

# Seminár 10

## Téma

Geometria I – základné poznatky

## Ciele

Zopakovať a upevniť základné poznatky z planimetrie, ktoré by študenti mali mať zo základnej školy. Venovať sa vlastnostiam uhlov, trojuholníkov, štvoruholníkov a kružníc. Niektoré z poznatkov odvodiť.

**Úvodný komentár.** Keďže planimetria nie je súčasťou osnov 1. ročníka gymnázií, je potrebné poznatky žiakov z tejto oblasti o to starostlivejšie zopakovať. Geometrické úlohy majú veľmi často najhoršiu úspešnosť v krajských kolách MO, čo môže mať viacero dôvodov. Nepopierateľne však študentom tréning pomôže, preto je geometrii v priebehu roka venovaných 6 + 1 seminárov.

Zo zmienovaných dôvodov má preto tento seminár odlišnú štruktúru ako predchádzajúce – viac ako riešenie úloh z olympiád sa venujeme opakovaniu základných vlastností uhlov, trojuholníkov, štvoruholníkov a kružníc, ktorých znalosti budú nenahraditeľné v ďalších piatich geometrických seminároch. Spolu so študentmi tak vytvoríme základnú výbavu, ktorá im pomôže v boji s geometrickými záťažnosťami.

Študenti by mali mať nasledujúce znalosti (voľne spracované podľa [?]):

### ▷ uhly

- chápať pojmy vrcholové, vedľajšie, súhlasné a striedavé uhly, vedieť nájsť dvojice takých uhlov a používať ich pri riešení úloh,

### ▷ trojuholníky

- poznať základné vlastnosti strán a vnútorných uhlov trojuholníka: trojuholníková nerovnosť, súčet vnútorných uhlov,
- vedieť popísať rozdiely medzi ostrouhlým, pravouhlým, tupouhlým, všeobecným, rovnoramenným a rovnostranným trojuholníkom,
- chápať pojmy os uhla, os strany, výška, ťažnica, stredná prieka, kružnica vpísaná a opísaná trojuholníku a poznať ich vlastnosti,
- poznať a vedieť používať vzorec na výpočet obsahu trojuholníka,
- poznať a vhodne používať vety o zhodnosti ( $sss$ ,  $sus$ ,  $usu$ ,  $Ssu$ ) a podobnosti ( $sss$ ,  $sus$ ,  $uu$ ,  $Ssu$ ) trojuholníkov,
- poznať a používať Pytagorovu vetu pre pravouhlý trojuholník,

### ▷ štvoruholníky

- vedieť popísať všeobecný štvoruholník a jeho špecifické prípady: rovnobežník, štvorec, obdĺžnik, kosoštvorec, kosodĺžnik, lichobežník,
- poznať základné vzorce pre výpočet obsahu rôznych rovnobežníkov a lichobežníkov,
- vedieť, že uhlopriečky v pravouholníku a rovnobežníku sa polia a vedieť tento fakt využiť pri riešení úloh,

### ▷ kružnice a kruhy

- chápať pojmy kružnica, kruh, kružnicový oblúk, dotyčnica, sečnica, tetiva, stredový a obvodový uhol,
- poznať a vedieť používať Talesovu kružnicu,

### ▷ riešenie konštrukčných úloh

- náčrt, rozbor, popis konštrukcie, diskusia o počte riešení.

**Komentár.** Skôr než frontálny výklad je vhodné nechať skladať mozaiku vedomostí študentov. Ak pracujeme s malou skupinou, môžeme o vyššie spomenutých bodoch diskutovať všetci spoločne. Ak seminár navštevuje väčšie množstvo záujemcov o matematiku, rozdelíme študentov na menšie skupiny, pričom každá spracuje poznatky o zadanej neprázdnej podmnožine vyššie spomenutých oblastí. Tie si potom študenti navzájom odprezentujú, vedúci seminára nepresnosti vhodnými otázkami koriguje.

**Komentár.** V druhej polovici seminára niektoré zo základných tvrdení, ktoré budeme v priebehu ďalších stretnutí využívať, dokážeme.

## Úlohy a riešenia

**Úloha 10.1.** [anonymous 1] Dokážte, že súčet veľkostí vnútorných uhlov ľubovoľného trojuholníka je  $180^\circ$ .

**Riešenie.** Vedme rovnobežku  $XY$  so stranou  $AB$  vrcholom  $C$  trojuholníka  $ABC$ , tak že bod  $C$  leží medzi bodmi  $X$  a  $Y$  ((obr.1)).

(DOPLNIŤ Obr. 1)

Potom  $|\angle BAC| = |\angle ACX|$  a  $|\angle ABC| = |\angle BCY|$ , pretože ide o dvojice striedavých uhlov. Keďže  $|\angle ACX| + |\angle ACB| + |\angle BCY| = 180^\circ$ , pretože uhol  $XCY$  je priamy, platí aj  $|\angle BAC| + |\angle ABC| + |\angle ACB| = 180^\circ$ .

**Úloha 10.2.** [66-I-3-N1] Z trojuholníkových nerovností medzi dĺžkami strán ľubovoľného trojuholníka odvodte známe pravidlo  $\alpha < \beta \Rightarrow a < b$  o porovnaní veľkostí vnútorných uhlov a dĺžok protiľahlých strán v ľubovoľnom trojuholníku  $ABC$ .

**Riešenie\*.** Ak je  $\alpha < \beta$ , môžeme nájsť vnútorný bod  $X$  strany  $AC$ , pre ktorý platí  $|\angle ABX| = \alpha$ , a teda  $|AX| = |BX|$ , takže z trojuholníkovej nerovnosti  $|BC| < |BX| + |XC|$  už vyplýva  $a < b$ .

(DOPLNIŤ Obr. 2)

**Úloha 10.3.** [63-I-4-N3] Dokážte vety:

- Ak majú dva trojuholníky rovnakú výšku, potom pomer ich obsahov sa rovná pomeru dĺžok príslušných základní.
- Ak majú dva trojuholníky zhodné základne, potom pomer ich obsahov sa rovná pomeru príslušných výšok.

**Riešenie.** a) Označme rovnakú výšku dvoch trojuholníkov  $v$ . V trojuholníku  $T_1$  je táto výškou na základňu  $a_1$ , v trojuholníku  $T_2$  na základňu  $a_2$ . Pomer obsahov týchto trojuholníkov je potom

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{\frac{1}{2}a_1v}{\frac{1}{2}a_2v} = \frac{a_1}{a_2},$$

čo sme chceli dokázať.

b) Označme zhodnú základňu dvoch trojuholníkov  $z$ , v trojuholníku  $T_1$  je výška na túto základňu  $v_1$ , v trojuholníku  $T_2$  je výška na túto základňu  $v_2$ . Pomer obsahov trojuholníkov  $T_1$  a  $T_2$  je

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{\frac{1}{2}zv_1}{\frac{1}{2}zv_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

čo je pomer príslušných výšok.

**Úloha 10.4.** [61-I-5-N1] Pre všeobecný trojuholník  $ABC$  so stranami  $a, b, c$  a obsahom  $S$  platí pre polomer  $r$  vpísanej kružnice vzorec  $r = 2S/(a + b + c)$ . Dokážte.

**Riešenie\*.** Stred  $M$  vpísanej kružnice rozdeľuje uvažovaný trojuholník  $ABC$  na tri menšie trojuholníky  $BCM, ACM, ABM$  s obsahmi  $\frac{1}{2}ar, \frac{1}{2}br, \frac{1}{2}cr$ , ktorých súčet je  $S$ , odkiaľ vyplýva dokazovaný vzorec.

(DOPLNIŤ Obr.3)

**Úloha 10.5.** [anonymous 2] Dokážte, že uhlopriečky v rovnobežníku sa navzájom polia.

**Riešenie.** Označme  $U$  priesečník uhlopriečok  $AC$  a  $BD$  rovnobežníka  $ABCD$  ((Obr. 4)).

(DOPLNIŤ Obr. 4)

Keďže uhly  $ABD$  a  $BDC$  sú striedavé, majú rovnakú veľkosť. Podobne uhly  $BAC$  a  $ACD$  sú rovnako veľké, pretože sú takisto dvojicou striedavých uhlov. Potom sú trojuholníky  $ABU$  a  $CDU$  zhodné, keďže sa zhodujú v jednej strane  $|AB| = |CD|$  a v dvoch k nej priľahlých uhloch. Preto aj  $|AU| = |UC|$ ,  $|BU| = |UD|$  a tvrdenie je dokázané.

**Úloha 10.6.** [58-I-4-N1] Označme  $U$  priesečník uhlopriečok daného konvexného štvoruholníka  $ABCD$ . Dokážte, že priamky  $AB$  a  $CD$  sú rovnobežné práve vtedy, keď trojuholníky  $ADU$  a  $BCU$  majú rovnaký obsah.

**Riešenie.** Rovnosť obsahov trojuholníkov  $ADU$  a  $BCU$  je ekvivalentná s rovnosťou obsahov trojuholníkov  $ABC$  a  $ABD$  so spoločnou stranou  $AB$ , pretože  $S_{ABC} = S_{ABU} + S_{BCU}$  a  $S_{ABD} = S_{ABU} + S_{AUD}$ . Trojuholníky  $ABC$  a  $ABD$  majú spoločnú základňu  $AB$ , takže ich obsahy budú rovnaké práve vtedy, ak výšky na túto stranu budú rovnaké, resp. ak body  $C$  a  $D$  budú od priamky  $AB$  rovnako vzdialené. To nastane len v prípade, ak body  $C$  a  $D$  ležia na priamke rovnobežnej s priamkou  $AB$ , čo sme chceli dokázať.

(DOPLNIŤ Obr. 5)

**Úloha 10.7.** [64-I-4-N1] Lichobežník  $ABCD$  má základne s dĺžkami  $|AB| = a$  a  $|CD| = c$  a jeho uhlopriečky sa pretínajú v bode  $U$ . Aký je pomer obsahov trojuholníkov  $ABU$  a  $CDU$ ?

**Riešenie.**

(DOPLNIŤ Obr.6)

Trojuholníky  $ABU$  a  $CDU$  sú zrejme podobné ( $|\angle BAU| = |\angle UCD|$ ,  $|\angle ABU| = |\angle CDU|$ ,  $|\angle AUB| = |\angle CUD|$ , pretože prvé dve sú dvojice striedavých uhlov, posledné dva sú uhly vrcholové) s koeficientom podobnosti  $k = a/c$ . Preto pre výšku  $v_1$  na stranu  $AB$  v trojuholníku  $ABU$  a výšku  $v_2$  na stranu  $CD$  v trojuholníku  $CDU$  platí  $v_1/v_2 = k$ , resp.  $v_1 = kv_2 = (av_2)/c$ . Potom pre pomer obsahov trojuholníkov  $ABU$  a  $CDU$  máme

$$\frac{S_{ABU}}{S_{CDU}} = \frac{\frac{1}{2}av_1}{\frac{1}{2}cv_2} = \frac{a \frac{av_2}{c}}{cv_2} = \frac{a^2}{c^2}.$$

**Záverečný komentár** Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že študenti budú o(c)hromení množstvom nových poznatkov v tomto seminári. Dúfame však, že sa tak nestane, keďže veľká väčšina obsahu by mala byť prinajmenšom povedomá, ak nie úplne zrozumiteľná. Seminár tiež patrí k tým menej náročným, avšak je veľmi dôležitou prípravou pred tvrdšími orieškami.

## Domáca práca

**Úloha 10.8.** [58-I-2-D1] Nech  $k$  je kružnica opísaná pravouhlému trojuholníku  $ABC$  s preponou  $AB$  dĺžky  $c$ . Označme  $S$  stred strany  $AB$  a  $D$  a  $E$  priesečníky osí strán  $BC$  a  $AC$  s jedným oblúkom  $AB$  kružnice  $k$ . Vyjadrite obsah trojuholníka  $DSE$  pomocou dĺžky prepony  $c$ .

**Riešenie.** Trojuholník  $DSE$  je pravouhlý rovnoramenný s pravým uhlom pri vrchole  $S$ , pretože odvesny  $DS$  a  $ES$  ležia na osiach navzájom kolmých strán. Odvesny majú dĺžku  $\frac{c}{2}$ , pretože sú to polomery kružnice opísanej trojuholníku  $ABC$ . Obsah trojuholníka  $DSE$  je  $\frac{1}{2} \cdot |DS| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{8}$ .

**Úloha 10.9.** [58-I-2-D2] Vyjadrite obsah rovnoramenného lichobežníka  $ABCD$  so základňami  $AB$  a  $CD$  pomocou dĺžok  $a$ ,  $c$  jeho základní a dĺžky  $b$  jeho ramien.

**Riešenie.** Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že  $a > b$ . Najprv vyjadríme výšku  $v$  pomocou dĺžok základní a odvesien. Nech je  $P$  päta výšky z bodu  $D$  na stranu  $AB$ . Potom  $|AP| = (a - c)/2$ . Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku  $APD$  máme

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + v^2 = b^2,$$

odkiaľ  $v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - (a-c)^2}$  a preto pre obsah lichobežníka dostávame

$$S_{ABCD} = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{1}{4}(a+c)\sqrt{4b^2 - (a-c)^2}.$$

**Úloha 10.10.** [anonymous 3] Použitím viet o podobnosti trojuholníkov a Pytagorovej vety odvodte Euklidove vety o odvesne a o výške pravouhlého trojuholníka.

**Riešenie.** Prehľadné odvodenie je možné nájsť v [?].

## Doplňujúce zdroje a materiály

Ak študenti budú stále neistí v používaní základných geometrických poznatkov, je možné ich odkázať na základ školské učebnice geometrie, v ktorých nájdú aj jednoduchšie príklady na precvičenie, príp. vhodným doplnkom geometrického vzdelania je aj publikácia [?].