

## Seminár 18: Algebraické výrazy a (ne)rovnice IV – zložitejšie nerovnosti

### Úlohy a riešenia

**Úloha 18.1.** [66-II-4] Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla  $a \leq b \leq c$  platí

$$(-a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3.$$

**Úloha 18.2.** [61-II-1] Pre všetky reálne čísla  $x, y, z$  také, že  $x < y < z$ , dokážte nerovnosť

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

**Úloha 18.3.** [62-I-2-N1] Ukážte, že nerovnosť  $\frac{1}{2}(u + v) = \sqrt{uv}$  medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch ľubovoľných nezáporných čísel  $u$  a  $v$  vyplýva zo zrejmej nerovnosti  $(a - b)^2 \geq 0$  vhodnou voľbou hodnoty  $a$  a  $b$ .

**Úloha 18.4.** [62-I-2-N1] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla  $a, b, c$  platí nerovnosť

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

a zistite, kedy prechádza v rovnosť.

**Úloha 18.5.** [60-II-4] Nech  $x, y, z$  sú kladné reálne čísla. Ukážte, že aspoň jedno z čísel  $x + y + z - xyz$  a  $xy + yz + zx - 3$  je nezáporné.

**Úloha 18.6.** [61-I-4] Reálne čísla  $a, b, c, d$  vyhovujú rovnici  $ab + bc + cd + da = 16$ .

- a) Dokážte, že medzi číslami  $a, b, c, d$  sa nájdu dve so súčtom najviac 4.
- b) Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ?

**Úloha 18.7.** [62-I-2] Pre kladné reálne čísla  $a, b, c, d$  platí

$$a + b = c + d, \quad ad = bc, \quad ac + bd = 1.$$

Akú najväčšiu hodnotu môže mať súčet  $a + b + c + d$ ?