

Seminár 25: Kombinatorika I – úlohy na mriežke a šachovnici

Úlohy a riešenia

Úloha 25.1. [66-II-2] Štvorcovú tabuľku 6×6 zaplníme všetkými celými číslami od 1 do 36.

- Uveďte príklad takého zaplnenia tabuľky, že súčet každých dvoch čísel v rovnakom riadku či v rovnakom stĺpci je väčší ako 11.
- Dokážte, že pri ľubovoľnom zaplnení tabuľky sa v niektorom riadku alebo stĺpci nájdu dve čísla, ktorých súčet neprevyšuje 12.

Úloha 25.2. [62-I-1-N1] Kobylka skáče po úsečke dĺžky 10 cm a to skokmi o 1 cm alebo o 2 cm (vždy rovnakým smerom). Koľkými spôsobmi sa môže dostať z jedného krajného bodu úsečky do druhého?

Úloha 25.3. [62-I-1-N2] Škriatok sa pohybuje v tabuľke 10×15 skokmi o jedno políčko nahor alebo o jedno políčko doprava. Koľkými rôznymi cestami sa môže dostať z ľavého dolného do pravého horného políčka?

Úloha 25.4. [64-II-2] V jednom políčku šachovnice 8×8 je napísané "–" a v ostatných políčkach "+". V jednom kroku môžeme zmeniť na opačné súčasne všetky štyri znamienka v ktoromkoľvek štvorci 2×2 na šachovnici. Rozhodnite, či po určitom počte krokov môže byť na šachovnici oboch znamienok rovnaký počet.

Úloha 25.5. [64-I-3-N3] Simona a Lenka hrajú hru. Pre dané celé číslo k také, že $0 \leq k \leq 9$, vyberie Simona k políček šachovnice 3×3 a na každé z nich napíše číslo 1, na ostatné políčka napíše číslo 0. Lenka potom šachovnicu nejakým spôsobom pokryje tromi triminovými kockami, t. j. kockami tvaru 3×1 , a čísla pod ich políčkami vynásobí. Ak je počet kociek so súčinom 0 nepárny, vyhráva Simona, v ostatných prípadoch vyhráva Lenka. Určte, v koľkých percentách prípadov (vzhľadom na hodnotu k) má vyhrávajúcu stratégiu Simona.

Úloha 25.6. [61-I-6-N1] Na hracej ploche $m \times n$ tvorenej bielymi štvorcovými políčkami sa Monika a Tamara striedajú v ťahoch jednou figúrkou pri nasledujúcej hre. Najskôr Monika položí figúrku na ľubovoľné políčko a toto políčko zafarbí namodro. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, urobí s figúrkou skok na políčko, ktoré je doposiaľ biele a zafarbí toto políčko namodro. Pritom pod skokom rozumieme ťah šachovou vežou, t. j. presuny figúrky v smere riadkov alebo v smere stĺpcov hracej dosky (o ľubovoľný počet políček). Hráčka, ktorá je na rade a už nemôže urobiť ťah, prehráva. Rozhodnite, ktoré z hráčov môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky?

Úloha 25.7. [62-I-1] Štvorcová tabuľka je rozdelená na 16×16 políček. Kobylka sa po nej pohybuje dvoma smermi: vpravo alebo dole, pričom strieda skoky o dve a o tri políčka (t. j. žiadne dva po sebe idúce skoky nie sú rovnako dlhé). Začína skokom dĺžky dva z ľavého horného políčka. Koľkými rôznymi cestami sa môže kobylka dostať na pravé dolné políčko? (Pod cestou máme na mysli postupnosť políček, na ktoré kobylka doskočí.)

Úloha 25.8. [61-I-6] Na hracej ploche $n \times n$ tvorenej bielymi štvorcovými políčkami sa Monika a Tamara striedajú v ťahoch jednou figúrkou pri nasledujúcej hre. Najskôr Monika položí figúrku na ľubovoľné políčko a toto políčko zafarbí namodro. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, urobí s figúrkou skok na políčko, ktoré je doposiaľ biele, a toto políčko zafarbí namodro. Pritom pod skokom rozumieme bežný ťah šachovým jazdcom, t. j. presun figúrky o dve políčka zvislo alebo vodorovne a súčasne o jedno políčko v druhom smere. Hráčka, ktorá je na rade a už nemôže urobiť ťah, prehráva. Postupne pre $n = 4, 5, 6$ rozhodnite, ktorá z hráčov môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky.