

Seminár 12: Geometria III – obsahy trojuholníkov a štvoruholníkov

Ciele

Precvičenie úloh zaoberajúcich sa obsahmi trojuholníkov a štvoruholníkov, rôznorodé určovanie obsahu, príp. pomeru obsahov trojuholníkov v úlohách.

Úlohy a riešenia

Úloha 12.1. [57-S-2] V danom rovnobežníku $ABCD$ je bod E stred strany BC a bod F leží vnútri strany AB . Obsah trojuholníka AFD je 15 cm^2 a obsah trojuholníka FBE je 14 cm^2 . Určte obsah štvoruholníka $FECD$.

Riešenie*. Označme v vzdialenosť bodu C od priamky AB , $a = |AB|$ a $x = |AF|$. Pre obsahy trojuholníkov AFD a FBE (obr. 1) platí $\frac{1}{2}x \cdot v = 15$, $\frac{1}{2}(a - x) \cdot \frac{1}{2}v = 14$. Odtiaľ $xv = 30$, $av - xv = 56$. Sčítaním oboch rovností nájdeme obsah rovnobežníka $ABCD$: $S_{ABCD} = av = 86\text{ cm}^2$. Obsah štvoruholníka $FECD$ je teda $S_{FECD} = S_{ABCD} - (S_{AFD} + S_{FBE}) = 57\text{ cm}^2$.



Obr. 1:



Obr. 2:

Iné riešenie*. Trojuholníky BEF a ECF majú spoločnú výšku z vrcholu F a zhodné základne BE a EC . Preto sú obsahy oboch trojuholníkov rovnaké. Z obr. 2 vidíme, že obsah trojuholníka CDF je polovicou obsahu rovnobežníka $ABCD$ (oba útvary majú spoločnú základňu CD a rovnakú výšku). Druhú polovicu tvorí súčet obsahov trojuholníkov AFD a BCF . Odtiaľ $S_{FECD} = S_{ECF} + S_{CDF} = S_{ECF} + (S_{AFD} + S_{BCF}) = S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\text{ cm}^2$.

Iné riešenie*. Do rovnobežníka dokreslíme úsečky FG a EH rovnobežné so stranami BC a AB tak, ako znázorňuje obr. 3. Rovnobežníky $AFGD$ a $FBEH$ sú svojimi uhlopriečkami DF a EF rozde-



Obr. 3:

lené na dvojice zhodných trojuholníkov. Takže $S_{GDF} = S_{AFD} = 15\text{ cm}^2$ a $S_{HFE} = S_{BEF} = 14\text{ cm}^2$. Zo zhodnosti rovnobežníkov $HECG$ a $FBEH$ navyše ľahko usúdime, že všetky štyri trojuholníky FBE , EHF , HEC a CGH sú zhodné, takže obsah štvoruholníka $FECD$ je $S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\text{ cm}^2$.

Komentár. Úloha je zaradená ako rozcvička pred komplexnejšími problémami, nie je totiž veľmi náročná na vyriešenie. Pekne tiež demonštruje, že niekedy nám vhodný prístup, náčrtok alebo správne nakreslená priamka v obrázku riešenie úlohy významne zjednoduší.

Úloha 12.2. [62-II-2] Vnútri rovnobežníka $ABCD$ je daný bod K a v páse medzi rovnobežkami BC a AD v polrovine opačnej k CDA je daný bod L . Obsahy trojuholníkov ABK , BCK , DAK a DCL sú $S_{ABK} = 18 \text{ cm}^2$, $S_{BCK} = 8 \text{ cm}^2$, $S_{DAK} = 16 \text{ cm}^2$, $S_{DCL} = 36 \text{ cm}^2$. Vypočítajte obsahy trojuholníkov CDK a ABL .

Riešenie*. Trojuholníky ABK a CDK majú zhodné strany AB a CD a súčet ich výšok v_1 a v_2 (vzdialeností bodu K od priamky AB , resp. CD) je rovný výške v rovnobežníku $ABCD$ (vzdialenosti rovnobežných priamok AB a CD , obr. 4). Preto súčet ich obsahov dáva polovicu súčtu obsahu daného rovnobežníka:

$$S_{ABK} + S_{CDK} = \frac{1}{2}|AB|v_1 + \frac{1}{2}|CD|v_2 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v_1 + v_2) = \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Podobne aj $S_{BCK} + S_{DAK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, teda

$$S_{CDK} = S_{BCK} + S_{DAK} - S_{ABK} = 6 \text{ cm}^2.$$

Trojuholníky ABL a DCL majú zhodné strany AB a CD . Ak v_3 označuje príslušnú výšku druhého



Obr. 4:

z nich, je výška prvého z nich rovná $v + v_3$, takže pre rozdiel obsahov týchto trojuholníkov platí

$$\begin{aligned} S_{ABL} - S_{DCL} &= \frac{1}{2}|AB| \cdot (v + v_3) - \frac{1}{2}|CD| \cdot v_3 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v + v_3 - v_3) = \\ &= \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{BCK} + S_{DAK}. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva

$$S_{ABL} = S_{BCK} + S_{DAK} + S_{DCL} = 60 \text{ cm}^2.$$

Komentár. Úloha precvičuje použitie tvrdenia, ktoré sme dokázali v prvom geometrickom seminári, a to, že ak majú dva trojuholníky základňu rovnakej dĺžky, potom ich obsahy sú v rovnakom pomere ako ich výšky na túto základňu.

Úloha 12.3. [64-S-2] Označme K a L postupne body strán BC a AC trojuholníka ABC , pre ktoré platí $|BK| = \frac{1}{3}|BC|$, $|AL| = \frac{1}{3}|AC|$. Nech M je priesečník úsečiek AK a BL . Vypočítajte pomer obsahov trojuholníkov ABM a ABC .

Riešenie*. Označme v výšku trojuholníka ABC na stranu AB , v_1 výšku trojuholníka ABM na stranu AB a v_2 výšku trojuholníka KLM na stranu KL (obr. 5). Z podobnosti trojuholníkov LKC a ABC (zaručenej vetou *sus*) vyplýva, že $|KL| = \frac{2}{3}|AB|$. Z porovnania ich výšok zo spoločného vrcholu C vidíme, že výška v trojuholníka ABC je rovná trojnásobku vzdialenosti pričky KL od strany AB , teda $v = 3(v_1 + v_2)$. Keďže AK a BL sú pričky rovnobežiek KL a AB , vyplýva zo zhodnosti prislúchajúcich striedavých uhlov podobnosť trojuholníkov ABM a KLM . Keďže $|KL| = \frac{2}{3}|AB|$, je tiež $v_2 = \frac{2}{3}v_1$, a



Obr. 5:

preto $v_1 + v_2 = \frac{5}{3}v_1$, čiže

$$v = 3(v_1 + v_2) = 5v_1.$$

Trojuholníky ABM a ABC majú spoločnú stranu AB , preto ich obsahy sú v pomere výšok na túto stranu, takže obsah trojuholníka ABC je päťkrát väčší ako obsah trojuholníka ABM .

Komentár. Ďalšia úloha, ktorá precvičuje rovnaké tvrdenie ako predchádzajúca. Pomery výšok je tentoraz potrebné určiť z podobnosti trojuholníkov. Tu sa teda uplatnia znalosti precvičované na minulom seminárnom stretnutí.

Úloha 12.4. [64-II-3] Daný je lichobežník $ABCD$ so základňami AB , CD , pričom $2|AB| = 3|CD|$.

- Nájdite bod P vnútri lichobežníka tak, aby obsahy trojuholníkov ABP a CDP boli v pomere $3 : 1$ a aj obsahy trojuholníkov BCP a DAP boli v pomere $3 : 1$.
- Pre nájdenny bod P určte postupný pomer obsahov trojuholníkov ABP , BCP , CDP a DAP .

Riešenie*. Predpokladajme, že bod P má požadované vlastnosti. Priamka rovnobežná so základňami lichobežníka a prechádzajúca bodom P pretína ramená AD a BC postupne v bodoch M a N (obr. 6). Označme v výšku daného lichobežníka, v_1 výšku trojuholníka CDP a v_2 výšku trojuholníka ABP . a) Keďže obsahy trojuholníkov ABP a CDP sú v pomere $3 : 1$, platí

$$\frac{|AB|v_2}{2} : \frac{|CD|v_1}{2} = 3 : 1, \quad \text{čiže} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Z vyznačených dvojíc podobných pravouhlých trojuholníkov vyplýva, že v práve určenom pomere $2 : 1$ výšok v_2 a v_1 delí aj bod M rameno AD a bod N rameno BC (v prípade pravého uhla pri jednom



Obr. 6:

z vrcholov A či B je to zrejme rovno). Tým je konštrukcia bodov M a N , a teda aj úsečky MN určená. Teraz zistíme, v akom pomere ju delí uvažovaný bod P .

Keďže obsahy trojuholníkov BCP a DAP sú v pomere $3 : 1$, platí

$$\left(\frac{|NP|v_1}{2} + \frac{|NP|v_2}{2}\right) : \left(\frac{|MP|v_1}{2} + \frac{|MP|v_2}{2}\right) = 3 : 1,$$

$$\frac{|NP|(v_1 + v_2)}{2} : \frac{|MP|(v_1 + v_2)}{2} = 3 : 1, \quad |NP| : |MP| = 3 : 1.$$

Tým je konštrukcia (jediného) vyhovujúceho bodu P úplne opísaná.

b) Doplňme trojuholník DAC na rovnobežník $DAXC$. Jeho strana CX delí priečku MN na dve časti, a keďže $v_1 = \frac{1}{3}v$, môžeme dĺžku priečky MN vyjadriť ako $|MN| = |MY| + |YN| = |AX| + \frac{1}{3}|XB| = |CD| + \frac{1}{3}(|AB| - |CD|) = \frac{1}{3}|AB| + \frac{2}{3}|CD| = \frac{7}{6}|CD|$, lebo podľa zadania platí $|AB| = \frac{3}{2}|CD|$. Preto

$$|MP| = \frac{1}{4}|MN| = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{6}|CD| = \frac{7}{24}|CD|,$$

takže pre pomer obsahov trojuholníkov CDP a DAP platí

$$\frac{|CD|v_1}{2} : \frac{|MP|(v_1 + v_2)}{2} = (|CD|v_1) : \left(\frac{7}{24} \cdot |CD| \cdot 3v_1\right) = 1 : \frac{7}{8} = 8 : 7.$$

Pomer obsahov trojuholníkov BCP a CDP je teda $21 : 8$ a pomer obsahov trojuholníkov ABP a BCP je tak $24 : 21$. Postupný pomer obsahov trojuholníkov ABP , BCP , CDP a DAP je preto $24 : 21 : 8 : 7$.

Komentár. Táto komplexná úloha je vrcholom tohto seminárneho stretnutia. Vyžaduje umnú prácu s pomermi obsahov, podobnými trojuholníkmi aj netriviálny nápad doplnenia trojuholníka DAC na rovnobežník. Je tak vhodné skôr než samostatne úlohu riešiť spoločne na tabuľu. Študentom tiež pripomenieme, že podobne ako v úvodnej úlohe, aj tu našlo vhodné rozdelenie zadaného útvaru svoje opodstatnenie a prispelo k úspešnému rozklúsknutiu problému.

Úloha 12.5. [62-I-6] Vnútri pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ s obsahom 30 cm^2 je zvolený bod M . Obsahy trojuholníkov ABM a BCM sú postupne 3 cm^2 a 2 cm^2 . Určte obsahy trojuholníkov CDM , DEM , EFM a FAM .

Riešenie*. Úloha je o obsahu šiestich trojuholníkov, na ktoré je daný pravidelný šesťuholník rozdelený spojnicami jeho vrcholov s bodom M (obr. 7). Celý šesťuholník s daným obsahom, ktorý označíme S , možno rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov s obsahom $S/6$ (obr. 8). Ak označíme r ich stranu, v vzdialenosť rovnobežiek AB , CD a v_1 vzdialenosť bodu M od priamky AB , dostaneme

$$S_{ABM} + S_{EDM} = \frac{1}{2}rv_1 + \frac{1}{2}r(v - v_1) = \frac{1}{2}rv = \frac{S}{3},$$

lebo $S/3$ je súčet obsahov dvoch vyfarbených rovnostranných trojuholníkov. Vďaka symetrii majú tú istú hodnotu $S/3$ aj súčty $S_{BCM} + S_{EFM}$ a $S_{CDM} + S_{FAM}$. Odtiaľ už dostávame prvé dva neznáme



Obr. 7:



Obr. 8:

obsahy $S_{DEM} = S/3 - S_{ABM} = 7 \text{ cm}^2$ a $S_{EFM} = S/3 - S_{BCM} = 8 \text{ cm}^2$. Ako určiť zvyšné dva obsahy S_{CDM} a S_{FAM} , keď zatiaľ poznáme len ich súčet $S/3$? Všimnime si, že súčet zadaných obsahov trojuholníkov ABM a BCM má významnú hodnotu $S/6$, ktorá je aj obsahom trojuholníka ABC (to vyplýva opäť z obr. 8). Taká zhoda obsahov znamená práve to, že bod M leží na uhlopriečke AC . Trojuholníky ABM a BCM tak majú zhodné výšky zo spoločného vrcholu B a to isté platí aj pre výšky trojuholníkov CDM a FAM z vrcholov F a D (t.j. bodov, ktoré majú od priamky AC rovnakú vzdialenosť). Pre pomery obsahov týchto dvojíc trojuholníkov tak dostávame

$$\frac{S_{CDM}}{S_{FAM}} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{S_{BCM}}{S_{ABM}} = \frac{2}{3}.$$

V súčte $S_{CDM} + S_{FAM}$ majúcom hodnotu $S/3$ sú teda sčítance v pomere $2 : 3$. Preto $S_{CDM} = 4 \text{ cm}^2$ a $S_{FAM} = 6 \text{ cm}^2$.

Komentár. Úloha je odľahčeným a netradičným príkladom využitia princípu, na ktorom sme stavali celé toto seminárne stretnutie: súčty obsahov „protiľahlých“ trojuholníkov sú stále rovnaké. Posledná časť úlohy vyžaduje netriviálny nápad a študenti tak možno budú potrebovať malú radu.

Domáca práca

Úloha 12.6. [65-I-4] Vnútri strán AB , AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body E , F , pričom $EF \parallel BC$. Úsečka EF je potom rozdelená bodom D tak, že platí

$$p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|.$$

- Ukážte, že pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD je pre $p = 2 : 3$ rovnaký ako pre $p = 3 : 2$.
- Zdôvodnite, prečo pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD má hodnotu aspoň 4.

Riešenie*. Pre spoločnú hodnotu p oboch pomerov zo zadania platí

$$|ED| = p|DF| \quad \text{a zároveň} \quad |BE| = p|EA|. \quad (1)$$

Pred vlastným riešením oboch úloh a) a b) vyjadríme pomocou daného čísla p skúmaný pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD . Ten je rovný – keďže trojuholníky majú spoločnú stranu AB – pomeru dĺžok ich výšok CC_0 a DD_0 (obr. 9), ktorý je rovnaký ako pomer dĺžok úsečiek BC a ED , a to na základe podobnosti pravouhlých trojuholníkov BCC_0 a EDD_0 podľa vety *uu* (uplatnenej vďaka



Obr. 9:

$BC \parallel ED$).¹ Platí teda rovnosť

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{|BC|}{|ED|}. \quad (2)$$

Vráťme sa teraz k rovnostiam 1, podľa ktorých

$$|EF| = (1+p)|DF| \quad \text{a} \quad |AB| = (1+p)|EA|,$$

a všimnime si, že trojuholníky ABC a AEF majú spoločný uhol pri vrchole A a zhodné uhly pri vrchole C a F (pretože $BC \parallel EF$), takže sú podľa vety *uu* podobné. Preto pre dĺžky ich strán platí

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|EF|}, \quad \text{čiže} \quad 1+p = \frac{|BC|}{(1+p)|DF|}, \quad \text{odkiaľ} \quad |BC| = (1+p)^2|DF|.$$

Keď vydelíme posledný vzťah hodnotou $|ED|$, ktorá je rovná $p|DF|$ podľa 1, získame podiel z pravej strany 2 a tým aj hľadané vyjadrenie

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{(1+p)^2}{p}. \quad (3)$$

a) Algebraickou úpravou zlomku zo vzťahu 3

$$\frac{(1+p)^2}{p} = \frac{1+2p+p^2}{p} = 2+p+\frac{1}{p}$$

zistujeme, že hodnota pomeru $S_{ABC} : S_{ABD}$ je pre akékoľvek dve navzájom prevrátené hodnoty p a $1/p$ rovnaká, teda nielen pre hodnoty $2/3$ a $3/2$, ako sme mali ukázať.

b) Podľa vzťahu 3 je našou úlohou overiť pre každé $p > 0$ nerovnosť

$$\frac{(1+p)^2}{p} \geq 4, \quad \text{čiže} \quad (1+p)^2 \geq 4p.$$

To je však zrejmé ekvivalentné s nerovnosťou $(1-p)^2 \geq 0$, ktorá skutočne platí, nech je základ druhej mocniny akýkoľvek (rovnosť nastane jedine pre $p = 1$).

Doplňujúce zdroje a materiály

Rovnako ako v predchádzajúcich geometrických seminároch ostávame v odporúčaníach verní publikáciám [?] a [?].

Matematický seminár pre talentovaných študentov
https://pancelka.github.io/diplomova_laska

¹V prípade pravých uhlov ABC a AED to platí triviálne, lebo vtedy $B = C_0$ a $E = D_0$.