Seminár 18: Algebraické výrazy a (ne)rovnice IV – zložitejšie nerovnosti

Úloha 18.1. [61-II-1] Pre všetky reálne čísla x, y, z také, že $x < y < z$, dokážte nerovnosť

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

Úloha 18.2. [66-II-4] Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla $a \le b \le c$ platí

$$(-a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 3.$$

Úloha 18.3. [60-II-4] Nech x, y, z sú kladné reálne čísla. Ukážte, že aspoň jedno z čísel $x+y+z-xyz$ a $xy + yz + zx - 3$ je nezáporné.

Úloha 18.4. [61-I-4] Reálne čísla a, b, c, d vyhovujú rovnici $ab + bc + cd + da = 16$.

a) Dokážte, že medzi číslami a, b, c, d sa nájdu dve so súčtom najviac 4.

b) Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$?

Úloha 18.5. [62-I-2] Pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí

$$a + b = c + d, \qquad ad = bc, \qquad ac + bd = 1.$$

Akú najväčšiu hodnotu môže mať súčet $a + b + c + d$?

Úloha 18.6. [62-I-2-N1] Ukážte, že nerovnosť $\frac{1}{2}(u + v) \ge \sqrt{uv}$ medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch ľubovoľných nezáporných čísel u a v vyplýva zo zrejmej nerovnosti $(a - b)^2 \ge 0$ vhodnou voľbou hodnoty a a b.

Úloha 18.7. [62-I-2-N1] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c platí nerovnosť

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \ge 8$$

a zistite, kedy prechádza v rovnosť.