

Seminár 5: Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti II – nerovnosti

Úlohy a riešenia

Úloha 5.1. [58-S-1] Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné čísla a, b, c platí

$$(a + bc)(b + ac) \geq ab(c + 1)^2.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť.

Úloha 5.2. [66-I-1-N1] Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla x, y a z platia nerovnosti

a) $2xyz \leq x^2 + y^2z^2,$

b) $(x^2 - y^2)^2 \geq 4xy(x - y)^2.$

Úloha 5.3. [66-I-1-N2] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b platí nerovnosť

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Úloha 5.4. [62-I-2-N1] Dokážte nerovnosť

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} \geq \frac{8}{(a+b)(c+d)}$$

pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c, d .

Úloha 5.5. [66-I-1] Dokážte, že pre ľubovoľné reálne číslo a platí nerovnosť

$$a^2 + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geq a + 1.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 5.6. [59-I-5] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leq \frac{a+b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť.