

## Seminár 28: Algebraické výrazy a rovnice VI – sústavy rovníc, rovnice s parametrom

### Ciele

Precvičiť so študentmi riešenie rovníc obsahujúcich parameter, zoznámiť študentov s niektorými metódami riešenia sústav rovníc

### Úlohy a riešenia

**Úloha 28.1.** [B-66-II-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel  $a, b$ , pre ktoré platí

$$a + \frac{66}{a} = b + \frac{66}{b}.$$

**Riešenie\*.** Anulovaním pravej strany upravíme danú rovnicu na tvar

$$a - b + 66\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = (a - b)\left(1 - \frac{66}{ab}\right) = \frac{1}{ab}(a - b)(ab - 66) = 0.$$

Z toho vyplýva, že hľadané dvojice  $(a, b)$  prirodzených čísel sú práve tie, pre ktoré platí  $a = b$  alebo  $ab = 66$ .

Úlohe teda vyhovuje nekonečne veľa dvojíc prirodzených čísel tvaru  $(a, b) = (k, k)$ , pričom  $k$  je ľubovoľné prirodzené číslo, a keďže číslo  $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$  má osem deliteľov, tak aj osem dvojíc  $(a, b) \in \{(1, 66), (2, 33), (3, 22), (6, 11), (11, 6), (22, 3), (33, 2), (66, 1)\}$ .

**Úloha 28.2.** [B-58-II-1] V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}x + y &= 1, \\x - y &= a, \\-4ax + 4y &= z^2 + 4\end{aligned}$$

s neznámymi  $x, y, z$  a reálnym parametrom  $a$ .

**Riešenie\*.** Sčítaním prvej a druhej rovnice danej sústavy dostaneme  $2x = 1 + a$ , odčítaním druhej rovnice od prvej  $2y = 1 - a$ . Odtiaľ

$$x = \frac{1}{2}(1 + a), \quad y = \frac{1}{2}(1 - a). \quad (1)$$

Keď dosadíme za  $x$  a  $y$  do tretej rovnice pôvodnej sústavy, dostaneme rovnicu

$$-2a(1 + a) + 2(1 - a) = z^2 + 4, \quad \text{čiže} \quad z^2 + 2a^2 + 4a + 2 = 0,$$

ktorú upravíme na tvar

$$z^2 + 2(a + 1)^2 = 0.$$

Oba sčítance na ľavej strane poslednej rovnice sú nezáporné čísla. Ich súčet je 0 práve vtedy, keď  $z = 0$ ,  $a = -1$ . Dosadením týchto hodnôt do 1 dostaneme  $x = 0, y = 1$ .

*Záver.* Daná sústava rovníc má riešenie iba pre  $a = -1$ , a to  $x = 0, y = 1, z = 0$ . Skúška pri tomto postupe nie je nutná.

**Úloha 28.3.** [B-60-S-1] V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = p$$

s neznámou  $x$  a reálnym parametrom  $p$ .

**Riešenie\*.** Aby bola ľavá strana rovnice definovaná, musia byť oba výrazy pod odmocninami nezáporné, čo je splnené práve pre všetky  $x \geq 0$ . Pre nezáporné  $x$  potom  $p = \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \geq \sqrt{3}$ , rovnica môže teda mať riešenie iba pre  $p \geq \sqrt{3}$ .

Upravujeme danú rovnicu:

$$\begin{aligned}\sqrt{3} + \sqrt{x+3} &= p, \\ 2x+3 + 2\sqrt{x(x+3)} &= p^2, \\ 2\sqrt{x(x+3)} &= p^2 - 2x - 3, \\ 4x(x+3) &= (p^2 - 2x - 3)^2, \\ 4x^2 + 12x &= p^4 + 4x^2 + 9 - 4p^2x - 6p^2 + 12x, \\ x &= \frac{(p^2 - 3)^2}{4p^2}.\end{aligned}\tag{2}$$

Keďže sme danú rovnicu umocňovali na druhú, je nutné sa presvedčiť skúškou, že vypočítané  $x$  je pre hodnotu parametra  $p \geq \sqrt{3}$  riešením pôvodnej rovnice:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{(p^2 - 3)^2}{4p^2}} + 3 + \sqrt{\frac{(p^2 - 3)^2}{4p^2}} &= \sqrt{\frac{p^4 - 6p^2 + 9 + 12p^2}{4p^2}} + \sqrt{\frac{(p^2 - 3)^2}{4p^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(p^2 + 3)^2}{4p^2}} + \sqrt{\frac{(p^2 - 3)^2}{4p^2}} = \frac{p^2 + 3}{2p} + \frac{p^2 - 3}{2p} = p.\end{aligned}$$

Pri predposlednej úprave sme využili podmienku  $p \geq \sqrt{3}$  (a teda aj  $p^2 - 3 \geq 0$  a  $p > 0$ ), takže  $\sqrt{(p^2 - 3)^2} = p^2 - 3$  a  $\sqrt{4p^2} = 2p$ .

*Poznámka.* Namiesto skúšky stačí overiť, že pre nájdené  $x$  sú všetky umocňované výrazy nezáporné, teda vlastne stačí overiť, že

$$p^2 - 2x - 3 = \frac{(p^2 - 3)(p^2 + 3)}{2p^2} \geq 0.$$

Pre  $p \geq \sqrt{3}$  to tak naozaj je.

Vynechať skúšku možno aj takouto úvahou: Funkcia  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x}$  je zrejme rastúca, v bode 0 (ktorý je krajným bodom jej definičného oboru) nadobúda hodnotu  $\sqrt{3}$  a zhora je neohraničená. Preto každú hodnotu  $p \geq \sqrt{3}$  nadobúda pre práve jedno  $x \geq 0$ . Z toho vyplýva, že pre  $p \geq \sqrt{3}$  má zadaná rovnica práve jedno riešenie, a teda (jediné) nájdené riešenie 2 musí vyhovovať.

**Úloha 28.4.** [B-58-I-2] Určte všetky trojice  $(x, y, z)$  reálnych čísel, pre ktoré platí

$$\begin{aligned}x^2 + xy &= y^2 + z^2, \\ z^2 + zy &= y^2 + x^2.\end{aligned}$$

**Riešenie\*.** Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme po úprave

$$(z - x)(2z + 2x + y) = 0.$$

Sú preto možné dva prípady, ktoré rozoberieme samostatne.

a) Prípady  $z - x = 0$ . Dosadením  $z = x$  do prvej rovnice sústavy dostaneme  $x^2 + xy = y^2 + x^2$ , čiže  $y(x - y) = 0$ . To znamená, že platí  $y = 0$  alebo  $x = y$ . V prvom prípade dostávame trojice  $(x, y, z) = (x, 0, x)$ , v druhom  $(x, y, z) = (x, x, x)$ ; také trojice sú riešeniami danej sústavy pre ľubovoľné reálne číslo  $x$ , ako ľahko overíme dosadením (aj keď taká skúška pri našom postupe vlastne nie je nutná).

b) Prípady  $2z + 2x + y = 0$ . Dosadením  $y = -2x - 2z$  do prvej rovnice sústavy dostaneme

$$x^2 + x(-2x - 2z) = (-2x - 2z)^2 + z^2, \quad \text{čiže} \quad 5(x + z)^2 = 0.$$

Posledná rovnica je splnená práve vtedy, keď  $z = -x$ , vtedy však  $y = -2x - 2z = 0$ . Dostávame trojice  $(x, y, z) = (x, 0, -x)$ , ktoré sú riešeniami danej sústavy pre každé reálne  $x$ , ako overíme dosadením. (O takej skúške platí to isté čo v prípade a).

*Odpoveď.* Všetky riešenia  $(x, y, z)$  danej sústavy sú trojice troch typov:

$$(x, x, x), \quad (x, 0, x), \quad (x, 0, -x),$$

kde  $x$  je ľubovoľné reálne číslo.

**Iné riešenie\*.** Obe rovnice sústavy sčítame. Po úprave dostaneme rovnicu

$$y(x + z - 2y) = 0$$

a opäť rozlíšime dve možnosti.

- Prípad  $y = 0$ . Z prvej rovnice sústavy ihneď vidíme, že  $x^2 = z^2$ , čiže  $z = \pm x$ . Skúškou overíme, že každá z trojíc  $(x, 0, x)$  a  $(x, 0, -x)$  je pre ľubovoľné reálne  $x$  riešením.
- Prípad  $x + z - 2y = 0$ . Dosadením  $y = \frac{1}{2}(x + z)$  do prvej rovnice sústavy dostaneme

$$x^2 + x(x + z)^2 = \frac{(x + z)^2}{4} + z^2, \quad \text{po úprave} \quad x^2 = z^2.$$

Platí teda  $z = -x$  alebo  $z = x$ . Dosadením do rovnosti  $x + z - 2y = 0$  v prvom prípade dostaneme  $y = 0$ , v druhom prípade  $y = x$ . Zodpovedajúce trojice  $(x, 0, -x)$  a  $(x, x, x)$  sú riešeniami pre každé reálne  $x$  (prvé z nich sme však našli už v časti a).

**Úloha 28.5.** [B-60-I-1] V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= z + 1, \\ \sqrt{y^2 + z^2} &= x + 1, \\ \sqrt{z^2 + x^2} &= y + 1.\end{aligned}$$

**Riešenie\*.** Umocnením a odčítaním prvých dvoch rovností dostaneme  $x^2 - z^2 = (z + 1)^2 - (x + 1)^2$ , čo upravíme na  $2(x^2 - z^2) + 2(x - z) = 0$ , čiže

$$(x - z)(x + z + 1) = 0. \tag{3}$$

Analogicky by sme dostali ďalšie dve rovnice, ktoré vzniknú z 3 cyklickou zámenou neznámych  $x \rightarrow y \rightarrow z$ . Vzhľadom na túto symetriu (daná sústava sa nezmení dokonca pri ľubovoľnej permutácii neznámych) stačí rozobrať len nasledovné dve možnosti:

Ak  $x = y = z$ , prejde pôvodná sústava na jedinou rovnicu  $\sqrt{2x^2} = x + 1$ , ktorá má dve riešenia  $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ . Každá z trojíc  $(1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2})$  je zrejme riešením pôvodnej sústavy.

Ak sú niektoré dve z čísel  $x, y, z$  rôzne, napríklad  $x \neq z$ , vyplýva z 3 rovností  $x + z = -1$ . Dosadením  $x + 1 = -z$  do druhej rovnice sústavy dostávame  $y = 0$  a potom z tretej rovnice máme  $x^2 + (x + 1)^2 = 1$ , čiže  $x(x + 1) = 0$ . Posledná rovnica má dve riešenia  $x = 0$  a  $x = -1$ , ktorým zodpovedajú  $z = -1$  a  $z = 0$ . Ľahko overíme, že obe nájdene trojice  $(0, 0, -1)$  a  $(-1, 0, 0)$  sú riešeniami danej sústavy, rovnako aj trojica  $(0, -1, 0)$ , ktorú dostaneme ich permutáciou.

Daná sústava má päť riešení:  $(0, 0, -1)$ ,  $(0, -1, 0)$ ,  $(-1, 0, 0)$ ,  $(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$  a  $(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ .