

## Seminár 26: Kombinatorika II – hry s hľadaním víťaznej stratégie a logické úlohy.

### Úlohy a riešenia

**Úloha 26.1.** [61-I-6-N2] Na tabuli sú napísané všetky prvočísla menšie ako 100. Gitka a Terka sa striedajú v ťahoch pri nasledujúcej hre. Najprv Gitka zmaže jedno z prvočísel. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, zmaže jedno z prvočísel, ktoré má s predchádzajúcim zmazaným prvočíslom jednu zhodnú číslicu (tak po prvočíse 3 je možné zmazať trebárs 13 alebo 37). Hráčka, ktorá je na ťahu a nemôže už žiadne prvočíсло zmazať, prehráva. Ktorá z oboch hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle od ťahov súperky?

**Úloha 26.2.** [61-II-4] Na tabuli je napísaných prvých  $n$  celých kladných čísel. Marína a Tamara sa striedajú v ťahoch pri nasledujúcej hre. Najskôr Marína zotrie jedno z čísel na tabuli. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, zotrie jedno z čísel, ktoré sa od predchádzajúceho zotretého čísla ani nelíši o 1, ani s ním nie je súdeliteľné. Hráčka, ktorá je na ťahu a nemôže už žiadne číslo zotrieť, prehrá. Pre  $n = 6$  a pre  $n = 12$  rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky.

**Úloha 26.3.** [61-I-6-N3] Dve hráčky majú k dispozícii pre hru, ktorú opíšeme, neobmedzený počet dvadsaťcentových mincí a stôl s kruhovou doskou s priemerom 1 m. Hra prebieha tak, že sa hráčky pravidelne striedajú v ťahoch. Najprv prvá hráčka položí jednu mincu kamkoľvek na prázdny stôl. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, položí na voľnú časť stola ďalšiu mincu (tak, aby nepresahovala okraj stola a aby sa skôr položených mincí nanajvýš dotýkala). Ktorá z oboch hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle od ťahov súperky?

**Úloha 26.4.** [59-I-1] Erika a Klárka hrali hru "slovný logik" s týmito pravidlami: Hráč  $A$  si myslí slovo zložené z piatich rôznych písmen. Hráč  $B$  vysloví ľubovoľné slovo zložené z piatich rôznych písmen a hráč  $A$  mu prezradí, koľko písmen uhádol na správnej pozícii a koľko na nesprávnej. Písmená považujeme za rôzne, aj keď sa líšia iba mäkčeňom alebo dĺžňom (napríklad písmená  $A$ ,  $\acute{A}$  sú rôzne). Keby si hráč  $A$  myslel napríklad slovo *LOĎKA* a  $B$  by vyslovil slovo *KOLÁČ*, odpovie hráč  $A$ , že jedno písmeno uhádol hráč  $B$  na správnej pozícii a dve na nesprávnej. Skrátene oznámi „1 + 2“, lebo sa naozaj obe slová zhodujú iba v písmene  $O$  vrátane pozície (druhej zľava) a v písmenách  $K$  a  $L$ , ktorých pozície sú odlišné. Erika si myslela slovo z piatich rôznych písmen a Klárka vyslovila slová *KABÁT*, *STRUK*, *SKOBA*, *CESTA* a *ZÁPAL*. Erika na tieto slová v danom poradí odpovedala  $0 + 3$ ,  $0 + 2$ ,  $1 + 2$ ,  $2 + 0$  a  $1 + 2$ . Zistite, aké slovo si Erika mohla myslieť.

**Úloha 26.5.** [63-I-6] Šachového turnaja sa zúčastnilo 8 hráčov a každý s každým odohral jednu partiu. Za víťazstvo získal hráč 1 bod, za remízu pol bodu, za prehru žiadny bod. Na konci turnaja mali všetci účastníci rôzne počty bodov. Hráč, ktorý skončil na 2. mieste, získal rovnaký počet bodov ako poslední štyria dokopy. Určte výsledok partie medzi 4. a 6. hráčom v celkovom poradí.

**Úloha 26.6.** [63-II-2] Šachového turnaja sa zúčastnilo 5 hráčov a každý s každým odohral jednu partiu. Za prvenstvo získal hráč 1 bod, za remízu pol bodu, za prehru žiadny bod. Poradie hráčov na turnaji sa určuje podľa počtu získaných bodov. Jediným ďalším kritériom rozhodujúcim o konečnom umiestnení hráčov v prípade rovnosti bodov je počet výhier (kto má viac výhier, je na tom v umiestnení lepšie). Na turnaji získali všetci hráči rovnaký počet bodov. Vojto porazil Petra a o prvé miesto sa delil s Tomášom. Ako dopadla partia medzi Petrom a Martinom?

**Úloha 26.7.** [64-I-3] Simona a Lenka hrajú hru. Pre dané celé číslo  $k$  také, že  $0 \leq k \leq 64$ , vyberie Simona  $k$  políček šachovnice  $8 \times 8$  a každé z nich označí krížikom. Lenka potom šachovnicu nejakým spôsobom vyplní tridsiatimi dvoma dominovými kockami. Ak je počet kociek pokrývajúcich dva krížiky nepárny, vyhráva Lenka, inak vyhráva Simona. V závislosti od  $k$  určte, ktoré z dievčat má vyhrávajúcu stratégiu.

