Seminár 18

Téma

Algebraické výrazy a (ne)rovnice IV – zložitejšie nerovnosti

Ciele

Zoznámiť a precvičiť so študentami riešenie úloh zameraných na dokazovanie zložitejších nerovností, AG-nerovnosť

Úlohy a riešenia

Úloha 18.1. [66-II-4] Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla $a \leq b \leq c$ platí

$$(-a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3.$$

Riešenie*. Nerovnosť vynásobíme kladným výrazom abc a po roznásobení ju postupne (ekvivalentne) upravíme:

$$\begin{aligned}
-a(bc+ac+ab)+b(bc+ac+ab)+c(bc+ac+ab) &\geq 3abc,\\
-abc-a^2c-a^2b+b^2c+abc+ab^2+bc^2+ac^2+abc &\geq 3abc,\\
(b^2c-abc)+(bc^2-abc)+(ac^2-a^2c)+(ab^2-a^2b) &\geq 0,\\
bc(b-a)+bc(c-a)+ac(c-a)+ab(b-a) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Vzhľadom na predpoklad $0 < a \leq b \leq c$ je výsledná, a teda aj pôvodná nerovnosť splnená.

Iné riešenie*. Dokazovanú nerovnosť postupne upravíme, pričom využijeme známu nerovnosť $b/c + c/b = 2$, ktorá je pre kladné čísla b, c ekvivalentná s nerovnosťou $(b-c)^2 \geq 0$:

$$(-a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1+\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq$$

$$\geq 1+\frac{b^2-a^2}{ab}+\frac{c^2-a^2}{ac}+2 \geq 3,$$

pretože zrejme platí aj $a^2 \leq b^2 \leq c^2$.

Iné riešenie*. Podľa predpokladov úlohy platia nerovnosti $-a+b+c \geq c$ a $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{b}+\frac{1}{c}$. Obe nerovnosti (s kladnými stranami) medzi sebou vynásobíme a získame tak

$$(-a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq c\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1+\frac{2c}{b} \geq 3$$

pretože $c/b \geq 1$ podľa zadania.

Komentár. Úvodná úloha slúži na opakovanie, pripomenutie naučených postupov a overenie toho, čo sa študenti doteraz naučili o nerovnostiach. Považujeme za vhodné ukázať všetky tri zmienené postupy riešenia, keďže ekvivalentné úpravy rovníc, využívanie známych rovností aj sčítanie dvoch a viac rovností sú všetko užitočné metódy, ktoré sa oplatí mať v našej riešiteľskej zásobe.

Úloha 18.2. [61-II-1] Pre všetky reálne čísla x, y, z také, že $x < y < z$, dokážte nerovnosť

$$x^2-y^2+z^2 > (x-y+z)^2.$$

Riešenie*. Aby sme mohli použiť vzorec $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, presuňme najskôr jeden z krajných členov ľavej strany, napríklad člen z^2, na pravú stranu:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &> (x - y + z)^2 - z^2, \\ (x - y)(x + y) &> (x - y + z - z)(x - y + z + z), \\ (x - y)(x + y) &> (x - y)(x - y + 2z). \end{aligned}$$

Keďže spoločný činiteľ $x-y$ oboch strán poslednej nerovnosti je podľa predpokladu úlohy číslo záporné, budeme s dôkazom hotoví, keď ukážeme, že zvyšné činitele spĺňajú opačnú nerovnosť $x+y < x-y+2z$. Tá je však zrejme ekvivalentná s nerovnosťou $2y < 2z$, čiže $y < z$, ktorá podľa zadania úlohy naozaj platí.

Iné riešenie*. Podľa vzorca pre druhú mocninu trojčlena platí

$$(x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz.$$

Dosaďme to do pravej strany dokazovanej nerovnosti a urobme niekoľko ďalších ekvivalentných úprav:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + z^2 &> x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \\ 0 &> 2y^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \\ 0 &> 2y(y - x) + 2z(x - y), \\ 0 &> 2(y - x)(y - z). \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť už vyplýva z predpokladov úlohy, podľa ktorých je činiteľ $y - x$ kladný, zatiaľ čo činiteľ $y - z$ je záporný.

Úloha 18.3. [62-I-2-N1] Ukážte, že nerovnosť $\frac{1}{2}(u + v) = \sqrt{uv}$ medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch ľubovoľných nezáporných čísel u a v vyplýva zo zrejmej nerovnosti $(a - b)^2 \geq 0$ vhodnou voľbou hodnoty a a b.

Riešenie*. Zvoľte $a = \sqrt{u}$ a $b = \sqrt{v}$.

Úloha 18.4. [62-I-2-N1] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c platí nerovnosť

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

a zistite, kedy prechádza v rovnosť.

Riešenie*. Ľavú stranu L dokazovanej nerovnosti najskôr upravíme roznásobením a vzniknuté členy zoskupíme do súčtov dvojíc navzájom prevrátených výrazov:

$$\begin{aligned} L = \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) = \left(ab + \frac{a}{c} + 1 + \frac{1}{bc}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) = \\ = \left(abc + \frac{1}{abc}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right). \end{aligned}$$

Pretože pre $u > 0$ je $u + \frac{1}{u} \geq 2$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $u = 1$, pre výraz L platí $L \geq 2 + 2 + 2 + 2 = 8$, čo sme mali dokázať. Rovnosť $L = 8$ nastane práve vtedy, keď platí

$$abc + \frac{1}{abc} = a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c} = 2$$

teda, ako sme už spomenuli, práve vtedy, keď $abc = a = b = c = 1$, t. j. práve vtedy, keď $a = b = c = 1$.

Poznámka. Dodajme, že upravená nerovnosť

$$abc + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \geq 8$$

vyplýva okamžite aj z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom ôsmich čísel

$$abc, \quad a, \quad b, \quad c, \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{abc},$$

lebo ich súčin (a teda aj geometrický priemer) je rovný číslu 1, takže ich aritmetický priemer má hodnotu aspoň 1.

Iné riešenie*. V dokazovanej nerovnosti sa najskôr zbavíme zlomkov, a to tak, že obe jej strany vynásobíme kladným číslom abc. Dostaneme tak ekvivalentnú nerovnosť

$$(ab+1)(bc+1)(ac+1) = 8abc,$$

ktorá má po roznásobení ľavej strany tvar

$$a^2b^2c^2 + a^2bc + ab^2c + abc^2 + ab + ac + bc + 1 \geq 8abc.$$

Poslednú nerovnosť možno upraviť na tvar

$$(abc-1)^2 + ab(c-1)^2 + ac(b-1)^2 + bc(a-1)^2 \geq 0.$$

Táto nerovnosť už zrejme platí, lebo na ľavej strane máme súčet štyroch nezáporných výrazov. Pritom rovnosť nastane práve vtedy, keď má každý z týchto štyroch výrazov nulovú hodnotu, teda práve vtedy, keď

$$abc - 1 = c - 1 = b - 1 = a - 1 = 0,$$

čiže

$$a = b = c = 1.$$

Iné riešenie*. Danú nerovnosť možno dokázať aj bez roznásobenia jej ľavej strany. Stačí napísať tri AG-nerovnosti

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{b}\right) \geq \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{c}\right) \geq \sqrt{\frac{b}{c}}, \quad \frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{\frac{c}{a}},$$

Ich vynásobením dostaneme

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{c}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} = 1,$$

odkiaľ po násobení ôsmimi obdržíme dokazovanú nerovnosť. Rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď nastane rovnosť v každej z troch použitých AG-nerovností, teda práve vtedy, keď sa čísla v každej „priemerovanej“ dvojici rovnajú:

$$a = \frac{1}{b}, \quad b = \frac{1}{c}, \quad c = \frac{1}{a}.$$

Z prvých dvoch rovností vyplýva $a = c$, po dosadení do tretej rovnosti potom vychádza $a = c = 1$, teda aj $b = 1$.
Komentár. Úloha sa dá riešiť využitím AG nerovnosti, tá však bude obsahom jedného z ďalších seminárov, v ktorom sa (okrem iného) k tejto úlohe vrátime.

Úloha 18.5. [60-II-4] Nech x, y, z sú kladné reálne čísla. Ukážte, že aspoň jedno z čísel $x + y + z - xyz$ a $xy + yz + zx - 3$ je nezáporné.

Riešenie*. Ukážeme, že ak je číslo $xy + yz + zx - 3$ záporné, je číslo $x + y + z - xyz$ kladné. Ak $xy + yz + zx < 3$, je aspoň jedno z čísel xy, yz, zx menšie ako 1, napr. xy. Potom $x + y + z - xyz = x + y + z(1 - xy)$ je zjavne súčet troch kladných čísel.

Iné riešenie*. Ukážeme, že ak je číslo $x+y+z-xyz$ záporné, tak číslo $xy+yz+zx-3$ je kladné. Predpokladajme, že $x+y+z < xyz$. Tým skôr $x < xyz$. Po skrátení kladného čísla x dostaneme $yz > 1$. Podobne odvodíme odhady $xy > 1$ a $zx > 1$. Teraz ich stačí sčítať a máme $xy + yz + zx > 3$.

Iné riešenie*. Tvrdenie úlohy dokážeme sporom. Predpokladajme, že $x + y + z < xyz$ a zároveň $xy + yz + zx < 3$. Obe tieto nerovnosti sú symetrické, preto môžeme predpokladať, že čísla x, y, z sú označené tak, že z je najmenšie. Z druhej nerovnosti dostaneme, že $xy < 3$. Potom však $x + y + z < xyz < 3z$, teda $x + y < 2z$. To je však spor s tým, že číslo z je najmenšie.

Iné riešenie*. Aritmetický priemer c čísel a, b má tú vlastnosť, že sa od neho obe čísla líšia o rovnakú hodnotu d. Ak nahradíme premenné a, b v daných nerovnostiach premennými c, d, zápis nerovností aj dôkaz oboch vzťahov sa zjednoduší. Položme teda $c = \frac{1}{2}(a + b)$, potom $a = c + d$ a $b = c - d$ (pričom $d = \frac{1}{2}(a - b)$, ako sa ľahko môžeme presvedčiť). Takže $a^2 + b^2 = 2(c^2 + d^2)$, $ab = c^2 - d^2$, odkiaľ $a^2 + 3ab + b^2 = 5c^2 - d^2$. Označme ešte písmenami m a n ľavú a pravú stranu prvej z dokazovaných nerovností. Potom

$$m = \sqrt{am} = \sqrt{c^2 - d^2},$$

$$n = \frac{2(a^2 + 3ab + b^2}{5(a + b)} = \frac{2(5c^2 - d^2}{5 \cdot 2c} = c - \frac{d^2}{5c} = \sqrt{\left(c - \frac{d^2}{5c}\right)^2} = \sqrt{\left(c - d^2\frac{2}{5} - \frac{d^2}{25c^2}\right)}.$$

Keďže z vyjadrenia kladnej hodnoty m vidíme, že $d^2 < c^2$, pre výraz v poslednej zátvorke pod odmocninou platí

$$1 > \frac{2}{5} \geq \frac{2}{5} - \frac{d^2}{25c^2} > \frac{2}{5} - \frac{1}{25} = \frac{9}{25} > 0,$$

čo znamená, že výraz pod odmocninou leží v uzavretom intervale medzi číslami $c^2 - d^2$ a c^2. Odtiaľ vyplýva $m \leq n \leq c$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $d = 0$, t. j. keď $a = b$.

Poznámka. Z výsledkov súťažnej úlohy vyplýva, že rozdiel medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch kladných čísel možno zdola odhadnúť nezáporným lomeným výrazom takto:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2} - \frac{2(a^2 + 3ab + b^2}{5(a + b)} = \frac{(a-b)^2}{10(a+b)}.$$

Umocnením osamostatnenej odmocniny a ďalšími úpravami môžeme dokázať silnejší odhad rovnakého typu

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}.$$

Inú metódu dôkazov spolu s ďalšími podobnými nerovnosťami nájdete v článku J. Šimšu *Dolní odhady rozdílu průměrů* v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální 65 (1986/87), číslo 10, str. 403 – 407.

Úloha 18.6. [61-I-4] Reálne čísla a, b, c, d vyhovujú rovnici $ab + bc + cd + da = 16$.

a) Dokážte, že medzi číslami a, b, c, d sa nájdu dve so súčtom najviac 4.

b) Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$?

Riešenie*. a) Z rovnosti $16 = ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d)$ vyplýva, že obidva súčty $a+c$ a $b+d$ nemôžu byť väčšie ako 4 súčasne, lebo v opačnom prípade by bol ich súčin väčší ako 16. Preto vždy aspoň jeden zo súčtov $a + c$ alebo $b + d$ má požadovanú vlastnosť. b) Využijeme všeobecnú rovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(b-c)^2 + \frac{1}{2}(c-d)^2 + \frac{1}{2}(d-a)^2 + ab + bc + cd + da,$$

o platnosti ktorej sa ľahko presvedčíme úpravou pravej strany. Vzhľadom na nezápornosť druhých mocnín $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-d)^2$ a $(d-a)^2$ dostávame pre ľavú stranu rovnosti odhad

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da = 16.$$

Je nájdené číslo 16 najmenšou hodnotou uvažovaných súčtov? Ináč povedané: nastane pre niektorú vyhovujúcu štvoricu v odvodenej nerovnosti rovnosť? Z nášho postupu je jasné, že musíme rozhodnúť, či pre niektorú z uvažovaných štvoríc platí $a-b=b-c=c-d=d-a=0$, čiže $a=b=c=d$. Pre takú štvoricu má rovnosť $ab+bc+cd+da=16$ tvar $4a^2=16$, čomu vyhovuje $a=\pm 2$. Pre vyhovujúce štvorice $a=b=c=d=2$ a $a=b=c=d=-2$ má súčet $a^2+b^2+c^2+d^2$ naozaj hodnotu 16, preto ide o hľadané minimum.

Úloha 18.7. [62-I-2] Pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí

$$a+b=c+d, \qquad ad=bc, \qquad ac+bd=1.$$

Akú najväčšiu hodnotu môže mať súčet $a+b+c+d$?

Riešenie*. Najskôr ukážeme, že prvé dve rovnosti zo zadania úlohy sú splnené len vtedy, keď platí $a=c$ a súčasne $b=d$. Naozaj, vďaka tomu, že zadané čísla sú kladné (a teda rôzne od nuly), môžeme uvedené rovnosti zapísať ako

$$a\left(1+\frac{b}{a}\right)=c\left(1+\frac{d}{c}\right) \quad \text{a} \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

Podľa druhej rovnosti vidíme, že súčty v oboch zátvorkách z prvej rovnosti majú rovnakú kladnú hodnotu, takže sa musia rovnať prvé činitele oboch jej strán. Platí teda $a=c$, odkiaľ už vyplýva aj rovnosť $b=d$. Keď už vieme, že platí $a=c$ a $b=d$, vystačíme ďalej len s premennými a a b a nájdeme najväčšiu hodnotu zadaného súčtu

$$S=a+b+c+d=2(a+b)$$

za jedinej podmienky, totiž že kladné čísla a, b spĺňajú rovnosť $a^2+b^2=1$, ktorá je vyjadrením tretej zadanej rovnosti $ac+bd=1$ (prvé dve sú vďaka rovnostiam $a=c$ a $b=d$ zrejmé). Všimnime si, že pre druhú mocninu (kladného) súčtu S platí

$$S^2=4(a+b)^2=4(a^2+b^2)+8ab=4\cdot 1+8ab=4(1+2ab),$$

takže hodnota S bude najväčšia práve vtedy, keď bude najväčšia hodnota $2ab$. Zo zrejmej nerovnosti $(a-b)^2 \geq 0$ po roznásobení však dostaneme

$$2ab \leq a^2+b^2=1,$$

pritom rovnosť $2ab=1$ nastane práve vtedy, keď bude platiť $a=b$, čo pre kladné čísla a, b spolu s podmienkou $a^2+b^2=1$ vedie k jedinej vyhovujúcej dvojici $a=b=1/\sqrt{2}$. Najväčšia hodnota výrazu $2ab$ je teda 1, takže najväčšia hodnota výrazu S^2 je $4(1+1)=8$, a teda najväčšia hodnota S je $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Dosiahne sa pre jedinú prípustnú štvoricu $a=b=c=d=1/\sqrt{2}$.