Seminár 21

Téma

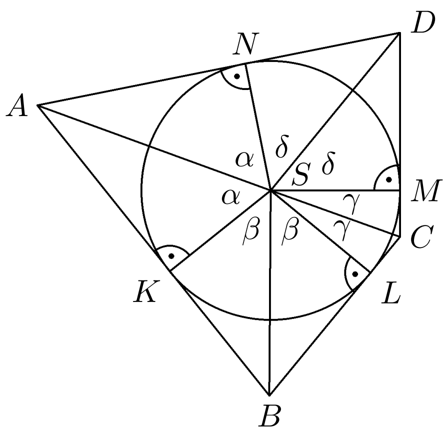
Geometria V – štvoruholníky

Úlohy a riešenia

Úloha 21.1. [57-I-2] Štvoruholníku $ABCD$ je vpísaná kružnica so stredom S. Určte rozdiel $|\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD|$, ak $|\measuredangle ASB| - |\measuredangle BSC| = 40°$

Riešenie*. Päty kolmíc spustených zo stredu S vpísanej kružnice na strany AB, BC, CD a DA označme postupne K, L, M a N (obr. 1). Pravouhlé trojuholníky ASK a ASN sú zhodné podľa vety Ssu. Majú totiž spoločnú preponu AS a zhodné odvesny SK a SL, ktorých dĺžka je rovná polomeru vpísanej kružnice. Zo zhodnosti týchto trojuholníkov vyplýva jednak známe tvrdenie o dĺžkach dotyčníc ($|AK| = |AN|$), jednak zhodnosť uhlov ASK a ASN, ktorých spoločnú veľkosť označíme α:

$$|\measuredangle ASK| = |\measuredangle ASN| = \alpha.$$



Obr. 1

Analogicky zistíme zhodnosť trojuholníkov SBK a SBL, ďalej SCL a SCM, a nakoniec SDM a SDN. Na základe uvedených zhodností môžeme položiť

$$|\measuredangle BSK| = |\measuredangle BSL| = \beta, \quad |\measuredangle CSL| = |\measuredangle CSM| = \gamma, \quad |\measuredangle DSM| = |\measuredangle DSN| = \delta.$$

Odtiaľ a z obr. 1 potom dostávame

$$\begin{aligned} |\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD| &= (\alpha + \delta) - (\gamma + \delta) = \alpha - \gamma = \\ &= (\alpha + \beta) - (\gamma + \beta) = |\measuredangle ASB| - |\measuredangle BSC| = 40°. \end{aligned}$$

Záver. $|\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD| = 40°$.

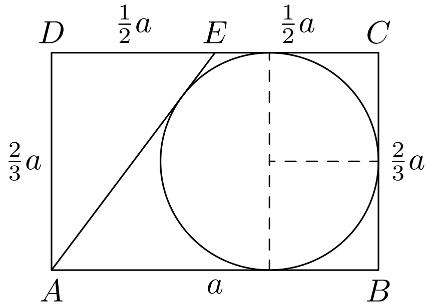
Komentár. Úloha je relatívne nezložitým úvodom do seminára a nadväzuje na posledné geometrické stretnutie, ktoré sa zaoberalo opísanými a vpísanými kružnicami trojuholníku. Pre úplnosť len dodajme, že štvoruholník, ktorému je možné vpísať kružnicu, sa nazýva *dotyčnicový*.

Úloha 21.2. [61-II-3] Nech E je stred strany CD rovnobežníka $ABCD$, v ktorom platí $2|AB| = 3|BC|$. Dokážte, že ak sa dá do štvoruholníka ABCE vpísať kružnica, dotýka sa táto kružnica strany BC v jej strede.

Riešenie*. Keďže štvoruholník $ABCE$ je podľa zadania dotyčnicový, pre dĺžky jeho strán platí známa rovnosť[1]

$$|AB| + |CE| = |BC| + |AE|.$$

V našej situácii pri označení $a = |AB|$ platí $|BC| = |AD| = \frac{2}{3}a$ a $|CE| = |DE| = \frac{1}{2}a$ (obr. 2), odkiaľ po dosadení do uvedenej rovnosti zistíme, že $|AE| = \frac{5}{6}a$.



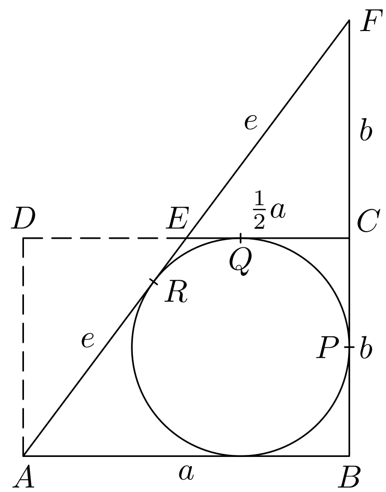
Obr. 2

Teraz si všimneme, že pre dĺžky strán trojuholníka ADE platí

$$|AD| : |DE| : |AE| = \frac{2}{3}a : \frac{1}{2}a : \frac{5}{6}a = 4 : 3 : 5,$$

takže podľa (obrátenej časti) Pytagorovej vety má trojuholník ADE pravý uhol pri vrchole D, a teda rovnobežník $ABCD$ je obdĺžnik. Dotyčnica BC kružnice vpísanej štvoruholníku $ABCE$ je teda kolmá na dve jej (navzájom rovnobežné) dotyčnice AB a CE. To už zrejme znamená, že bod dotyku dotyčnice BC je stredom úsečky BC (vyplýva to zo zistenej kolmosti vyznačeného priemeru kružnice na jej vyznačený polomer).

Iné riešenie. Ukážeme, že požadované tvrdenie možno dokázať aj bez toho, aby sme si všimli, že rovnobežník $ABCD$ je v danej úlohe obdĺžnikom. Namiesto toho využijeme, že úsečka CE je stredná priečka trojuholníka ABF, pričom F je priesečník polpriamok BC a AE (obr. 3), lebo $CE \parallel AB$ a $|CE| = \frac{1}{2}|AB|$. Označme preto $a = |AB| = 2|CE|$,



Obr. 3

$b = |BC| = |CF|$ a $e = |AE| = |EF|$ (rovnosť $2a = 3b$ použijeme až neskôr). Rovnako ako v prvom riešení využijeme rovnosť $b + e = a + \frac{1}{2}a (= \frac{3}{2}a)$, ktorá platí pre dĺžky strán dotyčnicového štvoruholníka

[1] Rovnosť sa odvodí rozpísaním dĺžok strán na ich úseky vymedzené bodmi dotyku vpísanej kružnice a následným využitím toho, že každé dva z týchto úsekov, ktoré vychádzajú z rovnakého vrcholu štvoruholníka, sú zhodné.

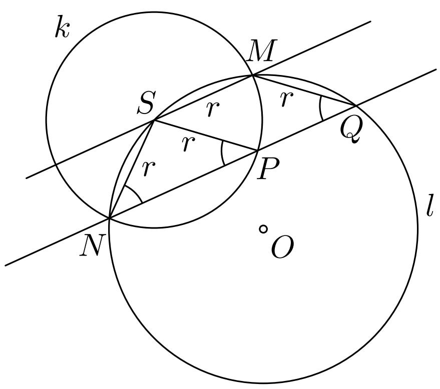
$ABCE$. Kružnica jemu vpísaná sa dotýka strán BC, CE, AE postupne v bodoch P, Q, R tak, že platia rovnosti
$$|CP| = |CQ|, \quad |EQ| = |ER| \quad \text{a tiež} \quad |FP| = |FR|.$$
Pre súčet zhodných dĺžok $|FP|$ a $|FR|$ teda platí
$$\begin{aligned}|FP| + |FR| &= (b + |CP|) + (e + |ER|) = (b + e) + (|CP| + |ER|) = \\ &= \frac{3}{2}a + (|CQ| + |EQ|) = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a = 2a,\end{aligned}$$
čo znamená, že $|FP| = |FR| = a$.

Teraz už riešenie úlohy ľahko dokončíme. Rovnosť $|BP| = \frac{1}{2}b$, ktorú máme v našej situácii dokázať, vyplýva z rovnosti
$$|BP| = |BF| - |FP| = 2b - a,$$
keď do nej dosadíme zadaný vzťah $a = \frac{3}{2}b$.

Komentár. Úloha nadväzuje na predchádzajúcu a využíva rovnosť súčtov dĺžok opačných strán dotyčnicového štvoruholníka. Ďalej študenti uplatnia buď Pytagorovu vetu alebo vedomosti o stredných priečkach v trojuholníku, čo úlohu činí zaujímavou z hľadiska pestrosti.

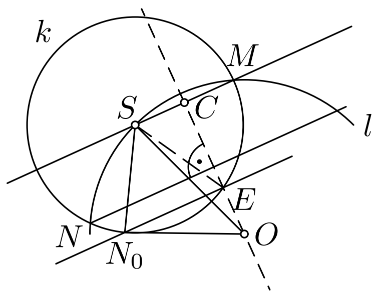
Úloha 21.3. [59-II-3] Daná je kružnica k so stredom S. Kružnica l má väčší polomer ako kružnica k, prechádza jej stredom a pretína ju v bodoch M a N. Priamka, ktorá prechádza bodom N a je rovnobežná s priamkou MS, vytína na kružniciach tetivy NP a NQ. Dokážte, že trojuholník MPQ je rovnoramenný.

Riešenie*. Polomer kružnice k označme r. Označenie vrcholov P, Q v trojuholníku MPQ nie je dôležité, preto bez ujmy na všeobecnosti označme P ten z bodov priamky vedenej bodom N rovnobežne s priamkou MS, ktorý leží na kružnici k. Bod Q potom leží na kružnici l a štvoruholník $NQMS$ je lichobežník vpísaný do kružnice l (obr. 4). Je teda rovnoramenný s ramenami MQ a NS dĺžky r. Navyše aj úsečky SP a SM majú dĺžku r. Z rovnoramenného trojuholníka NPS a rovnoramenného lichobežníka $NQMS$ vyplýva rovnosť uhlov $|\measuredangle SPN| = |\measuredangle SNP| = |\measuredangle MQP|$. Priečka PQ teda pretína priamky SP a MQ pod rovnako veľkými uhlami, a preto (podľa vety o súhlasných uhloch) sú priamky SP a MQ rovnobežné. Štvoruholník $PQMS$ je teda rovnobežník, a keďže $|SM| = |SP| = r$, je to dokonca kosoštvorec. Odtiaľ je už zrejmé, že trojuholník MPQ je rovnoramenný s ramenami PQ a MQ dĺžky r.



Obr. 4

Poznámka. Existencia tetív NP a NQ v zadaní je zaručená vďaka predpokladu, že kružnica l má väčší polomer ako kružnica k. Ak označíme C stred úsečky SM a E ten priesečník kružnice k s osou úsečky SM, ktorý leží v polrovine SMO, bude stred O kružnice l ležať na polpriamke CE až za bodom E (obr. 5). Ďalší priesečník N oboch

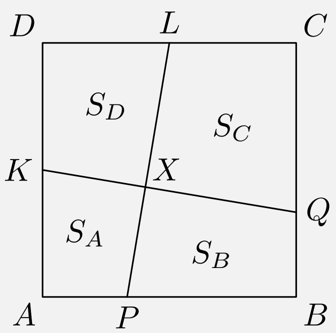


Obr. 5

kružníc preto padne do pásu medzi rovnobežkami SM a N_0E v polrovine OCS, pričom N_0 je štvrtý vrchol kosoštvorca s vrcholmi S, M, E. Na to stačí ukázať, že kružnica l pretne polpriamku EN_0 až za bodom N_0, teda že jej polomer OS je väčší ako dĺžka úsečky ON_0. Toto porovnanie dvoch strán trojuholníka OSN_0 jednoducho vyplýva z porovnania jeho vnútorných uhlov: uhol pri vrchole N_0 je najväčší, lebo oba uhly pri protiľahlej strane OS sú menšie ako $60°$ (trojuholník ESN_0 je rovnostranný). Ľahko nahliadneme, že každá z rovnobežiek uvedeného pásu pretína každú z oboch kružníc v dvoch bodoch (vždy súmerne združených podľa príslušnej osi kolmej na SM). Tým je dokázaná nielen existencia oboch tetív NP a NQ, ale aj to, že ich krajné body P a Q ležia na rovnakej strane od bodu N (ako na obr. 4), lebo oba body zrejme ležia v polrovine opačnej k spomenutej polrovine OCS.

Komentár. Diskusia v poznámke je len zaujímavým doplnkom úlohy, existencia tetív je totiž predpokladom zadania a nie je nutné ju dokazovať. Úloha využíva úvahu, že lichobežník, ktorého základne sú rovnobežné tetivy danej kružnice, je rovnoramenný, ktorá môže byť pre študentov zaujímavým uvedomením.

Úloha 21.4. [60-I-3] Máme štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 1 cm. Body K a L sú stredy strán DA a DC. Bod P leží na strane AB tak, že $|BP| = 2|AP|$. Bod Q leží na strane BC tak, že $|CQ| = 2|BQ|$. Úsečky KQ a PL sa pretínajú v bode X. Obsahy štvoruholníkov $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ a $LDKX$ označíme postupne S_A, S_B, S_C, S_D (obr. 6).
a) Dokážte, že $S_B = S_D$.
b) Vypočítajte rozdiel $S_C - S_A$.
c) Vysvetlite, prečo neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$.



Obr. 6

Riešenie*. a) Štvoruholníky $ABQK$ a $DAPL$ sú zhodné (jeden z nich je obrazom druhého v otočení o $90°$ so stredom v strede štvorca $ABCD$). Preto majú aj rovnaký obsah, čiže $S_A+S_B = S_A+S_D$. Z toho hneď dostaneme $S_B = S_D$.

b) Ľahko sa nám podarí vypočítať obsah pravouhlého lichobežníka $ABQK$, lebo poznáme dĺžky základní aj výšku. Dostaneme

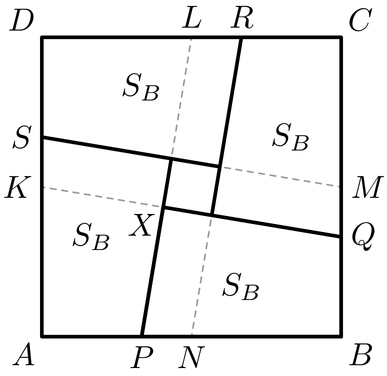
$$S_A + S_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}\,\mathrm{cm}^2.$$

Podobne výpočtom obsahu lichobežníka $PBCL$ dostaneme

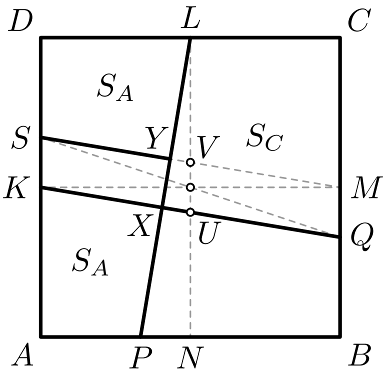
$$S_C + S_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}\,\mathrm{cm}^2.$$

Odčítaním prvej získanej rovnosti od druhej dostávame $S_C - S_A = \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}\,\mathrm{cm}^2$.

c) Nerovnosť medzi obsahmi $S_A + S_C$ a $S_B + S_D$ (ktorých priame výpočty nie sú v silách žiakov 1. ročníka) môžeme zdôvodniť nasledovným spôsobom: Súčet týchto dvoch obsahov je $1\,\mathrm{cm}^2$, takže sa nerovnajú práve vtedy, keď je jeden z nich menší ako $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Bude to obsah $S_B + S_D$ (rovný $2S_B$, ako už vieme), keď ukážeme, že obsah S_B je menší ako $\frac{1}{4}\,\mathrm{cm}^2$. Urobíme to tak, že do celého štvorca $ABCD$ umiestnime bez prekrytia štyri kópie štvoruholníka $PBQX$. Ako ich umiestnime, vidíme na obr. 7, pričom M, N sú stredy strán BC, AB a R, S body, ktoré delia strany CD, DA v pomere 1 : 2.



Obr. 7



Obr. 8

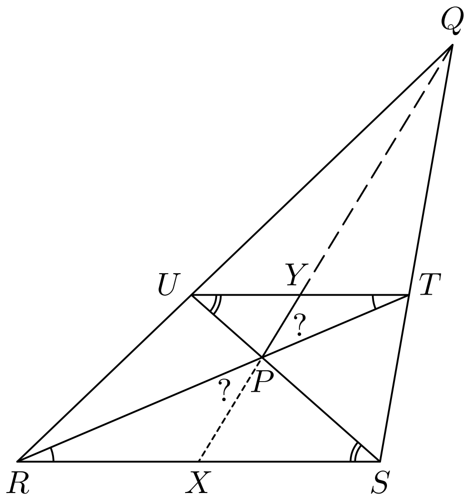
Iné riešenie časti c). Tentoraz namiesto nerovnosti $S_B + S_D < \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$ dokážeme ekvivalentnú nerovnosť $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Preto sa pokúsime „premiestniť“ štvoruholník $APXK$ tak, aby ležal pri štvoruholníku $XQCL$ a aby sa ich obsahy dali geometricky sčítať. Uhly AKQ a DLP sú zhodné a $|AK| = |DL|$, preto môžeme štvoruholník $APXK$ premiestniť vo štvorci $ABCD$ do jeho „rohu“ D tak, že k štvoruholníku $XQCL$ priľahne pozdĺž strany LX svojou stranou LY, pričom Y je priesečník úsečiek SM a PL z pôvodného riešenia (obr. 8). Obsah $S_A + S_C$ je potom obsahom šesťuholníka $DSYXQC$. Prečo je väčší ako $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$, môžeme zdôvodniť napríklad takto:

Úsečka spájajúca bod L so stredom U úsečky KQ pretne úsečku SM v jej strede V. Štvoruholník $UQMV$ má obsah rovný polovici obsahu rovnobežníka $KQMS$, teda rovný obsahu trojuholníka KMS. Preto má šesťuholník $DSVUQC$ obsah rovný obsahu štvoruholníka $KMCD$, t. j. polovici obsahu štvorca $ABCD$. Obsah $S_A + S_C$ je ešte väčší, a to o obsah štvoruholníka $XUVY$. Teda naozaj $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

Komentár. Prvé dve časti sú príjemným úvahovým rozohriatím k časti tretej, ktorá vyžaduje trochu viac invencie. Demonštruje však zaujímavý prístup k riešeniu a porovnávanie obsahov obrazcov namiesto priameho výpočtu obsahov.

Úloha 21.5. [66-I-5-prvá časť] Ak označíme X a Y postupne stredy základní RS a TU všeobecného lichobežníka $RSTU$, tak na úsečke XY leží priesečník P uhlopriečok RT a SU, a to tak, že $|PX| : |PY| = |RS| : |TU|$. Na priamke XY leží tiež priesečník Q predĺžených ramien RU a ST, a to tak, že $|QX| : |QY| = |RS| : |TU|$ (obr. 9). Dokážte.

Riešenie*.



Obr. 9

Napriek tomu, že sa podľa obrázka zdá, že bod P na úsečke XY naozaj leží, musíme tento poznatok dokázať, teda *odvodiť* argumentáciou nezávislou na presnosti nášho rysovania. Na to určite stačí preukázať, že obe úsečky PX, PY zvierajú s priamkou RT zhodné uhly (na obrázku vyznačené otáznikmi). Všimnime si, že tieto úsečky sú ťažnicami trojuholníkov RSP a TUP, ktoré sa zhodujú vo vnútorných uhloch (vyznačených oblúčikmi) pri rovnobežných stranách RS a TU, takže ide o trojuholníky podobné, a to s koeficientom $k = |TU|/|RS|$. S rovnakým koeficientom platí aj podobnosť „polovíc" týchto trojuholníkov vyťatých ich ťažnicami, presnejšie podobnosť $RXP \sim TYP$. Z nej už želaná zhodnosť uhlov RPX a TPY aj želaná rovnosť $|PY| = k|PX|$ (vďaka rovnakému koeficientu) vyplýva. Všetko o bode P je tak dokázané; podobne sa overia aj obe vlastnosti bodu Q - ukáže sa, že úsečky QX a QY zvierajú ten istý uhol s priamkou RQ a ich dĺžky sú zviazané rovnosťou $|QY| = k|QX|$, a to vďaka tomu, že QX a QY sú ťažnice v dvoch navzájom podobných trojuholníkoch RSQ a UTQ.

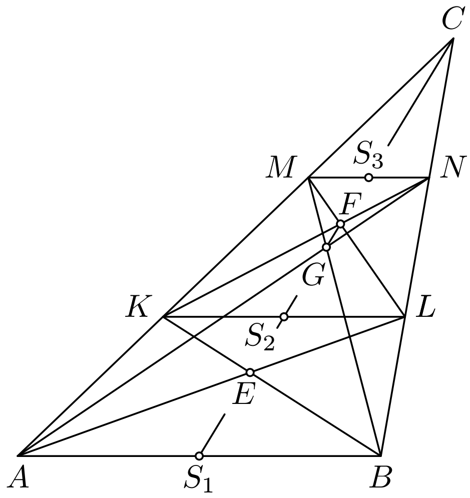
Komentár. Úloha je prípravou na riešenie záverečného problému tohto seminára a pripomína študentom metódu dôkazu toho, že bod P leží na priamke úsečke XY.

Úloha 21.6. [66-I-5] V danom trojuholníku ABC zvoľme vnútri strany AC body K, M a vnútri strany BC body L, N tak, že

$$|AK| = |KM| = |MC|, |BL| = |LN| = |NC|.$$

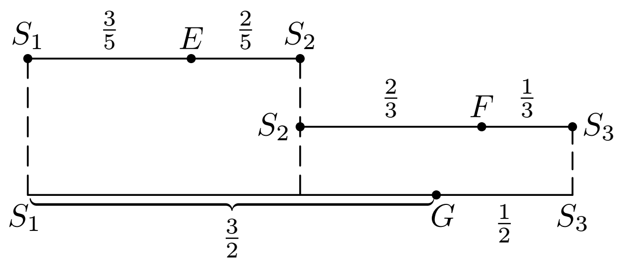
Ďalej označme E priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABLK$, F priesečník uhlopriečok lichobežníka $KLNM$ a G priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABNM$. Dokážte, že body E, F a G ležia na ťažnici trojuholníka ABC z vrcholu C a určte pomer $|GF| : |EF|$.

Riešenie*. Dokázané vlastnosti všeobecného lichobežníka z predchádzajúcej úlohy nám umožnia celkom ľahko vyriešiť zadanú úlohu. Situácia je znázornená na obr. 10. Okrem pomenovaných bodov sme tam ešte označili S_1, S_2, S_3 stredy úsečiek AB, KL a MN. Keďže trojuholníky ABC, KLC



Obr. 10

a MNC sú navzájom podobné (podľa vety *sus*), platí $|AB| : |KL| : |MN| = |AC| : |KC| : |MC| = 3 : 2 : 1$. Podľa zhodných vnútorných uhlov spomenutých troch trojuholníkov platí tiež $AB \parallel KL$, $KL \parallel MN$. Štvoruholníky $ABLK$, $KLNM$ a $ABNM$ tak sú naozaj lichobežníky (ako je prezradené v zadaní) so základňami AB, KL a MN, ktorých dĺžky sú v už odvodenom pomere $3 : 2 : 1$. Navyše predĺžené ramená všetkých troch lichobežníkov sa pretínajú v bode C, ktorým preto podľa dokázanej vlastnosti prechádzajú priamky S_1S_2, S_2S_3 (a S_1S_3), takže ide o jednu priamku, na ktorej body S_1, S_2, S_3 a C ležia v uvedenom poradí tak, že $|S_1C| : |S_2C| : |S_3C| = 3 : 2 : 1$. Z toho vyplýva $|S_1S_2| = |S_2S_3| (= |S_3C|)$, takže bod S_2 je stredom úsečky S_1S_3. Na nej (opäť podľa dokázaného tvrdenia) ležia aj body E, F a G, pričom pre bod E medzi bodmi S_1, S_2 platí $|ES_1| : |ES_2| = 3 : 2$, pre bod F medzi bodmi S_2, S_3 platí $|FS_2| : |FS_3| = 2 : 1$ a napokon pre bod G medzi bodmi S_1, S_3 platí $|GS_1| : |GS_3| = 3 : 1$. Tieto delenia troch úsečiek sme znázornili na obr. 11, kam sme zapísali aj dĺžky vzniknutých úsekov pri voľbe jednotky $1 = |S_1S_2| = |S_2S_3|$ (pri ktorej $|S_1S_3| = 2$).



Obr. 11

Keďže

$$|S_1F| = |S_1S_2| + |S_2F| = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} > \frac{3}{2} = |S_1G|,$$

platí $|GF| = |S_1F| - |S_1G| = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$, čo spolu s rovnosťou $|EF| = |ES_2| + |S_2F| = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}$ už vedie k určeniu hľadaného pomeru

$$|GF| : |EF| = \frac{1}{6} : \frac{16}{15} = 5 : 32.$$

Komentár. Úloha je zložitejšia ako predchádzajúca, ale študenti zoznámení s prípravnou úlohou, zbehlí vo využívaní podobných trojuholníkov a precízni, aby sa nestratili v záverečnom pomerovaní, by si s úlohou poradiť mali.