

## Seminár 18

### Téma

Algebraické výrazy a rovnice – zložitejšie rovnice a ich systémy

### Ciele

Zoznámiť študentov s ďalšími typmi rovníc a ich sústav (iracionálne koeficienty, dolná celá časť), tieto úlohy, spolu so slovnými úlohami precvičiť.

### Úlohy a riešenia

**Úloha 0.1.** [59-S-1] Určte všetky hodnoty reálnych parametrov  $p, q$ , pre ktoré má každá z rovníc

$$x(x-p) = 3+q, \quad x(x+p) = 3-q$$

v obore reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých aritmetický priemer je jedným z koreňov zvyšnej rovnice.

**Riešenie\*.** Z Viètových vzťahov pre korene kvadratickej rovnice (ktoré vyplývajú z rozkladu daného kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov) ľahko zistíme, že súčet koreňov prvej rovnice je  $p$ , takže ich aritmetický priemer je  $\frac{1}{2}p$ . Toto číslo má byť koreňom druhej rovnice, preto

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{3p}{2} = 3 - q. \quad (1)$$

Podobne súčet koreňov druhej rovnice je  $-p$ , ich aritmetický priemer je  $-\frac{1}{2}p$ , a preto

$$-\frac{p}{2} \cdot \left(-\frac{3p}{2}\right) = 3 + q. \quad (2)$$

Porovnaním oboch vzťahov (1) a (2) máme  $3 - q = 3 + q$ , čiže  $q = 0$  a z (1) potom vyjde  $p = 2$  alebo  $p = -2$ .

Z oboch nájdenných riešení dostaneme tú istú dvojicu rovníc  $x(x-2) = 3$ ,  $x(x+2) = 3$ . Korene prvej z nich sú čísla  $-1$  a  $3$ , ich aritmetický priemer je  $1$ . Korene druhej rovnice sú čísla  $1$  a  $-3$ , ich aritmetický priemer je  $-1$ .

**Úloha 0.2.** [59-I-3-N1] Určte  $[0]$ ,  $[3,5]$ ,  $[2,1]$ ,  $[-4]$ ,  $[-3,9]$ ,  $[-0,2]$ . Symbol  $[x]$  označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako číslo  $x$ , tzv. dolnú celú časť reálneho čísla  $x$ .

**Riešenie.**  $[0] = 0$ ,  $[3,5] = 3$ ,  $[2,1] = 2$ ,  $[-4] = -4$ ,  $[-3,9] = -4$ ,  $[-0,2] = -1$ .

**Úloha 0.3.** [59-I-3-N2] Nech  $a$  je celé číslo a  $t \in \langle 0; 1 \rangle$ . Určte  $[a]$ ,  $[a+t]$ ,  $[a+\frac{1}{2}t]$ ,  $[a-t]$ ,  $[a+2t]$ ,  $[a-2t]$ .

**Riešenie.**  $[a] = a$ ,  $[a+t] = a$ ,  $[a+\frac{1}{2}t] = a$ ,  $[a-t] = a$ , ak  $t = 0$ , resp.  $[a-t] = a-1$ , ak  $t \neq 0$ ,  $[a+2t] = a$ , ak  $t < 0,5$ , resp.  $[a+2t] = a+1$ , ak  $t \geq 0,5$ ,  $[a-2t] = a$ , ak  $t = 0$ , resp.  $[a-2t] = a-1$  ak  $t \leq 0,5$  a  $[a-2t] = a-2$  ak  $t > 0,5$ .

**Úloha 0.4.** [59-I-3] Určte všetky reálne čísla  $x$ , ktoré vyhovujú rovnici  $4x - 2[x] = 5$ .

**Riešenie\*.** Položme  $\lfloor x \rfloor = a$ , potom  $x = a + t$ , pričom  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ , a rovnicu  $4(a + t) - 2a = 5$  ekvivalentne upravme na tvar  $a = \frac{5}{2} - 2t$ . Aby bolo číslo  $a$  celé, musí byť  $2t = k \cdot \frac{1}{2}$ , pričom  $k$  je nepárne číslo. Navyše  $2t \in \langle 0, 2 \rangle$ . Teda buď  $2t = \frac{1}{2}$  a  $a = 2$ , alebo  $2t = \frac{3}{2}$  a  $a = 1$ . Pôvodná rovnica má preto dve riešenia:  $x_1 = 2,25$  a  $x_2 = 1,75$ .

**Iné riešenie.** Rovnicu upravíme na tvar  $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$ . Taká rovnica bude splnená práve vtedy, keď číslo  $2x - \frac{5}{2}$  bude celé a bude spĺňať nerovnosti  $x - 1 < 2x - \frac{5}{2} \leq x$ , ktoré sú ekvivalentné s podmienkou  $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$ . Pre takéto  $x$  zrejme hodnoty výrazu  $2x - \frac{5}{2}$  vyplnia interval  $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ . V ňom ležia práve dve celé čísla 1 a 2, teda hľadané  $x$  nájdeme z rovníc  $2x - \frac{5}{2} = 1$  a  $2x - \frac{5}{2} = 2$ .

**Komentár.** Aj napriek tomu, že funkcia dolná celá časť nie je bežným učivom preberaným v školách, nemala by analýza úlohy robiť žiakom veľké problémy.

**Úloha 0.5.** [57-I-3-N1] Určte všetky celé čísla  $n$ , pre ktoré nadobúda zlomok  $(4n + 27)/(n + 3)$  celočíselné hodnoty.

**Riešenie.** Zlomok  $(4n + 27)/(n + 3)$  upravíme na tvar  $n + 15/(n + 3)$ , teda číslo  $n + 3$  musí deliť 15. Z toho dostávame  $n \in \{-18, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 12\}$ .

**Úloha 0.6.** [57-I-3] Máme určitý počet krabičiek a určitý počet guľôčok. Ak dáme do každej krabičky práve jednu guľôčku, ostane nám  $n$  guľôčok. Keď však necháme práve  $n$  krabičiek bokom, môžeme všetky guľôčky rozmiestniť tak, aby ich v každej zostávajúcej krabičke bolo práve  $n$ . Koľko máme krabičiek a koľko guľôčok?

**Riešenie.** Keď označíme  $x$  počet krabičiek a  $y$  počet guľôčok, dostaneme zo zadania sústavu rovníc

$$x + n = y \quad \text{a} \quad (x - n) \cdot n = y \quad (1)$$

s neznámymi  $x, y$  a  $n$  z oboru prirodzených čísel. Vylúčením neznámej  $y$  dostaneme rovnicu  $x + n = (x - n) \cdot n$ , ktorá pre  $n = 1$  nemá riešenie. Pre  $n \geq 2$  dostaneme

$$x = \frac{n^2 + n}{n - 1} = n + 2 + \frac{2}{n - 1}, \quad (2)$$

odkiaľ vidíme, že (prirodzené) číslo  $n - 1$  musí byť deliteľom čísla 2. Teda  $n \in \{2, 3\}$ . Prípustné hodnoty  $n$  dosadíme do (1) a sústavu vyriešime (možno tiež využiť vzťah (2)). Pre  $n = 2$  dostaneme  $x = 6, y = 8$  a pre  $n = 3$  určíme  $x = 6$  a  $y = 9$ .

*Skúška.* Majme šesť krabičiek a osem guľôčok. Keď do každej krabičky dáme práve jednu guľôčku, ostane  $n = 2$  guľôčok. Keď však odoberieme dve krabičky, môžeme do zostávajúcich štyroch rozdeliť guľôčky práve po dvoch. Podmienky úlohy sú teda splnené. Pre šesť krabičiek a deväť guľôčok urobíme skúšku rovnako ľahko.

*Záver.* Buď máme šesť krabičiek a osem guľôčok, alebo šesť krabičiek a deväť guľôčok.

**Komentár.** Úloha, spolu s úlohou predchádzajúcou, je bežnou slovnou úlohou vedúcou na sústavu rovníc. Jej úspešné vyriešenie však vyžaduje umnú manipuláciu s výrazmi.

**Úloha 0.7.** [57-II-4] Nájdite všetky trojice celých čísel  $x, y, z$ , pre ktoré platí

$$x + y\sqrt{3} + z\sqrt{7} = y + z\sqrt{3} + x\sqrt{7}.$$

**Riešenie\*.** Rovnicu prepíšeme na tvar

$$x - y = (z - y)\sqrt{3} + (x - z)\sqrt{7}$$

a umocníme. Po jednoduchšej úprave dostaneme

$$(x - y)^2 - 3(z - y)^2 - 7(x - z)^2 = 2(x - z)(z - y)\sqrt{21}. \quad (1)$$

Pre  $x \neq z$  a  $y \neq z$  nemôže rovnosť (1) platiť, pretože jej pravá strana je v takom prípade číslo iracionálne, zatiaľ čo ľavá strana je číslo celé. Rovnosť teda môže nastať, len keď  $x = z$  alebo  $y = z$ .

V prvom prípade po dosadení  $x = z$  do pôvodnej rovnice dostaneme  $z - y = \sqrt{3}(z - y)$ . Odtiaľ  $z = y = x$ .

V druhom prípade, keď  $y = z$ , dôjdeme analogicky k rovnakému výsledku.

**Záver.** Riešením danej rovnice sú všetky trojice  $(x, y, z) = (k, k, k)$ , kde  $k$  je ľubovoľné celé číslo.

**Komentár.** Aj napriek tomu, že vzorové riešenie úlohy vyzerá zrozumiteľne, úloha riešiteľov krajských kôl potrápila (bola najhoršie hodnotenou úlohou daného krajského kola). Záludnosti sa ukrývajú vo vytyčovaní iracionálnych čísel a nie neznámych, vhodnej úprave rovnice a diskusii o (i)racionalite oboch strán rovnice.

**Úloha 0.8.** [64-I-1] Určte všetky dvojice  $(x, y)$  reálnych čísel, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+4)^2} &= 4-y, \\ \sqrt{(y-4)^2} &= x+8.\end{aligned}$$

**Riešenie.** Vzhľadom na to, že pre každé reálne číslo  $a$  platí  $\sqrt{a^2} = |a|$ , je daná sústava rovníc ekvivalentná so sústavou rovníc

$$\begin{aligned}|x+4| &= 4-y, \\ |y-4| &= x+8.\end{aligned}$$

Z prvej rovnice vidíme, že musí byť  $4 - y \geq 0$ , teda  $y \leq 4$ . V druhej rovnici môžeme teda odstrániť absolútnu hodnotu. Dostaneme tak

$$|y - 4| = 4 - y = x + 8, \text{ t.j. } -y = x + 4.$$

Po dosadení za  $x + 4$  do prvej rovnice dostaneme

$$|-y| = |y| = 4 - y.$$

Keďže  $y \leq 4$ , budeme ďalej uvažovať dva prípady.

Pre  $0 \leq y \leq 4$  riešime rovnicu  $y = 4 - y$ , a teda  $y = 2$ . Nájdenej hodnoty  $y = 2$  zodpovedá po dosadení do druhej rovnice  $x = -6$ .

Pre  $y < 0$  dostaneme rovnicu  $-y = 4 - y$ , ktorá však nemá riešenie.

**Záver.** Daná sústava rovníc má práve jedno riešenie, a to  $(x, y) = (-6, 2)$ .

**Iné riešenie.** Odstránením absolútnych hodnôt v oboch rovniciach, t.j. rozborom štyroch možných prípadov, keď

a)  $(x + 4 \geq 0) \wedge (y - 4 \geq 0)$ , t.j.  $(x \geq -4) \wedge (y \geq 4)$ ,

b)  $(x + 4 \geq 0) \wedge (y - 4 < 0)$ , t.j.  $(x \geq -4) \wedge (y < 4)$ ,

c)  $(x + 4 < 0) \wedge (y - 4 \geq 0)$ , t.j.  $(x < -4) \wedge (y \geq 4)$ ,

d)  $(x + 4 < 0) \wedge (y - 4 < 0)$ , t.j.  $(x < -4) \wedge (y < 4)$ ,

zistíme, že prípady a), b), c) nedávajú (vzhľadom na uvedené obmedzenia v jednotlivých prípadoch) žiadne reálne riešenie. V prípade d) potom dostaneme jediné riešenie  $(x, y) = (-6, 2)$  danej sústavy.

**Komentár.** V úvode riešenia pripomenieme vzťah  $\sqrt{a^2} = |a|$ , ktorý nám pomôže transformovať sústavu zo zadania na sústavu rovníc s absolútnou hodnotou, ktorú by študenti mali byť schopní bez väčších komplikácií vyriešiť.

## Domáca práca

**Úloha 0.9.** [59-II-4] Určte všetky dvojice reálnych čísel  $x, y$ , ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\lfloor x + y \rfloor = 2010,$$

$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

ak a)  $p = 2$ , b)  $p = 3$ . Symbol  $\lfloor x \rfloor$  označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako dané reálne číslo  $x$  (tzv. dolná celá časť reálneho čísla  $x$ ).

**Riešenie\*.** Keďže číslo  $p$  je celé, je aj  $y = \lfloor x \rfloor - p$  celé číslo a  $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y$ . Pôvodná sústava rovníc je teda ekvivalentná so sústavou

$$\lfloor x \rfloor + y = 2010,$$

$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

ktorú ľahko vyriešime napríklad sčítacou metódou. Dostaneme  $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}(2010 + p)$  (čo môže platiť len pre párne  $p$ ) a  $y = \lfloor x \rfloor - p$ .

a) Pre  $p = 2$  je riešením sústavy ľubovoľné  $x \in \langle 1006, 1007 \rangle$  a  $y = 1004$ .

b) Pre  $p = 3$  nemá sústava žiadne riešenie.

**Iné riešenie.** Položme  $\lfloor x \rfloor = a$ , potom  $x = a + t$ , pričom  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ .

a) Pre  $p = 2$  sústavu prepíšeme na tvar  $y = a - 2$  a  $\lfloor 2a - 2 + t \rfloor = 2010$ . Z poslednej rovnice vyplýva  $2a - 2 = 2010$ , odtiaľ  $a = 1006$ . Keďže  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ , vyhovuje pôvodnej sústave každé  $x \in \langle 1006, 1007 \rangle$ , pričom  $y = 1004$ .

b) Pre  $p = 3$  dostávame  $y = a - 3$  a  $\lfloor 2a - 3 + t \rfloor = 2010$ . Posledná rovnica je ekvivalentná so vzťahom  $2a - 3 = 2010$ , ktorému nevyhovuje žiadne celé číslo  $a$ . Pre  $p = 3$  nemá daná sústava rovníc riešenie.

**Úloha 0.10.** [64-S-1] V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$|1 - x| = y + 1,$$

$$|1 + y| = z - 2,$$

$$|2 - z| = x - x^2.$$

**Riešenie\*.** Pravá strana prvej rovnice je nezáporné číslo, čo sa premietne do druhej rovnice, pričom môžeme odstrániť absolútnu hodnotu. Aj pravá strana druhej rovnice je nezáporné číslo, čo sa s využitím rovnosti  $|z - 2| = |2 - z|$  premietne do tretej rovnice, pričom môžeme odstrániť absolútnu hodnotu. Daná sústava má potom tvar

$$|1 - x| = y + 1,$$

$$1 + y = z - 2,$$

$$z - 2 = x - x^2$$

a odtiaľ jednoduchým porovnaním dostávame rovnicu

$$|1 - x| = x - x^2.$$

Pre  $x < 1$  dostaneme rovnicu  $1 - x = x - x^2$  čiže  $(1 - x)^2 = 0$ , ktorej riešenie  $x = 1$  ale predpokladu  $x < 1$  nevyhovuje.

Pre  $x \geq 1$  vyjde rovnica  $x^2 = 1$ ; z jej dvoch riešení  $x = -1$  a  $x = 1$  predpokladu  $x \geq 1$  vyhovuje iba  $x = 1$ .

Z danej sústavy potom jednoducho dopočítame hodnoty  $y = -1$  a  $z = 2$ . Sústava má teda jediné riešenie  $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ .