Seminár 5

Téma

Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti III – lineárne rovnice a sústavy lineárnych rovníc

Ciele

Upevniť poznatky o riešení lineárnych rovníc a sústav lineárnych rovníc.

Úlohy a riešenia

Úvodný komentár. Seminárne stretnutie je zamerané na prácu s rovnicami a úlohami, ktoré na rovnice, príp. sústavy rovníc vedú. Ide o jedno z dvoch stretnutí (ďalším je Seminár 19), v tejto chvíli sa zameriame na jednoduchšie (priamočiarejšie) úlohy, v pokračovaní sa potom budeme zaoberať zložitejšími rovnicami a sústavami.

Úloha 5.1. [60-I-1-N1] Máme tri čísla so súčtom 2010, pričom každé z nich je aritmetickým priemerom zvyšných dvoch. Aké sú to čísla?

Úloha 5.2. [60-I-1-N2] Máme tri čísla, o ktorých vieme, že každé z nich je aritmetickým priemerom niektorých dvoch z našich troch čísel. Dokážte, že naše tri čísla sú rovnaké.

Úloha 5.3. [60-I-1] Lucia napísala na tabuľu dve nenulové čísla. Potom medzi ne postupne vkladala znamienka plus, mínus, krát a delené a všetky štyri príklady správne vypočítala. Medzi výsledkami boli iba dve rôzne hodnoty. Aké dve čísla mohla Lucia na tabuľu napísať?

Úloha 5.4. [60-II-1] Na tabuli sú napísané práve tri (nie nutne rôzne) reálne čísla. Vieme, že súčet ľubovoľných dvoch z nich je tam napísaný tiež. Určte všetky trojice takých čísel.

Úloha 5.5. [60-S-1] Po okruhu behajú dvaja atléti, každý inou konštantnou rýchlosťou. Keď bežia opačnými smermi, stretávajú sa každých 10 minút, keď bežia rovnakým smerom, stretávajú sa každých 40 minút. Za aký čas zabehne okruh rýchlejší atlét?

Úloha 5.6. [66-I-4-N1] Určte všetky dvojčleny $P(x) = ax+b$, pre ktoré platí $P(2) = 3$ a $P(3) = 2$.

Úloha 5.7. [66-I-4-N2] Určte všetky trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$, pre ktoré platí $P(1) = 4$, $P(2) = 9$ a $P(3) = 18$.

Úloha 5.8. [66-I-4-N3] Určte všetky dvojčleny $P(x) = ax+b$ s celočíselnými koeficientmi a a b, pre ktoré platí $P(1) < P(2)$ a $P(1)^2 + P(2)^2 = 5$.

Úloha 5.9. [66-I-4-D2] Koeficienty a,b,c trojčlena $P(x) = ax^2 + bx + c$ sú reálne čísla, pritom každá z troch jeho hodnôt $P(1), P(2)$ a $P(3)$ je celým číslom. Vyplýva z toho, že aj čísla a,b,c sú celé, alebo je nutne celé aspoň niektoré z nich (ktoré)?

Úloha 5.10. [59-S-3] Nájdite všetky dvojice nezáporných celých čísel a, b, pre ktoré platí

$$a^2 + b + 2 = a + b^2.$$

Domáca práca

Úloha 5.11. [66-I-4] Nájdite všetky trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficientami a, b, c, pre ktoré platí $P(1) < P(2) < P(3)$ a zároveň

$$(P(1))^2 + (P(2))^2 + (P(3))^2 = 22.$$

Úloha 5.12. [62-II-3] Nájdite všetky dvojice celých kladných čísel a a b, pre ktoré je číslo $a^2 + b$ o 62 väčšie ako číslo $b^2 + a$.

Úloha 5.13. [60-I-1-D1] Nech n je prirodzené číslo väčšie ako 2. Máme n čísel so súčtom n, pričom každé z nich je aritmetickým priemerom ostatných čísel. Aké sú to čísla?