Seminár 19

Téma

Algebraické výrazy a rovnice – zložitejšie rovnice a ich systémy

Ciele

Zoznámiť študentov s ďalšími typmi rovníc a ich sústav (iracionálne koeficienty, dolná celá časť), tieto úlohy, spolu so slovnými úlohami precvičiť.

Úlohy a riešenia

Úloha 19.1. [59-S-1] Určte všetky hodnoty reálnych parametrov p, q, pre ktoré má každá z rovníc

$$x(x-p) = 3+q, \qquad x(x+p) = 3-q$$

v obore reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých aritmetický priemer je jedným z koreňov zvyšnej rovnice.

Riešenie*. Z Viètových vzťahov pre korene kvadratickej rovnice (ktoré vyplývajú z rozkladu daného kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov) ľahko zistíme, že súčet koreňov prvej rovnice je p, takže ich aritmetický priemer je $\frac{1}{2}p$. Toto číslo má byť koreňom druhej rovnice, preto

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{3p}{2} = 3 - q. \qquad (1)$$

Podobne súčet koreňov druhej rovnice je $-p$, ich aritmetický priemer je $-\frac{1}{2}p$, a preto

$$-\frac{p}{2} \cdot \left(-\frac{3p}{2}\right) = 3 + q. \qquad (2)$$

Porovnaním oboch vzťahov (1) a (2) máme $3-q = 3+q$, čiže $q = 0$ a z (1) potom vyjde $p = 2$ alebo $p = -2$.

Z oboch nájdených riešení dostaneme tú istú dvojicu rovníc $x(x-2) = 3$, $x(x+2) = 3$. Korene prvej z nich sú čísla -1 a 3, ich aritmetický priemer je 1. Korene druhej rovnice sú čísla 1 a -3, ich aritmetický priemer je -1.

Úloha 19.2. [59-I-3-N1] Určte $\lfloor 0 \rfloor$, $\lfloor 3{,}5 \rfloor$, $\lfloor 2{,}1 \rfloor$, $\lfloor -4 \rfloor$, $\lfloor -3{,}9 \rfloor$, $\lfloor -0{,}2 \rfloor$. Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako číslo x, tzv. dolnú celú časť reálneho čísla x.

Riešenie. $\lfloor 0 \rfloor = 0$, $\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$, $\lfloor 2{,}1 \rfloor = 2$, $\lfloor -4 \rfloor = -4$, $\lfloor -3{,}9 \rfloor = -4$, $\lfloor -0{,}2 \rfloor = -1$.

Úloha 19.3. [59-I-3-N2] Nech a je celé číslo a $t \in \langle 0; 1)$. Určte $\lfloor a \rfloor$, $\lfloor a+t \rfloor$, $\lfloor a + \frac{1}{2}t \rfloor$, $\lfloor a-t \rfloor$, $\lfloor a+2t \rfloor$, $\lfloor a-2t \rfloor$.

Riešenie. $\lfloor a \rfloor = a$, $\lfloor a+t \rfloor = a$, $\lfloor a + \frac{1}{2}t \rfloor = a$, $\lfloor a-t \rfloor = a$, ak $t = 0$, resp. $\lfloor a-t \rfloor = a-1$, ak $t \neq 0$, $\lfloor a+2t \rfloor = a$, ak $t < 0,5$, resp. $\lfloor a+2t \rfloor = a+1$, ak $t \geq 0,5$, $\lfloor a-2t \rfloor = a$, ak $t = 0$, resp. $\lfloor a-2t \rfloor = a-1$ ak $t \leq 0,5$ a $\lfloor a-2t \rfloor = a-2$ ak $t > 0,5$.

Úloha 19.4. [59-I-3] Určte všetky reálne čísla x, ktoré vyhovujú rovnici $4x - 2\lfloor x \rfloor = 5$.

Riešenie*. Položme $\lfloor x \rfloor = a$, potom $x = a + t$, pričom $t \in \langle 0, 1)$, a rovnicu $4(a + t) - 2a = 5$ ekvivalentne upravme na tvar $a = \frac{5}{2} - 2t$. Aby bolo číslo a celé, musí byť $2t = k \cdot \frac{1}{2}$, pričom k je nepárne číslo. Navyše $2t \in \langle 0, 2)$. Teda buď $2t = \frac{1}{2}$ a $a = 2$, alebo $2t = \frac{3}{2}$ a $a = 1$. Pôvodná rovnica má preto dve riešenia: $x_1 = 2,25$ a $x_2 = 1,75$.

Iné riešenie. Rovnicu upravíme na tvar $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$. Taká rovnica bude splnená práve vtedy, keď číslo $2x - \frac{5}{2}$ bude celé a bude spĺňať nerovnosti $x - 1 < 2x - \frac{5}{2} \leq x$, ktoré sú ekvivalentné s podmienkou $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$. Pre takéto x zrejme hodnoty výrazu $2x - \frac{5}{2}$ vyplnia interval $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\rangle$. V ňom ležia práve dve celé čísla 1 a 2, teda hľadané x nájdeme z rovníc $2x - \frac{5}{2} = 1$ a $2x - \frac{5}{2} = 2$.

Komentár. Aj napriek tomu, že funkcia dolná celá časť nie je bežným učivom preberaným v školách, nemala by analýza úlohy robiť žiakom veľké problémy.

Úloha 19.5. [57-I-3-N1] Určte všetky celé čísla n, pre ktoré nadobúda zlomok $(4n+27)/(n+3)$ celočíselné hodnoty.

Riešenie. Zlomok $(4n + 27)/(n + 3)$ upravíme na tvar $n + 15/(n + 3)$, teda číslo $n + 3$ musí deliť 15. Z toho dostávame $n \in \{-18, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 12\}$.

Úloha 19.6. [57-I-3] Máme určitý počet krabičiek a určitý počet guľôčok. Ak dáme do každej krabičky práve jednu guľôčku, ostane nám n guľôčok. Keď však necháme práve n krabičiek bokom, môžeme všetky guľôčky rozmiestniť tak, aby ich v každej zostávajúcej krabičke bolo práve n. Koľko máme krabičiek a koľko guľôčok?

Riešenie. Keď označíme x počet krabičiek a y počet guľôčok, dostaneme zo zadania sústavu rovníc

$$x + n = y \quad \text{a} \quad (x - n) \cdot n = y \qquad (1)$$

s neznámymi x, y a n z oboru prirodzených čísel. Vylúčením neznámej y dostaneme rovnicu $x + n = (x - n) \cdot n$, ktorá pre $n = 1$ nemá riešenie. Pre $n \geq 2$ dostaneme

$$x = \frac{n^2 + n}{n - 1} = n + 2 + \frac{2}{n - 1}, \qquad (2)$$

odkiaľ vidíme, že (prirodzené) číslo $n - 1$ musí byť deliteľom čísla 2. Teda $n \in \{2, 3\}$. Prípustné hodnoty n dosadíme do (1) a sústavu vyriešime (možno tiež využiť vzťah (2)). Pre $n = 2$ dostaneme $x = 6, y = 8$ a pre $n = 3$ určíme $x = 6$ a $y = 9$.

Skúška. Majme šesť krabičiek a osem guľôčok. Keď do každej krabičky dáme práve jednu guľôčku, ostane $n = 2$ guľôčok. Keď však odoberieme dve krabičky, môžeme do zostávajúcich štyroch rozdeliť guľôčky práve po dvoch. Podmienky úlohy sú teda splnené. Pre šesť krabičiek a deväť guľôčok urobíme skúšku rovnako ľahko.

Záver. Buď máme šesť krabičiek a osem guľôčok, alebo šesť krabičiek a deväť guľôčok.

Komentár. Úloha, spolu s úlohou predchádzajúcou, je bežnou slovnou úlohou vedúcou na sústavu rovníc. Jej úspešné vyriešenie však vyžaduje umnú manipuláciu s výrazmi.

Úloha 19.7. [57-II-4] Nájdite všetky trojice celých čísel x, y, z, pre ktoré platí

$$x + y\sqrt{3} + z\sqrt{7} = y + z\sqrt{3} + x\sqrt{7}.$$

Riešenie*. Rovnicu prepíšeme na tvar

$$x - y = (z - y)\sqrt{3} + (x - z)\sqrt{7}$$

a umocníme. Po jednoduchej úprave dostaneme

$$(x - y)^2 - 3(z - y)^2 - 7(x - z)^2 = 2(x - z)(z - y)\sqrt{21}. \qquad (1)$$

Pre $x \neq z$ a $y \neq z$ nemôže rovnosť (1) platiť, pretože jej pravá strana je v takom prípade číslo iracionálne, zatiaľ čo ľavá strana je číslo celé. Rovnosť teda môže nastať, len keď $x = z$ alebo $y = z$.

V prvom prípade po dosadení $x = z$ do pôvodnej rovnice dostaneme $z - y = \sqrt{3}(z - y)$. Odtiaľ $z = y = x$.

V druhom prípade, keď $y = z$, dôjdeme analogicky k rovnakému výsledku.

Záver. Riešením danej rovnice sú všetky trojice $(x, y, z) = (k, k, k)$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

Komentár. Aj napriek tomu, že vzorové riešenie úlohy vyzerá zrozumiteľne, úloha riešiteľov krajských kôl potrápila (bola najhoršie hodnotenou úlohou daného krajského kola). Záludnosti sa ukrývajú vo vytyčovaní iracionálnych čísel a nie neznámych, vhodnej úprave rovnice a diskusii o (i)racionalite oboch strán rovnice.

Úloha 19.8. [64-I-1] Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\sqrt{(x + 4)^2} = 4 - y,$$
$$\sqrt{(y - 4)^2} = x + 8.$$

Riešenie. Vzhľadom na to, že pre každé reálne číslo a platí $\sqrt{a^2} = |a|$, je daná sústava rovníc ekvivalentná so sústavou rovníc

$$|x + 4| = 4 - y,$$
$$|y - 4| = x + 8.$$

Z prvej rovnice vidíme, že musí byť $4 - y \geq 0$, teda $y \leq 4$. V druhej rovnici môžeme teda odstrániť absolútnu hodnotu. Dostaneme tak

$$|y - 4| = 4 - y = x + 8, \text{ t. j. } -y = x + 4.$$

Po dosadení za $x + 4$ do prvej rovnice dostaneme

$$|-y| = |y| = 4 - y.$$

Keďže $y \leq 4$, budeme ďalej uvažovať dva prípady.

Pre $0 \leq y \leq 4$ riešime rovnicu $y = 4 - y$, a teda $y = 2$. Nájdenej hodnote $y = 2$ zodpovedá po dosadení do druhej rovnice $x = -6$.

Pre $y < 0$ dostaneme rovnicu $-y = 4 - y$, ktorá však nemá riešenie.

Záver. Daná sústava rovníc má práve jedno riešenie, a to $(x, y) = (-6, 2)$.

Iné riešenie. Odstránením absolútnych hodnôt v oboch rovniciach, t. j. rozborom štyroch možných prípadov, keď

a) $(x + 4 \geq 0) \wedge (y - 4 \geq 0)$, t. j. $(x \geq -4) \wedge (y \geq 4)$,
b) $(x + 4 \geq 0) \wedge (y - 4 < 0)$, t. j. $(x \geq -4) \wedge (y < 4)$,
c) $(x + 4 < 0) \wedge (y - 4 \geq 0)$, t. j. $(x < -4) \wedge (y \geq 4)$,
d) $(x + 4 < 0) \wedge (y - 4 < 0)$, t. j. $(x < -4) \wedge (y < 4)$,

zistíme, že prípady a), b), c) nedávajú (vzhľadom na uvedené obmedzenia v jednotlivých prípadoch) žiadne reálne riešenie. V prípade d) potom dostaneme jediné riešenie $(x, y) = (-6, 2)$ danej sústavy.

Komentár. V úvode riešenia pripomenieme vzťah $\sqrt{a^2} = |a|$, ktorý nám pomôže transformovať sústavu zo zadania na sústavu rovníc s absolútnou hodnotou, ktorú by študenti mali byť schopní bez väčších komplikácií vyriešiť.

Domáca práca

Úloha 19.9. [59-II-4] Určte všetky dvojice reálnych čísel x, y, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\lfloor x+y \rfloor = 2010,$$
$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

ak a) $p = 2$, b) $p = 3$. Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako dané reálne číslo x (tzv. dolná celá časť reálneho čísla x).

Riešenie*. Keďže číslo p je celé, je aj $y = \lfloor x \rfloor - p$ celé číslo a $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y$. Pôvodná sústava rovníc je teda ekvivalentná so sústavou

$$\lfloor x \rfloor + y = 2010,$$
$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

ktorú ľahko vyriešime napríklad sčítacou metódou. Dostaneme $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}(2010 + p)$ (čo môže platiť len pre párne p) a $y = \lfloor x \rfloor - p$.

a) Pre $p = 2$ je riešením sústavy ľubovoľné $x \in \langle 1006, 1007)$ a $y = 1004$.

b) Pre $p = 3$ nemá sústava žiadne riešenie.

Iné riešenie. Položme $\lfloor x \rfloor = a$, potom $x = a + t$, pričom $t \in \langle 0, 1)$.

a) Pre $p = 2$ sústavu prepíšeme na tvar $y = a - 2$ a $\lfloor 2a - 2 + t \rfloor = 2010$. Z poslednej rovnice vyplýva $2a - 2 = 2010$, odtiaľ $a = 1006$. Keďže $t \in \langle 0, 1)$, vyhovuje pôvodnej sústave každé $x \in \langle 1006, 1007)$, pričom $y = 1004$.

b) Pre $p = 3$ dostávame $y = a - 3$ a $\lfloor 2a - 3 + t \rfloor = 2010$. Posledná rovnica je ekvivalentná so vzťahom $2a - 3 = 2010$, ktorému nevyhovuje žiadne celé číslo a. Pre $p = 3$ nemá daná sústava rovníc riešenie.

Úloha 19.10. [64-S-1] V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$|1 - x| = y + 1,$$
$$|1 + y| = z - 2,$$
$$|2 - z| = x - x^2.$$

Riešenie*. Pravá strana prvej rovnice je nezáporné číslo, čo sa premietne do druhej rovnice, pričom môžeme odstrániť absolútnu hodnotu. Aj pravá strana druhej rovnice je nezáporné číslo, čo sa s využitím rovnosti $|z - 2| = |2 - z|$ premietne do tretej rovnice, pričom môžeme odstrániť absolútnu hodnotu. Daná sústava má potom tvar

$$|1 - x| = y + 1,$$
$$1 + y = z - 2,$$
$$z - 2 = x - x^2$$

a odtiaľ jednoduchým porovnaním dostávame rovnicu

$$|1 - x| = x - x^2.$$

Pre $x < 1$ dostaneme rovnicu $1 - x = x - x^2$ čiže $(1 - x)^2 = 0$, ktorej riešenie $x = 1$ ale predpokladu $x < 1$ nevyhovuje.

Pre $x \geq 1$ vyjde rovnica $x^2 = 1$; z jej dvoch riešení $x = -1$ a $x = 1$ predpokladu $x \geq 1$ vyhovuje iba $x = 1$.

Z danej sústavy potom jednoducho dopočítame hodnoty $y = -1$ a $z = 2$. Sústava má teda jediné riešenie $(x, y, z) = (1, -1, 2)$.