

## Seminár 20: Teória čísel IV – prvočísla

### Úlohy a riešenia

**Úloha 20.1.** [63-I-3-N2] Číslo  $n$  je súčinom dvoch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme menšie z nich o 1 a druhé ponecháme, ich súčin sa zväčší o 7. Určte číslo  $n$ .

**Úloha 20.2.** [63-I-3-N4] Číslo  $n$  je súčinom dvoch prvočísel. Ak zväčšíme každé z nich o 1, ich súčin sa zväčší o 35. Určte číslo  $n$ .

**Úloha 20.3.** [63-I-3] Číslo  $n$  je súčinom troch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme dve menšie z nich o 1 a najväčšie ponecháme nezmenené, zväčší sa ich súčin o 915. Určte číslo  $n$ .

**Úloha 20.4.** [64-S-3] Nájdite najmenšie prirodzené číslo  $n$  s ciferným súčtom 8, ktoré sa rovná súčinu troch rôznych prvočísel, pričom rozdiel dvoch najmenších z nich je 8.

**Úloha 20.5.** [57-S-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel  $a, b$  väčších ako 1 tak, aby ich súčet aj súčin boli mocniny prvočísel.

**Úloha 20.6.** [65-I-1-D2, resp. 55-II-4] Nájdite všetky dvojice prvočísel  $p$  a  $q$ , pre ktoré platí  $p + q^2 = q + 145p^2$ .

**Úloha 20.7.** [62-I-5] Určte všetky celé čísla  $n$ , pre ktoré  $2n^3 - 3n^2 + n + 3$  je prvočíslo.

**Komentár.** Aj keď vzorové riešenie môže vyzeráť trikovo, po vyskúšaní niekoľko málo hodnôt  $n$  je vždy hodnota zo zadania deliteľná 3, čo by študentov mohlo priviesť na myšlienku skúsiť dokázať deliteľnosť čísla zo zadania tromi.

**Úloha 20.8.** [[?], príklad 2.3, str. 174] Nájdite všetky prvočísla, ktoré sú súčasne súčtom a rozdielom dvoch vhodných prvočísel.

**Úloha 20.9.** [[?], príklad 3, str. 95] Nájdite celočíselné riešenia rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p},$$

kde  $p$  je pevne dané prvočíslo.

### Domáca práca

**Úloha 20.10.** [65-I-1] Nájdite všetky možné hodnoty súčinu prvočísel  $p, q, r$ , pre ktoré platí

$$p^2 - (q + r)^2 = 637.$$