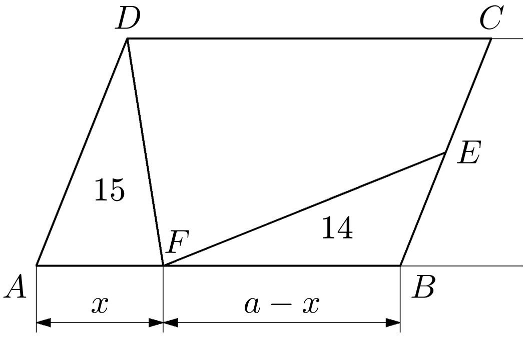
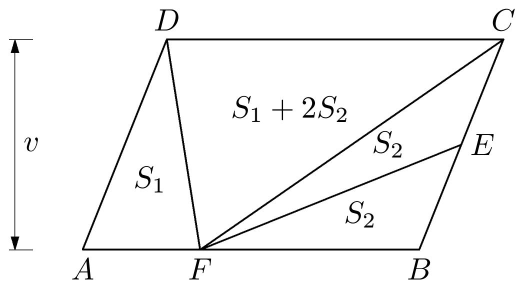
# Seminár 12: Geometria III – obsahy trojuholníkov a štvoruholníkov

## Úlohy a riešenia

**Úloha 12.1.** [57-S-2] **Riešenie*.** Označme $v$ vzdialenosť bodu $C$ od priamky $AB$, $a = |AB|$ a $x = |AF|$. Pre obsahy trojuholníkov $AFD$ a $FBE$ (obr. 1) platí $\frac{1}{2}x \cdot v = 15$, $\frac{1}{2}(a-x) \cdot \frac{1}{2}v = 14$. Odtiaľ $xv = 30$, $av - xv = 56$. Sčítaním oboch rovností nájdeme obsah rovnobežníka $ABCD$: $S_{ABCD} = av = 86\,\mathrm{cm}^2$. Obsah štvoruholníka $FECD$ je teda $S_{FECD} = S_{ABCD} - (S_{AFD} + S_{FBE}) = 57\,\mathrm{cm}^2$.



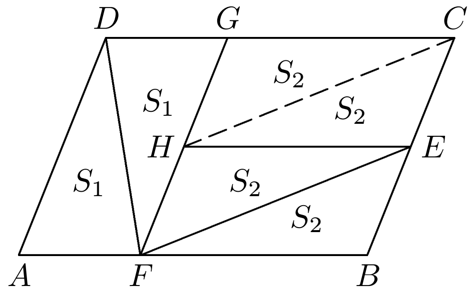

Obr. 1:




Obr. 2:

**Iné riešenie*.** Trojuholníky $BEF$ a $ECF$ majú spoločnú výšku z vrcholu $F$ a zhodné základne $BE$ a $EC$. Preto sú obsahy oboch trojuholníkov rovnaké. Z obr. 2 vidíme, že obsah trojuholníka $CDF$ je polovicou obsahu rovnobežníka $ABCD$ (oba útvary majú spoločnú základňu $CD$ a rovnakú výšku). Druhú polovicu tvorí súčet obsahov trojuholníkov $AFD$ a $BCF$. Odtiaľ $S_{FECD} = S_{ECF} + S_{CDF} = S_{ECF} + (S_{AFD} + S_{BCF}) = S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.

**Iné riešenie*.** Do rovnobežníka dokreslíme úsečky $FG$ a $EH$ rovnobežné so stranami $BC$ a $AB$ tak, ako znázorňuje obr. 3. Rovnobežníky $AFGD$ a $FBEH$ sú svojimi uhlopriečkami $DF$ a $EF$ rozdelené na dvojice zhodných trojuholníkov. Takže $S_{GDF} = S_{AFD} = 15\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{HFE} = S_{BEF} = 14\,\mathrm{cm}^2$. Zo zhodnosti rovnobežníkov $HECG$ a $FBEH$ navyše ľahko usúdime, že všetky štyri trojuholníky $FBE$, $EHF$, $HEC$ a $CGH$ sú zhodné, takže obsah štvoruholníka $FECD$ je $S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.




Obr. 3:

**Komentár.** Úloha je zaradená ako rozcvička pred komplexnejšími problémami, nie je totiž veľmi náročná na vyriešenie. Pekne tiež demonštruje, že niekedy nám vhodný prístup, náčrtok alebo správne nakreslená priamka v obrázku riešenie úlohy významne zjednoduší.

**Úloha 12.2.** [62-II-2] **Riešenie*.** Trojuholníky $ABK$ a $CDK$ majú zhodné strany $AB$ a $CD$ a súčet ich výšok $v_1$ a $v_2$ (vzdialeností bodu $K$ od priamky $AB$, resp. $CD$) je rovný výške v rovnobežníka

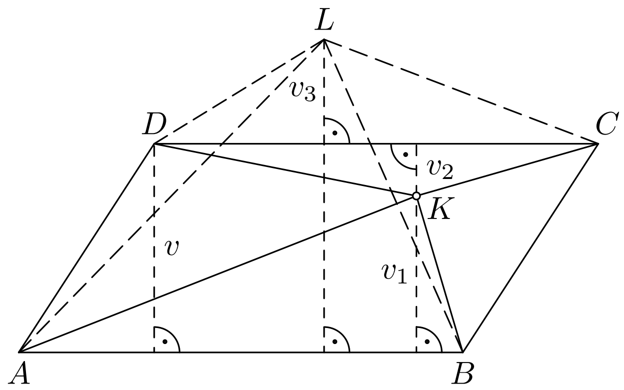
$ABCD$ (vzdialenosti rovnobežných priamok $AB$ a $CD$, obr. 4). Preto súčet ich obsahov dáva polovicu súčtu obsahu daného rovnobežníka:

$$S_{ABK} + S_{CDK} = \frac{1}{2}|AB|v_1 + \frac{1}{2}|CD|v_2 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v_1 + v_2) = \frac{1}{2}|AB| \cdot v \ = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Podobne aj $S_{BCK} + S_{DAK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, teda

$$S_{CDK} = S_{BCK} + S_{DAK} - S_{ABK} = 6\,\mathrm{cm}^2.$$

Trojuholníky $ABL$ a $DCL$ majú zhodné strany $AB$ a $CD$. Ak $v_3$ označuje príslušnú výšku druhého




Obr. 4:

z nich, je výška prvého z nich rovná $v + v_3$, takže pre rozdiel obsahov týchto trojuholníkov platí

$$S_{ABL} - S_{DCL} = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v \ + v_3) - \frac{1}{2}|CD| \cdot v_3 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v \ + v_3 - v_3) =$$
$$= \frac{1}{2}|AB| \cdot v \ = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{BCK} + S_{DAK}.$$

Odtiaľ vyplýva

$$S_{ABL} = S_{BCK} + S_{DAK} + S_{DCL} = 60\,\mathrm{cm}^2.$$

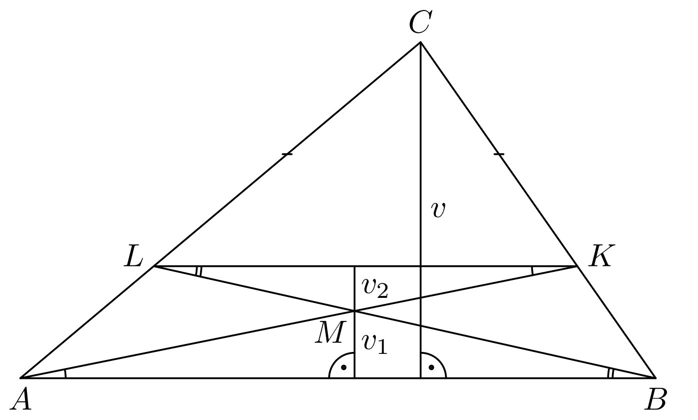
**Komentár.** Úloha precvičuje použitie tvrdenia, ktoré sme dokázali v prvom geometrickom seminári, a to, že ak majú dva trojuholníky základňu rovnakej dĺžky, potom ich obsahy sú v rovnakom pomere ako ich výšky na túto základňu.

**Úloha 12.3.** [64-S-2] **Riešenie*.** Označme $v$ výšku trojuholníka $ABC$ na stranu $AB$, $v_1$ výšku trojuholníka $ABM$ na stranu $AB$ a $v_2$ výšku trojuholníka $KLM$ na stranu $KL$ (obr. 5). Z podobnosti trojuholníkov $LKC$ a $ABC$ (zaručenej vetou *sus*) vyplýva, že $|KL| = \frac{2}{3}|AB|$. Z porovnania ich výšok zo spoločného vrcholu $C$ vidíme, že výška $v$ trojuholníka $ABC$ je rovná trojnásobku vzdialenosti priečky $KL$ od strany $AB$, teda $v = 3(v_1 + v_2)$. Keďže $AK$ a $BL$ sú priečky rovnobežiek $KL$ a $AB$, vyplýva zo zhodnosti prislúchajúcich striedavých uhlov podobnosť trojuholníkov $ABM$ a $KLM$. Keďže $|KL| = \frac{2}{3}|AB|$, je tiež $v_2 = \frac{2}{3}v_1$, a preto $v_1 + v_2 = \frac{5}{3}v_1$, čiže

$$v = 3(v_1 + v_2) = 5v_1.$$

Trojuholníky $ABM$ a $ABC$ majú spoločnú stranu $AB$, preto ich obsahy sú v pomere výšok na túto stranu, takže obsah trojuholníka $ABC$ je päťkrát väčší ako obsah trojuholníka $ABM$.

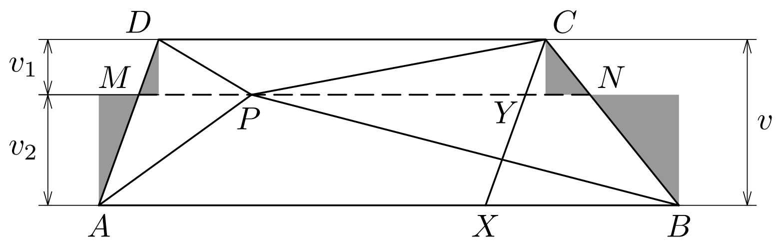
**Komentár.** Ďalšia úloha, ktorá precvičuje rovnaké tvrdenie ako predchádzajúca. Pomery výšok je




Obr. 5:

tentoraz potrebné určiť z podobnosti trojuholníkov. Tu sa teda uplatnia znalosti precvičované na minulom seminárnom stretnutí.

**Úloha 12.4.** [64-II-3] **Riešenie*.** Predpokladajme, že bod $P$ má požadované vlastnosti. Priamka rovnobežná so základňami lichobežníka a prechádzajúca bodom $P$ pretína ramená $AD$ a $BC$ postupne v bodoch $M$ a $N$ (obr. 6). Označme $v$ výšku daného lichobežníka, $v_1$ výšku trojuholníka $CDP$ a $v_2$ výšku trojuholníka $ABP$. a) Keďže obsahy trojuholníkov $ABP$ a $CDP$ sú v pomere $3 : 1$, platí




Obr. 6:

$$\frac{|AB|v_2}{2} : \frac{|CD|v_1}{2} = 3 : 1, \qquad \text{čiže} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Z vyznačených dvojíc podobných pravouhlých trojuholníkov vyplýva, že v práve určenom pomere $2 : 1$ výšok $v_2$ a $v_1$ delí aj bod $M$ rameno $AD$ a bod $N$ rameno $BC$ (v prípade pravého uhla pri jednom z vrcholov $A$ či $B$ je to zrejmé rovno). Tým je konštrukcia bodov $M$ a $N$, a teda aj úsečky $MN$ určená. Teraz zistíme, v akom pomere ju delí uvažovaný bod $P$.

Keďže obsahy trojuholníkov $BCP$ a $DAP$ sú v pomere $3 : 1$, platí

$$\left(\frac{|NP|v_1}{2} + \frac{|NP|v_2}{2}\right) : \left(\frac{|MP|v_1}{2} + \frac{|MP|v_2}{2}\right) = 3 : 1,$$

$$\frac{|NP|(v_1 + v_2)}{2} : \frac{|MP|(v_1 + v_2)}{2} = 3 : 1, \qquad |NP| : |MP| = 3 : 1.$$

Tým je konštrukcia (jediného) vyhovujúceho bodu $P$ úplne opísaná.

b) Doplňme trojuholník $DAC$ na rovnobežník $DAXC$. Jeho strana $CX$ delí priečku $MN$ na dve časti, a keďže $v_1 = \frac{1}{3}v$, môžeme dĺžku priečky $MN$ vyjadriť ako $|MN| = |MY| + |YN| = |AX| + \frac{1}{3}|XB| = |CD| + \frac{1}{3}(|AB| - |CD|) = \frac{1}{3}|AB| + \frac{2}{3}|CD| = \frac{7}{6}|CD|$, lebo podľa zadania platí $|AB| = \frac{3}{2}|CD|$. Preto

$$|MP| = \frac{1}{4}|MN| = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{6}|CD| = \frac{7}{24}|CD|,$$

takže pre pomer obsahov trojuholníkov $CDP$ a $DAP$ platí

$$\frac{|CD|v_1}{2} : \frac{|MP|(v_1+v_2)}{2} = (|CD|v_1) : \left(\frac{7}{24} \cdot |CD| \cdot 3v_1\right) = 1 : \frac{7}{8} = 8 : 7.$$

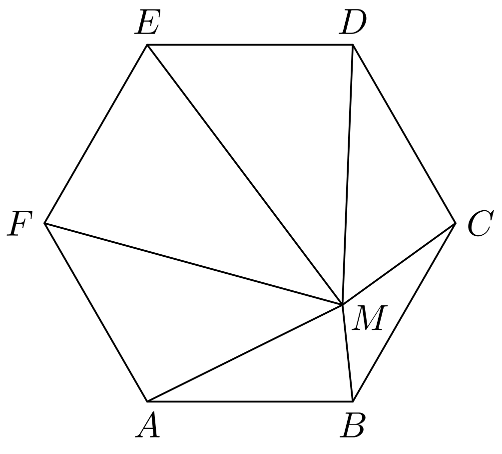
Pomer obsahov trojuholníkov $BCP$ a $CDP$ je teda $21 : 8$ a pomer obsahov trojuholníkov $ABP$ a $BCP$ je tak $24 : 21$. Postupný pomer obsahov trojuholníkov $ABP$, $BCP$, $CDP$ a $DAP$ je preto $24 : 21 : 8 : 7$.

**Komentár.** Táto komplexná úloha je vrcholom tohto seminárneho stretnutia. Vyžaduje umnú prácu s pomermi obsahov, podobnými trojuholníkmi aj netriviálny nápad doplnenia trojuholníka $DAC$ na rovnobežník. Je tak vhodné skôr než samostatne úlohu riešiť spoločne na tabuľu. Študentom tiež pripomenieme, že podobne ako v úvodnej úlohe, aj tu našlo vhodné rozdelenie zadaného útvaru svoje opodstatnenie a prispelo k úspešnému rozlúsknutiu problému.

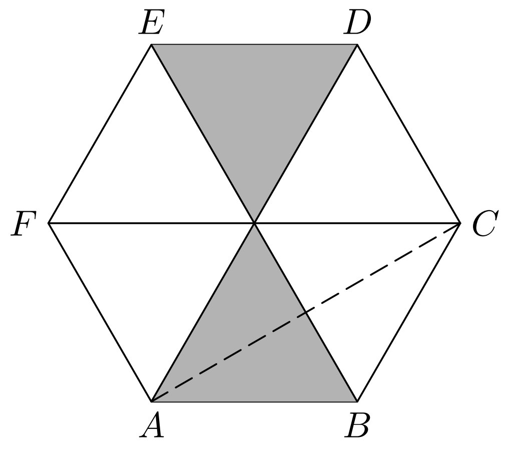
**Úloha 12.5.** [62-I-6] **Riešenie*.** Úloha je o obsahu šiestich trojuholníkov, na ktoré je daný pravidelný šesťuholník rozdelený spojnicami jeho vrcholov s bodom $M$ (obr. 7). Celý šesťuholník s daným obsahom, ktorý označíme $S$, možno rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov s obsahom $S/6$ (obr. 8). Ak označíme $r$ ich stranu, $v$ vzdialenosť rovnobežiek $AB$, $CD$ a $v_1$ vzdialenosť bodu $M$ od priamky $AB$, dostaneme

$$S_{ABM} + S_{EDM} = \frac{1}{2}rv_1 + \frac{1}{2}r(v - v_1) = \frac{1}{2}rv = \frac{S}{3},$$

lebo $S/3$ je súčet obsahov dvoch vyfarbených rovnostranných trojuholníkov. Vďaka symetrii majú tú istú hodnotu $S/3$ aj súčty $S_{BCM} + S_{EFM}$ a $S_{CDM} + S_{FAM}$. Odtiaľ už dostávame prvé dva neznáme obsahy $S_DEM = S/3 - S_{ABM} = 7\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{EFM} = S/3 - S_{BCM} = 8\,\mathrm{cm}^2$. Ako určiť zvyšné dva obsahy




Obr. 7:




Obr. 8:

$S_{CDM}$ a $S_{FAM}$, keď zatiaľ poznáme len ich súčet $S/3$? Všimnime si, že súčet zadaných obsahov trojuholníkov $ABM$ a $BCM$ má významnú hodnotu $S/6$, ktorá je aj obsahom trojuholníka $ABC$ (to vyplýva opäť z obr. 8). Taká zhoda obsahov znamená práve to, že bod $M$ leží na uhlopriečke $AC$. Trojuholníky $ABM$ a $BCM$ tak majú zhodné výšky zo spoločného vrcholu $B$ a to isté platí aj pre výšky trojuholníkov $CDM$ a $FAM$ z vrcholov $F$ a $D$ (t. j. bodov, ktoré majú od priamky $AC$ rovnakú vzdialenosť). Pre pomery obsahov týchto dvojíc trojuholníkov tak dostávame

$$\frac{S_{CDM}}{S_{FAM}} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{S_{BCM}}{S_{ABM}} = \frac{2}{3}.$$

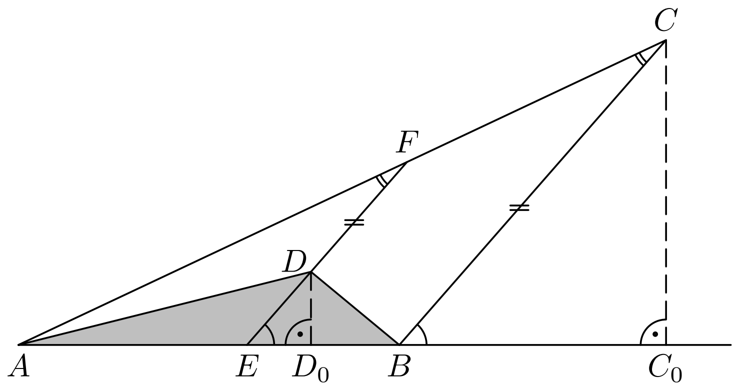
V súčte $S_{CDM} + S_{FAM}$ majúcom hodnotu $S/3$ sú teda sčítance v pomere $2 : 3$. Preto $S_{CDM} = 4\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{FAM} = 6\,\mathrm{cm}^2$.

**Komentár.** Úloha je odľahčeným a netradičným príkladom využitia princípu, na ktorom sme stavali celé toto seminárne stretnutie: súčty obsahov „protiľahlých“ trojuholníkov sú stále rovnaké. Posledná časť úlohy vyžaduje netriviálny nápad a študenti tak možno budú potrebovať malú radu.

**Úloha 12.6.** [65-I-4] **Riešenie*.** Pre spoločnú hodnotu $p$ oboch pomerov zo zadania platí

$$|ED| = p|DF| \quad \text{a zároveň} \quad |BE| = p|EA|. \tag{1}$$

Pred vlastným riešením oboch úloh a) a b) vyjadríme pomocou daného čísla $p$ skúmaný pomer obsahov trojuholníkov $ABC$ a $ABD$. Ten je rovný – keďže trojuholníky majú spoločnú stranu AB – pomeru dĺžok ich výšok $CC_0$ a $DD_0$ (obr. 9), ktorý je rovnaký ako pomer dĺžok úsečiek $BC$ a $ED$, a to




Obr. 9:

na základe podobnosti pravouhlých trojuholníkov $BCC_0$ a $EDD_0$ podľa vety $uu$ (uplatnenej vďaka $BC \parallel ED$).[1] Platí teda rovnosť

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{|BC|}{|ED|}. \tag{2}$$

Vráťme sa teraz k rovnostiam 1, podľa ktorých

$$|EF| = (1+p)|DF| \quad \text{a} \quad |AB| = (1+p)|EA|,$$

a všimnime si, že trojuholníky $ABC$ a $AEF$ majú spoločný uhol pri vrchole $A$ a zhodné uhly pri vrcholoch $C$ a $F$ (pretože $BC \parallel EF$), takže sú podľa vety $uu$ podobné. Preto pre dĺžky ich strán platí

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|EF|}, \quad \text{čiže} \quad 1+p = \frac{|BC|}{(1+p)|DF|}, \quad \text{odkiaľ} \quad |BC| = (1+p)^2|DF|.$$

Keď vydelíme posledný vzťah hodnotou $|ED|$, ktorá je rovná $p|DF|$ podľa 1, získame podiel z pravej strany 2 a tým aj hľadané vyjadrenie

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{(1+p)^2}{p}. \tag{3}$$

a) Algebraickou úpravou zlomku zo vzťahu 3

$$\frac{(1+p)^2}{p} = \frac{1+2p+p^2}{p} = 2+p+\frac{1}{p}$$

zisťujeme, že hodnota pomeru $S_{ABC} : S_{ABD}$ je pre akékoľvek dve navzájom prevrátené hodnoty $p$ a $1/p$ rovnaká, teda nielen pre hodnoty 2/3 a 3/2, ako sme mali ukázať.

[1] V prípade pravých uhlov $ABC$ a $AED$ to platí triviálne, lebo vtedy $B = C_0$ a $E = D_0$.

b) Podľa vzťahu 3 je našou úlohou overiť pre každé $p > 0$ nerovnosť

$$\frac{(1+p)^2}{p} \geq 4, \quad \text{čiže} \quad (1+p)^2 \geq 4p.$$

To je však zrejme ekvivalentné s nerovnosťou $(1-p)^2 \geq 0$, ktorá skutočne platí, nech je základ druhej mocniny akýkoľvek (rovnosť nastane jedine pre $p = 1$).