Seminár 7

Téma

Teória čísel II – úlohy o najmenšom spoločnom násobku a najväčšom spoločnom deliteli

Ciele

Zoznámiť sa s metódami riešenia príkladov o spoločných deliteľoch a násobkoch, upevniť znalosti zo seminára predchádzajúceho.

Úlohy a riešenia

Úloha 7.1. [61-I-3-N1] Určte, pre ktoré prirodzené čísla a,b platí $(a,b) = 10$ a zároveň $[a,b] = 150$.

Riešenie*. Pretože $10 = 2 \cdot 5$ a $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, požadované rovnosti sú splnené práve vtedy, keď $a = 2 \cdot 3^s \cdot 5^t$ a $b = 2 \cdot 3^u \cdot 5^v$, kde $\{s,u\} = \{0,1\}$ a $\{t,v\} = \{1,2\}$. Riešením je teda jedna zo štvoríc $\{a,b\} = \{10,150\}$ alebo $\{a,b\} = \{30,50\}$.

Komentár. Úloha je relatívne jednoduchá a nevyžaduje žiadne špeciálne znalosti, zároveň však nie je triviálna. Tvorí tak príjemné preklenutie medzi školskými a olympiádnymi príkladmi.

Úloha 7.2. [69-I-5-N1] Nech d je najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel a a b. Ukážte, že čísla a/d a b/d sú celé a nesúdeliteľné.

Riešenie. Ak je d najväčším spoločným deliteľom čísel a a b, potom existujú prirodzené čísla u a v také, že $a = ud$ a $b = vd$, čím sme dokázali prvú časť tvrdenia. Druhú dokážeme sporom. Predpokladajme, že a/d a b/d nie sú nesúdeliteľné. Potom existuje ich najväčší spoločný deliteľ d_1. Číslo d_1 však potom delí aj čísla a a b, čo je spor s predpokladom, že $d = (a,b)$.

Komentár. Táto mini-úloha je prípravným krokom k nasledujúcemu všeobecnejšiemu tvrdeniu a zároveň môže pripomenúť použitie dôkazu sporom.

Úloha 7.3. [60-I-5-N2] Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a,b platí vzťah

$$[a,b] \cdot (a,b) = ab.$$

Riešenie. Nech $d = (a,b)$, potom $a = ud$, $b = vd$ pre nesúdeliteľné u a v, a teda $[a,b] = uvd$. Porovnaním ľavej a pravej strany dokazovanej nerovnosti dostávame $uvd \cdot d = ud \cdot vd$, čo je pravdivé tvrdenie, teda vzťah je dokázaný.

Alternatívne môžeme vzťah dokázať úvahou o exponentoch prvočísel, z ktorých sú čísla a a b zložené. Nech $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ a $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, kde p_1 až p_k sú prvočísla a α_k, β_k prirodzené čísla. Potom

$$\begin{aligned}(a,b) &= p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdots p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}},\\ [a,b] &= p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdots p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}},\\ ab &= p_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2+\beta_2} \cdots p_k^{\alpha_k,\beta_k}.\end{aligned}$$

Keďže pre akékoľvek čísla α, β platí $\max\{\alpha,\beta\} + \min\{\alpha,\beta\} = \alpha + \beta$, a to vo všetkých prípadoch $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, je naše tvrdenie dokázané.

Komentár. Predchádzajúce tvrdenie je stavebným kameňom mnohých úloh o spoločných násobkoch a deliteľoch, najmä myšlienka zápisu prirodzených čísel a a b v tvare $a = ud$ a $b = vd$, kde u a v sú prirodzené čísla také, že $(u, v) = 1$ a $d = (a, b)$ nájde uplatnenie veľmi často.

Úloha 7.4. [64-I-5-N4] Platí pre každé tri prirodzené čísla a, b, c a ich najväčší spoločný deliteľ d a ich najmenší spoločný násobok n rovnosť $abc = nd$?

Riešenie. Neplatí, uvedieme protipríklad. Napríklad pre čísla $15, 18$ a 24 je $d = (15, 18, 24) = 3$, $n = [15, 18, 24] = 360$. Ďalej $15 \cdot 18 \cdot 24 = 6480$ a $(15, 18, 24) \cdot [15, 18, 24] = 3 \cdot 360 = 1080$, to však nie sú rovnaké čísla a tvrdenie neplatí.

Komentár. Všeobecnejší pohľad na predchádzajúci problém by sme dostali skrz pohľad na exponenty prvočísel, z ktorých sú čísla a, b, c zložené. Dokazovaná rovnosť nastane len v prípade, že sú všetky tri čísla navzájom po dvoch nesúdeliteľné.

Zároveň úloha demonštruje riešenie uvedením protipríkladu, čo je princíp, s ktorým sme sa v seminároch zatiaľ nestretli a jeho spomenutie je určite vhodné.

Úloha 7.5. [64-I-5-N5] Ak majú prirodzené čísla a, b najväčšieho spoločného deliteľa d, majú rovnakého najväčšieho spoločného deliteľa aj čísla a, b, $a - b$, $a + b$. Dokážte. Platí rovnaké tvrdenie pre najmenší spoločný násobok?

Riešenie. Najväčší spoločný deliteľ týchto štyroch čísel nebude určite väčší ako d (ak by bol, potom by d nebol najväčší spoločný deliteľ čísel a a b, čo by bolo v spore s predpokladom úlohy). Stačí teda ukázať, že d delí $a + b$ a $a - b$. Ak zapíšeme a a b v tvare $a = ud$ a $b = vd$, pričom pre prirodzené čísla u, v platí $(u, v) = 1$, bude potom $a + b = ud + vd = (u + v)d$, $a - b = ud - vd = (u - v)d$. Vidíme, že d delí súčet aj rozdiel čísel a a b, tvrdenie je teda dokázané.

Tvrdenie pre najmenší spoločný násobok neplatí, uvedieme protipríklad. Pre čísla $a = 12$, $b = 8$, $a + b = 20$, $a - b = 4$, $[12, 8] = 24$, avšak $[12, 8, 20, 4] = 120$.

Komentár. Úloha precvičuje dôkaz všeobecného tvrdenia a opäť prináša protipríklad ako dostatočný argument.

Úloha 7.6. [61-I-3-N4, resp. 50-C-II-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí $a + b + [a, b] + (a, b) = 50$.

Riešenie*. Položme $a = ud$, $b = vd$, kde d je najväčší spoločný deliteľ čísel a, b, prirodzené čísla u, v sú nesúdeliteľné a $[a, b] = uvd$. Podľa zadania má platiť $ud + vd + uvd + d = 50$. Inak napísané, $(1 + u)(1 + v)d = 50$. Nájdime preto všetky rozklady čísla 50 na súčin troch prirodzených čísel $d, u + 1, v + 1$, z ktorých posledné dve sú väčšie ako 1. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a \leq b$, tj. $u \leq v$. Dostaneme nasledujúce možnosti.

d	$u+1$	$v+1$	u	v	a	b
1	2	25	1	24	1	24
1	5	10	4	9	4	9
2	5	5	4	4	8	8
5	2	5	1	4	5	20

V prípade $d = 2$ dostaneme $u = v = 4$, to je však spor s tým, že u a v sú nesúdeliteľné. Preto má úloha práve tri riešenia.

Komentár. Úloha okrem vhodného zapísania čísel a, b a $[a,b]$ vyžaduje ešte vhodnú úpravu rovnosti zo zadania, opäť tak kombinuje algebraické poznatky s poznatkami z oblasti teórie čísel.

Úloha 7.7. [61-S-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a,b, pre ktoré platí rovnosť množín

$$\{a\cdot[a,b], b\cdot(a,b)\} = \{45, 180\}.$$

Riešenie*. Z danej rovnosti vyplýva, že číslo b je nepárne (inak by obe čísla naľavo boli párne), a teda číslo a je párne (inak by obe čísla naľavo boli nepárne). Rovnosť množín preto musí byť splnená nasledovne:

$$a\cdot[a,b] = 180 \quad \text{a} \quad b\cdot(a,b) = 45. \quad (1)$$

Keďže číslo a delí číslo $[a,b]$, je číslo $180 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5$ deliteľné druhou mocninou (párneho) čísla a, takže musí platiť buď $a = 2$, alebo $a = 6$.

V prípade $a = 2$ (vzhľadom na to, že b je nepárne) platí

$$a\cdot[a,b] = 2\cdot[2,b] = 2\cdot 2b = 4b,$$

čo znamená, že prvá rovnosť v (1) je splnená jedine pre $b = 45$. Vtedy $b\cdot(a,b) = 45\cdot(2,45) = 45$, takže je splnená aj druhá rovnosť v (1), a preto dvojica $a = 2, b = 45$ je riešením úlohy.

V prípade $a = 6$ podobne dostaneme

$$a\cdot[a,b] = 6\cdot[6,b] = 6\cdot 2\cdot[3,b] = 12\cdot[3,b],$$

čo znamená, že prvá rovnosť v (1) je splnená práve vtedy, keď $[3,b] = 15$. Tomu vyhovujú jedine hodnoty $b = 5$ a $b = 15$. Z nich však iba hodnota $b = 15$ spĺňa druhú rovnosť v (1), ktorá je teraz v tvare $b\cdot(6,b) = 45$. Druhým riešením úlohy je teda dvojica $a = 6$, $b = 15$, žiadne ďalšie riešenia neexistujú.
Záver. Hľadané dvojice sú dve, a to $a = 2, b = 45$ a $a = 6, b = 15$.

Iné riešenie. Označme $d = (a,b)$. Potom $a = ud$ a $b = vd$, pričom u,v sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, takže $[a,b] = uvd$. Z rovností

$$a\cdot[a,b] = ud\cdot uvd = u^2vd^2 \quad \text{a} \quad b\cdot(a,b) = vd\cdot d = vd^2$$

vidíme, že číslo $a\cdot[a,b]$ je u^2-násobkom čísla $b\cdot(a,b)$, takže zadaná rovnosť množín môže byť splnená jedine tak, ako sme zapísali vzťahmi (1) v prvom riešení. Tie teraz môžeme vyjadriť rovnosťami

$$u^2vd^2 = 180 \quad \text{a} \quad vd^2 = 45.$$

Preto platí $u^2 = 180/45 = 4$, čiže $u = 2$. Z rovnosti $vd^2 = 45 = 3^2\cdot 5$ vyplýva, že buď $d = 1$ (a $v = 45$), alebo $d = 3$ (a $v = 5$). V prvom prípade $a = ud = 2\cdot 1 = 2$ a $b = vd = 45\cdot 1 = 45$, v druhom $a = ud = 2\cdot 3 = 6$ a $b = vd = 5\cdot 3 = 15$.

Poznámka. Keďže zo zadanej rovnosti okamžite vyplýva, že obe čísla a,b sú deliteľmi čísla 180 (takým deliteľom je dokonca aj ich najmenší spoločný násobok $[a,b]$), je možné úlohu vyriešiť rôznymi inými cestami, založenými na testovaní konečného počtu dvojíc konkrétnych čísel a a b. Takýto postup urýchlime, keď vopred zistíme niektoré nutné podmienky, ktoré musia čísla a,b spĺňať. Napríklad spresnenie rovnosti množín na dvojicu rovností (1) možno (aj bez použitia úvahy o parite čísel a,b) vysvetliť všeobecným postrehom: súčin $a\cdot[a,b]$ je vždy deliteľný súčinom $b\cdot(a,b)$, pretože ich podiel možno zapísať v tvare

$$\frac{a\cdot[a,b]}{b\cdot(a,b)} = \frac{a}{(a,b)}\cdot\frac{[a,b]}{b},$$

teda ako súčin dvoch *celých* čísel.

Komentár. Úloha je zložitejšia ako predchádzajúce, dá sa však riešiť mnohými spôsobmi a bude iste zaujímavé vidieť rôzne študentské riešenia. Je taktiež vhodným miestom na to, aby sme študentov nechali diskutovať o prístupoch medzi sebou a prípadne skúšali hľadať slabiny jednotlivých zdôvodnení. Určite považujeme za vhodné zmieniť poslednú rovnosť z poznámky, keďže ide o zaujímavý postreh a metóda vhodného zapísania tvaru zlomku je užitočná nielen tu. Na túto úlohu nadväzuje komplexnejšia domáca práca, ktorá však vychádza z veľmi podobného princípu.

Úloha 7.8. [64-I-5] Rozdiel dvoch prirodzených čísel je 2010 a ich najväčší spoločný deliteľ je 2014-krát menší ako ich najmenší spoločný násobok. Určte všetky také dvojice čísel.

Riešenie*. Označme hľadané čísla a a b $(a > b)$ a d ich najväčší spoločný deliteľ. Potom $a = ud$, $b = vd$, pričom $u > v$ sú nesúdeliteľné čísla. Keďže najmenší spoločný násobok čísel a, b je číslo uvd, dosadením do zadaných vzťahov dostaneme rovnosti

$$a - b = (u - v)d = 2010,$$

$$uvd = 2014d, \quad \text{čiže} \quad uv = 2014.$$

Podľa rozkladu na súčin prvočísel $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ vypíšeme všetky možné dvojice (u, v) a pre každú z nich sa presvedčíme, či číslo $u - v$ je deliteľom čísla 2010. V pozitívnom prípade príslušný podiel udáva číslo d a výpočet neznámych $a = ud$ a $b = vd$ je už jednoduchý:

a) $u = 2014$ a $v = 1$: $u - v = 2013$ nedelí 2 010;

b) $u = 19 \cdot 53 = 1007$ a $v = 2$: $u - v = 1005 \mid 2010$, $d = 2$, $a = 1007 \cdot 2 = 2014$, $b = 2 \cdot 2 = 4$;

c) $u = 2 \cdot 53 = 106$ a $v = 19$: $u - v = 87$ nedelí 2 010;

d) $u = 53$ a $v = 2 \cdot 19 = 38$: $u - v = 15 \mid 2010$, $d = 134$, $a = 53 \cdot 134 = 7102$, $b = 38 \cdot 134 = 5092$.

Záver. Hľadané čísla tvoria jednu z dvojíc $(2014, 4)$ alebo $(7102, 5092)$.

Komentár. Úloha neprináša žiadne nové poznatky a princípy, je však vhodná na trénovanie riešenia sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi a opäť tak vytvorí prepojenie s minulými seminármi.

Úloha 7.9. [60-I-5-D3] Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel a, b, pre ktoré má výraz

$$\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$$

celočíselnú hodnotu.

Riešenie*. Nech $d = (a, b)$, potom $a = ud$, $b = vd$ pre nesúdeliteľné prirodzené u a v. Skúmaný výraz bude po dosadení $(9u^2 + 14v^2)/(9uv)$, takže $9u \mid 14v^2$ a z nesúdeliteľnosti u a v máme $u \mid 14$, navyše $3 \mid v$. Podobne $v \mid 9$; vyskúšame konečne veľa možností.

Komentár. Úloha je zaujímavá tým, že prácu s najväčším spoločným deliteľom obsahuje nepriamo a využíva tiež poznatky o deliteľnosti z minulého seminára.

Úloha 7.10. [60-I-5] Dokážte, že najmenší spoločný násobok $[a, b]$ a najväčší spoločný deliteľ (a, b) ľubovoľných dvoch kladných celých čísel a, b spĺňajú nerovnosť

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geq 2ab.$$

Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť.

Riešenie*. Nerovnosť by bolo ľahké dokázať, ak by niektorý z dvoch sčítancov na ľavej strane bol sám osebe aspoň taký, ako pravá strana. Číslo $[a,b]$ je zjavne násobkom čísla a. Ak $[a,b] \geq 2a$, tak $b[a,b] \geq 2ab$ a v zadanej nerovnosti platí dokonca ostrá nerovnosť, lebo číslo $a(a,b)$ je kladné. Ak $[a,b] < 2a$, tak neostáva iná možnosť ako $[a,b] = a$. To však nastane iba v prípade, keď $b \mid a$. V tomto prípade $(a,b) = b$ a v zadanej nerovnosti nastane rovnosť.

Iné riešenie. Označme $d = (a,b)$, takže $a = ud$ a $b = vd$ pre nesúdeliteľné prirodzené čísla u, v. Z toho hneď vieme, že $[a,b] = uvd$. Keďže

$$a \cdot (a,b) + b \cdot [a,b] = ud^2 + uv^2d^2 = u(1+v^2)d^2,$$

$$2ab = 2uvd^2,$$

je vzhľadom na $ud^2 > 0$ nerovnosť zo zadania ekvivalentná s nerovnosťou $1 + v^2 \geq 2v$, čiže $(v-1)^2 \geq 0$, čo platí pre každé v. Rovnosť nastane práve vtedy, keď $v = 1$, čiže $b \mid a$.

Iné riešenie. Označme $d = (a,b)$. Je známe, že $[a,b] \cdot (a,b) = ab$. Po vyjadrení $[a,b]$ z tohto vzťahu, dosadení do zadanej nerovnosti a ekvivalentnej úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnosť $d^2 + b^2 \geq 2bd$, ktorá platí, lebo $(d-b)^2 \geq 0$. Rovnosť nastáva pre $d = b$, čiže v prípade $b \mid a$.

Komentár. Na úspešné zvládnutie úlohy je opäť potrebná znalosť z predchádzajúceho seminára o nerovnostiach a taktiež ponúka široké spektrum prístupov, takže bude zaujímavé sledovať, ako k nej študenti pristúpia.

Domáca práca

Úloha 7.11. [61-I-3] Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí množinová rovnosť

$$\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\} = \{2,3,5,60,90,180\},$$

pričom (x,y) a $[x,y]$ označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel x a y.

Riešenie*. Prvky danej množiny M rozložíme na prvočinitele:

$$M = \{2,3,5,2^2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5\}.$$

Odtiaľ vyplýva, že v rozklade hľadaných čísel a, b, c vystupujú iba prvočísla 2, 3 a 5. Každé z nich je pritom prvočiniteľom práve dvoch z čísel a, b, c: keby bolo prvočiniteľom len jedného z nich, chýbalo by v rozklade troch najväčších spoločných deliteľov a jedného najmenšieho spoločného násobku, teda v štyroch číslach z M; keby naopak bolo prvočiniteľom všetkých troch čísel a, b, c, nechýbalo by v rozklade žiadneho čísla z M. Okrem toho vidíme, že v rozklade každého z čísel a, b, c je prvočíslo 5 najviac v jednom exemplári.

Podľa uvedených zistení môžeme čísla a, b, c usporiadať tak, že rozklady čísel a, b obsahujú po jednom exemplári prvočísla 5 (potom $(c,5) = 1$) a že $(a,2) = 2$ (ako vieme, aspoň jedno z čísel a, b musí byť párne). Číslo 5 z množiny M je potom nutne rovné (a,b), takže platí $(b,2) = 1$, a preto $(b,3) = 3$ (inak by platilo $(b,c) = 1$), odtiaľ zase s ohľadom na $(a,b) = 5$ vyplýva $(a,3) = 1$. Máme teda $a = 5 \cdot 2^s$ a $b = 5 \cdot 3^t$ pre vhodné prirodzené čísla s a t.

Z rovnosti $[a,b] = 2^s \cdot 3^t \cdot 5$ vyplýva, že nastane jeden z troch nasledujúcich prípadov.

(1) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5$. Vidíme, že platí $s = 2$ a $t = 1$, čiže $a = 20$ a $b = 15$. Ľahko určíme, že tretím číslom je $c = 18$.

(2) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5$. V tomto prípade $a = 10$, $b = 45$ a $c = 12$.

(3) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Teraz $a = 20$, $b = 45$ a $c = 6$.

Záver. Hľadané čísla a, b, c tvoria jednu z množín $\{20,15,18\}$, $\{10,45,12\}$ a $\{20,45,6\}$.

Iné riešenie. V danej rovnosti je množina napravo tvorená šiestimi rôznymi číslami väčšími ako 1, takže čísla

$(a,b),(a,c),(b,c)$ musia byť netriviálnymi deliteľmi postupne čísel $[a,b],[a,c],[b,c]$. Čísla 2, 3, 5 ale žiadne netriviálne delitele nemajú, musí teda platiť

$$\{(a,b),(a,c),(b,c)\} = \{2,3,5\} \quad \text{a} \quad \{[a,b],[a,c],[b,c]\} = \{60,90,180\}.$$

Pretože poradie čísel a,b,c nehrá žiadnu úlohu, môžeme predpokladať, že platí $(a,b)=2,(a,c)=3$ a $(b,c)=5$. Odtiaľ vyplývajú vyjadrenia

$$a = 2\cdot 3\cdot x = 6x, \quad b = 2\cdot 5\cdot y = 10y, \quad c = 3\cdot 5\cdot z = 15z$$

pre vhodné prirodzené čísla x,y,z. Zo známej rovnosti $[x,y]\cdot(x,y) = xy$ tak dostaneme vyjadrenia najmenších spoločných násobkov v tvare

$$[a,b] = \frac{6x\cdot 10y}{2} = 30xy, \quad [a,c] = \frac{6x\cdot 15z}{3} = 30xz, \quad [b,c] = \frac{10y\cdot 15z}{5} = 30yz.$$

Z rovnosti $\{30xy,30xz,30yz\} = \{60,90,180\}$ upravenej na $\{xy,xz,yz\} = \{2,3,6\}$ potom vďaka tomu, že 2 a 3 sú prvočísla, vyplýva $\{x,y,z\} = \{1,2,3\}$. Pretože z podmienky $5 = (b,c) = (10y,15z)$ vyplýva $y \neq 3$ a $z \neq 2$, prichádzajú do úvahy len trojice (x,y,z) rovné (1, 2, 3), (2, 1, 3) a (3, 2, 1), ktorým postupne zodpovedajú trojice (a,b,c) rovné (6, 20, 45), (12, 10, 45), (18, 20, 15). Skúškou sa presvedčíme, že všetky tri vyhovujú množinovej rovnosti zo zadania úlohy.

Úloha 7.12. [63-S-2] Čísla 1, 2, …, 10 rozdeľte na dve skupiny tak, aby najmenší spoločný násobok súčinu všetkých čísel prvej skupiny a súčinu všetkých čísel druhej skupiny bol čo najmenší.

Riešenie*. Pre uvažované súčiny a a b určite platí $a\cdot b = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 10 = 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$. Aspoň jedno z čísel a,b je preto deliteľné 2^4, aspoň jedno deliteľné 3^2, aspoň jedno deliteľné 5 a práve jedno deliteľné 7. Pre najmenší spoločný násobok n čísel a,b preto platí $n \geq 2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7 = 5040$, pritom rovnosť tu nastane práve vtedy, keď ani jedno z čísel a, b nebude deliteľné žiadnym z čísel $2^5, 3^3$ a 5^2.

Ak zvolíme napríklad $a = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$ a $b = 1\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 5040$, bude najmenší spoločný násobok oboch čísel práve 5040. Tým je ukázané, že 5040 je naozaj najmenšia zo všetkých možných hodnôt n.

I keď bolo úlohou nájsť iba jeden príklad, pre úplnosť uvedieme všetky rozdelenia s minimálnou hodnotou $n = 5040$:

Prvá skupina čísel	Druhá skupina čísel
2, 3, 4, 5, 6	1, 7, 8, 9, 10
3, 5, 6, 8	1, 2, 4, 7, 9, 10
2, 5, 8, 9	1, 3, 4, 6, 7, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6	7, 8, 9, 10
1, 3, 5, 6, 8	2, 4, 7, 9, 10
1, 2, 5, 8, 9	3, 4, 6, 7, 10
2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 8, 9, 10
3, 5, 6, 7, 8	1, 2, 4, 9, 10
2, 5, 7, 8, 9	1, 3, 4, 6, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	8, 9, 10
1, 3, 5, 6, 7, 8	2, 4, 9, 10
1, 2, 5, 7, 8, 9	3, 4, 6, 10

Nájsť ich nie je ťažké, keď si uvedomíme, že čísla 1 a 7 môžeme dať do ľubovoľnej z oboch skupín, zatiaľ čo v tej istej skupine spolu nemôžu byť 4 s 8, 5 s 10, 3 s 9 ani 6 s 9; s 8 spolu môže byť práve jedno z párnych čísel 2, 6 a 10. Získame tak iba tri základné rozdelenia (prvé tri riadky tabuľky), z ktorých možno každé štyrmi spôsobmi doplniť číslami 1 a 7.

Poznámka. Úlohu možno vyriešiť aj bez výpočtu súčinu $a\cdot b$. Deliteľnosť n číslami $3^2, 5$ a 7 vyplýva z ich priameho zastúpenia medzi rozdeľovanými číslami, deliteľnosť číslom 2^4 z jednoduchej úvahy o rozdelení všetkých piatich párnych čísel: ak nie je číslo 8 vo svojej skupine ako párne jediné, je všetko jasné, v opačnom prípade sú v rovnakej skupine čísla 2, 4 a 6 (aj 10, ale to už ani nepotrebujeme).

Doplňujúce zdroje a materiály

Materiály vhodné na ďalšie počítanie nájdeme v minulom seminári. Keďže témy sú si veľmi blízke, publikácie zvyčajne obsahujú úlohy zamerané na obe témy.