

Seminár 19: Algebraické výrazy a rovnice – zložitejšie rovnice a ich systémy

Úlohy a riešenia

Úloha 19.1. [59-S-1] Ak zväčšíme čitateľ aj menovateľ istého zlomku o 1, dostaneme zlomok o hodnotu $1/20$ väčší. Ak urobíme s väčším zlomkom rovnakú operáciu, dostaneme zlomok o hodnotu $1/12$ väčší, ako bola hodnota zlomku na začiatku. Určte všetky tri zlomky.

Úloha 19.2. [59-I-3-N1] Určte $[0], [3,5], [2,1], [-4], [-3,9], [-0,2]$. Symbol $[x]$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako číslo x , tzv. dolnú celú časť reálneho čísla x .

Úloha 19.3. [59-I-3-N2] Nech a je celé číslo a $t \in \langle 0; 1 \rangle$. Určte $[a], [a+t], [a+\frac{1}{2}t], [a-t], [a+2t], [a-2t]$.

Úloha 19.4. [59-I-3] Určte všetky reálne čísla x , ktoré vyhovujú rovnici $4x - 2[x] = 5$.

Úloha 19.5. [57-I-3-N1] Určte všetky celé čísla n , pre ktoré nadobúda zlomok $(4n+27)/(n+3)$ celočíselné hodnoty.

Úloha 19.6. [57-I-3] Máme určitý počet krabičiek a určitý počet guľôčok. Ak dáme do každej krabičky práve jednu guľôčku, ostane nám n guľôčok. Keď však necháme práve n krabičiek bokom, môžeme všetky guľôčky rozmiestniť tak, aby ich v každej zostávajúcej krabičke bolo práve n . Koľko máme krabičiek a koľko guľôčok?

Úloha 19.7. [57-II-4] Nájdite všetky trojice celých čísel x, y, z , pre ktoré platí

$$x + y\sqrt{3} + z\sqrt{7} = y + z\sqrt{3} + x\sqrt{7}.$$

Úloha 19.8. [64-I-1] Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+4)^2} &= 4-y, \\ \sqrt{(y-4)^2} &= x+8.\end{aligned}$$

Úloha 19.9. [59-II-4] Určte všetky dvojice reálnych čísel x, y , ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\begin{aligned}[x+y] &= 2010, \\ [x] - y &= p,\end{aligned}$$

ak a) $p = 2$, b) $p = 3$. Symbol $[x]$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako dané reálne číslo x (tzv. dolná celá časť reálneho čísla x).

Úloha 19.10. [64-S-1] V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}|1-x| &= y+1, \\ |1+y| &= z-2, \\ |2-z| &= x-x^2.\end{aligned}$$