (obr. 6).

- Dokážte, že  $S_B = S_D$ .
- Vypočítajte rozdiel  $S_C - S_A$ .
- Vysvetlite, prečo neplatí  $S_A + S_C = S_B + S_D$ .



Obr. 6

**Úloha 21.5.** [66-I-5-prvá časť] Ak označíme  $X$  a  $Y$  postupne stredy základní  $RS$  a  $TU$  všeobecného lichobežníka  $RSTU$ , tak na úsečke  $XY$  leží priesečník  $P$  uhlopriečok  $RT$  a  $SU$ , a to tak, že  $|PX| : |PY| = |RS| : |TU|$ . Na priamke  $XY$  leží tiež priesečník  $Q$  predĺžených ramien  $RU$  a  $ST$ , a to tak, že  $|QX| : |QY| = |RS| : |TU|$  (obr. 9). Dokážte.

**Úloha 21.6.** [66-I-5] V danom trojuholníku  $ABC$  zvolme vnútri strany  $AC$  body  $K$ ,  $M$  a vnútri strany  $BC$  body  $L$ ,  $N$  tak, že

$$|AK| = |KM| = |MC|, |BL| = |LN| = |NC|.$$

Ďalej označme  $E$  priesečník uhlopriečok lichobežníka  $ABLK$ ,  $F$  priesečník uhlopriečok lichobežníka  $KLNM$  a  $G$  priesečník uhlopriečok lichobežníka  $ABNM$ . Dokážte, že body  $E$ ,  $F$  a  $G$  ležia na ťažnici trojuholníka  $ABC$  z vrcholu  $C$  a určte pomer  $|GF| : |EF|$ .