

Seminár 11: Geometria II – podobné trojuholníky a Pytagorova veta

Úloha 11.1. [66-S-3] Päta P výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC delí stranu AB v pomere $|AP| : |PB| = 1 : 3$. V rovnakom pomere sú aj obsahy štvorcov nad jeho stranami AC a BC . Dokážte, že trojuholník ABC je pravouhlý.

Úloha 11.2. [66-I-3] Päta výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC delí stranu AB v pomere $1 : 2$. Dokážte, že pri zvyčajnom označení dĺžok strán trojuholníka ABC platí nerovnosť

$$3|a - b| < c.$$

Úloha 11.3. [63-S-3] Daný je trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C . Stredom I kružnice trojuholníku vpísanej vedieme rovnobežky so stranami CA a CB , ktoré pretnú preponu postupne v bodoch X a Y . Dokážte, že platí $|AX|^2 + |BY|^2 = |XY|^2$.

Úloha 11.4. [58-S-2] V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P päť výšky z vrcholu C na preponu AB . Priesečník úsečky AB s priamkou, ktorá prechádza vrcholom C a stredom kružnice vpísanej trojuholníku PBC , označíme D . Dokážte, že úsečky AD a AC sú zhodné.

Úloha 11.5. [64-I-4] Označme E stred základne AB lichobežníka $ABCD$, v ktorom platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Uhlopriečka AC pretína úsečky ED , BD postupne v bodoch F , G . Určte postupný pomer $|AF| : |FG| : |GC|$.

Úloha 11.6. [63-I-4] Vo štvorci $ABCD$ označme K stred strany AB a L stred strany AD . Úsečky KD a LC sa pretínajú v bode M a rozdeľujú štvorec na dva trojuholníky a dva štvoruholníky. Vypočítajte ich obsahy, ak úsečka LM má dĺžku 1 cm.

Úloha 11.7. [65-II-3] V pravouhlom lichobežníku $ABCD$ s pravým uhlom pri vrchole A základne AB je bod K priesečníkom výšky CP lichobežníka s jeho uhlopriečkou BD . Obsah štvoruholníka $APCD$ je polovicou obsahu lichobežníka $ABCD$. Určte, akú časť obsahu trojuholníka ABC zaberá trojuholník BCK .

Úloha 11.8. [58-I-2] Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päť kolmíc z bodov A , B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D , E . Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC .

Úloha 11.9. [58-II-2] V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P päť výšky z vrcholu C na preponu AB a D , E stredy kružníc vpísaných postupne trojuholníkom APC , CPB . Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečníkom výšok trojuholníka CDE .