

## Seminár 30: Algebraické výrazy a rovnice VII – Kvadratické rovnice

### Ciele

Precvičiť metódy používané pri práci s kvadratickými rovnicami a vzťahy medzi koreňmi rovnice

### Úvodný komentár

Na začiatku seminára si spolu so študentami osviežime znalosti o kvadratických rovniciach, počte ich riešení a vzťahoch medzi reálnymi koreňmi a koeficientmi (Vièteove vzorce). V čase konania seminára už študenti pravdepodobne budú mať za sebou preberanie tohto učiva na hodinách matematiky, takže by opakovanie nemalo zabráť priveľa času.

### Úlohy a riešenia

**Úloha 30.1.** [B-57-I-5-N3] Nájdite všetky dvojice  $(a, b)$  reálnych čísel, pre ktoré má každá z rovníc  $x^2 + (a - 2)x + b - 3 = 0$ ,  $x^2 + (a + 2)x + 3b - 5 = 0$  dvojnásobný koreň.

**Riešenie.** Kvadratická rovnica má dvojnásobný koreň práve vtedy, ak jej diskriminant je rovný nule. Z tejto podmienky pre rovnice zo zadania dostávame

$$\begin{aligned}a^2 - 4a - 4b + 16 &= 0, \\a^2 + 4a - 12b + 24 &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Odčítaním druhej rovnice od prvej máme po úprave  $a = b - 1$ . Dosadením tohto vzťahu do jednej z rovníc v 1 potom určíme možné hodnoty  $b$ , ktoré sú 3 a 7. K nim odpovedajúce hodnoty  $a$  sú tak 2 a 6 a teda hľadané dvojice reálnych čísel  $(a, b)$  sú  $(2, 3)$  a  $(6, 7)$ .

**Komentár.** Jednoduchá úloha na úvod, v ktorej študenti aplikujú znalosti o závislosti medzi hodnotou diskriminantu a počtom riešení kvadratickej rovnice. Ten potom vedie na riešenie sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi.

**Úloha 30.2.** [B-57-I-5] Určte všetky dvojice  $a, b$  reálnych čísel, pre ktoré má každá z kvadratických rovníc

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom práve jeden z nich je spoločný oboch rovniciam.

**Riešenie\*.** Zo zadania vyplýva, že  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  (inak by rovnice neboli kvadratické) a  $a \neq b$  (inak by rovnice boli totožné, a ak by mali dva reálne korene, boli by oba spoločné).

Označme  $x_0$  spoločný koreň oboch rovníc, takže

$$ax_0^2 + 2bx_0 + 1 = 0, \quad bx_0^2 + 2ax_0 + 1 = 0.$$

Odčítaním oboch rovníc dostaneme  $(a - b)(x_0^2 - 2x_0) = x_0(a - b)(x_0 - 2) = 0$ . Keďže  $a \neq b$  a  $0$  zrejme koreňom daných rovníc nie je, musí byť spoločným koreňom číslo  $x_0 = 2$ . Dosadením do daných rovníc tak dostaneme jedinú podmienku  $4a + 4b + 1 = 0$ , čiže

$$b = -a - \frac{1}{4}.$$

Diskriminant druhej z daných rovníc je potom  $4a^2 - 4b = 4a^2 + 4a + 1 = (2a + 1)^2$ , takže rovnica má dva rôzne reálne korene pre ľubovoľné  $a \neq -\frac{1}{2}$ . Podobne diskriminant prvej z daných rovníc je  $4b^2 - 4a = 4b^2 + 4b + 1 = (2b + 1)^2$ . Rovnica má teda dva rôzne reálne korene pre ľubovoľné  $b \neq -\frac{1}{2}$ , čiže  $a \neq -\frac{1}{4}$ .

Z uvedených predpokladov však zároveň vyplýva  $a \neq -\frac{1}{4}$  ( $b \neq 0$ ) a  $a \neq -\frac{1}{8}$  ( $a \neq b$ ).

*Záver.* Vyhovujú všetky dvojice  $(a, -a - \frac{1}{4})$ , kde  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4}\}$ .

**Komentár.** V úlohe sa k správne mu riešeniu dostaneme pomocou vhodného odčítania dvoch rovníc (a potom vhodnou úpravou takto vzniknutej rovnice). Považujeme za vhodné študentov na tento „trik“ upozorniť, keďže nájde uplatnenie nielen v nasledujúcej úlohe, ale aj v rôznych iných príkladoch.

## Domáca práca