

## Seminár 30

### Téma

Kvadratické rovnice

### Ciele

Precvičiť metódy používané pri práci s kvadratickými rovnicami

### Úlohy a riešenia

**Úloha 30.1.** [57-I-5] Určte všetky dvojice  $a, b$  reálnych čísel, pre ktoré má každá z kvadratických rovníc

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom práve jeden z nich je spoločný oboch rovniciam.

**Riešenie\*.** Zo zadania vyplýva, že  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  (inak by rovnice neboli kvadratické) a  $a \neq b$  (inak by rovnice boli totožné, a ak by mali dva reálne korene, boli by oba spoločné).

Označme  $x_0$  spoločný koreň oboch rovníc, takže

$$ax_0^2 + 2bx_0 + 1 = 0, \quad bx_0^2 + 2ax_0 + 1 = 0.$$

Odčítaním oboch rovníc dostaneme  $(a-b)(x_0^2 - 2x_0) = x_0(a-b)(x_0 - 2) = 0$ . Keďže  $a \neq b$  a 0 zrejme koreňom daných rovníc nie je, musí byť spoločným koreňom číslo  $x_0 = 2$ . Dosadením do daných rovníc tak dostaneme jedinou podmienku  $4a + 4b + 1 = 0$ , čiže

$$b = -a - \frac{1}{4}.$$

Diskriminant druhej z daných rovníc je potom  $4a^2 - 4b = 4a^2 + 4a + 1 = (2a + 1)^2$ , takže rovnica má dva rôzne reálne korene pre ľubovoľné  $a \neq -\frac{1}{2}$ . Podobne diskriminant prvej z daných rovníc je  $4b^2 - 4a = 4b^2 + 4b + 1 = (2b + 1)^2$ . Rovnica má teda dva rôzne reálne korene pre ľubovoľné  $b \neq -\frac{1}{2}$ , čiže  $a \neq \frac{1}{4}$ .

Z uvedených predpokladov však zároveň vyplýva  $a \neq -\frac{1}{4}$  ( $b \neq 0$ ) a  $a \neq -\frac{1}{8}$  ( $a \neq b$ ).

**Záver.** Vyhovujú všetky dvojice  $(a, -a - \frac{1}{4})$ , kde  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4}\}$ .

**Úloha 30.2.** [57-S-5] Určte všetky dvojice  $(a, b)$  reálnych čísel, pre ktoré majú rovnice

$$x^2 + (3a + b)x + 4a = 0, \quad x^2 + (3b + a)x + 4b = 0$$

spoločný reálny koreň.

**Riešenie\*.** Nech  $x_0$  je spoločný koreň oboch rovníc. Potom platí

$$x_0^2 + (3a + b)x_0 + 4a = 0, \quad x_0^2 + (3b + a)x_0 + 4b = 0.$$

Odčítaním týchto rovníc dostaneme  $(2a - 2b)x_0 + 4(a - b) = 0$ , odkiaľ po úprave získame  $(a - b)(x_0 + 2) = 0$ .

Rozoberieme dve možnosti:

Ak  $a = b$ , majú obidve dané rovnice rovnaký tvar  $x^2 + 4ax + 4a = 0$ . Aspoň jeden koreň (samozrejme spoločný) existuje práve vtedy, keď je diskriminant  $16a^2 - 16a$  nezáporný, teda  $a \in (-\infty, 0) \cup \langle 1, \infty)$ .

Ak  $x_0 = -2$ , dostaneme z prvej aj z druhej rovnice  $4 - 2a - 2b = 0$ , teda  $b = 2 - a$ . Dosadením do zadania dostaneme rovnice

$$x^2 + (2a + 2)x + 4a = 0, \quad x^2 + (6 - 2a)x + 8 - 4a = 0,$$

ktoré majú pri ľubovoľnej hodnote parametra  $a$  spoločný koreň  $-2$ .

**Záver.** Dané rovnice majú aspoň jeden spoločný koreň pre všetky dvojice  $(a, a)$ , kde  $a \in (-\infty, 0) \cup \langle 1, \infty)$ , a pre všetky dvojice tvaru  $(a, 2 - a)$ , kde  $a$  je ľubovoľné.

**Úloha 30.3.** [57-II-1] Uvažujme dve kvadratické rovnice

$$x^2 - ax - b = 0, \quad x^2 - bx - a = 0$$

s reálnymi parametrami  $a, b$ . Zistite, akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže nadobudnúť súčet  $a + b$ , ak existuje práve jedno reálne číslo  $x$ , ktoré súčasne vyhovuje oboj rovniciam. Určte ďalej všetky dvojice  $(a, b)$  reálnych parametrov, pre ktoré tento súčet tieto hodnoty nadobúda.

**Riešenie\*.** Odčítaním oboch daných rovníc dostaneme rovnosť  $(b - a)x + a - b = 0$ , čiže  $(b - a)(x - 1) = 0$ . Odtiaľ vyplýva, že  $b = a$  alebo  $x = 1$ .

Ak  $b = a$ , majú obidve rovnice tvar  $x^2 - ax - a = 0$ . Práve jedno riešenie existuje práve vtedy, keď diskriminant  $a^2 + 4a$  je nulový. To platí pre  $a = 0$  a pre  $a = -4$ . Pretože  $b = a$ , má súčet  $a + b$  v prvom prípade hodnotu 0 a v druhom prípade hodnotu  $-8$ .

Ak  $x = 1$ , dostaneme z daných rovníc  $a + b = 1$ , teda  $b = 1 - a$ . Rovnice potom majú tvar

$$x^2 - ax + a - 1 = 0 \quad \text{a} \quad x^2 + (a - 1)x - a = 0.$$

Prvá má korene 1 a  $a - 1$ , druhá má korene 1 a  $-a$ . Práve jedno spoločné riešenie tak dostaneme vždy s výnimkou prípadu, keď  $a - 1 = -a$ , čiže  $a = \frac{1}{2}$  – vtedy sú spoločné riešenia dve.

**Záver.** Najmenšia hodnota súčtu  $a + b$  je  $-8$  a je dosiahnutá pre  $a = b = -4$ . Najväčšia hodnota súčtu  $a + b$  je 1; túto hodnotu má súčet  $a + b$  pre všetky dvojice  $(a, 1 - a)$ , kde  $a \neq \frac{1}{2}$  je ľubovoľné reálne číslo.

**Úloha 30.3.** [59-I-6] Reálne čísla  $a, b$  majú túto vlastnosť: rovnica  $x^2 - ax + b - 1 = 0$  má v množine reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých rozdiel je kladným koreňom rovnice  $x^2 - ax + b + 1 = 0$ .

a) Dokážte nerovnosť  $b > 3$ .

b) Pomocou  $b$  vyjadrite korene oboch rovníc.

**Riešenie\*.** Označme  $x_1$  menší a  $x_2$  väčší koreň prvej rovnice. Potom platí  $x_1 + x_2 = a$ ,  $x_1 x_2 = b - 1$ . Druhá rovnica má koreň  $x_2 - x_1$ , a keďže súčet oboch koreňov je  $a$ , musí byť druhý koreň  $a - (x_2 - x_1) = x_1 + x_2 - (x_2 - x_1) = 2x_1$ . Súčin koreňov druhej rovnice je  $(x_2 - x_1) \cdot 2x_1 = b + 1$ . Odtiaľ dostávame  $b = -1 + 2x_1 x_2 - 2x_1^2 = -1 + 2(b - 1) - 2x_1^2$ , a teda

$$b = 3 + 2x_1^2 > 3, \quad (1)$$

lebo z rovnosti  $x_1 = 0$  by vyplývalo  $b + 1 = b - 1 = 0$ .

Keďže  $x_2 - x_1 > 0$  a  $b + 1 > 0$ , musí byť aj  $x_1 > 0$ ; z (1) máme  $x_1 = \sqrt{(b - 3)/2}$  a ďalej

$$x_2 = \frac{b - 1}{x_1} = \frac{(b - 1)\sqrt{2}}{\sqrt{b - 3}}.$$

Korene druhej rovnice sú potom

$$x_2 - x_1 = \frac{b + 1}{2x_1} \quad \text{a} \quad 2x_1 = \sqrt{2(b - 3)}.$$

**Iné riešenie.** Korene prvej rovnice sú

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2}, \quad x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2},$$

pričom pre diskriminant máme

$$D = a^2 - 4(b - 1) > 0. \quad (2)$$

Rozdiel koreňov  $x_2 - x_1 = \sqrt{a^2 - 4b + 4}$  je koreňom druhej rovnice, a preto

$$\begin{aligned} a^2 - 4b + 4 - a\sqrt{a^2 - 4b + 4} + b + 1 &= 0, \\ a^2 - 3b + 5 &= a\sqrt{a^2 - 4b + 4}, \quad (3) \\ a^4 + 2a^2(5 - 3b) + (3b - 5)^2 &= a^4 - 4a^2b + 4a^2, \\ (3b - 5)^2 &= a^2(2b - 6). \end{aligned}$$

Rovnosť  $a = 0$  nastáva práve vtedy, keď  $3b - 5 = 0$ ; potom by ale neplatilo (2). Preto  $a^2 > 0$ ,  $(3b - 5)^2 > 0$ , a teda aj  $2b - 6 > 0$ , čiže  $b > 3$ . Z (2) a (3) potom vyplýva  $a > 0$ , a teda  $a = (3b - 5)/\sqrt{2(b - 3)}$ ; ďalej potom

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{3a - 5}{\sqrt{2(b - 3)}} - \sqrt{\frac{(3b - 5)^2}{2(b - 3)} - 4b + 4} \right) = \sqrt{\frac{b - 3}{2}},$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{3a - 5}{\sqrt{2(b - 3)}} + \sqrt{\frac{(3b - 5)^2}{2(b - 3)} - 4b + 4} \right) = \frac{(b - 1)\sqrt{2}}{\sqrt{b - 3}}.$$

Druhá rovnica má korene

$$x_3 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2} = \frac{b + 1}{\sqrt{2(b - 3)}} = x_2 - x_1$$

$$x_4 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2} = \sqrt{2(b - 3)}.$$

**Úloha 30.4.** [59-S-1] Určte všetky hodnoty reálnych parametrov  $p, q$ , pre ktoré má každá z rovníc

$$x(x - p) = 3 + q, \quad x(x + p) = 3 - q$$

v obore reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých aritmetický priemer je jedným z koreňov zvyšnej rovnice.

**Riešenie\*.** Z Viètových vzťahov pre korene kvadratickej rovnice (ktoré vyplývajú z rozkladu daného kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov) ľahko zistíme, že súčet koreňov prvej rovnice je  $p$ , takže ich aritmetický priemer je  $\frac{1}{2}p$ . Toto číslo má byť koreňom druhej rovnice, preto

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{3p}{2} = 3 - q. \quad (1)$$

Podobne súčet koreňov druhej rovnice je  $-p$ , ich aritmetický priemer je  $-\frac{1}{2}p$ , a preto

$$-\frac{p}{2} \cdot \left(-\frac{3p}{2}\right) = 3 + q. \quad (2)$$

Porovnaním oboch vzťahov (1) a (2) máme  $3 - q = 3 + q$ , čiže  $q = 0$  a z (1) potom vyjde  $p = 2$  alebo  $p = -2$ .

Z oboch nájdenných riešení dostaneme tú istú dvojicu rovníc  $x(x - 2) = 3$ ,  $x(x + 2) = 3$ . Korene prvej z nich sú čísla  $-1$  a  $3$ , ich aritmetický priemer je  $1$ . Korene druhej rovnice sú čísla  $1$  a  $-3$ , ich aritmetický priemer je  $-1$ .

**Úloha 30.5.** [62-II-1] Pre ľubovoľné reálne čísla  $k \neq \pm 1$ ,  $p \neq 0$  a  $q$  dokážte tvrdenie: Rovnica

$$x^2 + px + q = 0$$

má v obore reálnych čísel dva korene, z ktorých jeden je  $k$ -násobkom druhého, práve vtedy, keď platí  $kp^2 = (k + 1)^2q$ .

**Riešenie\*.** Čísla  $x_1, x_2$  sú koreňmi danej kvadratickej rovnice práve vtedy, keď platí

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{a} \quad x_1 x_2 = q. \quad (1)$$

Predpokladajme, že daná kvadratická rovnica má reálne korene  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = k\alpha$ . Dosadením do (1) dostaneme  $(k + 1)\alpha = -p$  a  $k\alpha^2 = q$ . Pre obe strany dokazovanej rovnosti  $kp^2 = (k + 1)^2q$  odtiaľ vyplýva

$$kp^2 = k(-(k + 1)\alpha)^2 = k(k + 1)^2\alpha^2,$$

$$(k+1)^2 q = (k+1)^2 \cdot k \alpha^2 = k(k+1)^2 \alpha^2,$$

teda daná rovnosť skutočne platí.

Nech naopak pre reálne čísla  $p, q$  a  $k \neq -1$  platí  $kp^2 = (k+1)^2 q$ . Uvažujme dvojicu reálnych čísel

$$x_1 = \frac{-kp}{k+1} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{-p}{k+1}.$$

Také čísla (pre ktoré platí  $x_1 = kx_2$ ) sú koreňmi danej kvadratickej rovnice, ak spĺňajú obe rovnosti (1). Overenie urobíme dosadením:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-kp}{k+1} + \frac{-p}{k+1} = \frac{-(k+1)p}{k+1} = -p, \\ x_1 x_2 &= \frac{-kp}{k+1} \cdot \frac{-p}{k+1} = \frac{kp^2}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 q}{(k+1)^2} = q. \end{aligned}$$

Tým je celý dôkaz hotový.

**Úloha 30.6.** [64-II-4] Na tabuli je zoznam čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 a „rovnica“

$$\frac{\boxed{\phantom{0}}}{\boxed{\phantom{0}}} x^2 + \frac{\boxed{\phantom{0}}}{\boxed{\phantom{0}}} x + \frac{\boxed{\phantom{0}}}{\boxed{\phantom{0}}} = 0.$$

Marek s Tomášom hrajú nasledujúcu hru. Najskôr Marek vyberie ľubovoľné číslo zo zoznamu, napíše ho do jedného z prázdnych políčok v „rovnici“ a číslo zo zoznamu zotrie. Potom Tomáš vyberie niektoré zo zvyšných čísel, napíše ho do iného prázdneho políčka a v zozname ho zotrie. Nato Marek urobí to isté a nakoniec Tomáš doplní tri zvyšné čísla na tri zvyšné voľné políčka v „rovnici“. Marek vyhrá, ak vzniknutá kvadratická rovnica s racionálnymi koeficientmi bude mať dva rôzne reálne korene, inak vyhrá Tomáš. Rozhodnite, ktorý z hráčov môže vyhrať nezávisle na postupe druhého hráča.

**Riešenie\*.** Označme  $a, b, c$  koeficienty výslednej rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$ . Tá má dva rôzne reálne korene práve vtedy, keď je jej diskriminant (v symbolickej podobe)

$$b^2 - 4ac = \left( \frac{\boxed{\phantom{0}}}{\boxed{\phantom{0}}} \right)^2 - 4 \left( \frac{\boxed{\phantom{0}}}{\boxed{\phantom{0}}} \right) \left( \frac{\boxed{\phantom{0}}}{\boxed{\phantom{0}}} \right)$$

kladný.

Ukážeme, že vyhrávajúcu stratégiu má Marek. Najskôr do menovateľa zlomku pre koeficient  $b$  napíše 1.

- Ak Tomáš obsadí vo svojom prvom ťahu iné miesto ako v čitateli  $b$ , napíše do neho Marek v nasledujúcom ťahu najväčšie zostávajúce číslo zo zoznamu (teda 5 alebo 6). Hodnota  $b^2$  potom bude aspoň 25 a zo zvyšných čísel možno zostaviť výraz  $4ac$  s hodnotou nanajvýš  $4 \cdot \frac{6 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 16$ . Diskriminant vzniknutej kvadratickej rovnice tak bude určite kladný.
- Predpokladajme, že Tomáš vo svojom ťahu doplní čitateľa  $b$ . Marek potom v druhom ťahu napíše najmenšie zostávajúce číslo zo zoznamu (2 alebo 3) do čitateľa  $a$  (alebo  $c$ ).
  - V prípade, že Tomáš v prvom ťahu napísal do čitateľa  $b$  číslo 2, je hodnota  $b^2$  rovná 4 a najväčšia možná hodnota  $4ac$  (s prihliadnutím na druhý Marekov ťah) je  $4 \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{5} \leq 4$ , teda diskriminant vzniknutej kvadratickej rovnice bude opäť kladný.
  - V prípade, že Tomáš v prvom ťahu napísal do čitateľa  $b$  iné číslo ako 2, je hodnota  $b^2$  aspoň 9 a hodnota  $4ac$  je nanajvýš  $4 \cdot \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 4} = 4$ , takže diskriminant vzniknutej kvadratickej rovnice bude aj v tomto prípade kladný.

**Záver.** V danej hre môže vyhrať Marek nezávisle na ťahoch Tomáša. Jeho víťazná stratégia je opísaná vyššie.

## **Domáca práca**

Úlohou študentov bude vyhľadať, skonzultovať a zaslať vedúcemu seminára jeden príklad, problém alebo úlohu, ktorá sa viaže k témam algebry a teórie čísel, ktorými sme sa v seminári zaberali. Tieto úlohy budú použité ako zadania, ktoré využijeme v nasledujúcom seminári. Študenti môžu hľadať inšpiráciu v starších kolách MO, rôznych knižných publikáciách, zbierkach korešpondenčných seminárov alebo môžu úlohu dokonca sami vymyslieť.

## **Doplňujúce zdroje a materiály**