Seminár 2: Menová reforma v Tramtárii – samostatné objavovanie matematického problému

Úlohy a riešenia

Úloha 2.1. [[?], úloha 43] **Riešenie*.** Úloha nie je ľahká: ak je tvrdenie pravdivé, tak naraz treba pre všetky celé čísla dokázať, že toľko toliarov možno vyplatiť troj- a päťtoliarovými mincami (v prípade 1, 2, 4 a 7 s vydaním, inak bez neho) – a ak to nie je pravda, tak o nejakom celom čísle treba dokázať, že toľko toliarov nemožno nijakým spôsobom vyplatiť (v prípade 1, 2, 4 a 7 ani s vydaním, inak bez vydania).

O to posledné sa márne pokúšame: naopak, ak vezmeme hocijaké celé číslo, po väčšom alebo menšom počte pokusov vždy nájdeme nejaký spôsob výplaty. To poukazuje na to, že tvrdenie je asi pravdivé.

Ale v tom prípade bude najúčelnejšie, ak celé čísla berieme radom a s každým jednotlivo sa o to pokúsime.

Napríklad 1 toliar možno vyplatiť tak, že z dvoch kusov trojtoliarnikových mincí vydáme päťtoliarnikovú. Stručne:

$$1 = 2 \cdot 3 - 5.$$

Podobne

$$2 = 5 - 3.$$

3 toliare možno vyplatiť jednou mincou. 4 toliare môžeme vyplatiť tak, že „zdvojnásobíme“ 2 toliare:

$$4 = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3.$$

5 toliarov možno vyplatiť jednou mincou, 6 toliarov dvoma trojtoliarnikovými mincami. $7 = 3 + 4$, preto 7 toliarov vyplatíme ako 4 toliare, ale pridáme navyše jednu trojtoliarovú mincu, teda vydáme o 1 menej:

$$7 = 2 \cdot 5 - 3.$$

8 toliarov zase môžeme vyplatiť zdvojnásobením 4, čiže $8 = 4 \cdot 5 - 4 \cdot 3$, to sa ale neoplatí, lebo existuje aj jednoduchší spôsob bez vydania:

$$8 = 5 + 3.$$

Tým sme sa dostali k najdôležitejšej hranici: podľa tvrdenia totiž, začínajúc od hodnoty 8, výplatu možno vyplatiť aj bez vydania.

Pretože aj tak nemôžeme do nekonečna pokračovať v pokusoch o spôsobe výplaty jednotlivých súm, začínajúc nejakým číslom musíme nájsť takú súvislosť (vzťah), ktorá zabezpečuje, že v postupnosti môžeme aj ďalej pokračovať. Čiže ak nejakú sumu toliarov môžeme vyplatiť, samozrejme bez vydania, tak môžeme vyplatiť aj sumu o 1 toliar väčšiu.

Predstavme si, že na stôl sme vyložili sumu n toliarov, ale sa ukáže, že nie toľko, ale $n + 1$ toliarov máme vyplatiť. Ako vieme sumu zväčšiť o 1 toliar, keď nemáme jednotolirovú mincu?

Videli sme, že

$$1 = 2 \cdot 3 - 5.$$

Ak teda zo sumy na stole vezmeme jednu päťtoliarnikovú mincu a nahradíme ju dvoma trojtoliarnikovými, dosiahli sme svoj cieľ.

No dobre, ale čo urobíme v prípade, keď v tej hromade mincí, ktorou sme pôvodne chceli vyplatiť n toliarov, nie je päťtoliarniková (napr. pre $n = 9$ sme na stôl vyložili 3 trojtoliarnikové mince, alebo pre $n = 18$ je tam 6 trojtoliarnikových).

Aj v takomto prípade existuje východisko. Hodnotu 1 toliar možno dostať aj takto:

$$1 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3$$

a na tomto základe sumu vyloženú na stole môžeme zvýšiť o 1 toliar tak, že odoberieme 3 trojtoliarnikové mince a pridáme 2 päťtoliarnikové.

A aká je situácia, keď sa v pôvodne vyloženej sume nenachádza ani päťtoliarniková, ani 3 trojtoliarnikové mince? Tak tam môžu ležať najviac 2 trojtoliarnikové. Ak sme vyložili väčšiu sumu, tak sú tam aspoň 3 trojtoliarnikové mince, alebo aj jedna päťtoliarniková. (Teda suma, ktorá sa mala vyplatiť, je väčšia ako 6; ale 7 to nemôže byť, lebo 7 toliarov nemôžeme „vyložiť na stôl“, tie môžeme vyplatiť len s vydaním. Zato 8 – ako sme videli – už áno.)

Zhrňme teda podstatu našich úvah. Ak nejakú aspoň 8-toliarovú sumu „vyložíme na stôl“, tak v nej bude
a) buď 5-toliarniková minca,
b) alebo aspoň 3 trojtoliarové mince.

V prípade a) vezmeme päťtoliarnikovú mincu a nahradíme ju dvoma trojtoliarnikovými, v prípade b) vezmeme tri trojtoliarnikové a nahradíme ich dvoma päťtoliarnikovými.

Týmto spôsobom v obidvoch prípadoch, opierajúcich sa iba o vlastné mince, môžeme na stôl vyložiť aj o 1 toliar viac: vieme vyplatiť bez vydania.

Pretože pri 8 toliaroch už máme spôsob výplaty bez vydania, túto hodnotu – ak inak nie – opakovaním predošlých postov pri zväčšovaní o jednu, manipuláciu s mincami podľa a) alebo b) môžeme zvyšovať po hocijakú požadovanú hodnotu. Tramtárijský historik teda hovoril pravdu.

Poznámka. Uvedený postup sa nazýva „existenčný dôkaz“. Cieľom je dôkaz existencie spôsobu výplaty podľa tvrdenia. Spôsobom použitým v dôkaze môžeme teoreticky vyhľadať spôsob výplaty hociktorej sumy, ale v praxi je to dosť ťažkopádne. Ak by sme chceli výplatu 49 toliarov bez vydania uskutočniť touto metódou, tak by sa to stalo takto: na stôl by sme vyložili 8 toliarov v tvare $5 + 3$, potom by sme začali mince zamieňať. Situácia na stole sa bude meniť takto:

1 trojtoliar	1 päťtoliar	dovedna	8 toliarov,
3 trojtoliare	0 päťtoliarov	dovedna	9 toliarov,
0 trojtoliarov	2 päťtoliare	dovedna	10 toliarov,
2 trojtoliare	1 päťtoliar	dovedna	11 toliarov,
4 trojtoliare	0 päťtoliarov	dovedna	12 toliarov,
1 trojtoliar	2 päťtoliare	dovedna	13 toliarov, atď.

Je isté, že sa dostaneme aj po 49 toliarov, ale trvalo by to dosť dlho, pokiaľ by sme týmto spôsobom „vykúzlili“ požadovanú sumu. V praxi je užitočné to urobiť šikovnejšie.

Iné riešenie*. Spôsob výplaty pre 1 až 10 toliarov nájdeme tak ako v predchádzajúcom riešení. Pretože každé prirodzené číslo n dáva po delení tromi buď (I) zvyšok 0, alebo (II) zvyšok 1, alebo (III) zvyšok 2, teda ho možno napísať v tvare (I) $n = 3k$, alebo (II) $n = 3k + 1$ alebo $n = 3k + 2$ (k je prirodzené číslo alebo 0) a tak, ak $n > 10$, potom

v prípade (I) $n - 9 = 3k - 9 = 3(k - 3)$,
v prípade (II) $n - 10 = 3k + 1 - 10 = 3k - 9 = 3(k - 3)$,
v prípade (III) $n - 8 = 3k + 2 - 8 = 3k - 6 = 3(k - 2)$

je to kladný celočíselný násobok troch, preto spôsob výplaty n toliarov dostaneme, ak k sume

v prípade (I) 9 toliarov,
v prípade (II) 10 toliarov,
v prípade (III) 8 toliarov,

pridáme potrebný počet trojtoliarov.

Komentár. Je pravdepodobné, že väčšina študentov bude zo začiatku skúšať jednotlivé možnosti, ako zaplatiť malé sumy a až potom sa bude snažiť svoje úvahy zovšeobecniť. Je vhodné študentom klásť otázky, ktoré budú študentov stimulovať k premýšľaniu, či sú ich závery skutočne správne. Ak by sa stalo, že študenti neprídu na druhé riešenie úlohy, bude určite zaujímavé im ho ukázať, keďže ide o veľmi elegantný spôsob, ako sa s úlohou vysporiadať.

Úloha 2.2. [[?], úloha 44] **Riešenie*.** Všimnime si, že päťtoliar zostal bez zmeny, len trojtoliar nahradil osemtoliar.

Prvá časť tvrdenia je skutočne zrejmá. Pretože

$$3 = 8 - 5$$

a ak je aj vydanie povolené, tak vlastne nemáme nijaký problém: postupujeme ako pri troj- a päťtoliarových minciach.

Pravdivá je aj druhá časť – hoci to už nie je také samozrejmé. Na základe predošlého môžeme aj teraz použiť na pridanie 1 toliara „recepty“ z predchádzajúcej úlohy.

$$1 = 2 \cdot 3 - 5 = 2(8-5) - 5 = 2 \cdot 8 - 2 \cdot 5 - 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5,$$
$$1 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 2 \cdot 5 - 3(8-5) = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 8 + 3 \cdot 5 = 5 \cdot 5 - 3 \cdot 8.$$

Teda nejakú sumu vieme zvýšiť o jeden toliar, ale pretože je reč o výplate „bez vydania“, tento rast musíme dosiahnuť výmenou, čiže už z vyložených peňazí musíme vedieť odobrať $3 \cdot 5$ alebo $3 \cdot 8$ toliarov.

Postupné pokračovanie je isté začínajúc sumou, keď je reč o toľkých toliaroch

1. koľko môžeme vyplatiť päťtoliarmi a osemtoliarmi bez vydania, a to tak, že buď paťtoliarov alebo osemtoliarov máme aspoň 3,

2. od ktorých viac bez najmenej 3 päťtoliarnikov alebo najmenej 3 osemtoliarov určite nevieme vyložiť.

Požiadavku 2 suma

$$26 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8$$

a od toho väčšia určite spĺňa, ale požiadavku 1 nie. To platí aj o 27 toliaroch, avšak 28 už vyhovuje:

$$28 = 4 \cdot 5 + 8.$$

Teda 28 toliarov možno vyplatiť aj bez vydania päťtoliarmi a osemtoliarmi. Vychádzajúc z toho platí, že ak istú (celočíselnú) sumu môžeme takto vyplatiť, potom môžeme vyplatiť aj sumu o 1 toliar väčšiu. Buď tak, že 3 paťtoliare nahradíme 2 osemtoliarmi alebo tak, že 3 osemtoliare nahradíme 5 päťtoliarmi.

Komentár. Úloha pravdepodobne nebude pre študentov veľmi náročná, zaujímavá však bude diskusia o tom, aká najväčšia suma sa ešte bez vydávania vyplatiť nedá.

Úloha 2.3. [[?], úloha 45] **Riešenie*.** Čo zabezpečovalo v predchádzajúcej úlohe to, že môžeme aj naďalej súhlasne odpovedať?

To, že hodnota novej mince sa rovnala súčtu dvoch predošlých: $8 = 3 + 5$. Vynechanú hodnotu (trojtoliar) preto môžeme nahradiť rozdielom teraz používaných $3 = 8 - 5$.

Všetky tri tvrdenia sú pravdivé.

I. Práve tak, ako sme v predošlej úlohe prešli od trojtoliarov a päťtoliarov na paťtoliarové a osemtoliarové platidlá, tak môžeme z týchto prejsť na 8- a $8 + 5 = 13$-toliarové. Príslušný vzťah je $5 = 13 - 8$. S jeho pomocou z „receptov“ riešenia predošlej úlohy môžeme odvodiť nové a na ich základe môžeme napísať aj nové podmienky 1 a 2. Práve tak možno dokázať, že od istého čísla ďalej budú splnené.

II. Ak o hociktorých dvoch menových hodnotách, povedzme o a a b ($a < b$) je už dokázané, že pomocou nich možno vyplatiť hocijakú celočíselnú sumu toliarov, a t od určitého čísla začínajúc všetky väčšie už bez vydania, tak podľa predošlého textu možno dokázať, že to isté platí aj pre menové hodnoty b a $a + b$.

V konečnom dôsledku dôjdeme k tomu, že uvažované dve hodnoty môžu byť hociktoré dve po sebe idúce čísla Fibonacciho postupnosti:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Môžu to teda byť 8 a 13, 21 a 34 alebo 144 a 233 – tvrdenia uvedené v úlohe sú vo všetkých prípadoch splnené.

Úloha 2.4. [[?], úloha 46] **Riešenie*.** *Ani jedno.*

V prípade a) to môžeme hneď zbadať: totiž osemtoliar môžeme premeniť na 4 dvojtoliare. Ak by teda týmito dvoma hodnotami bolo možné vyplatiť hocijakú (celočíselnú) sumu, tak by sme ju mohli vyplatiť v samých dvojtoliaroch. To ale nie je pravda: dvojtoliarmi môžeme vyplatiť len párnu sumu toliarov. Vydanie v tomto prípade zrejme nemá význam.

Situácia je taká istá aj v prípade b): týmito dvoma hodnotami možno vyplatiť len takú sumu toliarov, ktorá je celočíselným násobkom troch (deliteľná troma bezo zvyšku).

Prípad c) je len zdanlivo zložitejší. Nakoľko totiž

$$21 = 7 \cdot 3, 144 = 48 \cdot 3, \tag{1}$$

tak obidve hodnoty môžeme premeniť na trojtoliare. Ak by týmito dvoma hodnotami bolo možné vyplatiť hociktorú sumu, tak by to bolo možné aj samými trjtoliarmi. To ale zrejme nie je pravda. Preto aj v c) navrhovanými hodnotami možno vyplatiť len takú sumu toliarov, ktorá je deliteľná 3.

Poznámka. Vhodnosť vymenovaných dvojíc hodnôt viditeľne prekazilo to, že 2 a 8 sú súčasne deliteľné 2, 3 a 21 zase 3. Nie je teda ťažké rozpoznať spoločnú matematickú podstatu všetkých troch prípadov: ak dve celé čísla majú spoločného deliteľa väčšieho ako 1, tak mince v príslušných hodnotách nie sú vhodné na výplatu hocijakej sumy (ani s vydaním).

Komentár. Prvá časť tejto úlohy je relatívne jednoduchá a mala by študentom pomôcť vyvodiť závery v častiach b) a c), kde najmä pre poslednú dvojicu nemusí byť na prvý pohľad zrejmé, že na vyplácanie ľubovoľnej sumy vhodná nie je.

Úloha 2.5. [[?], úloha 47] **Riešenie*.** *Áno.*

Nápad riešenia vyplýva z prvých dvoch úloh. Po krátkom skúšaní nie je ťažké prísť na to, že z 3 kusov štvortoliarov vydaním jedného jedenásťtoliara zvýši práve jeden toliar. Rovnaká je situácia, keď z 3 kusov jedenásťtoliarov vydáme 8 štvortoliarov.

Keďže

$$3 \cdot 4 - 1 \cdot 11 = 1 \quad \text{a} \quad 3 \cdot 11 - 8 \cdot 4 = 1, \tag{2}$$

po násobení oboch rovností číslom k dostaneme

$$3k \cdot 4 - k \cdot 11 = k \quad \text{a} \quad 3k \cdot 11 - 8k \cdot 4 = k.$$

Teda hocijaké (t.j. k) celočíselné množstvo toliarov môžeme vyplatiť hoci aj tak, že z trikrát takého počtu štvrotoliarov si vyberieme práve toľko jedenásťtoliarov, alebo aj tak, že z trikrát takého počtu jedenásťtoliarov vyberieme osemkrát toľko štvortoliarov.

Z rovnosti 2 vyplýva aj to, že 30 a viac toliarov môžeme vyplatiť aj bez vydania. Veď

$$30 = 2 \cdot 11 + 2 \cdot 4 \quad \text{a} \quad 31 = 11 + 5 \cdot 4$$

a odtiaľ začínajúc už vždy môžeme zvyšovať počet toliarov buď tak, že jeden jedenásťtoliar zameníme za 3 štvortoliare alebo tak, že 8 štvortoliarov zameníme za 3 jedenásťtoliare. Totiž sumu 32 a viac toliarov môžeme vyplatiť len tak, ak buď je v nej jedenásťtoliar alebo aspoň 8 štvortoliarov.

Komentár. Úloha je náročnejšia v tom, že je otvorená a zo zadania nie je jasné, či máme tvrdenie vyvrátiť alebo dokázať. Bude tak zaujímavé sledovať, akými cestami a akými spôsobmi sa budú študentské riešenia odoberať. Ak sa v triede vyskytnú dva protikladné názory, je to výborná príležitosť nechať študentov argumentovať a hľadať chyby vo vlastných riešeniach.

Úloha 2.6. [[?], úloha 48] **Riešenie*.** Násobky piatich končia na 0 alebo 5. Teda ako od 49 odčítame číslo končiace na 0 alebo 5, vždy dostaneme číslo končiace na 9 alebo 4. Potom suma trojtoliarov bude také číslo, ktoré je menšie ako 49, končí sa na 4 alebo 9 a je (prirodzene) násobkom 3.

Takéto čísla sú len tri: 9, 24 a 39. Pri výplate 49 toliarov celková suma vyplatená trojtoliarmi môže byť len 9, 24 alebo 39 toliarov. Preto sú možné len tri spôsoby výplaty:

$$3 \cdot 3 + 8 \cdot 5 = 49,$$
$$8 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 49,$$
$$13 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 49.$$

Komentár. Záverečná úloha seminára je relatívne jednoduchou bodkou, avšak trénuje systematický prístup k práci, preto jej zaradenie považujeme za vhodné.