

## Seminár 31: Geometria VII – stredové, obvodové, úsekové uhly, tetivové štvoruholníky

### Ciele

Zopakovať, príp. študentov zoznámiť s vlastnosťami stredových, obvodových a úsekových uhlov a ich využitím pri riešení úloh.

### Úvodný komentár

Predtým, ako sa so študentmi pustíme do riešenia úloh, je vhodné predstaviť, príp. spoločne zopakovať vlastnosti uhlov, ktorými sa budeme v seminári zaoberať. Vhodným materiálom je [?], kapitola 8.

### Úlohy a riešenia

**Úloha 31.1.** [B-66-II-3] V rovine sú dané kružnice  $k$  a  $l$ , ktoré sa pretínajú v bodoch  $E$  a  $F$ . Dotyčnica ku kružnici  $l$  zostrojená v bode  $E$  pretína kružnicu  $k$  v bode  $H$  ( $H \neq E$ ). Na oblúku  $EH$  kružnice  $k$ , ktorý neobsahuje bod  $F$ , zvolíme bod  $C$  ( $E \neq C \neq H$ ) a priesečník priamky  $CE$  s kružnicou  $l$  označme  $D$  ( $D \neq E$ ). Dokážte, že trojuholníky  $DEF$  a  $CHF$  sú podobné.

**Riešenie\*.** Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou  $HF$  kružnice  $k$  vyplýva  $|\angle HCF| = |\angle HEF|$ . Uhol  $HEF$  je zároveň úsekovým uhlom prislúchajúcim tetive  $EF$  kružnice  $l$ , ktorý je však zhodný s obvodovým uhlom  $EDF$  (obr. 1). Celkovo tak platí

$$|\angle HCF| = |\angle HEF| = |\angle EDF|. \quad (1)$$



Obr. 1:

Vzhľadom na to, že  $CEFH$  je tetivový štvoruholník, je jeho vnútorný uhol pri vrchole  $H$  zhodný s vonkajším uhlom pri jeho protiľahlom vrchole  $E$ . Platí teda

$$|\angle CHF| = |\angle DEF|. \quad (2)$$

Z rovností 1 a 2 vyplýva na základe vety *uu* podobnosť trojuholníkov  $DEF$  a  $CHF$ . Tým je dôkaz hotový.

**Komentár.** Úloha je relatívne jednoduchou aplikáciou poznatkov o stredových, obvodových a úsekových uhloch, preto dobre poslúži ako úvodná úloha seminára. Zároveň sa v úlohe vyskytuje spoločná tetiva dvoch kružníc, ktorá je prvkom mnohých geometrických úloh v kategórii B, takže je príjemné, že sa študenti s týmto prípadom zoznámia hneď na začiatku.

**Úloha 31.2.** [B-65-II-2] Daná je úsečka  $AB$ , jej stred  $C$  a vnútri úsečky  $AB$  bod  $D$ . Kružnice  $k(C, |BC|)$  a  $m(B, |BD|)$  sa pretínajú v bodoch  $E$  a  $F$ . Zdôvodnite, prečo je polpriamka  $FD$  osou uhla  $AFE$ .

**Riešenie\*.** Kružnica  $k$  je Tálesovou kružnicou nad priemerom  $AB$ , takže trojuholník  $ABF$  je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole  $F$ . Inými slovami, priamka  $AF$  je kolmá na polomer  $BF$  kružnice



Obr. 2:

$m$ , a preto sa priamka  $AF$  dotýka kružnice  $m$  v bode  $F$  (obr. 2). Z rovnosti úsekového uhla zovretého tetivou  $DF$  s dotyčnicou  $AF$  a obvodového uhla nad tou istou tetivou máme (ako už je vyznačené na obrázku)

$$|\angle AFD| = |\angle DEF|.$$

Zo súmernosti úsečky  $EF$  podľa osi  $AB$  tak vyplýva

$$|\angle AFD| = |\angle DEF| = |\angle DFE|,$$

čo znamená, že  $FD$  je osou uhla  $AFE$ .

**Iné riešenie\*.** Označme  $\beta$  veľkosť uhla  $ABF$  a dopočítajme veľkosti uhlov  $DFE$  a  $AFE$ . Trojuholník  $DBF$  je rovnoramenný, lebo jeho ramená  $BD$  a  $BF$  sú polomery kružnice  $m$ , preto

$$|\angle DFB| = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Keďže podobne aj trojuholník  $EBF$  je rovnoramenný s osou  $BD$ , platí

$$|\angle EFB| = 90^\circ - \beta.$$

Spojením oboch predchádzajúcich rovností tak dostávame

$$|\angle DFE| = |\angle DFB| - |\angle EFB| = \frac{\beta}{2}.$$

Z vlastností Tálesovej kružnice  $k$  nad priemerom  $AB$  vieme, že uhol  $AFB$  je pravý. Pritom jeho časť uhol  $EFB$  má, ako sme už zistili, veľkosť  $90^\circ - \beta$ , takže jeho druhá časť, uhol  $AFE$ , má veľkosť  $\beta$ , čo je presne dvojnásobok veľkosti uhla  $DFE$ . Tým sme dokázali, že priamka  $FD$  je osou uhla  $AFE$ .

**Iné riešenie\*.** Nad oblúkom  $AE$  kružnice  $k$  sa zhodujú uhly  $ABE$  a  $AFE$  (obr. 3). Oblúku  $DE$  kružnice  $m$  prislúcha obvodový uhol  $DFE$  a stredový uhol  $DBE$ . Spolu tak dostávame

$$|\angle DFE| = \frac{1}{2}|\angle DBE| = \frac{1}{2}|\angle ABE| = \frac{1}{2}|\angle AFE|,$$

čo dokazuje, že  $FD$  je osou uhla  $AFE$ .

**Komentár.** Úlohu je možné riešiť viacerými rôznymi spôsobmi, preto je to opäť vhodný priestor na to, aby si študenti svoje riešenia porovnali a skúsili obhájiť pred spolužiakmi. V úlohe sa znova vyskytla spoločná tetiva dvoch kružníc, pekne tak nadväzuje na úlohu predchádzajúcu.



Obr. 3:

**Úloha 31.3.** [B-65-I-5] Vrcholy konvexného šesťuholníka  $ABCDEF$  ležia na kružnici, pričom  $|AB| = |CD|$ . Úsečky  $AE$  a  $CF$  sa pretínajú v bode  $G$  a úsečky  $BE$  a  $DF$  sa pretínajú v bode  $H$ . Dokážte, že úsečky  $GH$ ,  $AD$  a  $BC$  sú navzájom rovnobežné.

**Riešenie\*.** Najskôr ukážeme, že  $AD \parallel BC$ . Keďže  $|AB| = |CD|$ , sú obvodové uhly nad tetivami  $AB$  a  $CD$  kružnice opísanej šesťuholníku  $ABCDEF$  zhodné (obr. 4), teda  $|\angle ADB| = |\angle DBC|$ ; to sú však striedavé uhly pričky  $BD$  priamok  $AD$  a  $BC$ , preto  $AD \parallel BC$ . Ostáva ukázať, že  $GH \parallel AD$ . Využitím zhodných obvodových uhlov nad tetivami  $AB$  a  $CD$  pri vrcholoch  $E$  a  $F$  dostávame



Obr. 4:

$$|\angle GEH| = |\angle AEB| = |\angle CFD| = |\angle GFH|,$$

čo znamená, že body  $E$ ,  $F$ ,  $G$  a  $H$  ležia na jednej kružnici, pretože vrcholy zhodných uhlov  $GEH$  a  $GFH$  ležia v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou  $GH$ . Z toho vyplýva, že uhly  $EFH$  a  $EGH$  nad jej tetivou  $EH$  sú zhodné. To spolu so zhodnosťou uhlov  $EFD$  a  $EAD$  nad tetivou  $ED$  pôvodnej kružnice (obr. 4) vedie na zhodnosť súhlasných uhlov  $EGH$  a  $EAD$  pričky  $AE$  priamok  $GH$  a  $AD$ , ktoré sú teda naozaj rovnobežné. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

**Komentár.** Umiestnenie vrcholov šesťuholníka na kružnici priam nabáda, aby študenti hľadali dvojice rovnakých uhlov, ktoré im potom pomôžu vyvodiť závery o (ne)rovnobežnosti skúmaných úsečiek. Zároveň úloha obsahuje zaujímavú druhú časť, kedy objavíme, že body  $E, F, G, H$  ležia na jednej kružnici.

**Úloha 31.4.** [B-58-I-5] Trojuholníku  $ABC$  je opísaná kružnica  $k$ . Os strany  $AB$  pretne kružnicu  $k$  v bode  $K$ , ktorý leží v polrovine opačnej k polrovine  $ABC$ . Osi strán  $AC$  a  $BC$  pretnú priamku  $CK$  postupne v bodoch  $P$  a  $Q$ . Dokážte, že trojuholníky  $AKP$  a  $KBQ$  sú zhodné.

**Riešenie\*.** Označme  $\alpha, \beta, \gamma$  zvyčajným spôsobom veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka  $ABC$  (obr. 5). Bod  $K$  leží na osi úsečky  $AB$ , preto  $|AK| = |KB|$ . Trojuholník  $AKB$  je rovnoramenný so základňou  $AB$ , jeho vnútorné uhly pri vrchoch  $A$  a  $B$  sú teda zhodné. Podľa vety o obvodových



Obr. 5:

uhlov sú zhodné aj uhly  $BCK$  a  $BAK$ , resp.  $ACK$  a  $ABK$ , preto sú zhodné aj uhly  $BCK$  a  $ACK$ . Polpriamka  $CK$  je teda osou uhla  $ACB$ :

$$|\angle ACK| = |\angle BCK| = \frac{\gamma}{2}.$$

Keďže bod  $P$  leží na osi strany  $AC$ , je trojuholník  $ACP$  rovnoramenný a jeho vnútorné uhly pri základni  $AC$  majú veľkosť  $\frac{1}{2}\gamma$ , takže jeho vonkajší uhol  $APK$  pri vrchole  $P$  má veľkosť  $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma = \gamma$ . Rovnako z rovnoramenného trojuholníka  $BCQ$  odvodíme, že aj veľkosť uhla  $BQK$  je  $\gamma$ . Podľa vety o obvodových uhloch sú zhodné uhly  $ABC$  a  $AKC$ , teda uhol  $AKC$  (čiže uhol  $AKP$ ) má veľkosť  $\beta$  a – celkom analogicky – uhol  $BKQ$  má veľkosť  $\alpha$ .

V každom z trojuholníkov  $AKP$  a  $BKQ$  už poznáme veľkosti dvoch vnútorných uhlov ( $\beta, \gamma$ , resp.  $\alpha, \gamma$ ), takže vidíme, že zostávajúce uhly  $KAP$  a  $KBQ$  majú veľkosti  $\alpha$ , resp.  $\beta$ .

Z predošlého vyplýva, že trojuholníky  $AKP$  a  $BKQ$  sú zhodné podľa vety *usu*, lebo majú zhodné strany  $AK$  a  $KB$  aj obe dvojice k nim príslušných vnútorných uhlov.

K uvedenému postupu dodajme, že výpočet uhlov  $KAP$  a  $KBQ$  cez uhly  $APK$  a  $BQK$  možno obísť takto: zhodnosť uhlov  $KAP$  a  $BAC$  (resp.  $KBQ$  a  $ABC$ ) vyplýva zo zhodnosti uhlov  $KAB$  a  $PAC$  (resp.  $KBA$  a  $QBC$ ).

**Komentár.** Posledná úloha seminára pekne kombinuje vlastnosti uhlov a zhodnosť trojuholníkov, je tak dôstojným zakončením tohto geometrického stretnutia.

## Domáca práca