

## Seminár 32: Geometria VIII – výpočtové úlohy

### Ciele

Precvičiť komplexnejšie úlohy zahŕňajúce geometrické výpočty

### Úlohy a riešenia

**Úloha 32.1.** [B-59-II-1] Kružnica  $l(T; s)$  prechádza stredom kružnice  $k(S; 2\text{cm})$ . Kružnica  $m(U; t)$  sa zvonka dotýka kružníc  $k$  a  $l$ , pričom  $US \perp ST$ . Polomery  $s$  a  $t$  vyjadrené v centimetroch sú celé čísla. Určte ich.

**Riešenie\*.** Trojuholník  $UST$  je pravouhlý. Jeho prepona  $UT$  má dĺžku  $s + t$ , dĺžky odvesien sú  $|US| = t + 2$ ,  $|ST| = s$  (obr. 1). Podľa Pytagorovej vety platí

$$(s + t)^2 = (t + 2)^2 + s^2.$$

Úpravami postupne dostávame

$$s^2 + 2st + t^2 = t^2 + 4t + 4 + s^2,$$

$$st = 2t + 2,$$

$$t(s - 2) = 2.$$

Čísla  $t$  a  $s - 2$  sú celé, preto  $t$  musí byť deliteľom čísla 2. Keďže  $t$  je kladné, sú len dve možnosti; ak  $t = 1$  cm, tak  $s = 4$  cm, a ak  $t = 2$  cm, tak  $s = 3$  cm.



Obr. 1:

**Úloha 32.2.** [B-66-S-2] Na odvesnách  $AC$  a  $BC$  daného pravouhlého trojuholníka  $ABC$  určte postupne body  $K$  a  $L$  tak, aby súčet

$$|AK|^2 + |KL|^2 + |LB|^2$$

nadobúdala najmenšiu možnú hodnotu a vyjadrite ju pomocou  $c = |AB|$ .

**Riešenie\*.** V súlade s obr. 2 označme  $x = |CL|$ ,  $y = |CK|$ , potom  $|BL| = a - x$ , a  $|AK| = b - y$ , pričom  $a, b$  sú postupne dĺžky odvesien  $BC, AC$ . Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku



Obr. 2:

$KLC$  dostaneme  $|KL|^2 = x^2 + y^2$ , takže skúmaný súčet môžeme upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} |AK|^2 + |KL|^2 + |LB|^2 &= (b-y)^2 + x^2 + y^2 + (a-x)^2 = \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = \\ &= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{a^2 + b^2}{2} = \\ &= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{2}. \end{aligned}$$

Vďaka nezápornosti druhých mocnín z toho vidíme, že skúmaný výraz nadobúda svoju najmenšiu hodnotu, konkrétne  $\frac{1}{2}c$ , práve vtedy, keď  $x = \frac{1}{2}a$  a súčasne  $y = \frac{1}{2}b$ , teda práve vtedy, keď body  $K, L$  sú postupne stredmi odvesien  $AC, BC$  daného pravouhlého trojuholníka  $ABC$ .

*Záver.* Najmenšia možná hodnota skúmaného súčtu je rovná  $\frac{1}{4}c^2$ . Túto hodnotu dostaneme práve vtedy, keď body  $K, L$  budú postupne stredmi odvesien  $AC, BC$  daného pravouhlého trojuholníka.

**Úloha 32.3.** [B-63-S-3] Na priamke  $a$ , na ktorej leží strana  $BC$  trojuholníka  $ABC$ , sú dané body dotyku všetkých troch jemu pripísaných kružníc (body  $B$  a  $C$  nie sú známe). Nájdite na tejto priamke bod dotyku kružnice vpísanej.

V danom trojuholníku  $ABC$  označme  $X, Y, Z$  body dotyku vpísanej kružnice s jeho stranami a  $x = |AY| = |AZ|$ ,  $y = |BX| = |BZ|$ ,  $z = |CX| = |CY|$  zhodné úseky dotýčníc k vpísanej kružnici z jednotlivých vrcholov (obr. 3). Ak označíme

zvyčajným spôsobom  $a, b, c$  dĺžky jednotlivých strán, platí



Obr. 3:

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y.$$

Sčítaním týchto troch rovníc dostaneme (pomocou  $s$  ako zvyčajne označujeme polovičný obvod trojuholníka)

$$2s = a + b + c = 2x + 2y + 2z,$$

takže nám vyjde

$$x + y + z = s, \quad x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c. \quad (1)$$

Pozrime sa teraz na pripísanú kružnicu trojuholníku  $ABC$ , ktorá sa dotýka jeho strany  $BC$  v bode  $P$  a polpriamok  $AB$  a  $AC$  v bodoch  $R$  a  $Q$  (obr. 4). Zo zhodnosti úsekov príslušných dotýčníc k tejto kružnici máme

$$|AR| = |AQ|, \quad |BR| = |BP|, \quad |CP| = |CQ|,$$

odkiaľ vychádza

$$\begin{aligned} 2|AR| &= |AR| + |AQ| = |AB| + |BR| + |AC| + |CQ| = \\ &= |AB| + |BP| + |AC| + |CP| = a + b + c = 2s, \end{aligned}$$

čiže  $|AR| = |AQ| = s$ . Z tejto rovnosti ale vyplýva, že  $|BP| = |BR| = s - c$ , čo je podľa 1 zároveň dĺžka z úsečky  $CX$ , teda  $|BP| = |CX|$ . To znamená, že body  $P$  a  $X$  sú súmerne združené podľa stredú úsečky  $BC$ . Analogicky by sme odvodili rovnosti  $|BK| = s$  a  $|CL| = s$  pre body dotyku  $K$  a  $L$  kružníc



Obr. 4:

pripísaných stranám  $CA$  a  $AB$  (obr. 4) trojuholníka  $ABC$  s priamkou  $a$ . Z týchto posledných rovností však vidíme, že  $|BL| = s - a = |CK|$ , teda aj body  $K$  a  $L$  sú súmerne združené podľa stredú úsečky  $BC$ . Body  $K$  a  $L$  sú známe (z troch daných bodov na priamke sú to tie dva krajné), poznáme teda aj stred  $S$  strany  $BC$  (je to stred úsečky  $KL$ ) a bod  $X$  nájdeme ako obraz tretieho daného bodu  $P$  v stredovej súmernosti podľa stredú úsečky  $BC$ .

**Úloha 32.4.** [B-65-I-3] V pravouhlom trojuholníku  $ABC$  s preponou  $AB$  a odvesnami dĺžok  $|AC| = 4$  cm a  $|BC| = 3$  cm ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice  $k_1(S_1; r_1)$  a  $k_2(S_2; r_2)$  tak, že  $k_1$  sa dotýka strán  $AB$  a  $AC$ , zatiaľ čo  $k_2$  sa dotýka strán  $AB$  a  $BC$ . Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu polomeru  $r_2$ .

**Riešenie\*.** Majme také dve kružnice, ktoré spĺňajú predpoklady úlohy (obr. 5). Zrejme stred  $S_1$  leží na osi uhla  $BAC$  a stred  $S_2$  na osi uhla  $ABC$ . Ďalej si uvedomme, že veľkosť polomeru  $r_1$  kružnice  $k_1$  je priamo úmerná dĺžke úsečky  $AS_1$  a podobne veľkosť  $r_2$  priamo úmerná dĺžke úsečky  $BS_2$ . Keď zväčšíme polomer jednej z kružníc, musí sa nutne polomer druhej kružnice zmenšiť.



Obr. 5:

Kružnica  $k_2$  nemôže mať polomer väčší ako najväčšia kružnica, ktorú možno do trojuholníka  $ABC$  vpísať. Takou kružnicou je zrejme kružnica  $k$  do trojuholníka  $ABC$  vpísaná. A naopak najmenší polomer bude mať kružnica  $k_2$ , ak zvolíme  $k_1 = k$ . (Že v oboch opísaných prípadoch pre  $k_2 = k$  aj pre  $k_1 = k$  existuje príslušná „vpísaná“ kružnica  $k_1$ , resp.  $k_2$ , je vcelku zrejmé.)

Stačí teda vypočítať polomer  $r$  kružnice  $k$  do trojuholníka  $ABC$  vpísanej a polomer kružnice  $k_2$ , ktorá sa dotýka kružnice  $k$  a strán  $AB$  a  $BC$  daného trojuholníka.

Polomer  $r$  vpísanej kružnice vypočítame napríklad zo vzorca  $2S_{ABC} = ro$ , pričom  $S_{ABC}$  označuje obsah trojuholníka  $ABC$  a  $o$  jeho obvod. Obsah daného pravouhlého trojuholníka  $ABC$  s preponou  $AB$  je pri zvyčajnom označení dĺžok strán rovný  $\frac{1}{2}ab$ . Prepona v trojuholníku  $ABC$  má (v centimetroch) podľa Pytagorovej vety veľkosť  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ . Maximálny polomer kružnice  $k_2$  je teda

$$r = \frac{2S_{ABC}}{o} = \frac{ab}{a + b + c} = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4 + 5} = 1.$$

Pre výpočet polomeru  $r_2$  kružnice  $k_2$ , ktorá sa dotýka kružnice  $k$  a strán  $AB$  a  $BC$ , označme  $D$  a  $E$  body, v ktorých sa kružnice  $k$  a  $k_2$  dotýkajú strany  $AB$ , a  $F$ ,  $G$  dotykové body kružnice  $k$  postupne so stranami  $BC$  a  $AC$  (obr. 6). Keďže daný trojuholník je pravouhlý, je  $S_1FCG$  štvorec so stranou



Obr. 6:

dĺžky  $r = 1$ , takže  $|BF| = |BD| = 2$  a podľa Pytagorovej vety  $|BS_1| = \sqrt{5}$ . Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov  $BES_2$  a  $BDS_1$  potom vyplýva

$$\frac{r_2}{|BS_2|} = \frac{r}{|BS_1|}, \quad \text{čiže} \quad \frac{r_2}{\sqrt{5} - r_2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Po úprave tak pre hľadanú hodnotu neznámej  $r_2$  dostaneme lineárnu rovnicu

$$r_2(\sqrt{5} + 1) = \sqrt{5} - 1,$$

ktorú ešte zjednodušíme vynásobením  $\sqrt{5} - 1$ . Zistíme tak, že najmenšia možná hodnota polomeru kružnice  $k_2$  je rovná

$$r_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

**Úloha 32.5.** [B-61-II-3] Pravouhlému trojuholníku  $ABC$  je vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka prepony  $AB$  v bode  $K$ . Úsečku  $AK$  otočíme o  $90^\circ$  do polohy  $AP$  a úsečku  $BK$  otočíme o  $90^\circ$  do polohy  $BQ$  tak, aby body  $P, Q$  ležali v polrovine opačnej k polrovine  $ABC$ .

- Dokážte, že obsahy trojuholníkov  $ABC$  a  $PQK$  sú rovnaké.
- Dokážte, že obvod trojuholníka  $ABC$  nie je väčší ako obvod trojuholníka  $PQK$ . Kedy nastane rovnosť obvodov?

**Riešenie\*.** a) Označme  $S$  stred a  $r$  polomer kružnice vpísanej trojuholníku  $ABC$  a  $L, M$  body dotyku tejto kružnice postupne so stranami  $BC, CA$  (obr. 7). Ak označíme  $|AK| = x, |BK| = y$ , tak  $|AP| = |AM| = x, |KP| = x\sqrt{2}, |BQ| = |BL| = y, |KQ| = y\sqrt{2}$ . Keďže oba uhly  $AKP, BKQ$  majú veľkosť  $45^\circ$ , je trojuholník  $PQK$  pravouhlý, takže jeho obsah je

$$S_{PQK} = \frac{x\sqrt{2}y\sqrt{2}}{2} = xy.$$



Obr. 7:

Štvoruholník  $SLCM$  je štvorec so stranou dĺžky  $r$  a  $|AM| = x, |BL| = y$ . Obsah trojuholníka  $ABC$  je rovný súčtu obsahov trojuholníkov  $ABS, BCS$  a  $CAS$ , teda

$$S_{ABC} = \frac{(x+y)r + (y+r)r + (x+r)r}{2} = (x+y+r)r.$$

Obsah trojuholníka  $ABC$  je zároveň rovný

$$S_{ABC} = \frac{|AC| \cdot |BC|}{2} = \frac{(x+r)(y+r)}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{(x+y+r)r}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{S_{ABC}}{2}.$$

Odtiaľ dostávame  $S_{ABC} = xy$ , čiže  $S_{ABC} = S_{PQK}$ , čo sme mali dokázať.

b) V trojuholníku  $ABC$  sú dĺžky strán  $a = y + r$ ,  $b = x + r$ ,  $c = x + y$ . Obvod trojuholníka  $ABC$  je  $a + b + |AB|$ , obvod trojuholníka  $PQK$  je  $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + |PQ|$ .

Zrejme platí  $|AB| \leq |PQ|$  ( $|AB|$  je vzdialenosťou rovnobežiek  $AP$ ,  $BQ$ , (obr. 7). Rovnosť nastane jedine v prípade  $|AP| = |BQ|$ , čiže  $x = y$ . Ešte dokážeme, že  $a + b \leq x\sqrt{2} + y\sqrt{2}$ , teda že  $a + b \leq c\sqrt{2}$ . Posledná nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou, ktorú dostaneme jej umocnením na druhú, pretože obe jej strany sú kladné. Dostaneme tak  $a^2 + b^2 + 2ab \leq 2c^2$ . Keďže v pravouhlom trojuholníku  $ABC$  platí  $a^2 + b^2 = c^2$ , máme dokázať nerovnosť  $2ab \leq a^2 + b^2$ , ktorá je však ekvivalentná s nerovnosťou  $0 \leq (a - b)^2$ . Tá platí pre všetky reálne čísla  $a$ ,  $b$  a rovnosť v nej nastane jedine pre  $a = b$ , t. j.  $x = y$ .

Celkovo vidíme, že obvod trojuholníka  $ABC$  je menší alebo rovný obsahu trojuholníka  $PQK$  a rovnosť nastane práve vtedy, keď je pravouhlý trojuholník  $ABC$  rovnoramenný.

## Domáca práca

Keďže v nasledujúcom seminári je naplánované opakovanie, úlohou študentov bude si zbežne zopakovať, čomu sme sa posledných 9 mesiacov venovali. Zmyslom domácej práce nie je opätovné prepočítavanie všetkých príkladov, ale skôr získanie prehľadu a nadhľadu nad študovanými témami.