

## Seminár 25: Kombinatorika I – úlohy na mriežke a šachovnici

### Úlohy a riešenia

**Úloha 25.1.** [66-II-2] Štvorcovú tabuľku  $6 \times 6$  zaplníme všetkými celými číslami od 1 do 36.

- Uveďte príklad takého zaplnenia tabuľky, že súčet každých dvoch čísel v rovnakom riadku či v rovnakom stĺpci je väčší ako 11.
- Dokážte, že pri ľubovoľnom zaplnení tabuľky sa v niektorom riadku alebo stĺpci nájdu dve čísla, ktorých súčet neprevyšuje 12.

**Úloha 25.2.** [62-I-1-N1] Kobylka skáče po úsečke dĺžky 10 cm a to skokmi o 1 cm alebo o 2 cm (vždy rovnakým smerom). Koľkými spôsobmi sa môže dostať z jedného krajného bodu úsečky do druhého?

**Úloha 25.3.** [62-I-1-N2] Škriatok sa pohybuje v tabuľke  $10 \times 15$  skokmi o jedno políčko nahor alebo o jedno políčko doprava. Koľkými rôznymi cestami sa môže dostať z ľavého dolného do pravého horného políčka?

**Úloha 25.4.** [64-II-2] V jednom políčku šachovnice  $8 \times 8$  je napísané "–" a v ostatných políčkach "+". V jednom kroku môžeme zmeniť na opačné súčasne všetky štyri znamienka v ktoromkoľvek štvorci  $2 \times 2$  na šachovnici. Rozhodnite, či po určitom počte krokov môže byť na šachovnici oboch znamienok rovnaký počet.

**Úloha 25.5.** [64-I-3-N3] Simona a Lenka hrajú hru. Pre dané celé číslo  $k$  také, že  $0 \leq k \leq 9$ , vyberie Simona  $k$  políček šachovnice  $3 \times 3$  a na každé z nich napíše číslo 1, na ostatné políčka napíše číslo 0. Lenka potom šachovnicu nejakým spôsobom pokryje tromi triminovými kockami, t. j. kockami tvaru  $3 \times 1$ , a čísla pod ich políčkami vynásobí. Ak je počet kociek so súčinom 0 nepárny, vyhráva Simona, v ostatných prípadoch vyhráva Lenka. Určte, v koľkých percentách prípadov (vzhľadom na hodnotu  $k$ ) má vyhrávajúcu stratégiu Simona.

**Úloha 25.6.** [61-I-6-N1] Na hracej ploche  $m \times n$  tvorenej bielymi štvorcovými políčkami sa Monika a Tamara striedajú v ťahoch jednou figúrkou pri nasledujúcej hre. Najskôr Monika položí figúrku na ľubovoľné políčko a toto políčko zafarbí namodro. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, urobí s figúrkou skok na políčko, ktoré je doposiaľ biele a zafarbí toto políčko namodro. Pritom pod skokom rozumieme ťah šachovou vežou, t. j. presuny figúrky v smere riadkov alebo v smere stĺpcov hracej dosky (o ľubovoľný počet políček). Hráčka, ktorá je na rade a už nemôže urobiť ťah, prehráva. Rozhodnite, ktoré z hráčov môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky?

**Úloha 25.7.** [62-I-1] Štvorcová tabuľka je rozdelená na  $16 \times 16$  políček. Kobylka sa po nej pohybuje dvoma smermi: vpravo alebo dole, pričom strieda skoky o dve a o tri políčka (t. j. žiadne dva po sebe idúce skoky nie sú rovnako dlhé). Začína skokom dĺžky dva z ľavého horného políčka. Koľkými rôznymi cestami sa môže kobylka dostať na pravé dolné políčko? (Pod cestou máme na mysli postupnosť políček, na ktoré kobylka doskočí.)

**Úloha 25.8.** [61-I-6] Na hracej ploche  $n \times n$  tvorenej bielymi štvorcovými políčkami sa Monika a Tamara striedajú v ťahoch jednou figúrkou pri nasledujúcej hre. Najskôr Monika položí figúrku na ľubovoľné políčko a toto políčko zafarbí namodro. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, urobí s figúrkou skok na políčko, ktoré je doposiaľ biele, a toto políčko zafarbí namodro. Pritom pod skokom rozumieme bežný ťah šachovým jazdcom, t. j. presun figúrky o dve políčka zvislo alebo vodorovne a súčasne o jedno políčko v druhom smere. Hráčka, ktorá je na rade a už nemôže urobiť ťah, prehráva. Postupne pre  $n = 4, 5, 6$  rozhodnite, ktorá z hráčov môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky.