Seminár 21: Teória čísel V – miš-maš

Úlohy a riešenia

Úloha 21.1. [65-II-4] Adam s Barborou hrajú so zlomkom

$$\frac{10a+b}{10c+d}$$

takúto hru na štyri ťahy: Hráči striedavo nahrádzajú ľubovoľné z doposiaľ neurčených písmen a, b, c, d nejakou cifrou od 1 do 9. Barbora vyhrá, keď výsledný zlomok bude rovný buď celému číslu, alebo číslu s konečným počtom desatinných miest; inak vyhrá Adam (napríklad keď vznikne zlomok $\frac{11}{29}$). Ak začína Adam, ako má hrať Barbora, aby zaručene vyhrala? Ak začína Barbora, je možné poradiť Adamovi tak, aby vždy vyhral?

Úloha 21.2. [57-I-1-N1] Ak m, k a $\sqrt[k]{m}$ sú celé čísla väčšie ako 1, tak v rozklade čísla m na súčin prvočísel sa každé prvočíslo vyskytuje v mocnine, ktorej exponent je násobkom čísla k. Dokážte.

Úloha 21.3. [57-I-1] Určte najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré aj čísla $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ sú prirodzené.

Úloha 21.4. [60-II-2] Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré je číslo n^2+6n druhou mocninou celého čísla.

Úloha 21.5. [66-II-1] Nájdite všetky mnohočleny $P(x) = ax^2+bx+c$ s celočíselnými koeficientami spĺňajúce

$$1 < P(1) < P(2) < P(3) \quad \text{a súčasne} \quad \frac{P(1)\cdot P(2)\cdot P(3)}{4} = 17^2.$$

Úloha 21.6. [64-II-1] Celé čísla od 1 do 9 rozdelíme ľubovoľne na tri skupiny po troch a potom čísla v každej skupine medzi sebou vynásobíme.

a) Určte tieto tri súčiny, ak viete, že dva z nich sa rovnajú a sú menšie ako tretí súčin.

b) Predpokladajme, že jeden z troch súčinov, ktorý označíme S, je menší ako dva ostatné súčiny (ktoré môžu byť rovnaké). Nájdite najväčšiu možnú hodnotu S.

Úloha 21.7. [58-I-5] Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. (Vysvetlite, prečo zvolený výber má požadovanú vlastnosť a prečo žiadny výber väčšieho počtu čísel nevyhovuje.)

Úloha 21.8. [64-I-6] Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že v zápise iracionálneho čísla $\sqrt{n}$ nasledujú bezprostredne za desatinnou čiarkou dve deviatky.