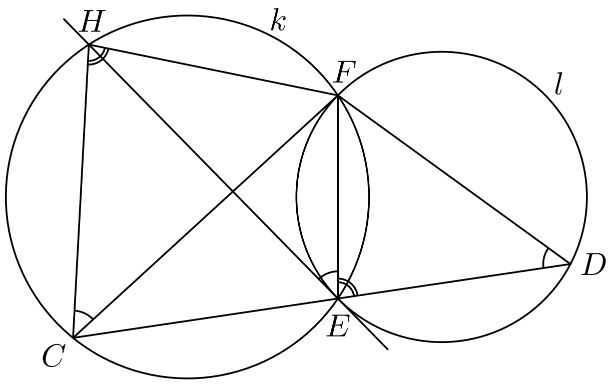
Seminár 31: Geometria VII – stredové, obvodové, úsekové uhly, tetivové štvoruholníky

Úlohy a riešenia

Úloha 31.1. [B-66-II-3] **Riešenie*.** Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou HF kružnice k vyplýva $|\measuredangle HCF| = |\measuredangle HEF|$. Uhol HEF je zároveň úsekovým uhlom prislúchajúcim tetive EF kružnice l, ktorý je však zhodný s obvodovým uhlom EDF (obr. 1). Celkovo tak platí

$$|\measuredangle HCF| = |\measuredangle HEF| = |\measuredangle EDF|. \tag{1}$$



Obr. 1:

Vzhľadom na to, že $CEFH$ je tetivový štvoruholník, je jeho vnútorný uhol pri vrchole H zhodný s vonkajším uhlom pri jeho protiľahlom vrchole E. Platí teda

$$|\measuredangle CHF| = |\measuredangle DEF|. \tag{2}$$

Z rovností 1 a 2 vyplýva na základe vety uu podobnosť trojuholníkov DEF a CHF. Tým je dôkaz hotový.

Komentár. Úloha je relatívne jednoduchou aplikáciou poznatkov o stredových, obvodových a úsekových uhloch, preto dobe poslúži ako úvodná úloha seminára. Zároveň sa v úlohe vyskytuje spoločná tetiva dvoch kružníc, ktorá je prvkom mnohých geometrických úloh v kategórii B, takže je príjemné, že sa študenti s týmto prípadom zoznámia hneď na začiatku.

Úloha 31.2. [B-65-II-2] **Riešenie*.** Kružnica k je Tálesovou kružnicou nad priemerom AB, takže trojuholník ABF je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole F. Inými slovami, priamka AF je kolmá na polomer BF kružnice m, a preto sa priamka AF dotýka kružnice m v bode F (obr. 2). Z rovnosti úsekového uhla zovretého tetivou DF s dotyčnicou AF a obvodového uhla nad tou istou tetivou máme (ako už je vyznačené na obrázku)

$$|\measuredangle AFD| = |\measuredangle DEF|.$$

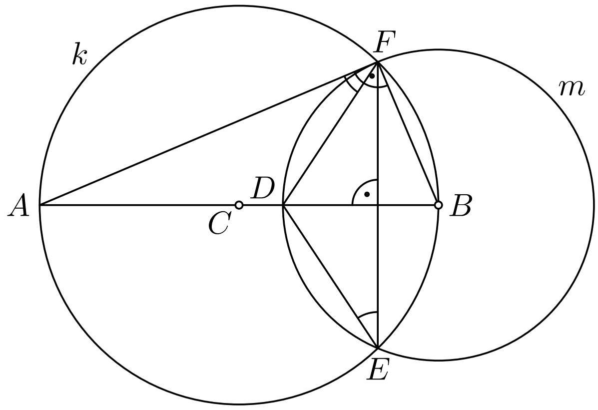
Zo súmernosti úsečky EF podľa osi AB tak vyplýva

$$|\measuredangle AFD| = |\measuredangle DEF| = |\measuredangle DFE|,$$

čo znamená, že FD je osou uhla AFE.

Iné riešenie*. Označme β veľkosť uhla ABF a dopočítajme veľkosti uhlov DFE a AFE. Trojuholník DBF je rovnoramenný, lebo jeho ramená BD a BF sú polomery kružnice m, preto

$$|\measuredangle DFB| = \frac{1}{2}(180° - \beta) = 90° - \frac{\beta}{2}.$$



Obr. 2:

Keďže podobne aj trojuholník EBF je rovnoramenný s osou BD, platí

$$|\measuredangle EFB| = 90^\circ - \beta.$$

Spojením oboch predchádzajúcich rovností tak dostávame

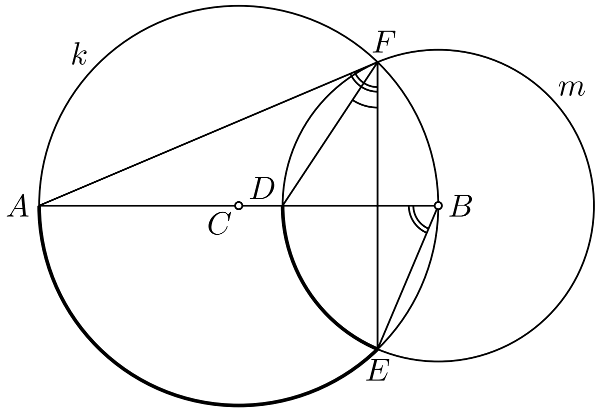
$$|\measuredangle DFE| = |\measuredangle DFB| - |\measuredangle EFB| = \frac{\beta}{2}.$$

Z vlastností Tálesovej kružnice k nad priemerom AB vieme, že uhol AFB je pravý. Pritom jeho časť uhol EFB má, ako sme už zistili, veľkosť $90^\circ - \beta$, takže jeho druhá časť, uhol AFE, má veľkosť β, čo je presne dvojnásobok veľkosti uhla DFE. Tým sme dokázali, že priamka FD je osou uhla AFE.

Iné riešenie*. Nad oblúkom AE kružnice k sa zhodujú uhly ABE a AFE (obr. 3). Oblúku DE kružnice m prislúcha obvodový uhol DFE a stredový uhol DBE. Spolu tak dostávame

$$|\measuredangle DFE| = \frac{1}{2}|\measuredangle DBE| = \frac{1}{2}|\measuredangle ABE| = \frac{1}{2}|\measuredangle AFE|,$$

čo dokazuje, že FD je osou uhla AFE.

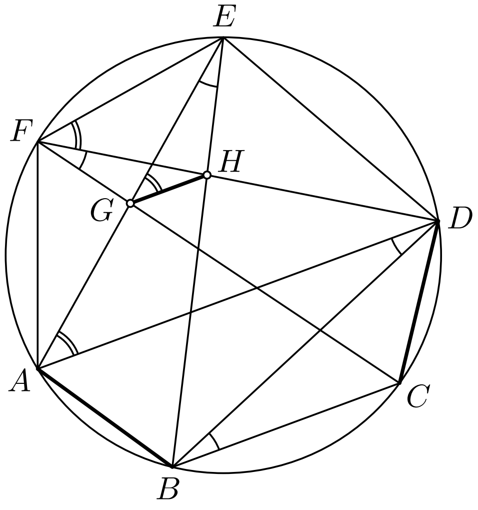


Obr. 3:

Komentár. Úlohu je možné riešiť viacerými rôznymi spôsobmi, preto je to opäť vhodný priestor na to, aby si študenti svoje riešenia porovnali a skúsili obhájiť pred spolužiakmi. V úlohe sa znova vyskytla spoločná tetiva dvoch kružníc, pekne tak nadväzuje na úlohu predchádzajúcu.

Úloha 31.3. [B-65-I-5] **Riešenie*.** Najskôr ukážeme, že $AD \parallel BC$. Keďže $|AB| = |CD|$, sú obvodové uhly nad tetivami AB a CD kružnice opísanej šesťuholníku $ABCDEF$ zhodné (obr. 4), teda

$|\measuredangle ADB| = |\measuredangle DBC|$; to sú však striedavé uhly priečky BD priamok AD a BC, preto $AD \parallel BC$. Ostáva ukázať, že $GH \parallel AD$. Využitím zhodných obvodových uhlov nad tetivami AB a CD pri vrcholoch E



Obr. 4:

a F dostávame

$$|\measuredangle GEH| = |\measuredangle AEB| = |\measuredangle CFD| = |\measuredangle GFH|,$$

čo znamená, že body E, F, G a H ležia na jednej kružnici, pretože vrcholy zhodných uhlov GEH a GFH ležia v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou GH. Z toho vyplýva, že uhly EFH a EGH nad jej tetivou EH sú zhodné. To spolu so zhodnosťou uhlov EFD a EAD nad tetivou ED pôvodnej kružnice (obr. 4) vedie na zhodnosť súhlasných uhlov EGH a EAD priečky AE priamok GH a AD, ktoré sú teda naozaj rovnobežné. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Komentár. Umiestnenie vrcholov šesťuholníka na kružnici priam nabáda, aby študenti hľadali dvojice rovnakých uhlov, ktoré im potom pomôžu vyvodiť závery o (ne)rovnobežnosti skúmaných úsečiek. Zároveň úloha obsahuje zaujímavú druhú časť, kedy objavíme, že body E, F, G, H ležia na jednej kružnici.

Úloha 31.4. [B-58-I-5] **Riešenie*.** Označme α, β, γ zvyčajným spôsobom veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC (obr. 5). Bod K leží na osi úsečky AB, preto $|AK| = |KB|$. Trojuholník AKB je rovnoramenný so základňou AB, jeho vnútorné uhly pri vrcholoch A a B sú teda zhodné. Podľa vety o obvodových uhloch sú zhodné aj uhly BCK a BAK, resp.ACK a ABK, preto sú zhodné aj uhly BCK a ACK. Polpriamka CK je teda osou uhla ACB:

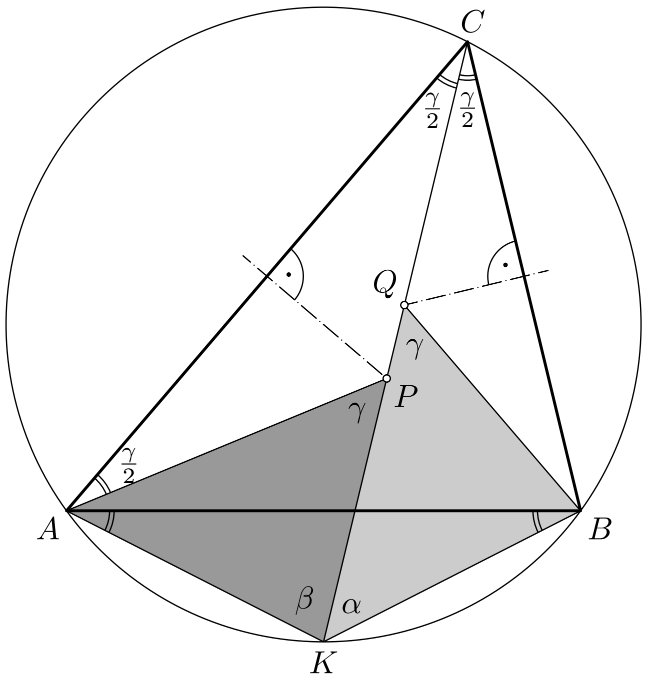
$$|\measuredangle ACK| = |\measuredangle BCK| = \frac{\gamma}{2}.$$

Keďže bod P leží na osi strany AC, je trojuholník ACP rovnoramenný a jeho vnútorné uhly pri základni AC majú veľkosť $\frac{1}{2}\gamma$, takže jeho vonkajší uhol APK pri vrchole P má veľkosť $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma = \gamma$. Rovnako z rovnoramenného trojuholníka BCQ odvodíme, že aj veľkosť uhla BQK je γ. Podľa vety o obvodových uhloch sú zhodné uhly ABC a AKC, teda uhol AKC (čiže uhol AKP) má veľkosť β a – celkom analogicky – uhol BKQ má veľkosť α.

V každom z trojuholníkov AKP a BKQ už poznáme veľkosti dvoch vnútorných uhlov (β, γ, resp. α, γ), takže vidíme, že zostávajúce uhly KAP a KBQ majú veľkostiα, resp. β.

Z predošlého vyplýva, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné podľa vety *usu*, lebo majú zhodné strany AK a KB aj obe dvojice k nim priľahlých vnútorných uhlov.

K uvedenému postupu dodajme, že výpočet uhlov KAP a KBQ cez uhly APK a BQK možno obísť takto: zhodnosť uhlov KAP a BAC (resp. KBQ a ABC) vyplýva zo zhodnosti uhlov KAB a PAC (resp. KBA a QBC).



Obr. 5:

Komentár. Posledná úloha seminára pekne kombinuje vlastnosti uhlov a zhodnosť trojuholníkov, je tak dôstojným zakončením tohto geometrického stretnutia.