

## Seminár 5: Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti II – nerovnosti

### Úlohy a riešenia

**Úloha 5.1.** [58-S-1] seminar05,nerlah,skolskekolo **Riešenie\***. Roznásobením a ďalšími ekvivalentnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}ab + b^2c + a^2c + abc^2 &\geq abc^2 + 2abc + ab, \\ b^2c + a^2c &\geq 2abc, \\ (a - b)^2c &\geq 0.\end{aligned}$$

Podľa zadania platí  $c \geq 0$  a druhá mocnina reálneho čísla  $a - b$  je tiež nezáporná, takže je nezáporná aj ľavá strana upravenej nerovnosti. Rovnosť v tejto (a rovnako aj v pôvodnej nerovnosti) nastane práve vtedy, keď  $a - b = 0$  alebo  $c = 0$ , teda práve vtedy, keď je splnená aspoň jedna z podmienok  $a = b$ ,  $c = 0$ .

**Komentár.** Úloha demonštruje jeden zo základných spôsobov dokazovania nerovností: úpravu výrazu na jednej strane nerovnosti na tvar, o ktorom s určitou istotou vieme, že je nezáporný/nekladný a jeho porovnanie s nulou. Taktiež si študenti precvičia ekvivalentné úpravy nerovností a úpravy výrazov do tvaru súčinu.

**Úloha 5.2.** [66-I-1-N1] seminar05,nerlah,vyrazy,domacekolo,navodna **Riešenie.** a) Prevedieme výraz  $2xyz$  na pravú stranu nerovnosti a upravíme pomocou vzorca  $A^2 - 2AB - B^2 = (A - B)^2$  na tvar  $0 \leq (x - yz)^2$ , ktorý je pravdivým výrok, keďže druhá mocnina ľubovoľného výrazu je vždy nezáporná.

b) Výraz z pravej strany nerovnosti prevedieme na opačnú stranu a upravíme nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}((x - y)(x + y))^2 - 4xy(x - y)^2 &\geq 0, \\ (x - y)^2(x + y)^2 - 4xy(x - y)^2 &\geq 0, \\ (x - y)^2((x + y)^2 - 4xy) &\geq 0, \\ (x - y)^2(x + 2xy + y^2 - 4xy) &\geq 0, \\ (x - y)^4 &\geq 0.\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je zrejme pravdivým tvrdením a pôvodná nerovnosť je tak dokázaná.

**Komentár.** Úloha neprináša žiadny nový princíp, je však dobrým tréningom práce s upravovaním výrazov, podobne ako úloha nasledujúca.

**Úloha 5.3.** [66-I-1-N2] seminar05,nerlah,vyrazy,domacekolo,navodna **Riešenie\***. Nerovnosť zo zadania ekvivalentne upravíme. Vynásobíme celú nerovnosť kladným výrazom  $a^2b^2$ . Ľavú stranu  $a^3 + b^3$  upravíme na súčin pomocou vzorca  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ , pravú stranu  $ab^2 + a^2b$  upravíme na súčin vyňatím výrazu  $ab$  na tvar  $ab(a + b)$ . Dostaneme tak nerovnosť  $(a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b)$ . Tá po vydelení kladným výrazom  $a + b$  a úprave na súčin dostane tvar  $(a - b)^2 \geq 0$ , ktorý je zrejme pravdivým tvrdením.

**Komentár.** Úloha využíva rovnaký princíp ako prechádzajúce dve. Prvýkrát však pri úprave využívame násobenie a delenie výrazmi. Tým sa z úlohy stáva dobrá príležitosť na pripomenutie faktu, že pri úprave nerovností musíme brať do úvahy (ne)zápornosť výrazov, ktoré pri takýchto úkonoch

využívame.

**Komentár.** Ďalším z užitočných nástrojov pri dokazovaní nerovností je znalosť nerovnosti  $u + \frac{1}{u} \geq 2$  pre každé kladné reálne číslo  $u$ , pričom táto nerovnosť prechádza v rovnosť len pre  $u = 1$ . Dokázanie tohto faktu nie je zložité: vynásobením celej nerovnosti  $u$ , prevedením všetkých členov na jednu stranu dostávame  $(u - 1)^2 \geq 0$ , čo je pravdivé tvrdenie. Nasledujúce úlohy sú zaradené ako tréning uplatnenia tejto nerovnosti.

**Úloha 5.4.** [62-I-2-N1] seminar05,nerlah,domacekolo,navodna **Riešenie.** Celú nerovnosť vynásobíme kladným výrazom  $(a + b)(c + d)$  a použitím ekvivalentných úprav upravíme nasledovne.

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)(c+d)}{ab} + \frac{(a+b)(c+d)}{cd} &\geq 8, \\ \frac{ac+ad+bc+bd}{ab} + \frac{ac+ad+bc+bd}{cd} &\geq 8, \\ \frac{c}{b} + \frac{d}{b} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + \frac{a}{d} + \frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{b}{c} &\geq 8.\end{aligned}$$

Všimneme si, že ľavá strana obsahuje štyri páry súčtov navzájom obrátených zlomkov:

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{d} + \frac{d}{b}\right) \geq 8.$$

Sčítaním štyroch nerovností v tvare  $u + \frac{1}{u} \geq 2$ , ktoré platia pre každé kladné reálne  $u$ , kde v našom prípade je  $u$  postupne  $\frac{a}{c}$ ,  $\frac{a}{d}$ ,  $\frac{b}{c}$ ,  $\frac{b}{d}$  potom dostaneme tvrdenie, ktoré sme chceli dokázať.

**Úloha 5.5.** [66-I-1] seminar05,nertaz,domacekolo **Riešenie\*.** Úpravou dvojčlena  $a^2 - a$  doplnením na štvorec a využitím faktu že druhá mocnina reálneho čísla je nezáporná ukážeme, že menovateľ zlomku v nerovnosti je kladný:

$$a^2 - a + 1 = \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$$

Ak ním teda obe strany dokazovanej nerovnosti vynásobíme, dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$a^2(a^2 - a + 1) + 1 \geq (a + 1)(a^2 - a + 1).$$

Po roznásobení a zlúčení rovnakých mocnín a dôjdeme k nerovnosti

$$a^4 - 2a^3 + a^2 \geq 0,$$

ktorá však platí, pretože jej ľavá strana má rozklad  $a^2(a - 1)^2$  s nezápornými činiteľmi  $a^2$  a  $(a - 1)^2$ . Tým je pôvodná nerovnosť pre každé reálne číslo  $a$  dokázaná. Zároveň sme zistili, že rovnosť vo výslednej, a teda aj v pôvodnej nerovnosti nastane práve vtedy, keď platí  $a^2(a - 1)^2 = 0$ , teda jedine vtedy, keď  $a = 0$  alebo  $a = 1$ .

**Iné riešenie\*.** Danú nerovnosť môžeme prepísať na tvar

$$(a^2 - a + 1) + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geq 2 \quad \text{čiže} \quad u + \frac{1}{u} \geq 2,$$

pričom  $u = a^2 - a + 1$ . Využitím faktu, že posledná nerovnosť platí pre každé kladné reálne číslo  $u$  a že prechádza v rovnosť jedine pre  $u = 1$ .

Na dôkaz pôvodnej nerovnosti ostáva už len overiť, že výraz  $u = a^2 - a + 1$  je kladný pre každé reálne číslo  $a$ . To možno spraviť rovnako ako v prvom riešení, alebo prepísať nerovnosť  $a^2 - a + 1 > 0$  na tvar

$$a(a - 1) > -1$$

a uskutočniť krátku diskusiu: Posledná nerovnosť platí ako pre každé  $a \geq 1$ , tak pre každé  $a \leq 0$ , lebo v oboch prípadoch máme dokonca  $a(a-1) \geq 0$ ; pre zvyšné hodnoty  $a$ , teda pre  $a \in (0, 1)$ , je súčin  $a(a-1)$  síce záporný, avšak určite väčší ako  $-1$ , pretože oba činitele  $a$ ,  $a-1$  majú absolútnu hodnotu menšiu ako 1. Prepísaná nerovnosť je tak dokázaná pre každé reálne číslo  $a$ , a tým je podmienka pre použitie nerovnosti  $u + \frac{1}{u} \geq 2$  pre  $u = a^2 + a + 1$  overená.

Ako sme už uviedli, rovnosť  $u + \frac{1}{u} = 2$  nastane jedine pre  $u = 1$ . Pre rovnosť v nerovnosti zo zadania úlohy tak dostávame podmienku  $a^2 - a + 1 = 1$ , čiže  $a(a-1) = 0$ , čo je splnené iba pre  $a = 0$  a pre  $a = 1$ .

**Komentár.** Úloha využíva spojenie viacerých poznatkov – faktu, že druhá mocnina akéhokoľvek reálneho čísla je nezáporná, úpravu na štvorec, ekvivalentné úpravy nerovností a tiež známu nerovnosť  $u + \frac{1}{u} \geq 2$  pre každé kladné reálne  $u$ . Je síce náročnejšia ako úlohy, ktorými sme sa doteraz zaoberali, ale považujeme ju za vhodnú ilustráciu toho, ako nám rozšírený arzenál metód pomôže v úspešnom zvládnutí zložitejších problémov. Úloha tiež demonštruje, že k správne mu riešeniu častokrát vedú viaceré cesty.

**Úloha 5.6.** [59-I-5] seminar05,nertaz,domacekolo **Riešenie\***. Pravá nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$4(a^2 + 3ab + b^2) \leq 5(a + b)^2,$$

ktorú možno ekvivalentne upraviť na nerovnosť  $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$ . Tá je splnená vždy a rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď  $a = b$ .

Z ľavej nerovnosti odstránime zlomky a umocníme ju na druhú,

$$\begin{aligned} 25ab(a^2 + 2ab + b^2) &\leq 4(a^4 + 9a^2b^2 + b^4 + 6a^3b + 6ab^3 + 2a^2b^2), \\ 25ab(a^2 + b^2) + 50a^2b^2 &\leq 4a^4 + 4b^4 + 44a^2b^2 + 24ab(a^2 + b^2), \end{aligned}$$

takže po úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$4a^4 + 4b^4 - 6a^2b^2 \geq ab(a^2 + b^2).$$

Po odčítaní výrazu  $2a^2b^2$  od oboch strán nerovnosti sa nám podarí na oboch stranách použiť úpravu na štvorec. Dostaneme tak (opäť ekvivalentnú) nerovnosť

$$4(a^2 - b^2)^2 \geq ab(a - b)^2.$$

Rozdiel štvorcov v zátvorke na ľavej strane ešte rozložíme na súčin a vzťah upravíme na tvar  $4(a - b)^2(a + b)^2 \geq ab(a - b)^2$ .

Ak  $a = b$ , platí rovnosť. Ak  $a \neq b$ , môžeme poslednú nerovnosť vydeliť kladným výrazom  $(a - b)^2$  a dostaneme tak nerovnosť  $4(a + b)^2 \geq ab$ , čiže  $4a^2 + 4b^2 + 7ab \geq 0$ . Ľavá strana tejto nerovnosti je vždy kladná, preto vyšetřovaná nerovnosť platí pre všetky kladné čísla  $a, b$ , pričom rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď  $a = b$ .

**Komentár.** Táto úloha prvýkrát prináša sústavu nerovností a je vhodné so študentmi zopakovať, ako k dokazovaniu sústav nerovností pristupujeme: musíme dokázať riešenie každej nerovnosti zvlášť. V priebehu riešenia opäť využijeme úpravu na štvorec a nezápornosť druhej mocniny reálneho čísla. Úloha sa dá riešiť ešte iným spôsobom, ten si však ukážeme v ďalšom seminári zameranom na nerovnosti.

**Úloha 5.7.** [59-II-2] seminar05,nerlah,krajskekolo **Riešenie\***. Danú nerovnosť ekvivalentne upra-

vujme:

$$\begin{aligned}
(a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) - (a^2 - 2a + 1)(b^2 - 2b + 1) &\geq 4, \\
(a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) - (a^2b^2 - 2ab^2 + b^2) + \\
+ (2a^2b - 4ab + 2b) - (a^2 - 2a + 1) &\geq 4, \\
2ab(a + b) - 4ab + 2(a + b) &\geq 4, \\
2(a + b)(ab + 1) &\geq 4(ab + 1), \\
2(ab + 1)(a + b - 2) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Vzhľadom na predpoklad  $a \geq 1$ ,  $b \geq 1$  je  $a + b \geq 2$ , takže upravená nerovnosť zrejme platí. Rovnosť v nej (a teda aj v zadanej) nerovnosti pritom nastane práve vtedy, keď  $a + b = 2$ , čiže  $a = b = 1$ .

**Iné riešenie\*.** Pri označení  $m = a^2 + 1$  a  $n = b^2 + 1$  možno ľavú stranu dokazovanej nerovnosti prepísať na tvar  $L = mn - (m - 2a)(n - 2b) = 2an + 2bm - 2ab - 2ab$ , z ktorého vynímaním dostaneme  $L = 2a(n - b) + 2b(m - a)$ .

Čísla  $a, b$  sú z intervalu  $\langle 1, \infty \rangle$ , preto  $1 = m - a^2 \leq m - a$ . Odtiaľ  $2b(m - a) \geq 2$ . Analogicky dostaneme  $2a(n - b) \geq 2$ . Teda  $L \geq 4$  a rovnosť nastáva práve vtedy, keď  $a = b = 1$ .

**Iné riešenie\*.** Po substitúcii  $a = 1 + m$  a  $b = 1 + n$ , pričom  $m, n \geq 0$ , získa ľavá strana nerovnosti tvar

$$L = (m^2 + 2m + 2)(n^2 + 2n + 2) - m^2n^2.$$

Po roznásobení, ktoré si stačí iba predstaviť, sa zruší člen  $m^2n^2$ , takže  $L$  bude súčtom nezáporných členov, medzi ktorými bude aj člen  $2 \cdot 2 = 4$ . Tým je nerovnosť  $L \geq 4$  dokázaná. A keďže medzi spomenutými členmi budú aj  $4m$  a  $4n$ , z rovnosti  $L = 4$  vyplýva  $m = n = 0$ , čo naopak rovnosť  $L = 4$  tiež zrejme zaručuje. To znamená, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď  $a = b = 1$ .

**Úloha 5.8.** [66-I-1-D3, resp. 58-I-6] seminar05,nertaz,domacekolo **Riešenie\*.** Ľavú nerovnosť dokážeme ekvivalentnými úpravami:

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} &< \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}, \quad | \cdot 6(a+b) \\
3(a+b)^2 &< 4(a^2+ab+b^2), \\
0 &< (a-b)^2.
\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť vzhľadom na predpoklad  $a \neq b$  platí. Aj pravú nerovnosť zo zadania budeme ekvivalentne upravovať, začneme umocnením každej strany na druhú:

$$\begin{aligned}
\frac{4(a^2+ab+b^2)^2}{9(a+b)^2} &< \frac{a^2+b^2}{2}, \quad | \cdot 18(a+b)^2 \\
8(a^2+ab+b^2)^2 &< 9(a^2+b^2)(a+b)^2, \\
8(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+3a^2b^2) &< 9(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+2a^2b^2), \\
6a^2b^2 &< a^4+b^4+2a^3b+2ab^3.
\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je súčtom nerovností  $2a^2b^2 < a^4 + b^4$  a  $4a^2b^2 < 2a^3b + 2ab^3$ , ktoré obe platia, lebo po presune členov z ľavých strán na pravé dostaneme po rozklade už zrejme nerovnosti  $0 < (a^2 - b^2)^2$ , resp.  $0 < 2ab(a - b)^2$ .