

## Seminár 11: Geometria II – podobné trojuholníky a Pytagorova veta

### Úlohy a riešenia

**Úloha 11.1.** [66-S-3] Päta  $P$  výšky z vrcholu  $C$  v trojuholníku  $ABC$  delí stranu  $AB$  v pomere  $|AP| : |PB| = 1 : 3$ . V rovnakom pomere sú aj obsahy štvorcov nad jeho stranami  $AC$  a  $BC$ . Dokážte, že trojuholník  $ABC$  je pravouhlý.

**Úloha 11.2.** [66-I-3] Päta výšky z vrcholu  $C$  v trojuholníku  $ABC$  delí stranu  $AB$  v pomere  $1 : 2$ . Dokážte, že pri zvyčajnom označení dĺžok strán trojuholníka  $ABC$  platí nerovnosť

$$3|a - b| < c.$$

**Úloha 11.3.** [63-S-3] Daný je trojuholník  $ABC$  s pravým uhlom pri vrchole  $C$ . Stredom  $I$  kružnice trojuholníku vpísanej vedieme rovnobežky so stranami  $CA$  a  $CB$ , ktoré pretnú preponu postupne v bodoch  $X$  a  $Y$ . Dokážte, že platí  $|AX|^2 + |BY|^2 = |XY|^2$ .

**Úloha 11.4.** [58-S-2] V pravouhlom trojuholníku  $ABC$  označíme  $P$  päť výšky z vrcholu  $C$  na preponu  $AB$ . Priesečník úsečky  $AB$  s priamkou, ktorá prechádza vrcholom  $C$  a stredom kružnice vpísanej trojuholníku  $PBC$ , označíme  $D$ . Dokážte, že úsečky  $AD$  a  $AC$  sú zhodné.

**Úloha 11.5.** [64-I-4] Označíme  $E$  stred základne  $AB$  lichobežníka  $ABCD$ , v ktorom platí  $|AB| : |CD| = 3 : 1$ . Uhlopriečka  $AC$  pretína úsečky  $ED$ ,  $BD$  postupne v bodoch  $F$ ,  $G$ . Určte postupný pomer  $|AF| : |FG| : |GC|$ .

**Úloha 11.6.** [63-I-4] Vo štvorci  $ABCD$  označíme  $K$  stred strany  $AB$  a  $L$  stred strany  $AD$ . Úsečky  $KD$  a  $LC$  sa pretínajú v bode  $M$  a rozdeľujú štvorec na dva trojuholníky a dva štvoruholníky. Vypočítajte ich obsahy, ak úsečka  $LM$  má dĺžku 1 cm.

**Úloha 11.7.** [65-II-3] V pravouhlom lichobežníku  $ABCD$  s pravým uhlom pri vrchole  $A$  základne  $AB$  je bod  $K$  priesečníkom výšky  $CP$  lichobežníka s jeho uhlopriečkou  $BD$ . Obsah štvoruholníka  $APCD$  je polovicou obsahu lichobežníka  $ABCD$ . Určte, akú časť obsahu trojuholníka  $ABC$  zaberá trojuholník  $BCK$ .

**Úloha 11.8.** [58-I-2] Pravouhlému trojuholníku  $ABC$  s preponou  $AB$  je opísaná kružnica. Päť kolmíc z bodov  $A$ ,  $B$  na dotyčnicu k tejto kružnici v bode  $C$  označíme  $D$ ,  $E$ . Vyjadrite dĺžku úsečky  $DE$  pomocou dĺžok odvesien trojuholníka  $ABC$ .

**Úloha 11.9.** [58-II-2] V pravouhlom trojuholníku  $ABC$  označíme  $P$  päť výšky z vrcholu  $C$  na preponu  $AB$  a  $D$ ,  $E$  stredy kružníc vpísaných postupne trojuholníkom  $APC$ ,  $CPB$ . Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku  $ABC$  je priesečníkom výšok trojuholníka  $CDE$ .