

## Seminár 34: Opakovanie II – samostatné riešenie úloh

### Úlohy a riešenia

**Úloha 34.1.** [B-51-S-1] **Riešenie\*.** Pre korene  $x_1, x_2$  danej kvadratickej rovnice (pokiaľ existujú) platí podľa Viètových vzťahov rovnosti

$$x_1 + x_2 = -4p \quad \text{a} \quad x_1 x_2 = 5p^2 + 6p - 16,$$

z ktorých vypočítame skúmaný súčet

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-4p)^2 - 2(5p^2 + 6p - 16) = \\ &= 6p^2 - 12p + 32 = 6(p - 1)^2 + 26. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva nerovnosť  $x_1^2 + x_2^2 = 26$ , pritom rovnosť môže nastať, len keď  $p = 1$ . Zistíme preto, či pre  $p = 1$  má daná rovnica skutočne dve rôzne riešenia. Ide o rovnicu  $x^2 + 4x - 5 = 0$  s koreňmi  $x_1 = -5$  a  $x_2 = 1$ . Tým je úloha vyriešená.

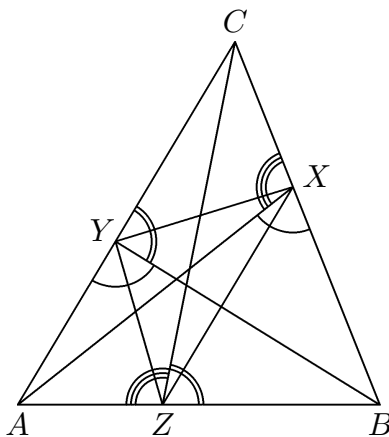
Dodajme, že väčšina riešiteľov pravdepodobne najprv zistí, pre ktoré  $p$  má daná rovnica dva rôzne korene. Pretože pre jej diskriminant  $D$  platí

$$D = (4p)^2 - 4(5p^2 + 6p - 16) = -4p^2 - 24p + 64 = -4(p + 8)(p - 2),$$

sú také p práve čísla z intervalu  $(-8, 2)$ .

*Odpoveď.* Minimálna hodnota súčtu  $x_1^2 + x_2^2$  (rovná 26) zodpovedá jedinému číslu  $p = 1$ .

**Úloha 34.2.** [B-51-S-2] **Riešenie\*.** V tetivovom štvoruholníku  $ABXY$  označme  $\varphi = |\angle AXB| = |\angle AYB|$  veľkosť oboch zhodných obvodových uhlov nad spoločnou tetivou  $AB$  (obr. 1). Podobne označme  $\psi = |\angle BZC| = |\angle BYC|$  a  $\omega = |\angle CZA| = |\angle CZA|$  veľkosti zhodných obvodových uhlov nad



Obr. 1:

tetivami  $BC$  a  $CA$  v tetivových štvoruholníkoch  $BCYZ$  a  $CAZX$ . Keď zapíšeme postupne rovnosti pre každú z troch dvojíc vyznačených susedných uhlov pri vrcholech  $X, Y$  a  $Z$ , dostaneme pre neznáme veľkosti  $\varphi, \psi$  a  $\omega$  sústavu troch lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &= \pi, \\ \psi + \omega &= \pi, \\ \omega + \varphi &= \pi, \end{aligned}$$

ktorá má jediné riešenie  $\varphi = \psi = \omega = \pi/2$ , čo jednoducho zistíme napr. odčítaním ľubovoľných dvoch rovníc a dosadením. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

*Poznámka.* Ak sú naopak body  $X, Y$  a  $Z$  päty výšok trojuholníka  $ABC$ , sú štvoruholníky  $ABXY$ ,  $BCYZ$  a  $CAZX$  tetivové podľa Tálesovej vety.

**Úloha 34.3.** [B-51-S-3] **Riešenie\*.** Pretože pre zvolené číslo  $k$  vždy platí  $18 \leq k + 17 \leq 34$  a medzi číslami  $18, 19, \dots, 34$  má každé z čísel  $12, 13, \dots, 17$  iba jeden násobok (konkrétne dvojnásobok), ľubovoľné číslo

$m \in \{12, 13, \dots, 17\}$  zotrieme iba pri voľbe jediného čísla  $k$  (pri ktorom  $k + 17 = 2m$ ). Napríklad číslo 15 zotrieme iba voľbou  $k = 13$ , číslo 13 iba voľbou  $k = 9$ . Na zotretie oboch čísel 15 a 13 teda musíme niekedy vybrať  $k = 13$  a niekedy neskôr  $k = 9$ . Potom ale v okamihu výberu čísla  $k = 9$  je už zotreté ako číslo 10 (zotreli sme ho najneskôr pri výbere  $k = 13$ ), tak číslo 1 (to sme zotreli hneď pri prvom výbere). Číslo  $k + 17$  je deliteľné deviatimi iba pri výberoch  $k = 1$  a  $k = 10$ , pri žiadnom ďalšom výbere už preto nezotrieme číslo 9. Dokázali sme, že opakovaním danej procedúry nemožno zotrieť všetky tri čísla 15, 13 a 9, tým skôr nemožno zotrieť všetky čísla od 1 do 17.

**Iné riešenie\*.** Pripusťme, že všetky čísla možno zotrieť po  $n$  výberoch čísla  $k$  (spojených so zotieraním všetkých deliteľov čísla  $k + 17$ ) a že každým výberom sa niečo zotrie (inak je taký výber zbytočný). Posledné o. i. znamená, že každé číslo je vybrané najviac raz. Zrejme  $n > 1$  a pre posledné vybrané číslo  $k_n$  musí platiť  $k_n \mid (k_n + 17)$ , t. j.  $k_n = 17$  (možnosť  $k_n = 1$  je vylúčená tým, že číslo 1 je zotreté hneď pri prvom výbere). Pred posledným výberom sú na tabuli len delitele čísla 34, teda okrem čísla 17 prípadne číslo 2. Keby tam číslo 2 nebolo, muselo by opäť platiť  $k_{n-1} \mid (k_{n-1} + 17)$ , čo už možné nie je. Preto nutne  $k_n - 1 = 2$ . Taká voľba je ale zbytočná, pretože číslo  $2 + 17$  je prvočíslo.