## Seminár 18

### Téma

Algebraické výrazy a rovnice – zložitejšie rovnice a ich systémy

### Ciele

Zoznámiť študentov s ďalšími typmi rovníc a ich sústav (iracionálne koeficienty, dolná celá časť), tieto úlohy, spolu so slovnými úlohami precvičiť.

### Úlohy a riešenia

**Úloha 0.1.** [59-S-1] Určte všetky hodnoty reálnych parametrov $p, q$, pre ktoré má každá z rovníc

$$x(x-p) = 3+q, \qquad x(x+p) = 3-q$$

v obore reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých aritmetický priemer je jedným z koreňov zvyšnej rovnice.

**Riešenie*.** Z Viètových vzťahov pre korene kvadratickej rovnice (ktoré vyplývajú z rozkladu daného kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov) ľahko zistíme, že súčet koreňov prvej rovnice je $p$, takže ich aritmetický priemer je $\frac{1}{2}p$. Toto číslo má byť koreňom druhej rovnice, preto

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{3p}{2} = 3-q. \qquad (1)$$

Podobne súčet koreňov druhej rovnice je $-p$, ich aritmetický priemer je $-\frac{1}{2}p$, a preto

$$-\frac{p}{2} \cdot \left(-\frac{3p}{2}\right) = 3+q. \qquad (2)$$

Porovnaním oboch vzťahov (1) a (2) máme $3-q = 3+q$, čiže $q = 0$ a z (1) potom vyjde $p = 2$ alebo $p = -2$.

Z oboch nájdených riešení dostaneme tú istú dvojicu rovníc $x(x-2) = 3$, $x(x+2) = 3$. Korene prvej z nich sú čísla $-1$ a 3, ich aritmetický priemer je 1. Korene druhej rovnice sú čísla 1 a $-3$, ich aritmetický priemer je $-1$.

**Úloha 0.2.** [59-I-3-N1] Určte $\lfloor 0 \rfloor, \lfloor 3{,}5 \rfloor, \lfloor 2{,}1 \rfloor, \lfloor -4 \rfloor, \lfloor -3{,}9 \rfloor, \lfloor -0{,}2 \rfloor$. Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako číslo $x$, tzv. dolnú celú časť reálneho čísla $x$.

**Riešenie.** $\lfloor 0 \rfloor = 0, \lfloor 3{,}5 \rfloor = 3, \lfloor 2{,}1 \rfloor = 2, \lfloor -4 \rfloor = -4, \lfloor -3{,}9 \rfloor = -4, \lfloor -0{,}2 \rfloor = -1$.

**Úloha 0.3.** [59-I-3-N2] Nech $a$ je celé číslo a $t \in \langle 0; 1)$. Určte $\lfloor a \rfloor, \lfloor a+t \rfloor, \lfloor a+\frac{1}{2}t \rfloor, \lfloor a-t \rfloor$, $\lfloor a+2t \rfloor, \lfloor a-2t \rfloor$.

**Riešenie.** $\lfloor a \rfloor = a$, $\lfloor a+t \rfloor = a$, $\lfloor a+\frac{1}{2}t \rfloor = a$, $\lfloor a-t \rfloor = a$, ak $t = 0$, resp. $\lfloor a-t \rfloor = a-1$, ak $t \neq 0$, $\lfloor a+2t \rfloor = a$, ak $t < 0,5$, resp. $\lfloor a+2t \rfloor = a+1$, ak $t \geq 0,5$, $\lfloor a-2t \rfloor = a$, ak $t = 0$, resp. $\lfloor a-2t \rfloor = a-1$ ak $t \leq 0,5$ a $\lfloor a-2t \rfloor = a-2$ ak $t > 0,5$.

**Úloha 0.4.** [59-I-3] Určte všetky reálne čísla $x$, ktoré vyhovujú rovnici $4x - 2\lfloor x \rfloor = 5$.

**Riešenie*.** Položme $\lfloor x \rfloor = a$, potom $x = a + t$, pričom $t \in \langle 0, 1)$, a rovnicu $4(a + t) - 2a = 5$ ekvivalentne upravme na tvar $a = \frac{5}{2} - 2t$. Aby bolo číslo $a$ celé, musí byť $2t = k \cdot \frac{1}{2}$, pričom $k$ je nepárne číslo. Navyše $2t \in \langle 0, 2)$. Teda buď $2t = \frac{1}{2}$ a $a = 2$, alebo $2t = \frac{3}{2}$ a $a = 1$. Pôvodná rovnica má preto dve riešenia: $x_1 = 2,25$ a $x_2 = 1,75$.

**Iné riešenie.** Rovnicu upravíme na tvar $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$. Taká rovnica bude splnená práve vtedy, keď číslo $2x - \frac{5}{2}$ bude celé a bude spĺňať nerovnosti $x - 1 < 2x - \frac{5}{2} \leq x$, ktoré sú ekvivalentné s podmienkou $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$. Pre takéto $x$ zrejme hodnoty výrazu $2x - \frac{5}{2}$ vyplnia interval $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\rangle$. V ňom ležia práve dve celé čísla 1 a 2, teda hľadané $x$ nájdeme z rovníc $2x - \frac{5}{2} = 1$ a $2x - \frac{5}{2} = 2$.

**Komentár.** Aj napriek tomu, že funkcia dolná celá časť nie je bežným učivom preberaným v školách, nemala by analýza úlohy robiť žiakom veľké problémy.

**Úloha 0.5.** [57-I-3-N1] Určte všetky celé čísla $n$, pre ktoré nadobúda zlomok $(4n + 27)/(n + 3)$ celočíselné hodnoty.

**Riešenie.** Zlomok $(4n + 27)/(n + 3)$ upravíme na tvar $n + 15/(n + 3)$, teda číslo $n + 3$ musí deliť 15. Z toho dostávame $n \in \{-18, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 12\}$.

**Úloha 0.6.** [57-I-3] Máme určitý počet krabičiek a určitý počet guľôčok. Ak dáme do každej krabičky práve jednu guľôčku, ostane nám $n$ guľôčok. Keď však necháme práve $n$ krabičiek bokom, môžeme všetky guľôčky rozmiestniť tak, aby ich v každej zostávajúcej krabičke bolo práve $n$. Koľko máme krabičiek a koľko guľôčok?

**Riešenie.** Keď označíme $x$ počet krabičiek a $y$ počet guľôčok, dostaneme zo zadania sústavu rovníc

$$x + n = y \quad \text{a} \quad (x - n) \cdot n = y \qquad (1)$$

s neznámymi $x$, $y$ a $n$ z oboru prirodzených čísel. Vylúčením neznámej $y$ dostaneme rovnicu $x + n = (x - n) \cdot n$, ktorá pre $n = 1$ nemá riešenie. Pre $n \geq 2$ dostaneme

$$x = \frac{n^2 + n}{n - 1} = n + 2 + \frac{2}{n - 1}, \qquad (2)$$

odkiaľ vidíme, že (prirodzené) číslo $n - 1$ musí byť deliteľom čísla 2. Teda $n \in \{2, 3\}$. Prípustné hodnoty $n$ dosadíme do (1) a sústavu vyriešime (možno tiež využiť vzťah (2)). Pre $n = 2$ dostaneme $x = 6, y = 8$ a pre $n = 3$ určíme $x = 6$ a $y = 9$.

*Skúška.* Majme šesť krabičiek a osem guľôčok. Keď do každej krabičky dáme práve jednu guľôčku, ostane $n = 2$ guľôčok. Keď však odoberieme dve krabičky, môžeme do zostávajúcich štyroch rozdeliť guľôčky práve po dvoch. Podmienky úlohy sú teda splnené. Pre šesť krabičiek a deväť guľôčok urobíme skúšku rovnako ľahko.

*Záver.* Buď máme šesť krabičiek a osem guľôčok, alebo šesť krabičiek a deväť guľôčok.

**Komentár.** Úloha, spolu s úlohou predchádzajúcou, je bežnou slovnou úlohou vedúcou na sústavu rovníc. Jej úspešné vyriešenie však vyžaduje umnú manipuláciu s výrazmi.

**Úloha 0.7.** [57-II-4] Nájdite všetky trojice celých čísel $x, y, z$, pre ktoré platí

$$x + y\sqrt{3} + z\sqrt{7} = y + z\sqrt{3} + x\sqrt{7}.$$

**Riešenie*.** Rovnicu prepíšeme na tvar

$$x - y = (z - y)\sqrt{3} + (x - z)\sqrt{7}$$

a umocníme. Po jednoduchej úprave dostaneme

$$(x - y)^2 - 3(z - y)^2 - 7(x - z)^2 = 2(x - z)(z - y)\sqrt{21}. \qquad (1)$$

Pre $x \neq z$ a $y \neq z$ nemôže rovnosť (1) platiť, pretože jej pravá strana je v takom prípade číslo iracionálne, zatiaľ čo ľavá strana je číslo celé. Rovnosť teda môže nastať, len keď $x = z$ alebo $y = z$.

V prvom prípade po dosadení $x = z$ do pôvodnej rovnice dostaneme $z - y = \sqrt{3}(z - y)$. Odtiaľ $z = y = x$.

V druhom prípade, keď $y = z$, dôjdeme analogicky k rovnakému výsledku.

*Záver.* Riešením danej rovnice sú všetky trojice $(x, y, z) = (k, k, k)$, kde $k$ je ľubovoľné celé číslo.

**Komentár.** Aj napriek tomu, že vzorové riešenie úlohy vyzerá zrozumiteľne, úloha riešiteľov krajských kôl potrápila (bola najhoršie hodnotenou úlohou daného krajského kola). Záludnosti sa ukrývajú vo vytyčovaní iracionálnych čísel a nie neznámych, vhodnej úprave rovnice a diskusii o (i)racionalite oboch strán rovnice.

**Úloha 0.8.** [64-I-1] Určte všetky dvojice $(x, y)$ reálnych čísel, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\sqrt{(x+4)^2} = 4 - y,$$
$$\sqrt{(y-4)^2} = x + 8.$$

**Riešenie.** Vzhľadom na to, že pre každé reálne číslo $a$ platí $\sqrt{a^2} = |a|$, je daná sústava rovníc ekvivalentná so sústavou rovníc

$$|x + 4| = 4 - y,$$
$$|y - 4| = x + 8.$$

Z prvej rovnice vidíme, že musí byť $4 - y \geq 0$, teda $y \leq 4$. V druhej rovnici môžeme teda odstrániť absolútnu hodnotu. Dostaneme tak

$$|y - 4| = 4 - y = x + 8, \text{ t. j. } -y = x + 4.$$

Po dosadení za $x + 4$ do prvej rovnice dostaneme

$$|-y| = |y| = 4 - y.$$

Keďže $y \leq 4$, budeme ďalej uvažovať dva prípady.

Pre $0 \leq y \leq 4$ riešime rovnicu $y = 4 - y$, a teda $y = 2$. Nájdenej hodnote $y = 2$ zodpovedá po dosadení do druhej rovnice $x = -6$.

Pre $y < 0$ dostaneme rovnicu $-y = 4 - y$, ktorá však nemá riešenie.

*Záver.* Daná sústava rovníc má práve jedno riešenie, a to $(x, y) = (-6, 2)$.

**Iné riešenie.** Odstránením absolútnych hodnôt v oboch rovniciach, t. j. rozborom štyroch možných prípadov, keď

a) $(x + 4 \geq 0) \wedge (y - 4 \geq 0)$, t. j. $(x \geq -4) \wedge (y \geq 4)$,
b) $(x + 4 \geq 0) \wedge (y - 4 < 0)$, t. j. $(x \geq -4) \wedge (y < 4)$,
c) $(x + 4 < 0) \wedge (y - 4 \geq 0)$, t. j. $(x < -4) \wedge (y \geq 4)$,
d) $(x + 4 < 0) \wedge (y - 4 < 0)$, t. j. $(x < -4) \wedge (y < 4)$,

zistíme, že prípady a), b), c) nedávajú (vzhľadom na uvedené obmedzenia v jednotlivých prípadoch) žiadne reálne riešenie. V prípade d) potom dostaneme jediné riešenie $(x, y) = (-6, 2)$ danej sústavy.

**Komentár.** V úvode riešenia pripomenieme vzťah $\sqrt{a^2} = |a|$, ktorý nám pomôže transformovať sústavu zo zadania na sústavu rovníc s absolútnou hodnotou, ktorú by študenti mali byť schopní bez väčších komplikácií vyriešiť.

## Domáca práca

**Úloha 0.9.** [59-II-4] Určte všetky dvojice reálnych čísel $x, y$, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\lfloor x+y \rfloor = 2010,$$
$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

ak a) $p = 2$, b) $p = 3$. Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako dané reálne číslo $x$ (tzv. dolná celá časť reálneho čísla $x$).

**Riešenie*.** Keďže číslo $p$ je celé, je aj $y = \lfloor x \rfloor - p$ celé číslo a $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y$. Pôvodná sústava rovníc je teda ekvivalentná so sústavou

$$\lfloor x \rfloor + y = 2010,$$
$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

ktorú ľahko vyriešime napríklad sčítacou metódou. Dostaneme $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}(2010 + p)$ (čo môže platiť len pre párne $p$) a $y = \lfloor x \rfloor - p$.

a) Pre $p = 2$ je riešením sústavy ľubovoľné $x \in \langle 1006, 1007)$ a $y = 1004$.

b) Pre $p = 3$ nemá sústava žiadne riešenie.

**Iné riešenie.** Položme $\lfloor x \rfloor = a$, potom $x = a + t$, pričom $t \in \langle 0, 1)$.

a) Pre $p = 2$ sústavu prepíšeme na tvar $y = a - 2$ a $\lfloor 2a - 2 + t \rfloor = 2010$. Z poslednej rovnice vyplýva $2a - 2 = 2010$, odtiaľ $a = 1006$. Keďže $t \in \langle 0, 1)$, vyhovuje pôvodnej sústave každé $x \in \langle 1006, 1007)$, pričom $y = 1004$.

b) Pre $p = 3$ dostávame $y = a - 3$ a $\lfloor 2a - 3 + t \rfloor = 2010$. Posledná rovnica je ekvivalentná so vzťahom $2a - 3 = 2010$, ktorému nevyhovuje žiadne celé číslo $a$. Pre $p = 3$ nemá daná sústava rovníc riešenie.

**Úloha 0.10.** [64-S-1] V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$|1-x| = y+1,$$
$$|1+y| = z-2,$$
$$|2-z| = x-x^2.$$

**Riešenie*.** Pravá strana prvej rovnice je nezáporné číslo, čo sa premietne do druhej rovnice, pričom môžeme odstrániť absolútnu hodnotu. Aj pravá strana druhej rovnice je nezáporné číslo, čo sa s využitím rovnosti $|z-2| = |2-z|$ premietne do tretej rovnice, pričom môžeme odstrániť absolútnu hodnotu. Daná sústava má potom tvar

$$|1-x| = y+1,$$
$$1+y = z-2,$$
$$z-2 = x-x^2$$

a odtiaľ jednoduchým porovnaním dostávame rovnicu

$$|1-x| = x-x^2.$$

Pre $x < 1$ dostaneme rovnicu $1 - x = x - x^2$ čiže $(1-x)^2 = 0$, ktorej riešenie $x = 1$ ale predpokladu $x < 1$ nevyhovuje.

Pre $x \geq 1$ vyjde rovnica $x^2 = 1$; z jej dvoch riešení $x = -1$ a $x = 1$ predpokladu $x \geq 1$ vyhovuje iba $x = 1$.

Z danej sústavy potom jednoducho dopočítame hodnoty $y = -1$ a $z = 2$. Sústava má teda jediné riešenie $(x, y, z) = (1, -1, 2)$.