



Obr. 2:



Obr. 3:

spájajúcich stredy protiľahlých strán štvorca vo vzdialenosti 1 cm od jeho stredu (obr. 3).

Úloha 23.3. [65-S-3] V kružnici so stredom S zostrojíme priemer AB a ľubovoľnú naň kolmú tetivu CD . Zdôvodnite, prečo je obvod trojuholníka ACD menší ako dvojnásobok obvodu trojuholníka SBC .

Riešenie*. Želaný vzťah medzi obvodmi trojuholníkov ACD a SBC vyplynie, keď pre dĺžky ich strán objavíme nerovnosti

$$|AC| < 2|SB|, \quad |AD| < 2|SC| \quad \text{a} \quad |CD| < 2|BC|.$$

Prvé dve z nich sú dôsledkom toho, že tetivy AC a AD danej kružnice sú kratšie ako jej priemer AB (obr. 4), tretia nerovnosť zapísaná v tvare $\frac{1}{2}|CD| < |BC|$ je nerovnosťou medzi dĺžkami odvesny a prepony dvoch zhodných pravouhlých trojuholníkov, na ktoré je trojuholník BCD rozdelený priamkou AB , ktorá je totiž (vďaka predpokladu $AB \perp CD$) osou tetivy CD . Dodajme, že rovnako dobre možno využiť aj trojuholníkovú nerovnosť $|CD| < |BC| + |BD| = 2|BC|$. **Iné riešenie*.** Označme α veľkosti



Obr. 4:

vnútorných uhlov pri základni AC rovnoramenného trojuholníka SAC . Potom jeho vonkajší uhol pri vrchole S , čiže uhol CSB , má veľkosť 2α , ktorú má aj uhol CAD , pretože polpriamka AB je jeho osou (obr. 4). Rovnoramenné trojuholníky ACD a SCB sa tak zhodujú vo vnútorných uhloch pri svojich hlavných vrchoch A a S , a sú teda podobné. Preto je pomer ich obvodov rovný pomeru dĺžok ich

ramien, a ten má naozaj hodnotu menšiu ako 2, lebo ramená trojuholníka ACD sú kratšie ako priemer danej kružnice, zatiaľ čo ramená trojuholníka SCB majú dĺžku jej polomeru.

Úloha 23.4. [59-S-2] Kružnice $k(S; 6\text{ cm})$ a $l(O; 4\text{ cm})$ majú vnútorný dotyk v bode B . Určte dĺžky strán trojuholníka ABC , pričom bod A je priesečník priamky OB s kružnicou k a bod C je priesečník kružnice k s dotýčnicou z bodu A ku kružnici l .

Riešenie*. Bod dotyku kružnice l s dotýčnicou z bodu A označme D (obr. 5). Z vlastností dotýčnice ku kružnici vyplýva, že uhol ADO je pravý. Zároveň je pravý aj uhol ACB (Tálesova veta). Trojuholníky



Obr. 5:

ABC a AOD sú tak podobné podľa vety uu , lebo sa zhodujú v uhloch ACB , ADO a v spoločnom uhle pri vrchole A . Z uvedenej podobnosti vyplýva

$$\frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|AO|}. \quad (1)$$

Zo zadanych číselných hodnôt vychádza $|OD| = |OB| = 4\text{ cm}$, $|OS| = |SB| - |OB| = 2\text{ cm}$, $|OA| = |OS| + |SA| = 8\text{ cm}$ a $|AB| = 12\text{ cm}$. Podľa 1 je teda $|BC| : 4\text{ cm} = 12 : 8$ a odtiaľ $|BC| = 6\text{ cm}$. Z Pytagorovej vety pre trojuholník ABC nakoniec zistíme, že $|AC| = \sqrt{12^2 - 6^2}\text{ cm} = 6\text{ cm}$.

Úloha 23.5. [63-II-4] Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$ s bodom E vnútri strany AB tak, že platí $|\angle ADE| = |\angle DEC| = |\angle ECB|$. Obsahy trojuholníkov AED a CEB sú postupne 18 cm^2 a 8 cm^2 . Určte obsah trojuholníka ECD .

Riešenie*. Hľadaný obsah trojuholníka ECD označme S . Uhol DEC je striedavý s uhlami ADE a ECB , odtiaľ $AD \parallel EC$ a $ED \parallel BC$ (obr. 6). Trojuholníky EDA a EDC majú spoločnú stranu ED , pomer ich obsahov je teda rovný pomeru príslúchajúcich výšok. Ak navyše postupne označíme P, Q a R kolmé priemety vrcholov A, B a C na priamku DE a označíme $v = |AP|$, $w = |BQ| = |CR|$, dostaneme z podobných pravouhlých trojuholníkov AEP a BEQ úmeru

$$\frac{18}{S} = \frac{v}{w} = \frac{|AE|}{|EB|}.$$

Analogicky pre trojuholníky ECD a ECB zistíme, že

$$\frac{8}{S} = \frac{|EB|}{|AE|}.$$

(V obr. 6 sú príslúchajúce priemety iba naznačené, ale jedná sa o ten istý výpočet ako v predošlom odseku, len v ňom zameníme zodpovedajúce body $A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D$ a príslúchajúce obsahy trojuholníkov

