Seminár 10

Téma

Geometria II – podobné trojuholníky a Pytagorova veta

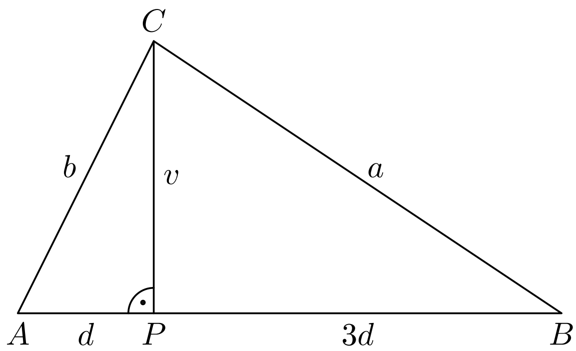
Ciele

Precvičiť riešenie úloh vhodným (viacnásobným) využitím Pytagorovej vety a dvojíc podobných trojuholníkov

Úlohy a riešenia

Úloha 10.1. [66-S-3] Päta P výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC delí stranu AB v pomere $|AP| : |PB| = 1 : 3$. V rovnakom pomere sú aj obsahy štvorcov nad jeho stranami AC a BC. Dokážte, že trojuholník ABC je pravouhlý.

Riešenie*. Označme d dĺžku úsečky AP a v dĺžku výšky CP trojuholníka ABC. Dĺžky jeho strán označíme zvyčajným spôsobom a, b, c. Zo zadania teda vyplýva $|PB| = 3d$.



Obr. 1

Použitím Pytagorovej vety v trojuholníkoch APC a PBC dostávame rovnosti $b^2 = d^2 + v^2$ a $a^2 = 9d^2 + v^2$. Z druhého predpokladu úlohy potom vyplýva rovnosť $a^2 = 3b^2$, čiže $9d^2 + v^2 = 3d^2 + 3v^2$, odkiaľ $v^2 = 3d^2$. Dosadením do prvých dvoch rovností tak dostávame $a^2 = 12d^2$ a $b^2 = 4d^2$. A keďže $c = 4d$, čiže $c^2 = 16d^2$, dokázali sme, že pre dĺžky strán trojuholníka ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$.

Trojuholník ABC je preto podľa obrátenej Pytagorovej vety pravouhlý.

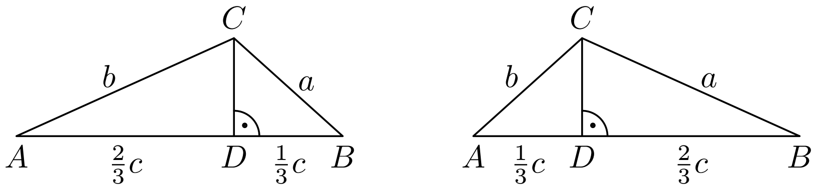
Poznámka. Ak zvážime pomocný pravouhlý trojuholník s odvesnami a a b, tak pre jeho preponu c' podľa Pytagorovej vety platí $c' = a^2 + b^2$. Porovnaním s odvodenou rovnosťou $c^2 = a^2 + b^2$ tak dostávame $c' = c$, takže pôvodný trojuholník je podľa vety *sss* zhodný s trojuholníkom pomocným, a je teda skutočne pravouhlý. Môžeme tolerovať názor, že samotná Pytagorova veta udáva nielen nutnú, ale aj postačujúcu podmienku na to, aby bol daný trojuholník pravouhlý.

Komentár. Úloha relatívne priamočiaro využíva viacnásobné využitie Pytagorovej vety, je tak vhodným zahrievacím problémom tohto seminára.

Úloha 10.2. [66-I-3] Päta výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC delí stranu AB v pomere $1 : 2$. Dokážte, že pri zvyčajnom označení dĺžok strán trojuholníka ABC platí nerovnosť

$$3|a - b| < c.$$

Riešenie*. Päta D uvažovanej výšky je podľa zadania tým vnútorným bodom strany AB, pre ktorý platí $|AD| = 2|BD|$ alebo $|BD| = 2|AD|$. Obe možnosti sú znázornené na obr. 2 s popisom dĺžok strán AC, BC a oboch úsekov rozdelenej strany AB.



Obr. 2

Pytagorova veta pre pravouhlé trojuholníky ACD a BCD vedie k dvojakému vyjadreniu druhej mocniny spoločnej odvesny CD, pričom v situácii naľavo dostaneme

$$|CD|^2 = b^2 - \left(\frac{2}{3}c\right)^2 = a^2 - \left(\frac{1}{3}c\right)^2,$$

odkiaľ po jednoduchej úprave poslednej rovnosti dostaneme vzťah

$$3(b^2 - a^2) = c^2.$$

Pre druhú situáciu vychádza analogicky

$$3(a^2 - b^2) = c^2.$$

Závery pre obe možnosti možno zapísať jednotne ako rovnosť s absolútnou hodnotou

$$3|a^2 - b^2| = c^2.$$

Ak použijeme rozklad $|a^2 - b^2| = |a - b|(a + b)$ a nerovnosť $c < a + b$ (ktorú ako je známe spĺňajú dĺžky strán každého trojuholníka ABC), dostaneme z odvodenej rovnosti

$$3|a - b|c < 3|a - b|(a + b) = c^2,$$

odkiaľ po vydelení kladnou hodnotou c dostaneme $3|a - b| < c$, ako sme mali dokázať. Zdôraznime, že nerovnosť $3|a - b|c < 3|a - b|(a + b)$ sme správne zapísali ako ostrú – v prípade $a = b$ by síce prešla na rovnosť, avšak podľa nášho odvodenia by potom platilo $c^2 = 0$, čo odporuje tomu, že ide o dĺžku strany trojuholníka.

Iné riešenie. Nerovnosť, ktorú máme dokázať, možno po vydelení tromi zapísať bez absolútnej hodnoty ako dvojicu nerovností

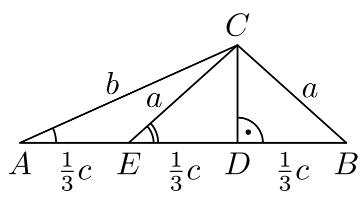
$$-\frac{1}{3}c < a - b < \frac{1}{3}c.$$

Opäť ako v pôvodnom riešení rozlíšime dve možnosti pre polohu päty D uvažovanej výšky a ukážeme, že vypísanú dvojicu nerovností možno upresniť na tvar

$$-\frac{1}{3} < a - b < 0, \qquad \text{respektíve} \qquad 0 < a - b < \frac{1}{3}c,$$

podľa toho, či nastáva situácia z ľavej či pravej časti obr. 2.

Pre situáciu z obr. 2 naľavo prepíšeme avizované nerovnosti $-\frac{1}{3}c < a - b < 0$ ako $a < b < a + \frac{1}{3}c$ a odvodíme ich z pomocného trojuholníka ACE, pričom E je stred úsečky AD, takže body D a E delia stranu AB na tri zhodné úseky dĺžky $\frac{1}{3}c$.



Obr. 3

V obr. 3 sme rovno vyznačili, že úsečka EC má dĺžku a ako úsečka BC, a to v dôsledku zhodnosti trojuholníkov BCD a ECD podľa vety *sus*. Preto je pravá z nerovností $a < b < a + \frac{1}{3}c$ porovnaním dĺžok strán trojuholníka ACE, ktoré má všeobecnú platnosť.

Ľavú nerovnosť $a < b$ odvodíme z druhého všeobecného poznatku, že totiž v každom trojuholníku oproti väčšiemu vnútornému uhlu leží dlhšia strana. Stačí nám teda zdôvodniť, prečo pre uhly vyznačené na obr. 3 platí $|\measuredangle CAE| < |\measuredangle AEC|$. To je však jednoduché: zatiaľ čo uhol CAE je vďaka pravouhlému trojuholníku ACD ostrý, uhol AEC je naopak tupý, pretože k nemu vedľajší uhol CED je ostrý vďaka pravouhlému trojuholníku CED.

Pre prípad situácie z obr. 2 napravo možno predchádzajúci postup zopakovať s novým bodom E, tentoraz stredom úsečky BD. Môžeme však vďaka súmernosti podľa osi AB konštatovať, že z dokázaných nerovností $-\frac{1}{3}c < a - b < 0$ pre situáciu naľavo vyplývajú nerovnosti $-\frac{1}{3}c < b - a < 0$ pre situáciu napravo, z ktorých po vynásobení číslom -1 dostaneme práve nerovnosti $0 < a - b < \frac{1}{3}$, ktoré sme mali v druhej situácii dokázať.

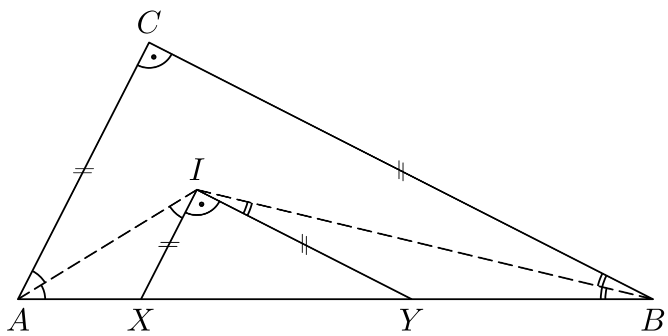
Komentár. Nosným prvkom úlohy je opäť Pytagorova veta, väčšiu pozornosť však vyžaduje rozbor úlohy, keďže päta výšky sa môže nachádzať v dvoch rôznych polohách.

Úloha 10.3. [63-S-3] Daný je trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Stredom I kružnice trojuholníku vpísanej vedieme rovnobežky so stranami CA a CB, ktoré pretnú preponu postupne v bodoch X a Y. Dokážte, že platí $|AX|^2 + |BY|^2 = |XY|^2$.

Riešenie*. Trojuholník AIX je rovnoramenný, pretože $|\measuredangle IAX| = |\measuredangle IAC| = |\measuredangle AIX|$ (prvá rovnosť vyplýva z podmienky, že bod I leží na osi uhla BAC, druhá potom z vlastností striedavých uhlov, obr. 4). Preto $|AX| = |IX|$. Analogicky zistíme, že $|BY| = |YI|$. Keďže úsečky IX a IY zvierajú (rovnako ako s nimi rovnobežné úsečky CA a CB) pravý uhol, podľa Pytagorovej vety pre pravouhlý trojuholník XIY platí

$$|AX|^2 + |BY|^2 = |IX|^2 + |YI|^2 = |XY|^2,$$

čo sme mali dokázať.



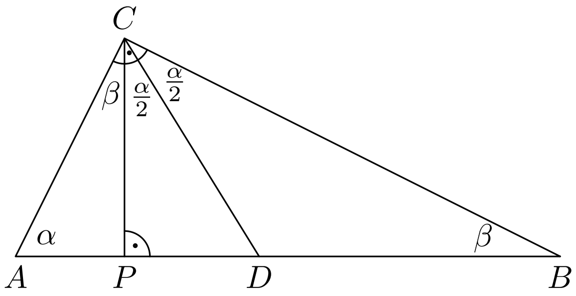
Obr. 4

Komentár. Úloha už vyžaduje trochu viac invencie a postrehu, keďže kľúčovým krokom v riešení je všimnúť si, že trojuholníky AIX a BIY sú rovnoramenné. K tomu však študentov môže naviesť poloha bodu I, ktorý leží na osi uhlov a to, že rovnobežky AC a XI, resp. BC a YI sú preťaté priečkami AI, resp. BI, takže v náčrtku vieme nájsť niekoľko dvojíc zhodných uhlov. Úloha tak kombinuje použitie Pytagorovej vety aj vlastnosti rovnoramenných trojuholníkov.

Úloha 10.4. [58-S-2] V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P pätu výšky z vrcholu C na preponu AB. Priesečník úsečky AB s priamkou, ktorá prechádza vrcholom C a stredom kružnice vpísanej trojuholníku PBC, označíme D. Dokážte, že úsečky AD a AC sú zhodné.

Riešenie*. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB pre veľkosti α, β uhlov pri vrcholoch A, B platí $\alpha + \beta = 90°$, preto $|\measuredangle ACP| = 90° - \alpha = \beta$ a $|\measuredangle BCD| = |\measuredangle DCP| = \frac{1}{2}(90° - \beta) = \frac{1}{2}\alpha$ lebo priamka CD je osou uhla BCP (obr. 5). Pre vonkajší uhol ADC trojuholníka BCD tak zrejme platí $|\measuredangle ADC| = |\measuredangle DBC| + |\measuredangle BCD| = \beta + \frac{1}{2}\alpha = |\measuredangle DCA|$.

Zistili sme, že trojuholník ADC má pri vrcholoch C, D zhodné vnútorné uhly, je teda rovnoramenný, a preto $|AD| = |AC|$.



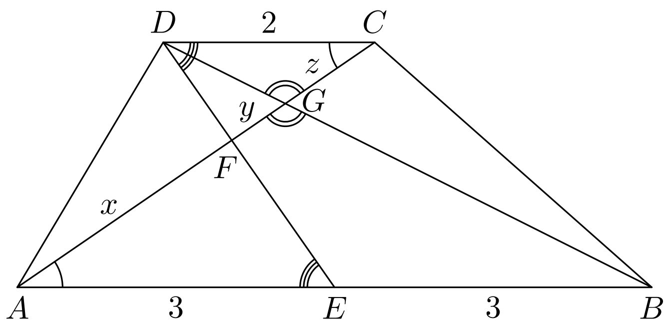
Obr. 5

Komentár. Úloha je zameraná na nájdenie veľkosti vhodných uhlov[1] a využitie poznatku, že uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka majú rovnakú veľkosť.

Úloha 10.5. [64-I-4] Označme E stred základne AB lichobežníka $ABCD$, v ktorom platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Uhlopriečka AC pretína úsečky ED, BD postupne v bodoch F, G. Určte postupný pomer $|AF| : |FG| : |GC|$.

Riešenie*. Keďže v zadaní aj v otázke úlohy sú iba pomery, môžeme si dĺžky strán lichobežníka zvoliť ako vhodné konkrétne čísla. Zvoľme teda napr. $|AB| = 6$, potom $|AE| = |BE| = 3$ a $|CD| = 2$. Hľadané dĺžky označme $|AF| = x$, $|FG| = y$, $|GC| = z$. Tieto dĺžky sme vyznačili na obr. 6, taktiež aj tri dvojice zhodných uhlov, ktoré teraz využijeme pri úvahách o trojuholníkoch podobných podľa vety *uu*.

Trojuholníky ABG a CDG sú podobné, preto $(x + y) : z = 6 : 2 = 3 : 1$. Aj trojuholníky AEF a CDF sú podobné, preto $x : (y + z) = 3 : 2$.



Obr. 6

Odvodené úmery zapíšeme ako sústavu rovníc

$$x + y - 3z = 0,$$
$$2x - 3y - 3z = 0.$$

Ich odčítaním získame rovnosť $x = 4y$, čiže $x : y = 4 : 1$. Dosadením tohto výsledku do prvej rovnice dostaneme $5y = 3z$, čiže $y : z = 3 : 5$. Spojením oboch pomerov získame výsledok $x : y : z = 12 : 3 : 5$.

[1]V anglickej literatúre sa tejto metóde – počítaniu veľkostí všemožných uhlov – hovorí *angle-chasing*.

Komentár. Úloha je výborným tréningom na hľadanie vhodných dvojíc podobných trojuholníkov tak, aby sme pomocou údajov zo zadania boli schopní určiť hľadaný pomer, keďže jedna dvojica trojuholníkov na nájdenie odpovede zjavne stačiť nebude. Okrem toho tiež pozorovania z náčrtu vedú k sústave dvoch rovníc, takže študenti uplatnia aj svoje algebraické zručnosti.

Úloha 10.6. [63-I-4] Vo štvorci $ABCD$ označme K stred strany AB a L stred strany AD. Úsečky KD a LC sa pretínajú v bode M a rozdeľujú štvorec na dva trojuholníky a dva štvoruholníky. Vypočítajte ich obsahy, ak úsečka LM má dĺžku 1 cm.

Riešenie*. Platí $|AK| = |DL|$ a $|AD| = |DC| = 2|AK|$ (obr. 7), takže pravouhlé trojuholníky AKD a DLC sú zhodné podľa vety *sus*. Okrem toho sú trojuholníky MLD a AKD podobné podľa vety *uu*, lebo $|\measuredangle LDM| = |\measuredangle KDA|$ a $|\measuredangle DLM| = |\measuredangle DLC| = |\measuredangle AKD|$. Analogicky sa dá overiť i podobnosť trojuholníkov MDC a AKD. Z podobnosti trojuholníkov AKD, MLD a MDC vyplýva, že $|MD| = 2|ML| = 2\,\text{cm}$ a $|MC| = 2|MD| = 4\,\text{cm}$. Obsahy útvarov MLD, MDC a $AKML$ sú

$$S_{MLD} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1\,\text{cm}^2, \qquad S_{MDC} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4\,\text{cm}^2$$

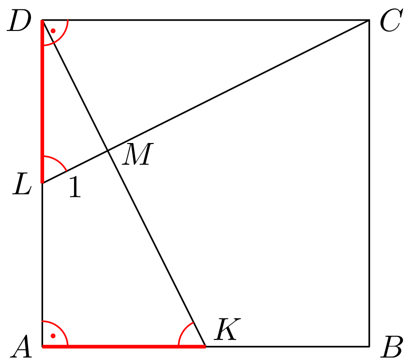
a

$$S_{AKML} = S_{AKD} - S_{MLD} = S_{DLC} - S_{MLD} = S_{MDC} = 4\,\text{cm}^2.$$

Nakoniec pomocou Pytagorovej vety dostávame $S_{ABCD} = |DC|^2 = |DM|^2 + |CM|^2 = 20\,\text{cm}^2$, takže

$$S_{KBCM} = S_{ABCD} - (S_{MLD} + S_{MDC} + S_{AKML}) = 11\,\text{cm}^2.$$

Záver. Obsahy trojuholníkov MLD, MDC a štvoruholníkov $AKML$, $KBCM$ sú postupne $1\,\text{cm}^2$, $4\,\text{cm}^2$, $4\,\text{cm}^2$ a $11\,\text{cm}^2$.



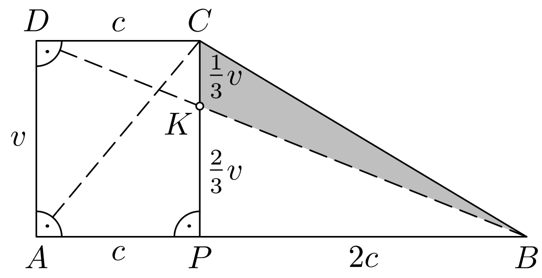
Obr. 7

Komentár. Opäť je potrebné identifikovať podobné trojuholníky a potom pomocou známeho koeficientu určiť ich obsahy. Oproti predchádzajúcej úlohe ešte študenti navyše využijú Pytagorovu vetu.

Úloha 10.7. [65-II-3] V pravouhlom lichobežníku $ABCD$ s pravým uhlom pri vrchole A základne AB je bod K priesečníkom výšky CP lichobežníka s jeho uhlopriečkou BD. Obsah štvoruholníka $APCD$ je polovicou obsahu lichobežníka $ABCD$. Určte, akú časť obsahu trojuholníka ABC zaberá trojuholník BCK.

Riešenie*. V pravouholníku $APCD$ označme $c = |CD| = |AP|$ a $v = |AD| = |CP|$ (obr. 8, pričom sme už vyznačili ďalšie dĺžky, ktoré odvodíme v priebehu riešenia)[2].

[2]Keďže podľa zadania uhlopriečka BD pretína výšku CP, musí jej päta P ležať medzi bodmi A a B, takže ide o „zvyčajný“ lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a kratšou základňou CD.



Obr. 8

Z predpokladu $S_{APCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ vyplýva pre druhú polovicu obsahu $ABCD$ vyjadrenie $\frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{PBC}$, takže $S_{APCD} = S_{PBC}$ čiže $cv = \frac{1}{2}|PB|v$, odkiaľ vzhľadom na to, že $v \neq 0$, vychádza $|PB| = 2c$, v dôsledku čoho $|AB| = 3c$.

Trojuholníky CDK a PBK majú pravé uhly pri vrcholoch C, P a zhodné (vrcholové) uhly pri spoločnom vrchole K, takže sú podľa vety uu podobné, a to s koeficientom $|PB| : |CD| = 2c : c = 2$. Preto tiež platí $|PK| : |CK| = 2 : 1$, odkiaľ $|KP| = \frac{2}{3}v$ a $|CK| = \frac{1}{3}v$.

Posudzované obsahy trojuholníkov ABC a BCK tak majú vyjadrenie

$$S_{ABC} = \frac{|AB| \cdot |CP|}{2} = \frac{3cv}{2} \quad \text{a} \quad S_{BCK} = \frac{|CK| \cdot |BP|}{2} = \frac{\frac{1}{3}v \cdot 2c}{2} = \frac{cv}{3},$$

preto ich pomer má hodnotu

$$\frac{S_{BCK}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{3}cv}{\frac{3}{2}cv} = \frac{2}{9}.$$

Záver. Trojuholník BCK zaberá 2/9 obsahu trojuholníka ABC.

Komentár. Najkomplexnejšia úloha tohto seminára precvičí študentov v používaní vlastností podobných trojuholníkov a taktiež vo vyjadrovaní obsahov trojuholníkov pomocou určiteľných hodnôt. Tvorí tak dôstojnú bodku za týmto seminárom.

Domáca práca

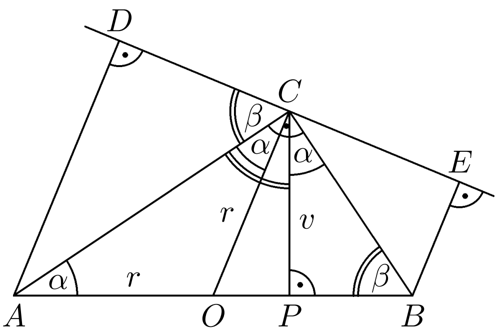
Úloha 10.8. [58-I-2] Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC.

Riešenie*. Označme odvesny trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom a, b a protiľahlé uhly α, β. Stred prepony AB (ktorý je súčasne stredom opísanej kružnice) označíme O (obr. 9).

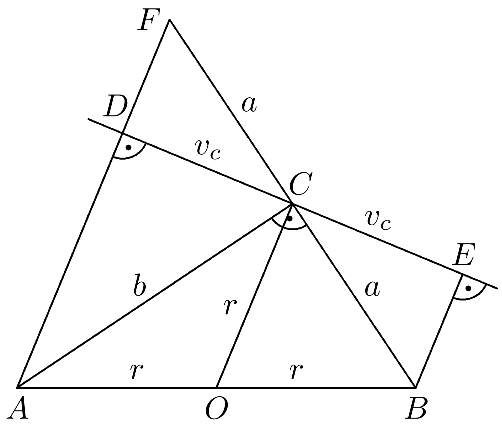
Výška $v = CP$ rozdeľuje trojuholník ABC na trojuholníky ACP a CBP podobné trojuholníku ABC podľa vety uu ($\alpha + \beta = 90°$), úsečka OC je kolmá na DE a navyše $|OC| = |OA| = r$ (polomer opísanej kružnice). Odtiaľ $|\measuredangle OCA| = |\measuredangle OAC| = \alpha$ a $|\measuredangle DCA| = 90° - |\measuredangle OCA| = \beta$.

Pravouhlé trojuholníky ACP a ACD so spoločnou preponou AC sa teda zhodujú aj v uhloch pri vrchole C. Sú preto zhodné, dokonca súmerne združené podľa priamky AC. Analogicky sú trojuholníky CBP a CBE súmerne združené podľa BC. Takže $|CD| = |CE| = v$, čiže $|DE| = 2v = 2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$, lebo z dvojakého vyjadrenia dvojnásobku obsahu trojuholníka ABC vyplýva $v = ab/|AB|$, pričom $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Poznámka. Namiesto dvojakého vyjadrenia obsahu môžeme na výpočet výšky CP využiť podobnosť trojuholníkov CBP a ABC: $\sin\alpha = |CP|/|AC| = |BC|/|AB|$.



Obr. 9



Obr. 10

Iné riešenie. Úsečka OC je strednou priečkou lichobežníka $DABE$, lebo je rovnobežná so základňami a prechádza stredom O ramena AB. Preto D je obrazom bodu E v súmernosti podľa stredu C. Obraz F bodu B v tej istej súmernosti leží na polpriamke AD za bodom D (obr. 10). Máme $|CF| = |BC| = a$, uhol ACF je pravý, a teda trojuholníky AFC a ABC sú zhodné. Vidíme, že CD je výška v trojuholníku AFC zhodná s výškou v_c trojuholníka ABC, a DE je jej dvojnásobkom. Veľkosť výšky v_c dopočítame rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

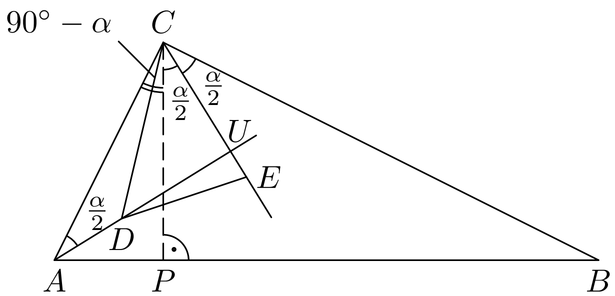
Záver. $|DE| = 2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Úloha 10.9. [58-II-2] V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P pätu výšky z vrcholu C na preponu AB a D, E stredy kružníc vpísaných postupne trojuholníkom APC, CPB. Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečníkom výšok trojuholníka CDE.

Riešenie*. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB označme α veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A, zrejme potom platí $|\angle ACP| = 90° - \alpha$, $|\angle PCB| = \alpha$. Stred D kružnice vpísanej trojuholníku APC leží na osi uhla PAC, takže $|\angle DAC| = \frac{1}{2}\alpha$, a podobne aj $|\angle PCE| = \frac{1}{2}\alpha$. Odtiaľ pre veľkosť uhla AUC v trojuholníku AUC, pričom U je priesečník polpriamok AD a CE (obr. 11), vychádza

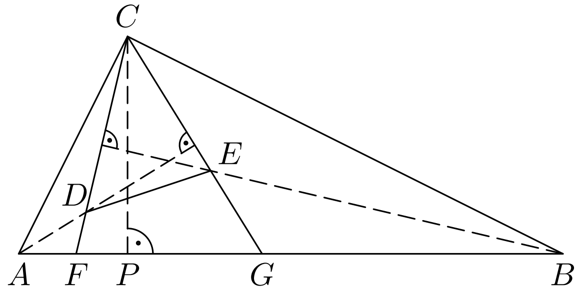
$$|\angle AUC| = 180° - \left(90° - \alpha + \frac{1}{2}\alpha\right) - \frac{1}{2}\alpha = 90°.$$

To znamená, že polpriamka AD je kolmá na CE, úsečka DU je teda výška v trojuholníku DEC. Úplne rovnako zistíme, že aj polpriamka BE (ktorá je zároveň osou uhla ABC) je kolmá na CD. Dostávame tak, že priesečník polpriamok AD a BE, čo je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC, je zároveň aj priesečníkom výšok trojuholníka DEC.



Obr. 11

Iné riešenie. Označme F a G zodpovedajúce priesečníky priamok CD a CE so stranou AB (obr. 12). Podľa úlohy vyriešenej na seminári v škole je trojuholník CAG



Obr. 12

rovnoramenný so základňou CG. Os AD uhla CAG rovnoramenného trojuholníka CAG je tak aj jeho osou súmernosti, a je preto kolmá na základňu CG, teda aj na CE. Podobne zistíme, že aj trojuholník CBF je rovnoramenný so základňou CF, takže os BE uhla FBC je kolmá na CF, teda aj na CD. Priesečník oboch osí AD a BE je tak nielen stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC, ale aj priesečníkom výšok trojuholníka CDE, čo sme mali dokázať.

Doplňujúce zdroje a materiály

Vhodným doplnkom nielen tohto, ale všetkých ďalších geometrických seminárov je publikácia [[**?**]], ktorá obsahuje veľké množstvo riešených úloh z euklidovskej geometrie, od jednoduchých až po úroveň medzinárodných súťaží.

`https://old.kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf`