

Seminár 4: Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti I – úprava výrazov

Úlohy a riešenia

Úloha 4.1. [65-I-3-N1] Pre ľubovoľné reálne čísla x, y a z dokážte nezápornosť hodnoty každého z výrazov

$$x^2z^2 + y^2 - 2xyz, \quad x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 2x - 12y - 6z + 13, \quad 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz$$

a zistite tiež, kedy je dotyčná hodnota rovná nule.

Úloha 4.2. [63-I-1-N1-N4] a) Určte najmenšiu hodnotu výrazu $V = 5 + (x - 2)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Pre ktoré x ju výraz nadobúda?

b) Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $W = 9 - ab$, kde a, b sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 6$. Pre ktoré hodnoty a, b je W minimálne?

c) Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $Y = 12 - ab$, kde a, b sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 6$. Pre ktoré hodnoty a, b je Y minimálne?

d) Určte najväčšiu možnú hodnotu výrazu $K = 5 + ab$, kde a, b sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 8$. Pre ktoré hodnoty a, b je K maximálne?

Úloha 4.3. [63-I-1] Určte, akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $V = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$, ak reálne čísla a, b, c spĺňajú dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 6, \\ -a + b - c &= 2. \end{aligned}$$

Úloha 4.4. [63-S-1] Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz $V = ab + bc + cd + da$, ak reálne čísla a, b, c, d spĺňajú dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} 2a - 5b + 2c - 5d &= 4, \\ 3a + 4b + 3c + 4d &= 6. \end{aligned}$$

Úloha 4.5. [65-I-3] Uvažujme výraz

$$2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4.$$

a) Nájdite všetky reálne čísla x a y , pre ktoré daný výraz nadobúda svoju najmenšiu hodnotu.

b) Určte všetky dvojice celých nezáporných čísel x a y , pre ktoré je hodnota daného výrazu rovná číslu 16.

Úloha 4.6. [65-II-1] Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$3x^2 - 12xy + y^4,$$

v ktorom x a y sú ľubovoľné celé nezáporné čísla.

Úloha 4.7. [65-I-3-D1, resp. B-61-S-1] V obore celých čísel vyriešte rovnicu

$$x^2 + y^2 + x + y = 4.$$