

Seminár 13: Geometria IV – kružnica vpísaná a opísaná trojuholníku

Úlohy a riešenia

Úloha 13.1. [57-II-1] Trojuholník ABC spĺňa pri zvyčajnom označení dĺžok strán podmienku $a \leq b \leq c$. Vpísaná kružnica sa dotýka strán AB , BC a AC postupne v bodoch K , L a M . Dokážte, že z úsečiek AK , BL a CM možno zostrojiť trojuholník práve vtedy, keď platí $b + c < 3a$.

Úloha 13.2. [61-S-2] Označme S stred základne AB daného rovnoramenného trojuholníka ABC . Predpokladajme, že kružnice vpísané trojuholníkom ACS , BCS sa dotýkajú priamky AB v bodoch, ktoré delia základňu AB na tri zhodné diely. Vypočítajte pomer $|AB| : |CS|$.

Úloha 13.3. [62-S-1] Danému rovnostrannému trojuholníku vpíšme a opíšme kružnicu. Označme S obsah vzniknutého medzikružia a T obsah kruhu, ktorého priemer je zhodný s dĺžkou strany daného trojuholníka. Ktorý z obsahov S , T je väčší? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Úloha 13.4. [61-I-5] Daný je rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky a a ramenami dĺžky b . Pomocou nich vyjadrite polomer R kružnice opísanej a polomer r kružnice vpísanej tomuto trojuholníku. Potom ukážte, že platí $R \geq 2r$ a zistite, kedy nastane rovnosť.

Úloha 13.5. [63-I-2] V rovine sú dané body A , P , T neležiace na jednej priamke. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby P bola päta jeho výšky z vrcholu A a T bod dotyku strany AB s kružnicou jemu vpísanou. Uveďte diskusiu o počte riešení vzhľadom na polohu daných bodov.

Úloha 13.6. [59-I-4] Kružnica $k(S; r)$ sa dotýka priamky AB v bode A . Kružnica $l(T; s)$ sa dotýka priamky AB v bode B a pretína kružnicu k v krajných bodoch C , D jej priemeru. Vyjadrite dĺžku a úsečky AB pomocou polomerov r , s . Dokážte ďalej, že priesečník M priamok CD , AB je stredom úsečky AB .

Úloha 13.7. [61-I-2] Dĺžky strán trojuholníka sú v metroch vyjadrené celými číslami. Určte ich, ak má trojuholník obvod 72 m a ak je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená bodom dotyku vpísanej kružnice v pomere 3 : 4.