

## Seminár 7: Teória čísel I – úlohy o deliteľnosti

### Úlohy a riešenia

**Úloha 7.1.** [?, úloha 38, str. 115] Nech  $N$  je päťciferné kladné číslo také, že  $N = \overline{a679b}$ . Ak je  $N$  deliteľné 72, určte prvú cifru  $a$  a poslednú cifru  $b$ .

**Úloha 7.2.** [66-I-2-N1] Dokážte, že v nekonečnom rade čísel

$$1 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 4, 3 \cdot 4 \cdot 5, 4 \cdot 5 \cdot 6, \dots,$$

je číslo prvé deliteľom všetkých čísel ďalších.

**Úloha 7.3.** [63-I-5-N1] Dokážte, že pre každé prirodzené  $n$  je číslo  $n^3 + 2n$  deliteľné tromi.

**Úloha 7.4.** [63-I-5-N2] Dokážte, že pre každé nepárne číslo  $n$  je číslo  $n^2 - 1$  deliteľné ôsmimi.

**Úloha 7.5.** [63-I-5-N3+63-I-5-N4, resp. 55-I-1]

a) Dokážte, že pre všetky celé kladné čísla  $m$  je rozdiel  $m^6 - m^2$  deliteľný šesťdesiatimi.

b) Určte všetky kladné celé čísla  $m$ , pre ktoré je rozdiel  $m^6 - m^2$  deliteľný číslom 120.

**Úloha 7.6.** [59-II-1] Dokážte, že pre ľubovoľné celé čísla  $n$  a  $k$  väčšie ako 1 je číslo  $n^{k+2} - n^k$  deliteľné dvanástimi.

**Úloha 7.7.** [58-S-3] Keď isté dve prirodzené čísla v rovnakom poradí sčítame, odčítame, vydáme a vynásobíme a všetky štyri výsledky sčítame, dostaneme 2 009. Určte tieto dve čísla.

**Úloha 7.8.** [66-I-2-N2] Nájdite všetky celé  $d > 1$ , pri ktorých hodnoty výrazov  $U(n) = n^3 + 17n^2 - 1$  a  $V(n) = n^3 + 4n^2 + 12$  dávajú po delení číslom  $d$  rovnaké zvyšky, nech je celé číslo  $n$  zvolené akokoľvek.

**Úloha 7.9.** [66-I-2-D1] Pre ktoré prirodzené čísla  $n$  nie je výraz  $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$  násobkom ôsmich?

**Úloha 7.10.** [66-I-2] Nájdite najväčšie prirodzené číslo  $d$ , ktoré má tú vlastnosť, že pre ľubovoľné prirodzené číslo  $n$  je hodnota výrazu

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$$

deliteľná číslom  $d$ .

**Úloha 7.11.** [66-S-2] Označme  $M$  množinu všetkých hodnôt výrazu  $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ , pričom  $n$  je nepárne prirodzené číslo. Nájdite všetky možné zvyšky po delení číslom 48, ktoré dávajú prvky množiny  $M$ .

**Úloha 7.12.** [60-I-2] Dokážte, že výrazy  $23x + y$ ,  $19x + 3y$  sú deliteľné číslom 50 pre rovnaké dvojice prirodzených čísel  $x, y$ .