

## Seminár 18

### Téma

Algebraické výrazy a rovnice – zložitejšie rovnice a ich systémy

### Ciele

Zoznámiť študentov s ďalšími typmi rovníc a ich sústav (iracionálne koeficienty, dolná celá časť), tieto úlohy, spolu so slovnými úlohami precvičiť.

### Úlohy a riešenia

**Úloha 18.1.** [59-S-1] Ak zväčšíme čitateľ aj menovateľ istého zlomku o 1, dostaneme zlomok o hodnotu  $1/20$  väčší. Ak urobíme s väčším zlomkom rovnakú operáciu, dostaneme zlomok o hodnotu  $1/12$  väčší, ako bola hodnota zlomku na začiatku. Určte všetky tri zlomky.

**Riešenie\*.** Označme  $a/b$  pôvodný zlomok. Podľa zadania platia rovnosti

$$\frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b} = \frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b} = \frac{1}{12} \quad (a, b \in \mathbb{N}),$$

ktoré sú ekvivalentné so vzťahmi

$$20b(a+1) - 20a(b+1) = b(b+1) \quad \text{a} \quad 12b(a+2) - 12a(b+2) = b(b+2).$$

Tie upravíme na tvar  $19b - 20a = b^2$  a  $22b - 24a = b^2$ . Po odčítaní oboch vzťahov zistíme, že  $4a = 3b$ , čo po dosadení do druhej rovnosti dá  $22b - 18b = b^2$ , čiže  $b^2 = 4b$ . Vzhľadom na podmienku  $b \neq 0$  odtiaľ vyplýva  $b = 4$  a  $a = 3$ .

Hľadané zlomky sú teda  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{4}{5}$  a  $\frac{5}{6}$ .

**Iné riešenie.** Označme  $a/b$  pôvodný zlomok. Zo vzťahov

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{4 \cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4 \cdot 6}$$

možno odhadnúť, že riešením by mohlo byť  $b = 4$ . Potom

$$\frac{4(a+1) - 5a}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{4(a+2) - 6a}{4 \cdot 6} = \frac{1}{12},$$

čiže  $a = 3$ . Musíme sa však ešte presvedčiť, že úloha iné riešenie nemá. Podmienky úlohy vedú ku vzťahom

$$\frac{b-a}{b(b+1)} = \frac{1}{4 \cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{2(b-a)}{b(b+2)} = \frac{2}{4 \cdot 6}.$$

Z podielu ich ľavých a pravých strán potom vyplýva

$$\frac{b+2}{b+1} = \frac{6}{5},$$

čomu vyhovuje jedine  $b = 4$ .

*Poznámka.* V úplnom riešení nesmie chýbať vylúčenie možnosti  $b \neq 4$ . Napríklad z podobných rovností  $1/20 = 30/24 \cdot 25$  a  $1/12 = 52/24 \cdot 26$  by sme mohli hádať, že  $b = 24$ , čo riešením nie je.

**Komentár.** V prípade tejto úlohy je dôležité na začiatku správne zostaviť rovnosti. Ďalej je potrebné rovnosti vhodne upraviť. Úloha sa dá vyriešiť aj dosadzovacou metódou, tá však vedie k riešeniu kvadratickej rovnice, ktoré mnohí študenti na klasických hodinách ešte nepreberali. Preto je vhodné študentov upozorniť na trik s odčítaním rovníc.

**Komentár.** V nasledujúcej pasáži sa študenti zoznámia s funkciou dolná celá časť. Najprv vyriešia niekoľko pomocných úloh a na záver sa pustia do boja s úlohou domáceho kola.

**Úloha 18.2.** [59-I-3-N1] Určte  $\lfloor 0 \rfloor, \lfloor 3,5 \rfloor, \lfloor 2,1 \rfloor, \lfloor -4 \rfloor, \lfloor -3,9 \rfloor, \lfloor -0,2 \rfloor$ . Symbol  $\lfloor x \rfloor$  označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako číslo  $x$ , tzv. dolnú celú časť reálneho čísla  $x$ .

**Riešenie.**  $\lfloor 0 \rfloor = 0, \lfloor 3,5 \rfloor = 3, \lfloor 2,1 \rfloor = 2, \lfloor -4 \rfloor = -4, \lfloor -3,9 \rfloor = -4, \lfloor -0,2 \rfloor = -1$ .

**Úloha 18.3.** [59-I-3-N2] Nech  $a$  je celé číslo a  $t \in \langle 0; 1 \rangle$ . Určte  $\lfloor a \rfloor, \lfloor a+t \rfloor, \lfloor a+\frac{1}{2}t \rfloor, \lfloor a-t \rfloor, \lfloor a+2t \rfloor, \lfloor a-2t \rfloor$ .

**Riešenie.**  $\lfloor a \rfloor = a, \lfloor a+t \rfloor = a, \lfloor a+\frac{1}{2}t \rfloor = a, \lfloor a-t \rfloor = a$ , ak  $t = 0$ , resp.  $\lfloor a-t \rfloor = a-1$ , ak  $t \neq 0, \lfloor a+2t \rfloor = a$ , ak  $t < 0,5$ , resp.  $\lfloor a+2t \rfloor = a+1$ , ak  $t \geq 0,5, \lfloor a-2t \rfloor = a$ , ak  $t = 0$ , resp.  $\lfloor a-2t \rfloor = a-1$  ak  $t \leq 0,5$  a  $\lfloor a-2t \rfloor = a-2$  ak  $t > 0,5$ .

**Úloha 18.4.** [59-I-3] Určte všetky reálne čísla  $x$ , ktoré vyhovujú rovnici  $4x - 2\lfloor x \rfloor = 5$ .

**Riešenie\*.** Položme  $\lfloor x \rfloor = a$ , potom  $x = a + t$ , pričom  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ , a rovnicu  $4(a+t) - 2a = 5$  ekvivalentne upravíme na tvar  $a = \frac{5}{2} - 2t$ . Aby bolo číslo  $a$  celé, musí byť  $2t = k \cdot \frac{1}{2}$ , pričom  $k$  je nepárne číslo. Navyše  $2t \in \langle 0, 2 \rangle$ . Teda buď  $2t = \frac{1}{2}$  a  $a = 2$ , alebo  $2t = \frac{3}{2}$  a  $a = 1$ . Pôvodná rovnica má preto dve riešenia:  $x_1 = 2,25$  a  $x_2 = 1,75$ .

**Iné riešenie.** Rovnicu upravíme na tvar  $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$ . Taká rovnica bude splnená práve vtedy, keď číslo  $2x - \frac{5}{2}$  bude celé a bude spĺňať nerovnosti  $x - 1 < 2x - \frac{5}{2} \leq x$ , ktoré sú ekvivalentné s podmienkou  $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$ . Pre takéto  $x$  zrejme hodnoty výrazu  $2x - \frac{5}{2}$  vyplnia interval  $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ . V ňom ležia práve dve celé čísla 1 a 2, teda hľadané  $x$  nájdeme z rovníc  $2x - \frac{5}{2} = 1$  a  $2x - \frac{5}{2} = 2$ .

**Komentár.** Aj napriek tomu, že funkcia dolná celá časť nie je bežným učivom preberaným v školách, nemala by analýza úloh robiť žiakom veľké problémy.

**Úloha 18.5.** [57-I-3-N1] Určte všetky celé čísla  $n$ , pre ktoré nadobúda zlomok  $(4n+27)/(n+3)$  celočíselné hodnoty.

**Riešenie.** Zlomok  $(4n+27)/(n+3)$  upravíme na tvar  $n+15/(n+3)$ , teda číslo  $n+3$  musí deliť 15. Z toho dostávame  $n \in \{-18, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 12\}$ .

**Úloha 18.6.** [57-I-3] Máme určitý počet krabičiek a určitý počet guľôčok. Ak dáme do každej krabičky práve jednu guľôčku, ostane nám  $n$  guľôčok. Keď však necháme práve  $n$  krabičiek bokom, môžeme všetky guľôčky rozmiestniť tak, aby ich v každej zostávajúcej krabičke bolo práve  $n$ . Koľko máme krabičiek a koľko guľôčok?

**Riešenie.** Keď označíme  $x$  počet krabičiek a  $y$  počet guľôčok, dostaneme zo zadania sústavu rovníc

$$x + n = y \quad \text{a} \quad (x - n) \cdot n = y \quad (1)$$

s neznámymi  $x, y$  a  $n$  z oboru prirodzených čísel. Vylúčením neznámej  $y$  dostaneme rovnicu  $x + n = (x - n) \cdot n$ , ktorá pre  $n = 1$  nemá riešenie. Pre  $n \geq 2$  dostaneme

$$x = \frac{n^2 + n}{n - 1} = n + 2 + \frac{2}{n - 1}, \quad (2)$$

odkiaľ vidíme, že (prirodzené) číslo  $n - 1$  musí byť deliteľom čísla 2. Teda  $n \in \{2, 3\}$ . Prípustné hodnoty  $n$  dosadíme do (1) a sústavu vyriešime (možno tiež využiť vzťah (2)). Pre  $n = 2$  dostaneme  $x = 6, y = 8$  a pre  $n = 3$  určíme  $x = 6$  a  $y = 9$ .

*Skúška.* Majme šesť krabičiek a osem guľôčok. Keď do každej krabičky dáme práve jednu guľôčku, ostane  $n = 2$  guľôčok. Keď však odoberieme dve krabičky, môžeme do zostávajúcich štyroch rozdeliť guľôčky práve po dvoch. Podmienky úlohy sú teda splnené. Pre šesť krabičiek a deväť guľôčok urobíme skúšku rovnako ľahko.

*Záver.* Bud' máme šesť krabičiek a osem guľôčok, alebo šesť krabičiek a deväť guľôčok.

**Komentár.** Úloha, spolu s úlohou predchádzajúcou, je bežnou slovnou úlohou vedúcou na sústavu rovníc. Jej úspešné vyriešenie však vyžaduje umnú manipuláciu s výrazmi.

**Úloha 18.7.** [57-II-4] Nájdite všetky trojice celých čísel  $x, y, z$ , pre ktoré platí

$$x + y\sqrt{3} + z\sqrt{7} = y + z\sqrt{3} + x\sqrt{7}.$$

**Riešenie\*.** Rovnicu prepíšeme na tvar

$$x - y = (z - y)\sqrt{3} + (x - z)\sqrt{7}$$

a umocníme. Po jednoduchšej úprave dostaneme

$$(x - y)^2 - 3(z - y)^2 - 7(x - z)^2 = 2(x - z)(z - y)\sqrt{21}. \quad (1)$$

Pre  $x \neq z$  a  $y \neq z$  nemôže rovnosť (1) platiť, pretože jej pravá strana je v takom prípade číslo iracionálne, zatiaľ čo ľavá strana je číslo celé. Rovnosť teda môže nastať, len keď  $x = z$  alebo  $y = z$ .

V prvom prípade po dosadení  $x = z$  do pôvodnej rovnice dostaneme  $z - y = \sqrt{3}(z - y)$ . Odtiaľ  $z = y = x$ .

V druhom prípade, keď  $y = z$ , dôjdeme analogicky k rovnakému výsledku.

*Záver.* Riešením danej rovnice sú všetky trojice  $(x, y, z) = (k, k, k)$ , kde  $k$  je ľubovoľné celé číslo.

**Komentár.** Aj napriek tomu, že vzorové riešenie úlohy vyzerá zrozumiteľne, úloha riešiteľov krajských kôl potrápila (bola najhoršie hodnotenou úlohou daného krajského kola). Záludnosti sa ukrývajú vo vytyčovaní iracionálnych čísel a nie neznámych, vhodnej úprave rovnice a diskusii o (i)racionalite oboch strán rovnice.

**Úloha 18.8.** [64-I-1] Určte všetky dvojice  $(x, y)$  reálnych čísel, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+4)^2} &= 4 - y, \\ \sqrt{(y-4)^2} &= x + 8. \end{aligned}$$

**Riešenie.** Vzhľadom na to, že pre každé reálne číslo  $a$  platí  $\sqrt{a^2} = |a|$ , je daná sústava rovníc ekvivalentná so sústavou rovníc

$$\begin{aligned} |x+4| &= 4 - y, \\ |y-4| &= x + 8. \end{aligned}$$

Z prvej rovnice vidíme, že musí byť  $4 - y \geq 0$ , teda  $y \leq 4$ . V druhej rovnici môžeme teda odstrániť absolútnu hodnotu. Dostaneme tak

$$|y - 4| = 4 - y = x + 8, \text{ t.j. } -y = x + 4.$$

Po dosadení za  $x + 4$  do prvej rovnice dostaneme

$$|-y| = |y| = 4 - y.$$

Keďže  $y \leq 4$ , budeme ďalej uvažovať dva prípady.

Pre  $0 \leq y \leq 4$  riešime rovnicu  $y = 4 - y$ , a teda  $y = 2$ . Nájdenej hodnote  $y = 2$  zodpovedá po dosadení do druhej rovnice  $x = -6$ .

Pre  $y < 0$  dostaneme rovnicu  $-y = 4 - y$ , ktorá však nemá riešenie.

**Záver:** Daná sústava rovníc má práve jedno riešenie, a to  $(x, y) = (-6, 2)$ .

**Iné riešenie.** Odstránením absolútnych hodnôt v oboch rovniciach, t.j. rozborom štyroch možných prípadov, keď

a)  $(x + 4 \geq 0) \wedge (y - 4 \geq 0)$ , t.j.  $(x \geq -4) \wedge (y \geq 4)$ ,

b)  $(x + 4 \geq 0) \wedge (y - 4 < 0)$ , t.j.  $(x \geq -4) \wedge (y < 4)$ ,

c)  $(x + 4 < 0) \wedge (y - 4 \geq 0)$ , t.j.  $(x < -4) \wedge (y \geq 4)$ ,

d)  $(x + 4 < 0) \wedge (y - 4 < 0)$ , t.j.  $(x < -4) \wedge (y < 4)$ ,

zistíme, že prípady a), b), c) nedávajú (vzhľadom na uvedené obmedzenia v jednotlivých prípadoch) žiadne reálne riešenie. V prípade d) potom dostaneme jediné riešenie  $(x, y) = (-6, 2)$  danej sústavy.

**Komentár.** V úvode riešenia pripomenieme vzťah  $\sqrt{a^2} = |a|$ , ktorý nám pomôže transformovať sústavu zo zadania na sústavu rovníc s absolútnou hodnotou, ktorú by študenti mali byť schopní bez väčších komplikácií vyriešiť.

## Domáca práca

**Úloha 18.9.** [59-II-4] Určte všetky dvojice reálnych čísel  $x, y$ , ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\lfloor x + y \rfloor = 2010,$$

$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

ak a)  $p = 2$ , b)  $p = 3$ . Symbol  $\lfloor x \rfloor$  označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako dané reálne číslo  $x$  (tzv. dolná celá časť reálneho čísla  $x$ ).

**Riešenie\*.** Keďže číslo  $p$  je celé, je aj  $y = \lfloor x \rfloor - p$  celé číslo a  $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y$ . Pôvodná sústava rovníc je teda ekvivalentná so sústavou

$$\lfloor x \rfloor + y = 2010,$$

$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

ktorú ľahko vyriešime napríklad sčítacou metódou. Dostaneme  $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}(2010 + p)$  (čo môže platiť len pre párne  $p$ ) a  $y = \lfloor x \rfloor - p$ .

a) Pre  $p = 2$  je riešením sústavy ľubovoľné  $x \in \langle 1006, 1007 \rangle$  a  $y = 1004$ .

b) Pre  $p = 3$  nemá sústava žiadne riešenie.

**Iné riešenie.** Položme  $\lfloor x \rfloor = a$ , potom  $x = a + t$ , pričom  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ .

a) Pre  $p = 2$  sústavu prepíšeme na tvar  $y = a - 2$  a  $\lfloor 2a - 2 + t \rfloor = 2010$ . Z poslednej rovnice vyplýva  $2a - 2 = 2010$ , odtiaľ  $a = 1006$ . Keďže  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ , vyhovuje pôvodnej sústave každé  $x \in \langle 1006, 1007 \rangle$ , pričom  $y = 1004$ .

b) Pre  $p = 3$  dostávame  $y = a - 3$  a  $\lfloor 2a - 3 + t \rfloor = 2010$ . Posledná rovnica je ekvivalentná so vzťahom  $2a - 3 = 2010$ , ktorému nevyhovuje žiadne celé číslo  $a$ . Pre  $p = 3$  nemá daná sústava rovníc riešenie.

**Úloha 18.10.** [64-S-1] V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}|1-x| &= y+1, \\ |1+y| &= z-2, \\ |2-z| &= x-x^2.\end{aligned}$$

**Riešenie\*.** Pravá strana prvej rovnice je nezáporné číslo, čo sa premietne do druhej rovnice, pričom môžeme odstrániť absolútnu hodnotu. Aj pravá strana druhej rovnice je nezáporné číslo, čo sa s využitím rovnosti  $|z-2| = |2-z|$  premietne do tretej rovnice, pričom môžeme odstrániť absolútnu hodnotu. Daná sústava má potom tvar

$$\begin{aligned}|1-x| &= y+1, \\ 1+y &= z-2, \\ z-2 &= x-x^2\end{aligned}$$

a odtiaľ jednoduchým porovnaním dostávame rovnicu

$$|1-x| = x-x^2.$$

Pre  $x < 1$  dostaneme rovnicu  $1-x = x-x^2$  čiže  $(1-x)^2 = 0$ , ktorej riešenie  $x = 1$  ale predpokladu  $x < 1$  nevyhovuje.

Pre  $x \geq 1$  vyjde rovnica  $x^2 = 1$ ; z jej dvoch riešení  $x = -1$  a  $x = 1$  predpokladu  $x \geq 1$  vyhovuje iba  $x = 1$ .

Z danej sústavy potom jednoducho dopočítame hodnoty  $y = -1$  a  $z = 2$ . Sústava má teda jediné riešenie  $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ .