Seminár 5: Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti II – nerovnosti

Úlohy a riešenia

Úloha 5.1. [58-S-1] **Riešenie*.** Roznásobením a ďalšími ekvivalentnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} ab + b^2c + a^2c + abc^2 &\geq abc^2 + 2abc + ab, \\ b^2c + a^2c &\geq 2abc, \\ (a-b)^2c &\geq 0. \end{aligned}$$

Podľa zadania platí $c \geq 0$ a druhá mocnina reálneho čísla $a-b$ je tiež nezáporná, takže je nezáporná aj ľavá strana upravenej nerovnosti. Rovnosť v tejto (a rovnako aj v pôvodnej nerovnosti) nastane práve vtedy, keď $a-b = 0$ alebo $c = 0$, teda práve vtedy, keď je splnená aspoň jedna z podmienok $a = b$, $c = 0$.

Komentár. Úloha demonštruje jeden zo základných spôsobov dokazovania nerovností: úpravu výrazu na jednej strane nerovnosti na tvar, o ktorom s určitosťou vieme, že je nezáporný/nekladný a jeho porovnanie s nulou. Taktiež si študenti precvičia ekvivalentné úpravy nerovností a úpravy výrazov do tvaru súčinu.

Úloha 5.2. [66-I-1-N1] **Riešenie.** a) Prevedieme výraz $2xyz$ na pravú stranu nerovnosti a upravíme pomocou vzorca $A^2 - 2AB - B^2 = (A-B)^2$ na tvar $0 \leq (x-yz)^2$, ktorý je pravdivým výrokom, keďže druhá mocnina ľubovoľného výrazu je vždy nezáporná.

b) Výraz z pravej strany nerovnosti prevedieme na opačnú stranu a upravíme nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} ((x-y)(x+y))^2 - 4xy(x-y)^2 &\geq 0, \\ (x-y)^2(x+y)^2 - 4xy(x-y)^2 &\geq 0, \\ (x-y)^2((x+y)^2 - 4xy) &\geq 0, \\ (x-y)^2(x + 2xy + y^2 - 4xy) &\geq 0, \\ (x-y)^4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je zrejme pravdivým tvrdením a pôvodná nerovnosť je tak dokázaná.

Komentár. Úloha neprináša žiadny nový princíp, je však dobrým tréningom práce s upravovaním výrazov, podobne ako úloha nasledujúca.

Úloha 5.3. [66-I-1-N2] **Riešenie*.** Nerovnosť zo zadania ekvivalentne upravíme. Vynásobíme celú nerovnosť kladným výrazom a^2b^2. Ľavú stranu $a^3 + b^3$ upravíme na súčin pomocou vzorca $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, pravú stranu $ab^2 + a^2b$ upravíme na súčin vyňatím výrazu ab na tvar $ab(a+b)$. Dostaneme tak nerovnosť $(a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b)$. Tá po vydelení kladným výrazom $a+b$ a úprave na súčin dostane tvar $(a-b)^2 \geq 0$, ktorý je zrejme pravdivým tvrdením.

Komentár. Úloha využíva rovnaký princíp ako prechádzajúce dve. Prvýkrát však pri úprave využívame násobenie a delenie výrazmi. Tým sa z úlohy stáva dobrá príležitosť na pripomenutie faktu, že pri úprave nerovností musíme brať do úvahy (ne)zápornosť výrazov, ktoré pri takýchto úkonoch využívame.

Komentár. Ďalším z užitočných nástrojov pri dokazovaní nerovností je znalosť nerovnosti $u + \frac{1}{u} \geq 2$

pre každé kladné reálne číslo u, pričom táto nerovnosť prechádza v rovnosť len pre $u = 1$. Dokázanie tohto faktu nie je zložité: vynásobením celej nerovnosti u, prevedením všetkých členov na jednu stranu dostávame $(u-1)^2 \geq 0$, čo je pravdivé tvrdenie. Nasledujúce úlohy sú zaradené ako tréning uplatnenia tejto nerovnosti.

Úloha 5.4. [62-I-2-N1] **Riešenie.** Celú nerovnosť vynásobíme kladným výrazom $(a+b)(c+d)$ a použitím ekvivalentných úprav upravíme nasledovne.

$$\frac{(a+b)(c+d)}{ab} + \frac{(a+b)(c+d)}{cd} \geq 8,$$
$$\frac{ac+ad+bc+bd}{ab} + \frac{ac+ad+bc+bd}{cd} \geq 8,$$
$$\frac{c}{b} + \frac{d}{b} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + \frac{a}{d} + \frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{b}{c} \geq 8.$$

Všimneme si, že ľavá strana obsahuje štyri páry súčtov navzájom obrátených zlomkov:

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{d} + \frac{d}{b}\right) \geq 8.$$

Sčítaním štyroch nerovností v tvare $u + \frac{1}{u} \geq 2$, ktoré platia pre každé kladné reálne u, kde v našom prípade je u postupne $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{b}{d}$ potom dostaneme tvrdenie, ktoré sme chceli dokázať.

Úloha 5.5. [66-I-1] **Riešenie*.** Úpravou dvojčlena $a^2 - a$ doplnením na štvorec a využitím faktu že druhá mocnina reálneho čísla je nezáporná ukážeme, že menovateľ zlomku v nerovnosti je kladný:

$$a^2 - a + 1 = \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$$

Ak ním teda obe strany dokazovanej nerovnosti vynásobíme, dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$a^2(a^2 - a + 1) + 1 \geq (a+1)(a^2 - a + 1).$$

Po roznásobení a zlúčení rovnakých mocnín a dôjdeme k nerovnosti

$$a^4 - 2a^3 + a^2 \geq 0,$$

ktorá však platí, pretože jej ľavá strana má rozklad $a^2(a-1)^2$ s nezápornými činiteľmi a^2 a $(a-1)^2$. Tým je pôvodná nerovnosť pre každé reálne číslo a dokázaná. Zároveň sme zistili, že rovnosť vo výslednej, a teda aj v pôvodnej nerovnosti nastane práve vtedy, keď platí $a^2(a-1)^2 = 0$, teda jedine vtedy, keď $a = 0$ alebo $a = 1$.

Iné riešenie*. Danú nerovnosť môžeme prepísať na tvar

$$(a^2 - a + 1) + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geq 2 \quad \text{čiže} \quad u + \frac{1}{u} \geq 2,$$

pričom $u = a^2 - a + 1$. Využitím faktu, že posledná nerovnosť platí pre každé kladné reálne číslo u a že prechádza v rovnosť jedine pre $u = 1$.

Na dôkaz pôvodnej nerovnosti ostáva už len overiť, že výraz $u = a^2 - a + 1$ je kladný pre každé reálne číslo a. To možno spraviť rovnako ako v prvom riešení, alebo prepísať nerovnosť $a^2 - a + 1 > 0$ na tvar

$$a(a-1) > -1$$

a uskutočniť krátku diskusiu: Posledná nerovnosť platí ako pre každé $a \geq 1$, tak pre každé $a \leq 0$, lebo v oboch prípadoch máme dokonca $a(a-1) \geq 0$; pre zvyšné hodnoty a, teda pre $a \in (0,1)$, je súčin

$a(a-1)$ síce záporný, avšak určite väčší ako -1, pretože oba činitele a, $a-1$ majú absolútnu hodnotu menšiu ako 1. Prepísaná nerovnosť je tak dokázaná pre každé reálne číslo a, a tým je podmienka pre použitie nerovnosti $u + \frac{1}{u} \geq 2$ pre $u = a^2 + a + 1$ overená.

Ako sme už uviedli, rovnosť $u + \frac{1}{u} = 2$ nastane jedine pre $u = 1$. Pre rovnosť v nerovnosti zo zadania úlohy tak dostávame podmienku $a^2 - a + 1 = 1$, čiže $a(a-1) = 0$, čo je splnené iba pre $a = 0$ a pre $a = 1$.

Komentár. Úloha využíva spojenie viacerých poznatkov – faktu, že druhá mocnina akéhokoľvek reálneho čísla je nezáporná, úpravu na štvorec, ekvivalentné úpravy nerovností a tiež známu nerovnosť $u + \frac{1}{u} \geq 2$ pre každé kladné reálne u. Je síce náročnejšia ako úlohy, ktorými sme sa doteraz zaoberali, ale považujeme ju za vhodnú ilustráciu toho, ako nám rozšírený arzenál metód pomôže v úspešnom zvládnutí zložitejších problémov. Úloha tiež demonštruje, že k správnemu riešeniu častokrát vedú viaceré cesty.

Úloha 5.6. [59-I-5] **Riešenie*.** Pravá nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$4(a^2 + 3ab + b^2) \leq 5(a+b)^2,$$

ktorú možno ekvivalentne upraviť na nerovnosť $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$. Tá je splnená vždy a rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a = b$.

Z ľavej nerovnosti odstránime zlomky a umocníme ju na druhú,

$$\begin{aligned} 25ab(a^2 + 2ab + b^2) &\leq 4(a^4 + 9a^2b^2 + b^4 + 6a^3b + 6ab^3 + 2a^2b^2), \\ 25ab(a^2 + b^2) + 50a^2b^2 &\leq 4a^4 + 4b^4 + 44a^2b^2 + 24ab(a^2 + b^2), \end{aligned}$$

takže po úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$4a^4 + 4b^4 - 6a^2b^2 \geq ab(a^2 + b^2).$$

Po odčítaní výrazu $2a^2b^2$ od oboch strán nerovnosti sa nám podarí na oboch stranách použiť úpravu na štvorec. Dostaneme tak (opäť ekvivalentnú) nerovnosť

$$4(a^2 - b^2)^2 \geq ab(a-b)^2.$$

Rozdiel štvorcov v zátvorke na ľavej strane ešte rozložíme na súčin a vzťah upravíme na tvar $4(a - b)^2(a+b)^2 \geq ab(a-b)^2$.

Ak $a = b$, platí rovnosť. Ak $a \neq b$, môžeme poslednú nerovnosť vydeliť kladným výrazom $(a-b)^2$ a dostaneme tak nerovnosť $4(a+b)^2 \geq ab$, čiže $4a^2 + 4b^2 + 7ab \geq 0$. Ľavá strana tejto nerovnosti je vždy kladná, preto vyšetrovaná nerovnosť platí pre všetky kladné čísla a, b, pričom rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a = b$.

Komentár. Táto úloha prvýkrát prináša sústavu nerovností a je vhodné so študentmi zopakovať, ako k dokazovaniu sústav nerovností pristupujeme: musíme dokázať riešenie každej nerovnosti zvlášť. V priebehu riešenia opäť využijeme úpravu na štvorec a nezápornosť druhej mocniny reálneho čísla. Úloha sa dá riešiť ešte iným spôsobom, ten si však ukážeme v ďalšom seminári zameranom na nerovnosti.

Úloha 5.7. [59-II-2] **Riešenie*.** Danú nerovnosť ekvivalentne upravujme:

$$\begin{aligned} (a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) - (a^2 - 2a + 1)(b^2 - 2b + 1) &\geq 4, \\ (a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) - (a^2b^2 - 2ab^2 + b^2) + & \\ +(2a^2b - 4ab + 2b) - (a^2 - 2a + 1) &\geq 4, \\ 2ab(a+b) - 4ab + 2(a+b) &\geq 4, \\ 2(a+b)(ab+1) &\geq 4(ab+1), \\ 2(ab+1)(a+b-2) &\geq 0. \end{aligned}$$

Vzhľadom na predpoklad $a \geq 1$, $b \geq 1$ je $a + b \geq 2$, takže upravená nerovnosť zrejme platí. Rovnosť v nej (a teda aj v zadanej) nerovnosti pritom nastane práve vtedy, keď $a + b = 2$, čiže $a = b = 1$.

Iné riešenie*. Pri označení $m = a^2 + 1$ a $n = b^2 + 1$ možno ľavú stranu dokazovanej nerovnosti prepísať na tvar $L = mn - (m - 2a)(n - 2b) = 2an + 2bm - 2ab - 2ab$, z ktorého vynímaním dostaneme $L = 2a(n - b) + 2b(m - a)$.

Čísla a, b sú z intervalu $\langle 1, \infty)$, preto $1 = m - a^2 \leq m - a$. Odtiaľ $2b(m - a) \geq 2$. Analogicky dostaneme $2a(n - b) \geq 2$. Teda $L \geq 4$ a rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a = b = 1$.

Iné riešenie*. Po substitúcii $a = 1 + m$ a $b = 1 + n$, pričom $m, n \geq 0$, získa ľavá strana nerovnosti tvar

$$L = (m^2 + 2m + 2)(n^2 + 2n + 2) - m^2n^2.$$

Po roznásobení, ktoré si stačí iba predstaviť, sa zruší člen m^2n^2, takže L bude súčtom nezáporných členov, medzi ktorými bude aj člen $2 \cdot 2 = 4$. Tým je nerovnosť $L \geq 4$ dokázaná. A keďže medzi spomenutými členmi budú aj $4m$ a $4n$, z rovnosti $L = 4$ vyplýva $m = n = 0$, čo naopak rovnosť $L = 4$ tiež zrejme zaručuje. To znamená, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a = b = 1$.

Úloha 5.8. [66-I-1-D3, resp. 58-I-6] **Riešenie*.** Ľavú nerovnosť dokážeme ekvivalentnými úpravami:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &< \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}, \quad | \cdot 6(a+b) \\ 3(a+b)^2 &< 4(a^2+ab+b^2), \\ 0 &< (a-b)^2. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť vzhľadom na predpoklad $a \neq b$ platí. Aj pravú nerovnosť zo zadania budeme ekvivalentne upravovať, začneme umocnením každej strany na druhú:

$$\begin{aligned} \frac{4(a^2+ab+b^2)^2}{9(a+b)^2} &< \frac{a^2+b^2}{2}, \quad | \cdot 18(a+b)^2 \\ 8(a^2+ab+b^2)^2 &< 9(a^2+b^2)(a+b)^2, \\ 8(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+3a^2b^2) &< 9(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+2a^2b^2), \\ 6a^2b^2 &< a^4+b^4+2a^3b+2ab^3. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je súčtom nerovností $2a^2b^2 < a^4 + b^4$ a $4a^2b^2 < 2a^3b + 2ab^3$, ktoré obe platia, lebo po presune členov z ľavých strán na pravé dostaneme po rozklade už zrejmé nerovnosti $0 < (a^2 - b^2)^2$, resp. $0 < 2ab(a - b)^2$.