

## Seminár 8: Teória čísel II – úlohy o najmenšom spoločnom násobku a najväčšom spoločnom deliteli

### Ciele

Zoznámiť sa s metódami riešenia príkladov o spoločných deliteľoch a násobkoch, upevniť znalosti zo seminára predchádzajúceho.

### Úlohy a riešenia

**Úloha 8.1.** [61-I-3-N1] Určte, pre ktoré prirodzené čísla  $a, b$  platí  $(a, b) = 10$  a zároveň  $[a, b] = 150$ .

**Riešenie\*.** Pretože  $10 = 2 \cdot 5$  a  $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ , požadované rovnosti sú splnené práve vtedy, keď  $a = 2 \cdot 3^s \cdot 5^t$  a  $b = 2 \cdot 3^u \cdot 5^v$ , kde  $\{s, u\} = \{0, 1\}$  a  $\{t, v\} = \{1, 2\}$ . Riešením je teda jedna zo štvoríc  $\{a, b\} = \{10, 150\}$  alebo  $\{a, b\} = \{30, 50\}$ .

**Komentár.** Úloha je relatívne jednoduchá a nevyžaduje žiadne špeciálne znalosti, zároveň však nie je triviálna. Tvorí tak príjemné preklopenie medzi školskými a olympiádnymi príkladmi.

**Úloha 8.2.** [60-I-5-N1] Nech  $d$  je najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel  $a$  a  $b$ . Ukážte, že čísla  $a/d$  a  $b/d$  sú celé a nesúdeliteľné.

**Riešenie.** Ak je  $d$  najväčším spoločným deliteľom čísel  $a$  a  $b$ , potom existujú prirodzené čísla  $u$  a  $v$  také, že  $a = ud$  a  $b = vd$ , čím sme dokázali prvú časť tvrdenia. Druhú dokážeme sporom. Predpokladajme, že  $a/d$  a  $b/d$  nie sú nesúdeliteľné. Potom existuje ich najväčší spoločný deliteľ  $d_1$ . Číslo  $d_1$  však potom delí aj čísla  $a$  a  $b$ , čo je spor s predpokladom, že  $d = (a, b)$ .

**Komentár.** Táto mini-úloha je prípravným krokom k nasledujúcemu všeobecnejšiemu tvrdeniu a zároveň môže pripomenúť použitie dôkazu sporom.

**Úloha 8.3.** [60-I-5-N2] Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla  $a, b$  platí vzťah

$$[a, b] \cdot (a, b) = ab.$$

**Riešenie.** Nech  $d = (a, b)$ , potom  $a = ud$ ,  $b = vd$  pre nesúdeliteľné  $u$  a  $v$ , a teda  $[a, b] = uvd$ . Porovnaním ľavej a pravej strany dokazovanej nerovnosti dostávame  $uvd \cdot d = ud \cdot vd$ , čo je pravdivé tvrdenie, teda vzťah je dokázaný.

Alternatívne môžeme vzťah dokázať úvahou o exponentoch prvočísel, z ktorých sú čísla  $a$  a  $b$  zložené. Nech  $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$  a  $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ , kde  $p_1$  až  $p_k$  sú prvočísla a  $\alpha_k, \beta_k$  prirodzené čísla. Potom

$$\begin{aligned}(a, b) &= p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot p_2^{\min\{\alpha_2, \beta_2\}} \cdots p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}, \\ [a, b] &= p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot p_2^{\max\{\alpha_2, \beta_2\}} \cdots p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}, \\ ab &= p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdots p_k^{\alpha_k + \beta_k}.\end{aligned}$$

Keďže pre akékoľvek čísla  $\alpha, \beta$  platí  $\max\{\alpha, \beta\} + \min\{\alpha, \beta\} = \alpha + \beta$ , a to vo všetkých prípadoch  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha = \beta$ ,  $\alpha > \beta$ , je naše tvrdenie dokázané.

**Komentár.** Predchádzajúce tvrdenie je stavebným kameňom mnohých úloh o spoločných násobkoch

a deliteľoch, najmä myšlienka zápisu prirodzených čísel  $a$  a  $b$  v tvare  $a = ud$  a  $b = vd$ , kde  $u$  a  $v$  sú prirodzené čísla také, že  $(u, v) = 1$  a  $d = (a, b)$  nájde uplatnenie veľmi často.

**Úloha 8.4.** [64-I-5-N4] Platí pre každé tri prirodzené čísla  $a, b, c$  a ich najväčší spoločný deliteľ  $d$  a ich najmenší spoločný násobok  $n$  rovnosť  $abc = nd$ ?

**Riešenie.** Neplatí, uvedieme protipríklad. Napríklad pre čísla 15, 18 a 24 je  $d = (15, 18, 24) = 3$ ,  $n = [15, 18, 24] = 360$ . Ďalej  $15 \cdot 18 \cdot 24 = 6480$  a  $(15, 18, 24) \cdot [15, 18, 24] = 3 \cdot 360 = 1080$ , to však nie sú rovnaké čísla a tvrdenie neplatí.

**Komentár.** Všeobecnejší pohľad na predchádzajúci problém by sme dostali skrz pohľad na exponenty prvočísel, z ktorých sú čísla  $a, b, c$  zložené. Skúmaná rovnosť nastane len v prípade, že sú všetky tri čísla navzájom po dvoch nesúdeliteľné.

Zároveň úloha demonštruje riešenie uvedením protipríkladu, čo je princíp, s ktorým sme sa v seminároch zatiaľ nestretli a jeho spomenutie je určite vhodné.

**Úloha 8.5.** [64-I-5-N5] Ak majú prirodzené čísla  $a, b$  najväčšieho spoločného deliteľa  $d$ , majú rovnakého najväčšieho spoločného deliteľa aj čísla  $a, b, a - b, a + b$ . Dokážte. Platí rovnaké tvrdenie pre najmenší spoločný násobok?

**Riešenie.** Najväčší spoločný deliteľ týchto štyroch čísel nebude určite väčší ako  $d$  (ak by bol, potom by  $d$  nebol najväčší spoločný deliteľ čísel  $a$  a  $b$ , čo by bolo v spore s predpokladom úlohy). Stačí teda ukázať, že  $d$  delí  $a + b$  a  $a - b$ . Ak zapíšeme  $a$  a  $b$  v tvare  $a = ud$  a  $b = vd$ , pričom pre prirodzené čísla  $u, v$  platí  $(u, v) = 1$ , bude potom  $a + b = ud + vd = (u + v)d$ ,  $a - b = ud - vd = (u - v)d$ . Vidíme, že  $d$  delí súčet aj rozdiel čísel  $a$  a  $b$ , tvrdenie je teda dokázané.

Tvrdenie pre najmenší spoločný násobok neplatí, uvedieme protipríklad. Pre čísla  $a = 12$ ,  $b = 8$ ,  $a + b = 20$ ,  $a - b = 4$ ,  $[12, 8] = 24$ , avšak  $[12, 8, 20, 4] = 120$ .

**Komentár.** Úloha precvičuje dôkaz všeobecného tvrdenia a opäť prináša protipríklad ako dostatočný argument.

**Úloha 8.6.** [61-I-3-N4, resp. 50-II-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel  $a, b$ , pre ktoré platí  $a + b + [a, b] + (a, b) = 50$ .

**Riešenie\*.** Položme  $a = ud$ ,  $b = vd$ , kde  $d$  je najväčší spoločný deliteľ čísel  $a, b$ , prirodzené čísla  $u, v$  sú nesúdeliteľné a  $[a, b] = uvd$ . Podľa zadania má platiť  $ud + vd + uvd + d = 50$ . Inak napísané,  $(1 + u)(1 + v)d = 50$ . Nájdime preto všetky rozklady čísla 50 na súčin troch prirodzených čísel  $d, u + 1, v + 1$ , z ktorých posledné dve sú väčšie ako 1. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že  $a \leq b$ , t.j.  $u \leq v$ . Dostaneme nasledujúce možnosti.

$d$	$u + 1$	$v + 1$	$u$	$v$	$a$	$b$
1	2	25	1	24	1	24
1	5	10	4	9	4	9
2	5	5	4	4	8	8
5	2	5	1	4	5	20

V prípade  $d = 2$  dostaneme  $u = v = 4$ , to je však spor s tým, že  $u$  a  $v$  sú nesúdeliteľné. Preto má úloha práve tri riešenia.

**Komentár.** Úloha okrem vhodného zapísania čísel  $a$ ,  $b$  a  $[a, b]$  vyžaduje ešte vhodnú úpravu rovnosti zo zadania, opäť tak kombinuje algebraické poznatky s poznatkami z oblasti teórie čísel.

**Úloha 8.7.** [61-S-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel  $a, b$ , pre ktoré platí rovnosť množín

$$\{a \cdot [a, b], b \cdot (a, b)\} = \{45, 180\}.$$

**Riešenie\*.** Z danej rovnosti vyplýva, že číslo  $b$  je nepárne (inak by obe čísla naľavo boli párne), a teda číslo  $a$  je párne (inak by obe čísla naľavo boli nepárne). Rovnosť množín preto musí byť splnená nasledovne:

$$a \cdot [a, b] = 180 \quad \text{a} \quad b \cdot (a, b) = 45. \quad (1)$$

Keďže číslo  $a$  delí číslo  $[a, b]$ , je číslo  $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$  deliteľné druhou mocninou (párneho) čísla  $a$ , takže musí platiť buď  $a = 2$ , alebo  $a = 6$ .

V prípade  $a = 2$  (vzhľadom na to, že  $b$  je nepárne) platí

$$a \cdot [a, b] = 2 \cdot [2, b] = 2 \cdot 2b = 4b,$$

čo znamená, že prvá rovnosť v 1 je splnená jedine pre  $b = 45$ . Vtedy  $b \cdot (a, b) = 45 \cdot (2, 45) = 45$ , takže je splnená aj druhá rovnosť v 1, a preto dvojica  $a = 2, b = 45$  je riešením úlohy.

V prípade  $a = 6$  podobne dostaneme

$$a \cdot [a, b] = 6 \cdot [6, b] = 6 \cdot 2 \cdot [3, b] = 12 \cdot [3, b],$$

čo znamená, že prvá rovnosť v 1 je splnená práve vtedy, keď  $[3, b] = 15$ . Tomu vyhovujú jedine hodnoty  $b = 5$  a  $b = 15$ . Z nich však iba hodnota  $b = 15$  spĺňa druhú rovnosť v 1, ktorá je teraz v tvare  $b \cdot (6, b) = 45$ . Druhým riešením úlohy je teda dvojica  $a = 6, b = 15$ , žiadne ďalšie riešenia neexistujú. *Záver.* Hľadané dvojice sú dve, a to  $a = 2, b = 45$  a  $a = 6, b = 15$ .

**Iné riešenie\*.** Označme  $d = (a, b)$ . Potom  $a = ud$  a  $b = vd$ , pričom  $u, v$  sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, takže  $[a, b] = uvd$ . Z rovností

$$a \cdot [a, b] = ud \cdot uvd = u^2vd^2 \quad \text{a} \quad b \cdot (a, b) = vd \cdot d = vd^2$$

vidíme, že číslo  $a \cdot [a, b]$  je  $u^2$ -násobkom čísla  $b \cdot (a, b)$ , takže zadaná rovnosť množín môže byť splnená jedine tak, ako sme zapísali vzťahmi (1) v prvom riešení. Tie teraz môžeme vyjadriť rovnosťami

$$u^2vd^2 = 180 \quad \text{a} \quad vd^2 = 45.$$

Preto platí  $u^2 = 180/45 = 4$ , čiže  $u = 2$ . Z rovnosti  $vd^2 = 45 = 3^2 \cdot 5$  vyplýva, že buď  $d = 1$  (a  $v = 45$ ), alebo  $d = 3$  (a  $v = 5$ ). V prvom prípade  $a = ud = 2 \cdot 1 = 2$  a  $b = vd = 45 \cdot 1 = 45$ , v druhom  $a = ud = 2 \cdot 3 = 6$  a  $b = vd = 5 \cdot 3 = 15$ .

*Poznámka.* Keďže zo zadanej rovnosti okamžite vyplýva, že obe čísla  $a, b$  sú deliteľmi čísla 180 (takým deliteľom je dokonca aj ich najmenší spoločný násobok  $[a, b]$ ), je možné úlohu vyriešiť rôznymi inými cestami, založenými na testovaní konečného počtu dvojíc konkrétnych čísel  $a$  a  $b$ . Takýto postup urýchlime, keď vopred zistíme niektoré nutné podmienky, ktoré musia čísla  $a, b$  spĺňať. Napríklad spresnenie rovnosti množín na dvojicu rovností (1) možno (aj bez použitia úvahy o parite čísel  $a, b$ ) vysvetliť všeobecným postrehom: súčin  $a \cdot [a, b]$  je vždy deliteľný súčinom  $b \cdot (a, b)$ , pretože ich podiel možno zapísať v tvare

$$\frac{a \cdot [a, b]}{b \cdot (a, b)} = \frac{a}{(a, b)} \cdot \frac{[a, b]}{b},$$

teda ako súčin dvoch celých čísel.

**Komentár.** Úloha je zložitejšia ako predchádzajúce, dá sa však riešiť mnohými spôsobmi a bude iste zaujímavé vidieť rôzne študentské riešenia. Je taktiež vhodným miestom na to, aby sme študentov nechali diskutovať o prístupoch medzi sebou a prípadne skúšali hľadať slabiny jednotlivých zdôvodnení. Určite považujeme za vhodné zmieniť poslednú rovnosť z poznámky, keďže ide o zaujímavý postreh a metóda vhodného zapísania tvaru zlomku je užitočná nielen tu. Na túto úlohu nadväzuje komplexnejšia domáca práca, ktorá však vychádza z veľmi podobného princípu.

**Úloha 8.8.** [64-I-5] Rozdiel dvoch prirodzených čísel je 2010 a ich najväčší spoločný deliteľ je 2014-krát menší ako ich najmenší spoločný násobok. Určte všetky také dvojice čísel.

**Riešenie\*.** Označme hľadané čísla  $a$  a  $b$  ( $a > b$ ) a  $d$  ich najväčší spoločný deliteľ. Potom  $a = ud$ ,  $b = vd$ , pričom  $u > v$  sú nesúdeliteľné čísla. Keďže najmenší spoločný násobok čísel  $a, b$  je číslo  $uvd$ , dosadením do zadaných vzťahov dostaneme rovnosti

$$a - b = (u - v)d = 2010,$$

$$uvd = 2014d, \quad \text{čiže} \quad uv = 2014.$$

Podľa rozkladu na súčin prvočísel  $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$  vypíšeme všetky možné dvojice  $(u, v)$  a pre každú z nich sa presvedčíme, či číslo  $u - v$  je deliteľom čísla 2010. V pozitívnom prípade príslušný podiel udáva číslo  $d$  a výpočet neznámych  $a = ud$  a  $b = vd$  je už jednoduchý:

- a)  $u = 2014$  a  $v = 1$ :  $u - v = 2013$  nedelí 2 010;
  - b)  $u = 19 \cdot 53 = 1007$  a  $v = 2$ :  $u - v = 1005 \mid 2010$ ,  $d = 2$ ,  $a = 1007 \cdot 2 = 2014$ ,  $b = 2 \cdot 2 = 4$ ;
  - c)  $u = 2 \cdot 53 = 106$  a  $v = 19$ :  $u - v = 87$  nedelí 2 010;
  - d)  $u = 53$  a  $v = 2 \cdot 19 = 38$ :  $u - v = 15 \mid 2010$ ,  $d = 134$ ,  $a = 53 \cdot 134 = 7102$ ,  $b = 38 \cdot 134 = 5092$ .
- Záver.* Hľadané čísla tvoria jednu z dvojíc (2014, 4) alebo (7102, 5092).

**Komentár.** Úloha neprináša žiadne nové poznatky a princípy, je však vhodná na tréning riešenia sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi a opäť tak vytvorí prepojenie s minulými seminármi.

**Úloha 8.9.** [60-I-5-D3] Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel  $a, b$ , pre ktoré má výraz

$$\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$$

celočíselnú hodnotu.

**Riešenie\*.** Nech  $d = (a, b)$ , potom  $a = ud$ ,  $b = vd$  pre nesúdeliteľné prirodzené  $u$  a  $v$ . Skúmaný výraz bude po dosadení  $(9u^2 + 14v^2)/(9uv)$ , takže  $9u \mid 14v^2$  a z nesúdeliteľnosti  $u$  a  $v$  máme  $u \mid 14$ , navyše  $3 \mid v$ . Podobne  $v \mid 9$ ; vyskúšame konečne veľa možností.

**Komentár.** Úloha je zaujímavá tým, že prácu s najväčším spoločným deliteľom obsahuje nepriamo a využíva tiež poznatky o deliteľnosti z minulého seminára.

**Úloha 8.10.** [60-I-5] Dokážte, že najmenší spoločný násobok  $[a, b]$  a najväčší spoločný deliteľ  $(a, b)$  ľubovoľných dvoch kladných celých čísel  $a, b$  spĺňajú nerovnosť

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geq 2ab.$$

Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť.

**Riešenie\*.** Nerovnosť by bolo ľahké dokázať, ak by niektorý z dvoch sčítancov na ľavej strane bol sám o sebe aspoň taký, ako pravá strana. Číslo  $[a, b]$  je zjavne násobkom čísla  $a$ . Ak  $[a, b] \geq 2a$ , tak  $b[a, b] \geq 2ab$  a v zadanej nerovnosti platí dokonca ostrá nerovnosť, lebo číslo  $a(a, b)$  je kladné. Ak  $[a, b] < 2a$ , tak neostáva iná možnosť ako  $[a, b] = a$ . To však nastane iba v prípade, keď  $b \mid a$ . V tomto prípade  $(a, b) = b$  a v zadanej nerovnosti nastane rovnosť.

**Iné riešenie\*.** Označme  $d = (a, b)$ , takže  $a = ud$  a  $b = vd$  pre nesúdeliteľné prirodzené čísla  $u, v$ . Z toho hneď vieme, že  $[a, b] = uvd$ . Keďže

$$\begin{aligned} a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] &= ud^2 + uv^2d^2 = u(1 + v^2)d^2, \\ 2ab &= 2uvd^2, \end{aligned}$$

je vzhľadom na  $ud^2 > 0$  nerovnosť zo zadania ekvivalentná s nerovnosťou  $1 + v^2 \geq 2v$ , čiže  $(v - 1)^2 \geq 0$ , čo platí pre každé  $v$ . Rovnosť nastane práve vtedy, keď  $v = 1$ , čiže  $b \mid a$ .

**Iné riešenie\*.** Označme  $d = (a, b)$ . Je známe, že  $[a, b] \cdot (a, b) = ab$ . Po vyjadrení  $[a, b]$  z tohto vzťahu, dosadení do zadanej nerovnosti a ekvivalentnej úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnosť  $d^2 + b^2 \geq 2bd$ , ktorá platí, lebo  $(d - b)^2 \geq 0$ . Rovnosť nastáva pre  $d = b$ , čiže v prípade  $b \mid a$ .

**Komentár.** Na úspešné zvládnutie úlohy je opäť potrebná znalosť z predchádzajúceho seminára o nerovnostiach a taktiež ponúka široké spektrum prístupov, takže bude zaujímavé sledovať, ako k nej študenti pristúpia.

## Domáca práca

**Úloha 8.11.** [61-I-3] Nájdite všetky trojice prirodzených čísel  $a, b, c$ , pre ktoré platí množinová rovnosť

$$\{(a, b), (a, c), (b, c), [a, b], [a, c], [b, c]\} = \{2, 3, 5, 60, 90, 180\},$$

pričom  $(x, y)$  a  $[x, y]$  označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel  $x$  a  $y$ .

**Riešenie\*.** Prvky danej množiny  $M$  rozložíme na prvočinitele:

$$M = \{2, 3, 5, 2^2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5\}.$$

Odtiaľ vyplýva, že v rozklade hľadaných čísel  $a, b, c$  vystupujú iba prvočísla 2, 3 a 5. Každé z nich je pritom prvočiniteľom práve dvoch z čísel  $a, b, c$ : keby bolo prvočiniteľom len jedného z nich, chýbalo by v rozklade troch najväčších spoločných deliteľov a jedného najmenšieho spoločného násobku, teda v štyroch číslach z  $M$ ; keby naopak bolo prvočiniteľom všetkých troch čísel  $a, b, c$ , nechýbalo by v rozklade žiadneho čísla z  $M$ . Okrem toho vidíme, že v rozklade každého z čísel  $a, b, c$  je prvočíslo 5 najviac v jednom exemplári.

Podľa uvedených zistení môžeme čísla  $a, b, c$  usporiadať tak, že rozklady čísel  $a, b$  obsahujú po jednom exemplári prvočísla 5 (potom  $(c, 5) = 1$ ) a že  $(a, 2) = 2$  (ako vieme, aspoň jedno z čísel  $a, b$  musí byť párne). Číslo 5 z množiny  $M$  je potom nutne rovné  $(a, b)$ , takže platí  $(b, 2) = 1$ , a preto  $(b, 3) = 3$  (inak by platilo  $(b, c) = 1$ ), odtiaľ zase s ohľadom na  $(a, b) = 5$  vyplýva  $(a, 3) = 1$ . Máme teda  $a = 5 \cdot 2^s$  a  $b = 5 \cdot 3^t$  pre vhodné prirodzené čísla  $s$  a  $t$ .

Z rovnosti  $[a, b] = 2^s \cdot 3^t \cdot 5$  vyplýva, že nastane jeden z troch nasledujúcich prípadov.

(1)  $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5$ . Vidíme, že platí  $s = 2$  a  $t = 1$ , čiže  $a = 20$  a  $b = 15$ . Ľahko určíme, že tretím číslom je  $c = 18$ .

(2)  $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5$ . V tomto prípade  $a = 10$ ,  $b = 45$  a  $c = 12$ .

(3)  $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ . Teraz  $a = 20$ ,  $b = 45$  a  $c = 6$ .

**Záver.** Hľadané čísla  $a, b, c$  tvoria jednu z množín  $\{20, 15, 18\}$ ,  $\{10, 45, 12\}$  a  $\{20, 45, 6\}$ .

**Iné riešenie\*.** V danej rovnosti je množina napravo tvorená šiestimi rôznymi číslami väčšími ako

1, takže čísla  $(a, b)$ ,  $(a, c)$ ,  $(b, c)$  musia byť netriviálnymi deliteľmi postupne čísel  $[a, b]$ ,  $[a, c]$ ,  $[b, c]$ . Čísla 2, 3, 5 ale žiadne netriviálne delitele nemajú, musí teda platiť

$$\{(a, b), (a, c), (b, c)\} = \{2, 3, 5\} \quad \text{a} \quad \{[a, b], [a, c], [b, c]\} = \{60, 90, 180\}.$$

Pretože poradie čísel  $a, b, c$  nehrá žiadnu úlohu, môžeme predpokladať, že platí  $(a, b) = 2$ ,  $(a, c) = 3$  a  $(b, c) = 5$ . Odtiaľ vyplývajú vyjadrenia

$$a = 2 \cdot 3 \cdot x = 6x, \quad b = 2 \cdot 5 \cdot y = 10y, \quad c = 3 \cdot 5 \cdot z = 15z$$

pre vhodné prirodzené čísla  $x, y, z$ . Zo známej rovnosti  $[x, y] \cdot (x, y) = xy$  tak dostaneme vyjadrenia najmenších spoločných násobkov v tvare

$$[a, b] = \frac{6x \cdot 10y}{2} = 30xy, \quad [a, c] = \frac{6x \cdot 15z}{3} = 30xz, \quad [b, c] = \frac{10y \cdot 15z}{5} = 30yz.$$

Z rovnosti  $\{30xy, 30xz, 30yz\} = \{60, 90, 180\}$  upravenej na  $\{xy, xz, yz\} = \{2, 3, 6\}$  potom vďaka tomu, že 2 a 3 sú prvočísla, vyplýva  $\{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$ . Pretože z podmienky  $5 = (b, c) = (10y, 15z)$  vyplýva  $y \neq 3$  a  $z \neq 2$ , prichádzajú do úvahy len trojice  $(x, y, z)$  rovné  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 1, 3)$  a  $(3, 2, 1)$ , ktorým postupne zodpovedajú trojice  $(a, b, c)$  rovné  $(6, 20, 45)$ ,  $(12, 10, 45)$ ,  $(18, 20, 15)$ . Skúškou sa presvedčíme, že všetky tri vyhovujú množinovej rovnosti zo zadania úlohy.

**Úloha 8.12.** [63-S-2] Čísla 1, 2, ..., 10 rozdeľte na dve skupiny tak, aby najmenší spoločný násobok súčiny všetkých čísel prvej skupiny a súčiny všetkých čísel druhej skupiny bol čo najmenší.

**Riešenie\*.** Pre uvažované súčiny  $a$  a  $b$  určite platí  $a \cdot b = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ . Aspoň jedno z čísel  $a, b$  je preto deliteľné  $2^4$ , aspoň jedno deliteľné  $3^2$ , aspoň jedno deliteľné 5 a práve jedno deliteľné 7. Pre najmenší spoločný násobok  $n$  čísel  $a, b$  preto platí  $n \geq 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$ , pritom rovnosť tu nastane práve vtedy, keď ani jedno z čísel  $a, b$  nebude deliteľné žiadnym z čísel  $2^5, 3^3$  a  $5^2$ .

Ak zvolíme napríklad  $a = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$  a  $b = 1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$ , bude najmenší spoločný násobok oboch čísel práve 5040. Tým je ukázané, že 5040 je naozaj najmenšia zo všetkých možných hodnôt  $n$ .

I keď bolo úlohou nájsť iba jeden príklad, pre úplnosť uvedieme všetky rozdelenia s minimálnou hodnotou  $n = 5040$ :

Prvá skupina čísel	Druhá skupina čísel
2, 3, 4, 5, 6	1, 7, 8, 9, 10
3, 5, 6, 8	1, 2, 4, 7, 9, 10
2, 5, 8, 9	1, 3, 4, 6, 7, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6	7, 8, 9, 10
1, 3, 5, 6, 8	2, 4, 7, 9, 10
1, 2, 5, 8, 9	3, 4, 6, 7, 10
2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 8, 9, 10
3, 5, 6, 7, 8	1, 2, 4, 9, 10
2, 5, 7, 8, 9	1, 3, 4, 6, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	8, 9, 10
1, 3, 5, 6, 7, 8	2, 4, 9, 10
1, 2, 5, 7, 8, 9	3, 4, 6, 10

Nájsť ich nie je ťažké, keď si uvedomíme, že čísla 1 a 7 môžeme dať do ľubovoľnej z oboch skupín, zatiaľ čo v tej istej skupine spolu nemôžu byť 4 s 8, 5 s 10, 3 s 9 ani 6 s 9; s 8 spolu môže byť práve jedno z párnych čísel 2, 6 a 10. Získame tak iba tri základné rozdelenia (prvé tri riadky tabuľky), z ktorých možno každé štyrmi spôsobmi doplniť číslami 1 a 7.

*Poznámka.* Úlohu možno vyriešiť aj bez výpočtu súčinu  $a \cdot b$ . Deliteľnosť  $n$  číslami  $3^2$ ,  $5$  a  $7$  vyplýva z ich priameho zastúpenia medzi rozdeľovanými číslami, deliteľnosť číslom  $2^4$  z jednoduchej úvahy o rozdelení všetkých piatich párnych čísel: ak nie je číslo  $8$  vo svojej skupine ako párne jediné, je všetko jasné, v opačnom prípade sú v rovnakej skupine čísla  $2$ ,  $4$  a  $6$  (aj  $10$ , ale to už ani nepotrebuje).

## Doplňujúce zdroje a materiály

Materiály vhodné na ďalšie počítanie nájdeme v minulom seminári. Keďže témy sú si veľmi blízke, publikácie zvyčajne obsahujú úlohy zamerané na obe témy.