Seminár 9

Téma

Geometria I – základné poznatky

Ciele

Zopakovať a upevniť základné poznatky z planimetrie, ktoré by študenti mali mať zo základnej školy. Venovať sa vlastnostiam uhlov, trojuholníkov, štvoruholníkov a kružníc. Niektoré z poznatkov odvodiť.

Úlohy a riešenia

Úvodný komentár. Keďže planimetria nie je súčasťou osnov 1. ročníka gymnázií, je potrebné poznatky žiakov z tejto oblasti o to starostlivejšie zopakovať. Geometrické úlohy majú veľmi často najhoršiu úspešnosť v krajských kolách MO, čo môže mať viacero dôvodov. Nepopierateľne však študentom tréning pomôže, preto je geometrii v priebehu roka venovaných $6+1$ seminárov.

Zo zmienených dôvodov má preto tento seminár odlišnú štruktúru ako predchádzajúce – viac ako riešeniu úloh z olympiád sa venujeme opakovaniu základných vlastností uhlov, trojuholníkov, štvoruholníkov a kružníc, ktorých znalosti budú nenahraditeľné v ďalších piatich geometrických seminároch. Spolu so študentmi tak vytvoríme základnú výbavu, ktorá im pomôže v boji s geometrickými záludnosťami.

Študenti by mali mať nasledujúce znalosti (voľne spracované podľa [XX]TODO):

- ▷ uhly
  - chápať pojmy vrcholové, vedľajšie, súhlasné a striedavé uhly, vedieť nájsť dvojice takých uhlov a používať ich pri riešení úloh,
- ▷ trojuholníky
  - poznať základné vlastnosti strán a vnútorných uhlov trojuholníka: trojuholníková nerovnosť, súčet vnútorných uhlov,
  - vedieť popísať rozdiely medzi ostrouhlým, pravouhlým, tupouhlým, všeobecným, rovnoramenným a rovnostranným trojuholníkom,
  - chápať pojmy os uhla, os strany, výška, ťažnica, stredná priečka, kružnica vpísaná a opísaná trojuholníku a poznať ich vlastnosti,
  - poznať a vedieť používať vzorec na výpočet obsahu trojuholníka,
  - poznať a vhodne používať vety o zhodnosti (*sss*, *sus*, *usu*, *Ssu*) a podobnosti (*sss*, *sus*, *uu*, *Ssu*) trojuholníkov,
  - poznať a používať Pytagorovu vetu pre pravouhlý trojuholník,
- ▷ štvoruholníky
  - vedieť popísať všeobecný štvoruholník a jeho špecifické prípady: rovnobežník, štvorec, obdĺžnik, kosoštvorec, kosodĺžnik, lichobežník,
  - poznať základné vzorce pre výpočet obsahu rôznych rovnobežníkov a lichobežníkov,
  - vedieť, že uhlopriečky v pravouholníku a rovnobežníku sa polia a vedieť tento fakt využiť pri riešení úloh,
- ▷ kružnice a kruhy
  - chápať pojmy kružnica, kruh, kružnicový oblúk, dotyčnica, sečnica, tetiva, stredový a obvodový uhol,
  - poznať a vedieť používať Talesovu kružnicu,
- ▷ riešenie konštrukčných úloh

– náčrt, rozbor, popis konštrukcie, diskusia o počte riešení.

Komentár. Skôr než frontálny výklad je vhodné nechať skladať mozaiku vedomostí študentov. Ak pracujeme s malou skupinou, môžeme o vyššie spomenutých bodoch diskutovať všetci spoločne. Ak seminár navštevuje väčšie množstvo záujemcov o matematiku, rozdelíme študentov na menšie skupiny, pričom každá spracuje poznatky o zadanej neprázdnej podmnožine vyššie spomenutých oblastí. Tie si potom študenti navzájom odprezentujú, vedúci seminára nepresnosti vhodnými otázkami koriguje.

Komentár. V druhej polovici seminára niektoré zo základných tvrdení, ktoré budeme v priebehu ďalších stretnutí využívať, dokážeme.

Úloha 9.1. Dokážte, že súčet veľkostí vnútorných uhlov ľubovoľného trojuholníka je 180°.

Riešenie. Veďme rovnobežku XY so stranou AB vrcholom C trojuholníka ABC, tak že bod C leží medzi bodmi X a Y. Potom $|\angle BAC| = |\angle ACX|$ a $|\angle ABC| = |\angle BCY|$, pretože ide o dvojice striedavých uhlov. Keďže $|\angle ACX| + |\angle ACB| + |\angle BCY| = 180^\circ$, pretože uhol XCY je priamy, platí aj $|\angle BAC| + |\angle ABC| + |\angle ACB| = 180^\circ$.

Úloha 9.2. [66-I-3-N1] Z trojuholníkových nerovností medzi dĺžkami strán ľubovoľného trojuholníka odvoďte známe pravidlo $\alpha < \beta \Rightarrow a < b$ o porovnaní veľkostí vnútorných uhlov a dĺžok protiľahlých strán v ľubovoľnom trojuholníku ABC.

Riešenie*. Ak je $\alpha < \beta$, môžeme nájsť vnútorný bod X strany AC, pre ktorý platí $|\angle ABX| = \alpha$, a teda $|AX| = |BX|$, takže z trojuholníkovej nerovnosti $|BC| < |BX| + |XC|$ už vyplýva $a < b$.

Úloha 9.3. [63-I-4-N3] Dokážte vety:
a) Ak majú dva trojuholníky rovnakú výšku, potom pomer ich obsahov sa rovná pomeru dĺžok príslušných základní.
b) Ak majú dva trojuholníky zhodné základne, potom pomer ich obsahov sa rovná pomeru príslušných výšok.

Riešenie. a) Označme rovnakú výšku dvoch trojuholníkov v. V trojuholníku T_1 je táto výškou na základňu a_1, v trojuholníku T_2 na základňu a_2. Pomer obsahov týchto trojuholníkov je potom

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{\frac{1}{2}a_1 v}{\frac{1}{2}a_2 v} = \frac{a_1}{a_2},$$

čo sme chceli dokázať.

b) Označme zhodnú základňu dvoch trojuholníkov z, v trojuholníku T_1 je výška na túto základňu v_1, v trojuholníku T_2 je výška na túto základňu v_2. Pomer obsahov trojuholníkov T_1 a T_2 je

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{\frac{1}{2}z v_1}{\frac{1}{2}z v_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

čo je pomer príslušných výšok.

Úloha 9.4. [61-I-5-N1] Pre všeobecný trojuholník ABC so stranami a, b, c a obsahom S platí pre polomer r vpísanej kružnice vzorec $r = 2S/(a+b+c)$. Dokážte.

Riešenie*. Stred M vpísanej kružnice rozdeľuje uvažovaný trojuholník ABC na tri menšie trojuholníky BCM, ACM, ABM s obsahmi $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$, ktorých súčet je S, odkiaľ vyplýva dokazovaný vzorec.

Úloha 9.5. Dokážte, že uhlopriečky v rovnobežníku sa navzájom polia.

Riešenie. Označme U priesečník uhlopriečok AC a BD rovnobežníka $ABCD$. Keďže uhly ABD a BDC sú striedavé, majú rovnakú veľkosť. Podobne uhly BAC a ACD sú rovnako veľké, pretože sú takisto dvojicou striedavých uhlov. Potom sú trojuholníky ABU a CDU zhodné, keďže sa zhodujú v jednej strane $|AB| = |CD|$ a v dvoch k nej priľahlých uhloch. Preto aj $|AU| = |UC|$, $|BU| = |UD|$ a tvrdenie je dokázané.

Úloha 9.6. [58-I-4-N1] Označme U priesečník uhlopriečok daného konvexného štvoruholníka $ABCD$. Dokážte, že priamky AB a CD sú rovnobežné práve vtedy, keď trojuholníky ADU a BCU majú rovnaký obsah.

Riešenie. Rovnosť obsahov trojuholníkov ADU a BCU je ekvivalentná s rovnosťou obsahov trojuholníkov ABC a ABD so spoločnou stranou AB, pretože $S_{ABC} = S_{ABU} + S_{BCU}$ a $S_{ABD} = S_{ABU} + S_{AUD}$. Trojuholníky ABC a ABD majú spoločnú základňu AB, takže ich obsahy budú rovnaké práve vtedy, ak výšky na túto stranu budú rovnaké, resp. ak body C a D budú od priamky AB rovnako vzdialené. To nastane len v prípade, ak body C a D ležia na priamke rovnobežnej s priamkou AB, čo sme chceli dokázať.

Úloha 9.7. [64-I-4-N1] Lichobežník $ABCD$ má základne s dĺžkami $|AB| = a$ a $|CD| = C$ a jeho uhlopriečky sa pretínajú v bode U. Aký je pomer obsahov trojuholníkov ABU a CDU?

Riešenie. Trojuholníky ABU a CDU sú zrejme podobné ($|\measuredangle BAU| = |\measuredangle UCD|$, $|\measuredangle ABU| = |\measuredangle CDU|$, $|\measuredangle AUB| = |\measuredangle CUD|$, pretože prvé dve sú dvojice striedavých uhlov, posledné dva sú uhly vrcholové) s koeficientom podobnosti $k = a/c$. Preto pre výšku v_1 na stranu AB v trojuholníku ABU a výšku v_2 na stranu CD v trojuholníku CDU platí $v_1/v_2 = k$, resp. $v_1 = kv_2 = (av^2)/c$. Potom pre pomer obsahov trojuholníkov ABU a CDU máme

$$\frac{S_{ABU}}{S_{CDU}} = \frac{\frac{1}{2}av_1}{\frac{1}{2}cv_2} = \frac{a\frac{a}{cv_2}}{cv_2} = \frac{a^2}{c^2}.$$

Záverečný komentár Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že študenti budú o(c)hromení množstvom nových poznatkov v tomto seminári. Dúfame však, že sa tak nestane, keďže veľká väčšina obsahu by mala byť prinajmenšom povedomá, ak nie úplne zrozumiteľná. Seminár tiež patrí k tým menej náročným, avšak je veľmi dôležitou prípravou pred tvrdšími orieškami.

Domáca práca

Úloha 9.8. [58-I-2-D1] Nech k je kružnica opísaná pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB dĺžky c. Označme S stred strany AB a D a E priesečníky osí strán BC a AC s jedným oblúkom AB kružnice k. Vyjadrite obsah trojuholníka DSE pomocou dĺžky prepony c.

Riešenie. Trojuholník DSE je pravouhlý rovnoramenný s pravým uhlom pri vrchole S, pretože odvesny DS a ES ležia na osiach navzájom kolmých strán. Odvesny majú dĺžku $\frac{c}{2}$, pretože sú to polomery kružnice opísanej trojuholníku ABC. Obsah trojuholníka DSE je $\frac{1}{2} \cdot |DS| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{8}$.

Úloha 9.9. [58-I-2-D2] Vyjadrite obsah rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ so základňami AB a CD pomocou dĺžok a, c jeho základní a dĺžky b jeho ramien.

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a > b$. Najprv vyjadríme výšku v pomocou dĺžok základní a odvesien. Nech je P päta výšky z bodu D na stranu AB. Potom $|AP| = (a-c)/2$. Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku APD máme

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + v^2 = b^2,$$

odkiaľ $v = \sqrt{b^2 - (\frac{a-c}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2-(a-c)^2}$ a preto pre obsah lichobežníka dostávame

$$S_{ABCD} = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{1}{4}(a+c)\sqrt{4b^2-(a-c)^2}.$$

Úloha 9.10. Použitím viet o podobnosti trojuholníkov a Pytagorovej vety odvoďte Euklidove vety o odvesne a o výške pravouhlého trojuholníka.

Riešenie. Prehľadné odvodenie je možne nájsť v [**?**].

Doplňujúce zdroje a materiály

Ak študenti budú stále neistí v používaní základných geometrických poznatkov, je možné ich odkázať na základoškolské učebnice geometrie, v ktorých nájdu aj jednoduchšie príklady na precvičenie, príp. vhodným doplnkom geometrického vzdelania je aj publikácia [[**?**]].