# Seminár 31: Geometria VII – stredové, obvodové, úsekové uhly, tetivové štvoruholníky

## Ciele

Zopakovať, príp. študentov zoznámiť s vlastnosťami stredových, obvodových a úsekových uhlov a ich využitím pri riešení úloh.

### Úvodný komentár

Predtým, ako sa so študentmi pustíme do riešenia úloh, je vhodné predstaviť, príp. zopakovať vlastnosti uhlov, ktorými sa budeme v seminári zaoberať. Vhodným materiálom je [?], kapitola 8.

## Úlohy a riešenia

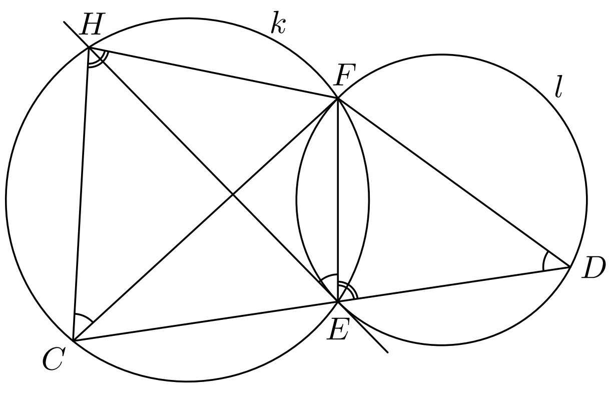
**Úloha 31.1.** [B-65-I-5-D1] Daná je tetiva $AB$ kružnice $k$ so stredom v bode $S$. Na úsečke $AB$ zvoľme bod $M$ a priesečník kružnice opísanej trojuholníku $AMS$ s kružnicou k označme $C$. Dokážte, že uhly $MCS$ a $MBS$ sú zhodné.

**Riešenie*.** Stačí využiť rovnosť uhlov v rovnoramennom trojuholníku $ABS$ a obvodové uhly nad $MS$ v kružnici opísanej trojuholníku $AMS$.

**Úloha 31.2.** [B-66-II-3] V rovine sú dané kružnice $k$ a $l$, ktoré sa pretínajú v bodoch $E$ a $F$. Dotyčnica ku kružnici $l$ zostrojená v bode $E$ pretína kružnicu $k$ v bode $H$ ($H \neq E$). Na oblúku $EH$ kružnice $k$, ktorý neobsahuje bod $F$, zvoľme bod $C$ ($E \neq C \neq H$) a priesečník priamky $CE$ s kružnicou $l$ označme $D$ ($D \neq E$). Dokážte, že trojuholníky $DEF$ a $CHF$ sú podobné.

**Riešenie*.** Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou $HF$ kružnice k vyplýva $|\measuredangle HCF| = |\measuredangle HEF|$. Uhol $HEF$ je zároveň úsekovým uhlom prislúchajúcim tetive $EF$ kružnice $l$, ktorý je však zhodný s obvodovým uhlom $EDF$ (obr. 1). Celkovo tak platí

$$|\measuredangle HCF| = |\measuredangle HEF| = |\measuredangle EDF|. \tag{1}$$




Obr. 1:

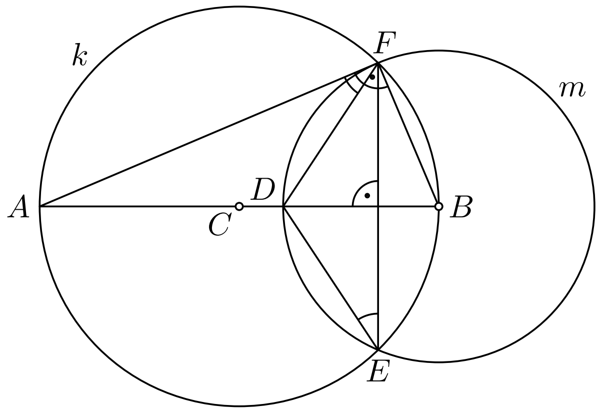
Vzhľadom na to, že $CEFH$ je tetivový štvoruholník, je jeho vnútorný uhol pri vrchole $H$ zhodný s vonkajším uhlom pri jeho protiľahlom vrchole $E$. Platí teda

$$|\measuredangle CHF| = |\measuredangle DEF|. \tag{2}$$

Z rovností 1 a 2 vyplýva na základe vety *uu* podobnosť trojuholníkov $DEF$ a $CHF$. Tým je dôkaz hotový.

**Úloha 31.3.** [B-65-II-2] Daná je úsečka $AB$, jej stred $C$ a vnútri úsečky $AB$ bod $D$. Kružnice $k(C, |BC|)$ a $m(B, |BD|)$ sa pretínajú v bodoch $E$ a $F$. Zdôvodnite, prečo je polpriamka $FD$ osou uhla $AFE$.

**Riešenie*.** Kružnica $k$ je Tálesovou kružnicou nad priemerom $AB$, takže trojuholník $ABF$ je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole $F$. Inými slovami, priamka $AF$ je kolmá na polomer $BF$ kružnice




Obr. 2:

$m$, a preto sa priamka $AF$ dotýka kružnice $m$ v bode $F$ (obr. 2). Z rovnosti úsekového uhla zovretého tetivou $DF$ s dotyčnicou $AF$ a obvodového uhla nad tou istou tetivou máme (ako už je vyznačené na obrázku)

$$|\measuredangle AFD| = |\measuredangle DEF|.$$

Zo súmernosti úsečky $EF$ podľa osi $AB$ tak vyplýva

$$|\measuredangle AFD| = |\measuredangle DEF| = |\measuredangle DFE|,$$

čo znamená, že $FD$ je osou uhla $AFE$.

**Iné riešenie*.** Označme $\beta$ veľkosť uhla $ABF$ a dopočítajme veľkosti uhlov $DFE$ a $AFE$. Trojuholník $DBF$ je rovnoramenný, lebo jeho ramená $BD$ a $BF$ sú polomery kružnice $m$, preto

$$|\measuredangle DFB| = \frac{1}{2}(180° - \beta) = 90° - \frac{\beta}{2}.$$

Keďže podobne aj trojuholník $EBF$ je rovnoramenný s osou $BD$, platí

$$|\measuredangle EFB| = 90° - beta.$$

Spojením oboch predchádzajúcich rovností tak dostávame

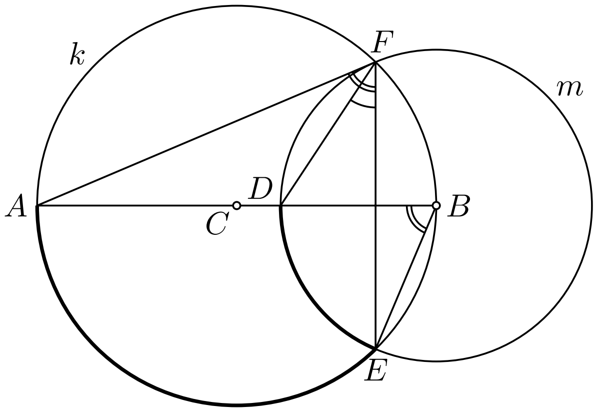
$$|\measuredangle DFE| = |\measuredangle DFB| - |\measuredangle EFB| = \frac{\beta}{2}.$$

Z vlastností Tálesovej kružnice $k$ nad priemerom $AB$ vieme, že uhol $AFB$ je pravý. Pritom jeho časť uhol $EFB$ má, ako sme už zistili, veľkosť $90° - \beta$, takže jeho druhá časť, uhol $AFE$, má veľkosť $\beta$, čo je presne dvojnásobok veľkosti uhla $DFE$. Tým sme dokázali, že priamka $FD$ je osou uhla $AFE$.

**Iné riešenie*.** Nad oblúkom $AE$ kružnice $k$ sa zhodujú uhly $ABE$ a $AFE$ (obr. 3). Oblúku $DE$ kružnice $m$ prislúcha obvodový uhol $DFE$ a stredový uhol $DBE$. Spolu tak dostávame

$$|\measuredangle DFE| = \frac{1}{2}|\measuredangle DBE| = \frac{1}{2}|\measuredangle ABE| = \frac{1}{2}|\measuredangle AFE|,$$

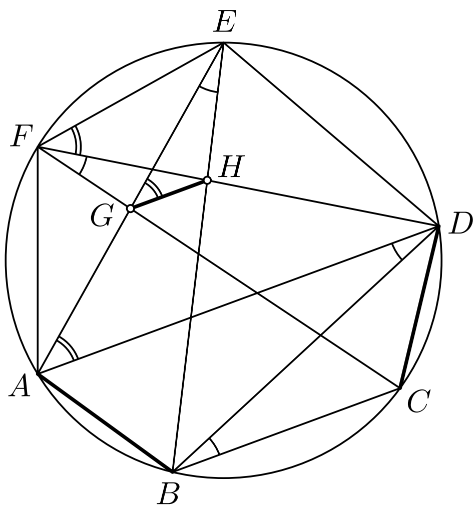
čo dokazuje, že $FD$ je osou uhla $AFE$.




Obr. 3:

**Úloha 31.4.** [B-65-I-5] Vrcholy konvexného šesťuholníka $ABCDEF$ ležia na kružnici, pričom $|AB| = |CD|$. Úsečky $AE$ a $CF$ sa pretínajú v bode $G$ a úsečky $BE$ a $DF$ sa pretínajú v bode $H$. Dokážte, že úsečky $GH$, $AD$ a $BC$ sú navzájom rovnobežné.

**Riešenie*.** Najskôr ukážeme, že $AD \parallel BC$. Keďže $|AB| = |CD|$, sú obvodové uhly nad tetivami $AB$ a $CD$ kružnice opísanej šesťuholníku $ABCDEF$ zhodné (obr. 4), teda $|\measuredangle ADB| = |\measuredangle DBC|$; to sú však striedavé uhly priečky $BD$ priamok $AD$ a $BC$, preto $AD \parallel BC$. Ostáva ukázať, že $GH \parallel AD$. Využitím zhodných obvodových uhlov nad tetivami $AB$ a $CD$ pri vrcholoch $E$ a $F$ dostávame



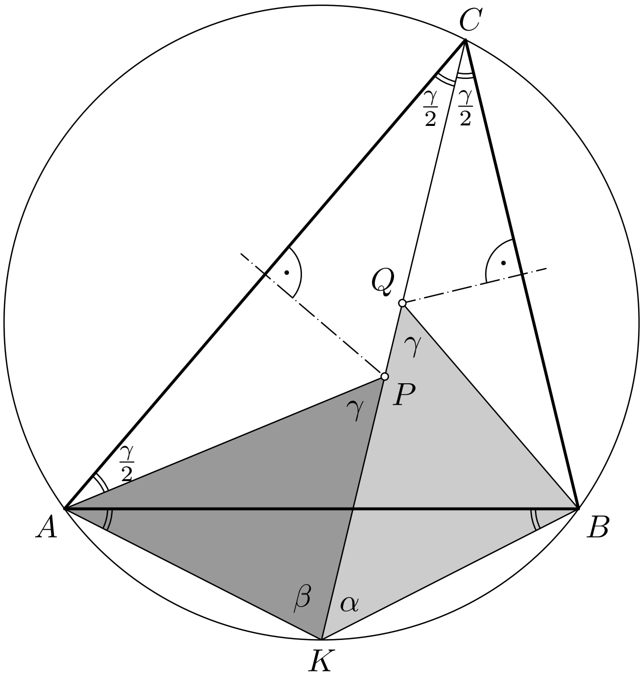

Obr. 4:

$$|\measuredangle GEH| = |\measuredangle AEB| = |\measuredangle CFD| = |\measuredangle GFH|,$$

čo znamená, že body $E$, $F$, $G$ a $H$ ležia na jednej kružnici, pretože vrcholy zhodných uhlov $GEH$ a $GFH$ ležia v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou $GH$. Z toho vyplýva, že uhly $EFH$ a $EGH$ nad jej tetivou $EH$ sú zhodné. To spolu so zhodnosťou uhlov $EFD$ a $EAD$ nad tetivou $ED$ pôvodnej kružnice (obr. 4) vedie na zhodnosť súhlasných uhlov $EGH$ a $EAD$ priečky $AE$ priamok $GH$ a $AD$, ktoré sú teda naozaj rovnobežné. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

**Úloha 31.5.** [B-58-I-5] Trojuholníku $ABC$ je opísaná kružnica $k$. Os strany $AB$ pretne kružnicu $k$ v bode $K$, ktorý leží v polrovine opačnej k polrovine $ABC$. Osi strán $AC$ a $BC$ pretnú priamku $CK$ postupne v bodoch $P$ a $Q$. Dokážte, že trojuholníky $AKP$ a $KBQ$ sú zhodné.

**Riešenie*.** Označme $\alpha, \beta, \gamma$ zvyčajným spôsobom veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka $ABC$ (obr. 5). Bod $K$ leží na osi úsečky $AB$, preto $|AK| = |KB|$. Trojuholník $AKB$ je rovnoramenný so základňou $AB$, jeho vnútorné uhly pri vrcholoch $A$ a $B$ sú teda zhodné. Podľa vety o obvodových




Obr. 5:

uhloch sú zhodné aj uhly $BCK$ a $BAK$, resp.$ACK$ a $ABK$, preto sú zhodné aj uhly $BCK$ a $ACK$. Polpriamka $CK$ je teda osou uhla $ACB$:

$$|\measuredangle ACK| = |\measuredangle BCK| = \frac{\gamma}{2}.$$

Keďže bod $P$ leží na osi strany $AC$, je trojuholník $ACP$ rovnoramenný a jeho vnútorné uhly pri základni $AC$ majú veľkosť $\frac{1}{2}\gamma$, takže jeho vonkajší uhol $APK$ pri vrchole $P$ má veľkosť $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma = \gamma$. Rovnako z rovnoramenného trojuholníka $BCQ$ odvodíme, že aj veľkosť uhla $BQK$ je $\gamma$. Podľa vety o obvodových uhloch sú zhodné uhly $ABC$ a $AKC$, teda uhol $AKC$ (čiže uhol $AKP$) má veľkosť $\beta$ a – celkom analogicky – uhol $BKQ$ má veľkosť $\alpha$.

V každom z trojuholníkov $AKP$ a $BKQ$ už poznáme veľkosti dvoch vnútorných uhlov ($\beta$, $\gamma$, resp. $\alpha$, $\gamma$), takže vidíme, že zostávajúce uhly $KAP$ a $KBQ$ majú veľkosti$\alpha$, resp. $\beta$.

Z predošlého vyplýva, že trojuholníky $AKP$ a $KBQ$ sú zhodné podľa vety *usu*, lebo majú zhodné strany $AK$ a $KB$ aj obe dvojice k nim priľahlých vnútorných uhlov.

K uvedenému postupu dodajme, že výpočet uhlov $KAP$ a $KBQ$ cez uhly $APK$ a $BQK$ možno obísť takto: zhodnosť uhlov $KAP$ a $BAC$ (resp. $KBQ$ a $ABC$) vyplýva zo zhodnosti uhlov $KAB$ a $PAC$ (resp. $KBA$ a $QBC$).

## Domáca práca