

Seminár 8: Teória čísel II – úlohy o najmenšom spoločnom násobku a najväčšom spoločnom deliteli

Ciele

Zoznámiť sa s metódami riešenia príkladov o spoločných deliteľoch a násobkoch, upevniť znalosti zo seminára predchádzajúceho.

Úlohy a riešenia

Úloha 8.1. [61-I-3-N1] Určte, pre ktoré prirodzené čísla a, b platí $(a, b) = 10$ a zároveň $[a, b] = 150$.

Riešenie*. Pretože $10 = 2 \cdot 5$ a $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, požadované rovnosti sú splnené práve vtedy, keď $a = 2 \cdot 3^s \cdot 5^t$ a $b = 2 \cdot 3^u \cdot 5^v$, kde $\{s, u\} = \{0, 1\}$ a $\{t, v\} = \{1, 2\}$. Riešením je teda jedna zo štvoríc $\{a, b\} = \{10, 150\}$ alebo $\{a, b\} = \{30, 50\}$.

Komentár. Úloha je relatívne jednoduchá a nevyžaduje žiadne špeciálne znalosti, zároveň však nie je triviálna. Tvorí tak príjemné preklopenie medzi školskými a olympiádovými príkladmi.

Úloha 8.2. [60-I-5-N1] Nech d je najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel a a b . Ukážte, že čísla a/d a b/d sú celé a nesúdeliteľné.

Riešenie. Ak je d najväčším spoločným deliteľom čísel a a b , potom existujú prirodzené čísla u a v také, že $a = ud$ a $b = vd$, čím sme dokázali prvú časť tvrdenia. Druhú dokážeme sporom. Predpokladajme, že a/d a b/d nie sú nesúdeliteľné. Potom existuje ich najväčší spoločný deliteľ d_1 . Číslo d_1 však potom delí aj čísla a a b , čo je spor s predpokladom, že $d = (a, b)$.

Komentár. Táto mini-úloha je prípravným krokom k nasledujúcemu všeobecnejšiemu tvrdeniu a zároveň môže pripomenúť použitie dôkazu sporom.

Úloha 8.3. [60-I-5-N2] Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b platí vzťah

$$[a, b] \cdot (a, b) = ab.$$

Riešenie. Nech $d = (a, b)$, potom $a = ud$, $b = vd$ pre nesúdeliteľné u a v , a teda $[a, b] = uvd$. Porovnaním ľavej a pravej strany dokazovanej nerovnosti dostávame $uvd \cdot d = ud \cdot vd$, čo je pravdivé tvrdenie, teda vzťah je dokázaný.

Alternatívne môžeme vzťah dokázať úvahou o exponentoch prvočísel, z ktorých sú čísla a a b zložené. Nech $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ a $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, kde p_1 až p_k sú prvočísla a α_k, β_k prirodzené čísla. Potom

$$\begin{aligned}(a, b) &= p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot p_2^{\min\{\alpha_2, \beta_2\}} \cdots p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}, \\ [a, b] &= p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot p_2^{\max\{\alpha_2, \beta_2\}} \cdots p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}, \\ ab &= p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdots p_k^{\alpha_k + \beta_k}.\end{aligned}$$

Keďže pre akékoľvek čísla α, β platí $\max\{\alpha, \beta\} + \min\{\alpha, \beta\} = \alpha + \beta$, a to vo všetkých prípadoch $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, je naše tvrdenie dokázané.

Komentár. Predchádzajúce tvrdenie je stavebným kameňom mnohých úloh o spoločných násobkoch a deliteľoch, najmä myšlienka zápisu prirodzených čísel a a b v tvare $a = ud$ a $b = vd$, kde u a v sú

prirodzené čísla také, že $(u, v) = 1$ a $d = (a, b)$ nájde uplatnenie veľmi často.

Úloha 8.4. [64-I-5-N4] Platí pre každé tri prirodzené čísla a, b, c a ich najväčší spoločný deliteľ d a ich najmenší spoločný násobok n rovnosť $abc = nd$?

Riešenie. Neplatí, uvedieme protipríklad. Napríklad pre čísla 15, 18 a 24 je $d = (15, 18, 24) = 3$, $n = [15, 18, 24] = 360$. Ďalej $15 \cdot 18 \cdot 24 = 6480$ a $(15, 18, 24) \cdot [15, 18, 24] = 3 \cdot 360 = 1080$, to však nie sú rovnaké čísla a tvrdenie neplatí.

Komentár. Všeobecnejší pohľad na predchádzajúci problém by sme dostali skrz pohľad na exponenty prvočísel, z ktorých sú čísla a, b, c zložené. Skúmaná rovnosť nastane len v prípade, že sú všetky tri čísla navzájom po dvoch nesúdeliteľné.

Zároveň úloha demonštruje riešenie uvedením protipríkladu, čo je princíp, s ktorým sme sa v seminároch zatiaľ nestretli a jeho spomenutie je určite vhodné.

Úloha 8.5. [64-I-5-N5] Ak majú prirodzené čísla a, b najväčšieho spoločného deliteľa d , majú rovnakého najväčšieho spoločného deliteľa aj čísla $a, b, a - b, a + b$. Dokážte. Platí rovnaké tvrdenie pre najmenší spoločný násobok?

Riešenie. Najväčší spoločný deliteľ týchto štyroch čísel nebude určite väčší ako d (ak by bol, potom by d nebol najväčší spoločný deliteľ čísel a a b , čo by bolo v spore s predpokladom úlohy). Stačí teda ukázať, že d delí $a + b$ a $a - b$. Ak zapíšeme a a b v tvare $a = ud$ a $b = vd$, pričom pre prirodzené čísla u, v platí $(u, v) = 1$, bude potom $a + b = ud + vd = (u + v)d$, $a - b = ud - vd = (u - v)d$. Vidíme, že d delí súčet aj rozdiel čísel a a b , tvrdenie je teda dokázané.

Tvrdenie pre najmenší spoločný násobok neplatí, uvedieme protipríklad. Pre čísla $a = 12$, $b = 8$, $a + b = 20$, $a - b = 4$, $[12, 8] = 24$, avšak $[12, 8, 20, 4] = 120$.

Komentár. Úloha precvičuje dôkaz všeobecného tvrdenia a opäť prináša protipríklad ako dostatočný argument.

Úloha 8.6. [61-I-3-N4, resp. 50-II-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b , pre ktoré platí $a + b + [a, b] + (a, b) = 50$.

Riešenie*. Položme $a = ud$, $b = vd$, kde d je najväčší spoločný deliteľ čísel a, b , prirodzené čísla u, v sú nesúdeliteľné a $[a, b] = uvd$. Podľa zadania má platiť $ud + vd + uvd + d = 50$. Inak napísané, $(1 + u)(1 + v)d = 50$. Nájdime preto všetky rozklady čísla 50 na súčin troch prirodzených čísel $d, u + 1, v + 1$, z ktorých posledné dve sú väčšie ako 1. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a \leq b$, t.j. $u \leq v$. Dostaneme nasledujúce možnosti.

| d | $u + 1$ | $v + 1$ | u | v | a | b |
|-----|---------|---------|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 2 | 25 | 1 | 24 | 1 | 24 |
| 1 | 5 | 10 | 4 | 9 | 4 | 9 |
| 2 | 5 | 5 | 4 | 4 | 8 | 8 |
| 5 | 2 | 5 | 1 | 4 | 5 | 20 |

V prípade $d = 2$ dostaneme $u = v = 4$, to je však spor s tým, že u a v sú nesúdeliteľné. Preto má úloha práve tri riešenia.

Komentár. Úloha okrem vhodného zapísania čísel a, b a $[a, b]$ vyžaduje ešte vhodnú úpravu rovnosti zo zadania, opäť tak kombinuje algebraické poznatky s poznatkami z oblasti teórie čísel.

Úloha 8.7. [61-S-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b , pre ktoré platí rovnosť množín

$$\{a \cdot [a, b], b \cdot (a, b)\} = \{45, 180\}.$$

Riešenie*. Z danej rovnosti vyplýva, že číslo b je nepárne (inak by obe čísla naľavo boli párne), a teda číslo a je párne (inak by obe čísla naľavo boli nepárne). Rovnosť množín preto musí byť splnená nasledovne:

$$a \cdot [a, b] = 180 \quad \text{a} \quad b \cdot (a, b) = 45. \quad (1)$$

Keďže číslo a delí číslo $[a, b]$, je číslo $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ deliteľné druhou mocninou (párneho) čísla a , takže musí platiť buď $a = 2$, alebo $a = 6$.

V prípade $a = 2$ (vzhľadom na to, že b je nepárne) platí

$$a \cdot [a, b] = 2 \cdot [2, b] = 2 \cdot 2b = 4b,$$

čo znamená, že prvá rovnosť v 1 je splnená jedine pre $b = 45$. Vtedy $b \cdot (a, b) = 45 \cdot (2, 45) = 45$, takže je splnená aj druhá rovnosť v 1, a preto dvojica $a = 2, b = 45$ je riešením úlohy.

V prípade $a = 6$ podobne dostaneme

$$a \cdot [a, b] = 6 \cdot [6, b] = 6 \cdot 2 \cdot [3, b] = 12 \cdot [3, b],$$

čo znamená, že prvá rovnosť v 1 je splnená práve vtedy, keď $[3, b] = 15$. Tomu vyhovujú jedine hodnoty $b = 5$ a $b = 15$. Z nich však iba hodnota $b = 15$ spĺňa druhú rovnosť v 1, ktorá je teraz v tvare $b \cdot (6, b) = 45$. Druhým riešením úlohy je teda dvojica $a = 6, b = 15$, žiadne ďalšie riešenia neexistujú. *Záver.* Hľadané dvojice sú dve, a to $a = 2, b = 45$ a $a = 6, b = 15$.

Iné riešenie*. Označme $d = (a, b)$. Potom $a = ud$ a $b = vd$, pričom u, v sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, takže $[a, b] = uvd$. Z rovností

$$a \cdot [a, b] = ud \cdot uvd = u^2vd^2 \quad \text{a} \quad b \cdot (a, b) = vd \cdot d = vd^2$$

vidíme, že číslo $a \cdot [a, b]$ je u^2 -násobkom čísla $b \cdot (a, b)$, takže zadaná rovnosť množín môže byť splnená jedine tak, ako sme zapísali vzťahmi (1) v prvom riešení. Tie teraz môžeme vyjadriť rovnosťami

$$u^2vd^2 = 180 \quad \text{a} \quad vd^2 = 45.$$

Preto platí $u^2 = 180/45 = 4$, čiže $u = 2$. Z rovnosti $vd^2 = 45 = 3^2 \cdot 5$ vyplýva, že buď $d = 1$ (a $v = 45$), alebo $d = 3$ (a $v = 5$). V prvom prípade $a = ud = 2 \cdot 1 = 2$ a $b = vd = 45 \cdot 1 = 45$, v druhom $a = ud = 2 \cdot 3 = 6$ a $b = vd = 5 \cdot 3 = 15$.

Poznámka. Keďže zo zadanej rovnosti okamžite vyplýva, že obe čísla a, b sú deliteľmi čísla 180 (takým deliteľom je dokonca aj ich najmenší spoločný násobok $[a, b]$), je možné úlohu vyriešiť rôznymi inými cestami, založenými na testovaní konečného počtu dvojíc konkrétnych čísel a a b . Takýto postup urýchlime, keď vopred zistíme niektoré nutné podmienky, ktoré musia čísla a, b spĺňať. Napríklad spresnenie rovnosti množín na dvojicu rovností (1) možno (aj bez použitia úvahy o parite čísel a, b) vysvetliť všeobecným postrehom: súčin $a \cdot [a, b]$ je vždy deliteľný súčinom $b \cdot (a, b)$, pretože ich podiel možno zapísať v tvare

$$\frac{a \cdot [a, b]}{b \cdot (a, b)} = \frac{a}{(a, b)} \cdot \frac{[a, b]}{b},$$

teda ako súčin dvoch celých čísel.

Komentár. Úloha je zložitejšia ako predchádzajúce, dá sa však riešiť mnohými spôsobmi a bude iste zaujímavé vidieť rôzne študentské riešenia. Je taktiež vhodným miestom na to, aby sme študentov

nechali diskutovať o prístupoch medzi sebou a prípadne skúšali hľadať slabiny jednotlivých zdôvodnení. Určite považujeme za vhodné zmieniť poslednú rovnosť z poznámky, keďže ide o zaujímavý postreh a metóda vhodného zapísania tvaru zlomku je užitočná nielen tu. Na túto úlohu nadväzuje komplexnejšia domáca práca, ktorá však vychádza z veľmi podobného princípu.

Úloha 8.8. [64-I-5] Rozdiel dvoch prirodzených čísel je 2010 a ich najväčší spoločný deliteľ je 2014-krát menší ako ich najmenší spoločný násobok. Určte všetky také dvojice čísel.

Riešenie*. Označme hľadané čísla a a b ($a > b$) a d ich najväčší spoločný deliteľ. Potom $a = ud$, $b = vd$, pričom $u > v$ sú nesúdeliteľné čísla. Keďže najmenší spoločný násobok čísel a, b je číslo uvd , dosadením do zadaných vzťahov dostaneme rovnosti

$$a - b = (u - v)d = 2010,$$

$$uvd = 2014d, \quad \text{čiže} \quad uv = 2014.$$

Podľa rozkladu na súčin prvočísel $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ vypíšeme všetky možné dvojice (u, v) a pre každú z nich sa presvedčíme, či číslo $u - v$ je deliteľom čísla 2010. V pozitívnom prípade príslušný podiel udáva číslo d a výpočet neznámych $a = ud$ a $b = vd$ je už jednoduchý:

- a) $u = 2014$ a $v = 1$: $u - v = 2013$ nedelí 2010;
 - b) $u = 19 \cdot 53 = 1007$ a $v = 2$: $u - v = 1005 \mid 2010$, $d = 2$, $a = 1007 \cdot 2 = 2014$, $b = 2 \cdot 2 = 4$;
 - c) $u = 2 \cdot 53 = 106$ a $v = 19$: $u - v = 87$ nedelí 2010;
 - d) $u = 53$ a $v = 2 \cdot 19 = 38$: $u - v = 15 \mid 2010$, $d = 134$, $a = 53 \cdot 134 = 7102$, $b = 38 \cdot 134 = 5092$.
- Záver.* Hľadané čísla tvoria jednu z dvojíc (2014, 4) alebo (7102, 5092).

Komentár. Úloha neprináša žiadne nové poznatky a princípy, je však vhodná na tréning riešenia sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi a opäť tak vytvorí prepojenie s minulými seminármi.

Úloha 8.9. [60-I-5-D3] Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel a, b , pre ktoré má výraz

$$\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$$

celočíselnú hodnotu.

Riešenie*. Nech $d = (a, b)$, potom $a = ud$, $b = vd$ pre nesúdeliteľné prirodzené u a v . Skúmaný výraz bude po dosadení $(9u^2 + 14v^2)/(9uv)$, takže $9u \mid 14v^2$ a z nesúdeliteľnosti u a v máme $u \mid 14$, navyše $3 \mid v$. Podobne $v \mid 9$; vyskúšame konečne veľa možností.

Komentár. Úloha je zaujímavá tým, že prácu s najväčším spoločným deliteľom obsahuje nepriamo a využíva tiež poznatky o deliteľnosti z minulého seminára.

Úloha 8.10. [60-I-5] Dokážte, že najmenší spoločný násobok $[a, b]$ a najväčší spoločný deliteľ (a, b) ľubovoľných dvoch kladných celých čísel a, b spĺňajú nerovnosť

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geq 2ab.$$

Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť.

Riešenie*. Nerovnosť by bolo ľahké dokázať, ak by niektorý z dvoch sčítancov na ľavej strane bol sám o sebe aspoň taký, ako pravá strana. Číslo $[a, b]$ je zjavne násobkom čísla a . Ak $[a, b] \geq 2a$, tak

$b[a, b] \geq 2ab$ a v zadanej nerovnosti platí dokonca ostrá nerovnosť, lebo číslo $a(a, b)$ je kladné. Ak $[a, b] < 2a$, tak neostáva iná možnosť ako $[a, b] = a$. To však nastane iba v prípade, keď $b \mid a$. V tomto prípade $(a, b) = b$ a v zadanej nerovnosti nastane rovnosť.

Iné riešenie*. Označme $d = (a, b)$, takže $a = ud$ a $b = vd$ pre nesúdeliteľné prirodzené čísla u, v . Z toho hneď vieme, že $[a, b] = uvd$. Keďže

$$\begin{aligned} a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] &= ud^2 + uv^2d^2 = u(1 + v^2)d^2, \\ 2ab &= 2uvd^2, \end{aligned}$$

je vzhľadom na $ud^2 > 0$ nerovnosť zo zadania ekvivalentná s nerovnosťou $1 + v^2 \geq 2v$, čiže $(v - 1)^2 \geq 0$, čo platí pre každé v . Rovnosť nastane práve vtedy, keď $v = 1$, čiže $b \mid a$.

Iné riešenie*. Označme $d = (a, b)$. Je známe, že $[a, b] \cdot (a, b) = ab$. Po vyjadrení $[a, b]$ z tohto vzťahu, dosadení do zadanej nerovnosti a ekvivalentnej úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnosť $d^2 + b^2 \geq 2bd$, ktorá platí, lebo $(d - b)^2 \geq 0$. Rovnosť nastáva pre $d = b$, čiže v prípade $b \mid a$.

Komentár. Na úspešné zvládnutie úlohy je opäť potrebná znalosť z predchádzajúceho seminára o nerovnostiach a taktiež ponúka široké spektrum prístupov, takže bude zaujímavé sledovať, ako k nej študenti pristúpia.

Domáca práca

Úloha 8.11. [61-I-3] Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c , pre ktoré platí množinová rovnosť

$$\{(a, b), (a, c), (b, c), [a, b], [a, c], [b, c]\} = \{2, 3, 5, 60, 90, 180\},$$

pričom (x, y) a $[x, y]$ označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel x a y .

Riešenie*. Prvky danej množiny M rozložíme na prvočinitele:

$$M = \{2, 3, 5, 2^2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5\}.$$

Odtiaľ vyplýva, že v rozklade hľadaných čísel a, b, c vystupujú iba prvočísla 2, 3 a 5. Každé z nich je pritom prvočiniteľom práve dvoch z čísel a, b, c : keby bolo prvočiniteľom len jedného z nich, chýbalo by v rozklade troch najväčších spoločných deliteľov a jedného najmenšieho spoločného násobku, teda v štyroch číslach z M ; keby naopak bolo prvočiniteľom všetkých troch čísel a, b, c , nechýbalo by v rozklade žiadneho čísla z M . Okrem toho vidíme, že v rozklade každého z čísel a, b, c je prvočíslo 5 najviac v jednom exemplári.

Podľa uvedených zistení môžeme čísla a, b, c usporiadať tak, že rozklady čísel a, b obsahujú po jednom exemplári prvočísla 5 (potom $(c, 5) = 1$) a že $(a, 2) = 2$ (ako vieme, aspoň jedno z čísel a, b musí byť párne). Číslo 5 z množiny M je potom nutne rovné (a, b) , takže platí $(b, 2) = 1$, a preto $(b, 3) = 3$ (inak by platilo $(b, c) = 1$), odtiaľ zase s ohľadom na $(a, b) = 5$ vyplýva $(a, 3) = 1$. Máme teda $a = 5 \cdot 2^s$ a $b = 5 \cdot 3^t$ pre vhodné prirodzené čísla s a t .

Z rovnosti $[a, b] = 2^s \cdot 3^t \cdot 5$ vyplýva, že nastane jeden z troch nasledujúcich prípadov.

(1) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5$. Vidíme, že platí $s = 2$ a $t = 1$, čiže $a = 20$ a $b = 15$. Ľahko určíme, že tretím číslom je $c = 18$.

(2) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5$. V tomto prípade $a = 10$, $b = 45$ a $c = 12$.

(3) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Teraz $a = 20$, $b = 45$ a $c = 6$.

Záver. Hľadané čísla a, b, c tvoria jednu z množín $\{20, 15, 18\}$, $\{10, 45, 12\}$ a $\{20, 45, 6\}$.

Iné riešenie*. V danej rovnosti je množina napravo tvorená šiestimi rôznymi číslami väčšími ako 1, takže čísla (a, b) , (a, c) , (b, c) musia byť netriviálnymi deliteľmi postupne čísel $[a, b]$, $[a, c]$, $[b, c]$. Čísla

2, 3, 5 ale žiadne netriviálne delitele nemajú, musí teda platiť

$$\{(a, b), (a, c), (b, c)\} = \{2, 3, 5\} \quad \text{a} \quad \{[a, b], [a, c], [b, c]\} = \{60, 90, 180\}.$$

Pretože poradie čísel a, b, c nehrá žiadnu úlohu, môžeme predpokladať, že platí $(a, b) = 2$, $(a, c) = 3$ a $(b, c) = 5$. Odtiaľ vyplývajú vyjadrenia

$$a = 2 \cdot 3 \cdot x = 6x, \quad b = 2 \cdot 5 \cdot y = 10y, \quad c = 3 \cdot 5 \cdot z = 15z$$

pre vhodné prirodzené čísla x, y, z . Zo známej rovnosti $[x, y] \cdot (x, y) = xy$ tak dostaneme vyjadrenia najmenších spoločných násobkov v tvare

$$[a, b] = \frac{6x \cdot 10y}{2} = 30xy, \quad [a, c] = \frac{6x \cdot 15z}{3} = 30xz, \quad [b, c] = \frac{10y \cdot 15z}{5} = 30yz.$$

Z rovnosti $\{30xy, 30xz, 30yz\} = \{60, 90, 180\}$ upravenej na $\{xy, xz, yz\} = \{2, 3, 6\}$ potom vďaka tomu, že 2 a 3 sú prvočísla, vyplýva $\{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$. Pretože z podmienky $5 = (b, c) = (10y, 15z)$ vyplýva $y \neq 3$ a $z \neq 2$, prichádzajú do úvahy len trojice (x, y, z) rovné $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$ a $(3, 2, 1)$, ktorým postupne zodpovedajú trojice (a, b, c) rovné $(6, 20, 45)$, $(12, 10, 45)$, $(18, 20, 15)$. Skúškou sa presvedčíme, že všetky tri vyhovujú množinovej rovnosti zo zadania úlohy.

Úloha 8.12. [63-S-2] Čísla 1, 2, ..., 10 rozdeľte na dve skupiny tak, aby najmenší spoločný násobok súčiny všetkých čísel prvej skupiny a súčiny všetkých čísel druhej skupiny bol čo najmenší.

Riešenie*. Pre uvažované súčiny a a b určite platí $a \cdot b = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Aspoň jedno z čísel a, b je preto deliteľné 2^4 , aspoň jedno deliteľné 3^2 , aspoň jedno deliteľné 5 a práve jedno deliteľné 7. Pre najmenší spoločný násobok n čísel a, b preto platí $n \geq 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$, pritom rovnosť tu nastane práve vtedy, keď ani jedno z čísel a, b nebude deliteľné žiadnym z čísel $2^5, 3^3$ a 5^2 .

Ak zvolíme napríklad $a = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ a $b = 1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$, bude najmenší spoločný násobok oboch čísel práve 5040. Tým je ukázané, že 5040 je naozaj najmenšia zo všetkých možných hodnôt n .

I keď bolo úlohou nájsť iba jeden príklad, pre úplnosť uvedieme všetky rozdelenia s minimálnou hodnotou $n = 5040$:

| Prvá skupina čísel | Druhá skupina čísel |
|---------------------|---------------------|
| 2, 3, 4, 5, 6 | 1, 7, 8, 9, 10 |
| 3, 5, 6, 8 | 1, 2, 4, 7, 9, 10 |
| 2, 5, 8, 9 | 1, 3, 4, 6, 7, 10 |
| 1, 2, 3, 4, 5, 6 | 7, 8, 9, 10 |
| 1, 3, 5, 6, 8 | 2, 4, 7, 9, 10 |
| 1, 2, 5, 8, 9 | 3, 4, 6, 7, 10 |
| 2, 3, 4, 5, 6, 7 | 1, 8, 9, 10 |
| 3, 5, 6, 7, 8 | 1, 2, 4, 9, 10 |
| 2, 5, 7, 8, 9 | 1, 3, 4, 6, 10 |
| 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 | 8, 9, 10 |
| 1, 3, 5, 6, 7, 8 | 2, 4, 9, 10 |
| 1, 2, 5, 7, 8, 9 | 3, 4, 6, 10 |

Nájsť ich nie je ťažké, keď si uvedomíme, že čísla 1 a 7 môžeme dať do ľubovoľnej z oboch skupín, zatiaľ čo v tej istej skupine spolu nemôžu byť 4 s 8, 5 s 10, 3 s 9 ani 6 s 9; s 8 spolu môže byť práve jedno z párnych čísel 2, 6 a 10. Získame tak iba tri základné rozdelenia (prvé tri riadky tabuľky), z ktorých možno každé štyrmi spôsobmi doplniť číslami 1 a 7.

Poznámka. Úlohu možno vyriešiť aj bez výpočtu súčiny $a \cdot b$. Deliteľnosť n číslami $3^2, 5$ a 7 vyplýva

z ich priameho zastúpenia medzi rozdeľovanými číslami, deliteľnosť číslom 2^4 z jednoduchej úvahy o rozdelení všetkých piatich párnych čísel: ak nie je číslo 8 vo svojej skupine ako párne jediné, je všetko jasné, v opačnom prípade sú v rovnakej skupine čísla 2, 4 a 6 (aj 10, ale to už ani nepotrebuje).

Doplňujúce zdroje a materiály

Materiály vhodné na ďalšie počítanie nájdeme v minulom seminári. Keďže témy sú si veľmi blízke, publikácie zvyčajne obsahujú úlohy zamerané na obe témy.