Seminár 20: Teória čísel IV – prvočísla

Úlohy a riešenia

Úloha 20.1. [63-I-3-N2] Číslo n je súčinom dvoch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme menšie z nich o 1 a druhé ponecháme, ich súčin sa zväčší o 7. Určte číslo n.

Úloha 20.2. [63-I-3-N4] Číslo n je súčinom dvoch prvočísel. Ak zväčšíme každé z nich o 1, ich súčin sa zväčší o 35. Určte číslo n.

Úloha 20.3. [63-I-3] Číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme dve menšie z nich o 1 a najväčšie ponecháme nezmenené, zväčší sa ich súčin o 915. Určte číslo n.

Úloha 20.4. [64-S-3] Nájdite najmenšie prirodzené číslo n s ciferným súčtom 8, ktoré sa rovná súčinu troch rôznych prvočísel, pričom rozdiel dvoch najmenších z nich je 8.

Úloha 20.5. [57-S-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b väčších ako 1 tak, aby ich súčet aj súčin boli mocniny prvočísel.

Úloha 20.6. [65-I-1-D2, resp. 55-II-4] Nájdite všetky dvojice prvočísel p a q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + 145p^2$.

Úloha 20.7. [62-I-5] Určte všetky celé čísla n, pre ktoré $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo.

Komentár. Aj keď vzorové riešenie môže vyzerať trikovo, po vyskúšaní niekoľko málo hodnôt n je vždy hodnota zo zadania deliteľná 3, čo by študentov mohlo priviesť na myšlienku skúsiť dokázať deliteľnosť čísla zo zadania tromi.

Úloha 20.8. [[?], príklad 2.3, str. 174] Nájdite všetky prvočísla, ktoré sú súčasne súčtom a rozdielom dvoch vhodných prvočísel.

Úloha 20.9. [[?], príklad 3, str. 95] Nájdite celočíselné riešenia rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p},$$

kde p je pevne dané prvočíslo.

Úloha 20.10. [65-I-1] Nájdite všetky možné hodnoty súčinu prvočísel p, q, r, pre ktoré platí

$$p^2 - (q + r)^2 = 637.$$