Seminár 30: Algebraické výrazy a rovnice VII – Kvadratické rovnice

Úlohy a riešenia

Úloha 30.1. [B-57-I-5-N3] Nájdite všetky dvojice (a, b) reálnych čísel, pre ktoré má každá z rovníc $x^2 + (a-2)x + b - 3 = 0$, $x^2 + (a+2)x + 3b - 5 = 0$ dvojnásobný koreň.

Úloha 30.2. [B-57-I-5] Určte všetky dvojice a, b reálnych čísel, pre ktoré má každá z kvadratických rovníc

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \qquad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom práve jeden z nich je spoločný obom rovniciam.

Úloha 30.3. [B-57-II-1] Uvažujme dve kvadratické rovnice

$$x^2 - ax - b = 0, \qquad x^2 - bx - a = 0$$

s reálnymi parametrami a, b. Zistite, akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže nadobudnúť súčet $a+b$, ak existuje práve jedno reálne číslo x, ktoré súčasne vyhovuje obom rovniciam. Určte ďalej všetky dvojice (a, b) reálnych parametrov, pre ktoré tento súčet tieto hodnoty nadobúda.

Úloha 30.4. [B-62-II-1] Pre ľubovoľné reálne čísla $k \neq \pm 1$, $p \neq 0$ a q dokážte tvrdenie: Rovnica

$$x^2 + px + q = 0$$

má v obore reálnych čísel dva korene, z ktorých jeden je k-násobkom druhého, práve vtedy, keď platí $kp^2 = (k + 1)^2 q$.

Úloha 30.5. [B-59-I-6] Reálne čísla a, b majú túto vlastnosť: rovnica $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množine reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých rozdiel je kladným koreňom rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

a) Dokážte nerovnosť $b > 3$.

b) Pomocou b vyjadrite korene oboch rovníc.

Úloha 30.6. [B-64-II-4] Na tabuli je zoznam čísel $1, 2, 3, 4, 5, 6$ a „rovnica“

$$\frac{\square}{\square}x^2 + \frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square} = 0.$$

Marek s Tomášom hrajú nasledujúcu hru. Najskôr Marek vyberie ľubovoľné číslo zo zoznamu, napíše ho do jedného z prázdnych políčok v „rovnici“ a číslo zo zoznamu zotrie. Potom Tomáš vyberie niektoré zo zvyšných čísel, napíše ho do iného prázdneho políčka a v zozname ho zotrie. Nato Marek urobí to isté a nakoniec Tomáš doplní tri zvyšné čísla na tri zvyšné voľné políčka v „rovnici“. Marek vyhrá, ak vzniknutá kvadratická rovnica s racionálnymi koeficientmi bude mať dva rôzne reálne korene, inak vyhrá Tomáš. Rozhodnite, ktorý z hráčov môže vyhrať nezávisle na postupe druhého hráča.

Úloha 30.7. [B-57-S-2] Určte všetky dvojice (a, b) reálnych čísel, pre ktoré majú rovnice

$$x^2 + (3a + b)x + 4a = 0, \qquad x^2 + (3b + a)x + 4b = 0$$

spoločný reálny koreň.

Úloha 30.8. [B-59-S-1] Určte všetky hodnoty reálnych parametrov p, q, pre ktoré má každá z rovníc

$$x(x - p) = 3 + q, \qquad x(x + p) = 3 - q$$

v obore reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých aritmetický priemer je jedným z koreňov zvyšnej rovnice.