Seminár 30

Téma

Kvadratické rovnice

Ciele

Precvičiť metódy používané pri práci s kvadratickými rovnicami

Úlohy a riešenia

Úloha 30.1. [57-I-5] Určte všetky dvojice a, b reálnych čísel, pre ktoré má každá z kvadratických rovníc

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom práve jeden z nich je spoločný obom rovniciam.

Riešenie*. Zo zadania vyplýva, že a $6 \neq 0$, $b \neq 0$ (inak by rovnice neboli kvadratické) a $a \neq b$ (inak by rovnice boli totožné, a ak by mali dva reálne korene, boli by oba spoločné).

Označme x_0 spoločný koreň oboch rovníc, takže

$$ax_0^2 + 2bx_0 + 1 = 0, \quad bx_0^2 + 2ax_0 + 1 = 0.$$

Odčítaním oboch rovníc dostaneme $(a-b)(x_0^2 - 2x_0) = x_0(a-b)(x_0 - 2) = 0$. Keďže $a \neq b$ a 0 zrejme koreňom daných rovníc nie je, musí byť spoločným koreňom číslo $x_0 = 2$. Dosadením do daných rovníc tak dostaneme jedinú podmienku $4a + 4b + 1 = 0$, čiže

$$b = -a - \frac{1}{4}.$$

Diskriminant druhej z daných rovníc je potom $4a^2 - 4b = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$, takže rovnica má dva rôzne reálne korene pre ľubovoľné $a \neq -\frac{1}{2}$. Podobne diskriminant prvej z daných rovníc je $4b^2 - 4a = 4b^2 + 4b + 1 = (2b+1)^2$. Rovnica má teda dva rôzne reálne korene pre ľubovoľné $b \neq -\frac{1}{2}$, čiže $a \neq \frac{1}{4}$

Z uvedených predpokladov však zároveň vyplýva $a \neq -\frac{1}{4}$ $(b \neq 0)$ a $a \neq -\frac{1}{8}$ $(a \neq b)$.

Záver. Vyhovujú všetky dvojice $(a, -a - \frac{1}{4})$, kde $a \in \mathbb{R}\ \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4}\}$.

Úloha 30.2. [57-S-5] Určte všetky dvojice (a, b) reálnych čísel, pre ktoré majú rovnice

$$x^2 + (3a+b)x + 4a = 0, \quad x^2 + (3b+a)x + 4b = 0$$

spoločný reálny koreň.

Riešenie*. Nech x_0 je spoločný koreň oboch rovníc. Potom platí

$$x_0^2 + (3a+b)x_0 + 4a = 0, \quad x_0^2 + (3b+a)x_0 + 4b = 0.$$

Odčítaním týchto rovníc dostaneme $(2a - 2b)x_0 + 4(a-b) = 0$, odkiaľ po úprave získame $(a-b)(x_0+2) = 0$.

Rozoberieme dve možnosti:

Ak $a = b$, majú obidve dané rovnice rovnaký tvar $x^2 + 4ax + 4a = 0$. Aspoň jeden koreň (samozrejme spoločný) existuje práve vtedy, keď je diskriminant $16a^2 - 16a$ nezáporný, teda $a \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty)$.

Ak $x_0 = -2$, dostaneme z prvej aj z druhej rovnice $4 - 2a - 2b = 0$, teda $b = 2 - a$. Dosadením do zadania dostaneme rovnice

$$x^2 + (2a+2)x + 4a = 0, \quad x^2 + (6-2a)x + 8 - 4a = 0,$$

ktoré majú pri ľubovoľnej hodnote parametra a spoločný koreň -2.

Záver. Dané rovnice majú aspoň jeden spoločný koreň pre všetky dvojice (a, a), kde $a \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty)$, a pre všetky dvojice tvaru $(a, 2-a)$, kde a je ľubovoľné.

Úloha 30.3. [57-II-1] Uvažujme dve kvadratické rovnice

$$x^2 - ax - b = 0, \quad x^2 - bx - a = 0$$

s reálnymi parametrami a, b. Zistite, akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže nadobudnúť súčet $a+b$, ak existuje práve jedno reálne číslo x, ktoré súčasne vyhovuje obom rovniciam. Určte ďalej všetky dvojice (a,b) reálnych parametrov, pre ktoré tento súčet tieto hodnoty nadobúda.

Riešenie*. Odčítaním oboch daných rovníc dostaneme rovnosť $(b-a)x+a-b=0$, čiže $(b-a)(x-1)=0$. Odtiaľ vyplýva, že $b=a$ alebo $x=1$.

Ak $b=a$, majú obidve rovnice tvar $x^2-ax-a=0$. Práve jedno riešenie existuje práve vtedy, keď diskriminant a^2+4a je nulový. To platí pre $a=0$ a pre $a=-4$. Pretože $b=a$, má súčet $a+b$ v prvom prípade hodnotu 0 a v druhom prípade hodnotu -8.

Ak $x=1$, dostaneme z daných rovníc $a+b=1$, teda $b=1-a$. Rovnice potom majú tvar

$$x^2-ax+a-1=0 \quad \text{a} \quad x^2+(a-1)x-a=0.$$

Prvá má korene 1 a $a-1$, druhá má korene 1 a $-a$. Práve jedno spoločné riešenie tak dostaneme vždy s výnimkou prípadu, keď $a-1=-a$, čiže $a=\frac{1}{2}$ – vtedy sú spoločné riešenia dve.

Záver. Najmenšia hodnota súčtu $a+b$ je -8 a je dosiahnutá pre $a=b=-4$. Najväčšia hodnota súčtu $a+b$ je 1; túto hodnotu má súčet $a+b$ pre všetky dvojice $(a,1-a)$, kde $a \neq \frac{1}{2}$ je ľubovoľné reálne číslo.

Úloha 30.3. [59-I-6] Reálne čísla a, b majú túto vlastnosť: rovnica $x^2-ax+b-1=0$ má v množine reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých rozdiel je kladným koreňom rovnice $x^2-ax+b+1=0$.
a) Dokážte nerovnosť $b>3$.
b) Pomocou b vyjadrite korene oboch rovníc.

Riešenie*. Označme x_1 menší a x_2 väčší koreň prvej rovnice. Potom platí $x_1+x_2=a$, $x_1x_2=b-1$. Druhá rovnica má koreň x_2-x_1, a keďže súčet oboch koreňov je a, musí byť druhý koreň $a-(x_2-x_1)=x_1+x_2-x_2+x_1=2x_1$. Súčin koreňov druhej rovnice je $(x_2-x_1)\cdot 2x_1=b+1$. Odtiaľ dostávame $b=-1+2x_1x_2-2x_1^2=-1+2(b-1)-2x_1^2$, a teda

$$b=3+2x_1^3>3, \quad (1)$$

lebo z rovnosti $x_1=0$ by vyplývalo $b+1=b-1=0$.

Keďže $x_2-x_1>0$ a $b+1>0$, musí byť aj $x_1>0$; z (1) máme $x_1=\sqrt{(b-3)/2}$ a ďalej

$$x_2=\frac{b-1}{x_1}=\frac{(b-1)\sqrt{2}}{\sqrt{b-3}}.$$

Korene druhej rovnice sú potom

$$x_2-x_1=\frac{b+1}{} \quad \text{a} \quad 2x_1=\sqrt{2(b-3)}.$$

Iné riešenie. Korene prvej rovnice sú

$$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4b+4}}{2}, \quad x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4b+4}}{2},$$

pričom pre diskriminant máme

$$D=a^2-4(b-1)>0. \quad (2)$$

Rozdiel koreňov $x_2-x_1=\sqrt{a^2-4b+4}$ je koreňom druhej rovnice, a preto

$$a^2-4b+4-a\sqrt{a^2-4b+4}+b+1=0,$$
$$a^2-3b+5=a\sqrt{a2-4b+4}, \quad (3)$$
$$a^4+2a^2(5-3b)+(3b-5)^2=a^4-4a^2b+4a^2,$$
$$(3b-5)^2=a^2(2b-6).$$

Rovnosť $a = 0$ nastáva práve vtedy, keď $3b-5=0$; potom by ale neplatilo (2). Preto $a^2 > 0$, $(3b-5)^2 > 0$, a teda aj $2b-6>0$, čiže $b>3$. Z (2) a (3) potom vyplýva $a>0$, a teda $a = (3b-5)/\sqrt{2(b-3)}$; ďalej potom

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3a-5}{\sqrt{2(b-3)}} - \sqrt{\frac{(3b-5)^2}{2(b-3)} - 4b + 4}\right) = \sqrt{\frac{b-3}{2}},$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3a-5}{\sqrt{2(b-3)}} + \sqrt{\frac{(3b-5)^2}{2(b-3)} - 4b + 4}\right) = \frac{(b-1)\sqrt{2}}{\sqrt{b-3}}.$$

Druhá rovnica má korene

$$x_3 = \frac{a - \sqrt{a^2-4b-4}}{2} = \frac{b+1}{\sqrt{2(b-3)}} = x_2 - x_1$$
$$x_4 = \frac{a + \sqrt{a^2-4b-4}}{2} = \sqrt{2(b-3)}.$$

Úloha 30.4. [59-S-1] Určte všetky hodnoty reálnych parametrov p, q, pre ktoré má každá z rovníc

$$x(x-p) = 3+q, \quad x(x+p) = 3-q$$

v obore reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých aritmetický priemer je jedným z koreňov zvyšnej rovnice.

Riešenie*. Z Viètových vzťahov pre korene kvadratickej rovnice (ktoré vyplývajú z rozkladu daného kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov) ľahko zistíme, že súčet koreňov prvej rovnice je p, takže ich aritmetický priemer je $\frac{1}{2}p$. Toto číslo má byť koreňom druhej rovnice, preto

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{3p}{2} = 3 - q. \quad (1)$$

Podobne súčet koreňov druhej rovnice je $-p$, ich aritmetický priemer je $-\frac{1}{2}p$, a preto

$$-\frac{p}{2} \cdot \left(-\frac{3p}{2}\right) = 3 + q. \quad (2)$$

Porovnaním oboch vzťahov (1) a (2) máme $3-q = 3+q$, čiže $q = 0$ a z (1) potom vyjde $p = 2$ alebo $p = -2$.

Z oboch nájdených riešení dostaneme tú istú dvojicu rovníc $x(x-2) = 3$, $x(x+2) = 3$. Korene prvej z nich sú čísla -1 a 3, ich aritmetický priemer je 1. Korene druhej rovnice sú čísla 1 a -3, ich aritmetický priemer je -1.

Úloha 30.5. [62-II-1] Pre ľubovoľné reálne čísla $k \neq \pm 1$, $p \neq 0$ a q dokážte tvrdenie: Rovnica

$$x^2 + px + q = 0$$

má v obore reálnych čísel dva korene, z ktorých jeden je k-násobkom druhého, práve vtedy, keď platí $kp^2 = (k+1)^2 q$.

Riešenie*. Čísla x_1, x_2 sú koreňmi danej kvadratickej rovnice práve vtedy, keď platí

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{a} \quad x_1x_2 = q. \quad (1)$$

Predpokladajme, že daná kvadratická rovnica má reálne korene $x_1 = \alpha$, $x_2 = k\alpha$. Dosadením do (1) dostaneme $(k+1)\alpha = -p$ a $k\alpha^2 = q$. Pre obe strany dokazovanej rovnosti $kp^2 = (k+1)^2 q$ odtiaľ vyplýva

$$kp^2 = k(-(k+1)\alpha)^2 = k(k+1)^2\alpha^2,$$

$$(k+1)^2q = (k\ +1)^2 \cdot k\alpha^2 = k(k+1)^2\alpha^2,$$

teda daná rovnosť skutočne platí.

Nech naopak pre reálne čísla p, q a $k \neq -1$ platí $kp^2 = (k+1)^2q$. Uvažujme dvojicu reálnych čísel

$$x_1 = \frac{-kp}{k+1} \quad \text{a} \quad x2 = \frac{-p}{k+1}.$$

Také čísla (pre ktoré platí $x_1 = kx_2$) sú koreňmi danej kvadratickej rovnice, ak spĺňajú obe rovnosti (1). Overenie urobíme dosadením:

$$x_1 + x_2 = \frac{-kp}{k+1} + \frac{-p}{k+1} = \frac{-(k+1)p}{k+1} = -p,$$
$$x_1x_2 = \frac{-kp}{k+1} \cdot \frac{-p}{k+1} = \frac{kp^2}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2q}{(k+1)^2} = q.$$

Tým je celý dôkaz hotový.

Úloha 30.6. [64-II-4] Na tabuli je zoznam čísel $1,2,3,4,5,6$ a „rovnica“

$$\frac{\square}{\square}x^2 + \frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square} = 0.$$

Marek s Tomášom hrajú nasledujúcu hru. Najskôr Marek vyberie ľubovoľné číslo zo zoznamu, napíše ho do jedného z prázdnych políčok v „rovnici“ a číslo zo zoznamu zotrie. Potom Tomáš vyberie niektoré zo zvyšných čísel, napíše ho do iného prázdneho políčka a v zozname ho zotrie. Nato Marek urobí to isté a nakoniec Tomáš doplní tri zvyšné čísla na tri zvyšné voľné políčka v „rovnici“. Marek vyhrá, ak vzniknutá kvadratická rovnica s racionálnymi koeficientmi bude mať dva rôzne reálne korene, inak vyhrá Tomáš. Rozhodnite, ktorý z hráčov môže vyhrať nezávisle na postupe druhého hráča.

Riešenie*. Označme a, b, c koeficienty výslednej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Tá má dva rôzne reálne korene práve vtedy, keď je jej diskriminant (v symbolickej podobe)

$$b^2 - 4ac = \left(\frac{\square}{\square}\right)^2 - 4\left(\frac{\square}{\square}\right)\left(\frac{\square}{\square}\right)$$

kladný.

Ukážeme, že vyhrávajúcu stratégiu má Marek. Najskôr do menovateľa zlomku pre koeficient b napíše 1.

a) Ak Tomáš obsadí vo svojom prvom ťahu iné miesto ako v čitateli b, napíše do neho Marek v nasledujúcom ťahu najväčšie zostávajúce číslo zo zoznamu (teda 5 alebo 6). Hodnota b^2 potom bude aspoň 25 a zo zvyšných čísel možno zostaviť výraz $4ac$ s hodnotou nanajvýš $4 \cdot \frac{6 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 16$. Diskriminant vzniknutej kvadratickej rovnice tak bude určite kladný.

b) Predpokladajme, že Tomáš vo svojom ťahu doplní čitateľa b. Marek potom v druhom ťahu napíše najmenšie zostávajúce číslo zo zoznamu (2 alebo 3) do čitateľa a (alebo c).

   (i) V prípade, že Tomáš v prvom ťahu napísal do čitateľa b číslo 2, je hodnota b^2 rovná 4 a najväčšia možná hodnota $4ac$ (s prihliadnutím na druhý Marekov ťah) je $4 \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{5} \leq 4$, teda diskriminant vzniknutej kvadratickej rovnice bude opäť kladný.

   (ii) V prípade, že Tomáš v prvom ťahu napísal do čitateľa b iné číslo ako 2, je hodnota b^2 aspoň 9 a hodnota $4ac$ je nanajvýš $4 \cdot \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 4} = 4$, takže diskriminant vzniknutej kvadratickej rovnice bude aj v tomto prípade kladný.

Záver. V danej hre môže vyhrať Marek nezávisle na ťahoch Tomáša. Jeho víťazná stratégia je opísaná vyššie.

Domáca práca

Úlohou študentov bude vyhľadať, skonzultovať a zaslať vedúcemu seminára jeden príklad, problém alebo úlohu, ktorá sa viaže k témam algebry a teórie čísel, ktorými sme sa v seminári zaberali. Tieto úlohy budú použité ako zadania, ktoré využijeme v nasledujúcom seminári. Študenti môžu hľadať inšpiráciu v starších kolách MO, rôznych knižných publikáciách, zbierkach korešpondenčných seminárov alebo môžu úlohu dokonca sami vymyslieť.

Doplňujúce zdroje a materiály