# Seminár 31: Geometria VII – stredové, obvodové, úsekové uhly, tetivové štvoruholníky

#### Ciele

Zopakovať, príp. študentov zoznámiť s vlastnosťami stredových, obvodových a úsekových uhlov a ich využitím pri riešení úloh.

## Úvodný komentár

Predtým, ako sa so študentmi pustíme do riešenia úloh, je vhodné predstaviť, príp. zopakovať vlastnosti uhlov, ktorými sa budeme v seminári zaoberať. Vhodným materiálom je [?], kapitola 8.

# Úlohy a riešenia

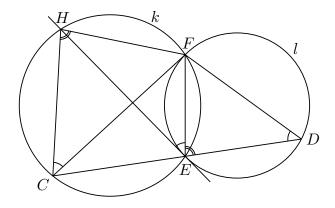
**Úloha 31.1.** [B-65-I-5-D1] Daná je tetiva AB kružnice k so stredom v bode S. Na úsečke AB zvoľme bod M a priesečník kružnice opísanej trojuholníku AMS s kružnicou k označme C. Dokážte, že uhly MCS a MBS sú zhodné.

**Riešenie\*.** Stačí využiť rovnosť uhlov v rovnoramennom trojuholníku ABS a obvodové uhly nad MS v kružnici opísanej trojuholníku AMS.

**Úloha 31.2.** [B-66-II-3] V rovine sú dané kružnice k a l, ktoré sa pretínajú v bodoch E a F. Dotyčnica ku kružnici l zostrojená v bode E pretína kružnicu k v bode H ( $H \neq E$ ). Na oblúku EH kružnice k, ktorý neobsahuje bod F, zvoľme bod C ( $E \neq C \neq H$ ) a priesečník priamky CE s kružnicou l označme D ( $D \neq E$ ). Dokážte, že trojuholníky DEF a CHF sú podobné.

**Riešenie\*.** Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou HF kružnice k vyplýva  $|\angle HCF| = |\angle HEF|$ . Uhol HEF je zároveň úsekovým uhlom prislúchajúcim tetive EF kružnice l, ktorý je však zhodný s obvodovým uhlom EDF (obr. 1). Celkovo tak platí

$$|\angle HCF| = |\angle HEF| = |\angle EDF|. \tag{1}$$



Obr. 1:

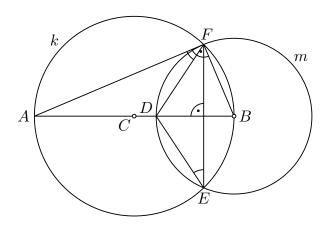
Vzhľadom na to, že CEFH je tetivový štvoruholník, je jeho vnútorný uhol pri vrchole H zhodný s vonkajším uhlom pri jeho protiľahlom vrchole E. Platí teda

$$|\angle CHF| = |\angle DEF|. \tag{2}$$

Z rovností 1 a 2 vyplýva na základe vety uu podobnosť trojuholníkov DEF a CHF. Tým je dôkaz hotový.

**Úloha 31.3.** [B-65-II-2] Daná je úsečka AB, jej stred C a vnútri úsečky AB bod D. Kružnice k(C, |BC|) a m(B, |BD|) sa pretínajú v bodoch E a F. Zdôvodnite, prečo je polpriamka FD osou uhla AFE.

Riešenie\*. Kružnica k je Tálesovou kružnicou nad priemerom AB, takže trojuholník ABF je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole F. Inými slovami, priamka AF je kolmá na polomer BF kružnice



Obr. 2:

m, a preto sa priamka AF dotýka kružnice m v bode F (obr. 2). Z rovnosti úsekového uhla zovretého tetivou DF s dotyčnicou AF a obvodového uhla nad tou istou tetivou máme (ako už je vyznačené na obrázku)

$$|\angle AFD| = |\angle DEF|.$$

Zo súmernosti úsečky EF podľa osi AB tak vyplýva

$$|\angle AFD| = |\angle DEF| = |\angle DFE|,$$

čo znamená, že FD je osou uhla AFE.

Iné riešenie\*. Označme  $\beta$  veľkosť uhla ABF a dopočítajme veľkosti uhlov DFE a AFE. Trojuholník DBF je rovnoramenný, lebo jeho ramená BD a BF sú polomery kružnice m, preto

$$|\angle DFB| = \frac{1}{2}(180^{\circ} - \beta) = 90^{\circ} - \frac{\beta}{2}.$$

Keďže podobne aj trojuholník EBF je rovnoramenný s osou BD, platí

$$|\angle EFB| = 90^{\circ} - beta.$$

Spojením oboch predchádzajúcich rovností tak dostávame

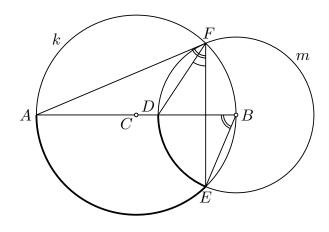
$$|\angle DFE| = |\angle DFB| - |\angle EFB| = \frac{\beta}{2}.$$

Z vlastností Tálesovej kružnice k nad priemerom AB vieme, že uhol AFB je pravý. Pritom jeho časť uhol EFB má, ako sme už zistili, veľkosť  $90^{\circ} - \beta$ , takže jeho druhá časť, uhol AFE, má veľkosť  $\beta$ , čo je presne dvojnásobok veľkosti uhla DFE. Tým sme dokázali, že priamka FD je osou uhla AFE.

Iné riešenie\*. Nad oblúkom AE kružnice k sa zhodujú uhly ABE a AFE (obr. 3). Oblúku DE kružnice m prislúcha obvodový uhol DFE a stredový uhol DBE. Spolu tak dostávame

$$|\measuredangle DFE| = \frac{1}{2}|\measuredangle DBE| = \frac{1}{2}|\measuredangle ABE| = \frac{1}{2}|\measuredangle AFE|,$$

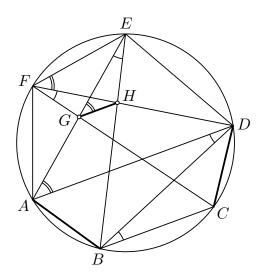
čo dokazuje, že FD je osou uhla AFE.



Obr. 3:

**Úloha 31.4.** [B-65-I-5] Vrcholy konvexného šesťuholníka ABCDEF ležia na kružnici, pričom |AB| = |CD|. Úsečky AE a CF sa pretínajú v bode G a úsečky BE a DF sa pretínajú v bode H. Dokážte, že úsečky GH, AD a BC sú navzájom rovnobežné.

**Riešenie\*.** Najskôr ukážeme, že  $AD \parallel BC$ . Keďže |AB| = |CD|, sú obvodové uhly nad tetivami AB a CD kružnice opísanej šesťuholníku ABCDEF zhodné (obr. 4), teda  $|\angle ADB| = |\angle DBC|$ ; to sú však striedavé uhly priečky BD priamok AD a BC, preto  $AD \parallel BC$ . Ostáva ukázať, že  $GH \parallel AD$ . Využitím zhodných obvodových uhlov nad tetivami AB a CD pri vrcholoch E a F dostávame



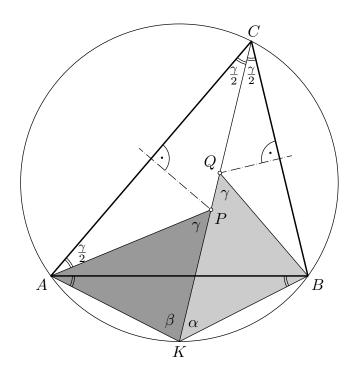
Obr. 4:

$$|\angle GEH| = |\angle AEB| = |\angle CFD| = |\angle GFH|,$$

čo znamená, že body E, F, G a H ležia na jednej kružnici, pretože vrcholy zhodných uhlov GEH a GFH ležia v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou GH. Z toho vyplýva, že uhly EFH a EGH nad jej tetivou EH sú zhodné. To spolu so zhodnosťou uhlov EFD a EAD nad tetivou ED pôvodnej kružnice (obr. 4) vedie na zhodnosť súhlasných uhlov EGH a EAD priečky AE priamok GH a AD, ktoré sú teda naozaj rovnobežné. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

**Úloha 31.5.** [B-58-I-5] Trojuholníku ABC je opísaná kružnica k. Os strany AB pretne kružnicu k v bode K, ktorý leží v polrovine opačnej k polrovine ABC. Osi strán AC a BC pretnú priamku CK postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné.

**Riešenie\*.** Označme  $\alpha, \beta, \gamma$  zvyčajným spôsobom veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC (obr. 5). Bod K leží na osi úsečky AB, preto |AK| = |KB|. Trojuholník AKB je rovnoramenný so základňou AB, jeho vnútorné uhly pri vrcholoch A a B sú teda zhodné. Podľa vety o obvodových



Obr. 5:

uhloch sú zhodné aj uhly BCK a BAK, resp.ACK a ABK, preto sú zhodné aj uhly BCK a ACK. Polpriamka CK je teda osou uhla ACB:

$$|\measuredangle ACK| = |\measuredangle BCK| = \frac{\gamma}{2}.$$

Keďže bod P leží na osi strany AC, je trojuholník ACP rovnoramenný a jeho vnútorné uhly pri základni AC majú veľkosť  $\frac{1}{2}\gamma$ , takže jeho vonkajší uhol APK pri vrchole P má veľkosť  $\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}\gamma=\gamma$ . Rovnako z rovnoramenného trojuholníka BCQ odvodíme, že aj veľkosť uhla BQK je  $\gamma$ . Podľa vety o obvodových uhloch sú zhodné uhly ABC a AKC, teda uhol AKC (čiže uhol AKP) má veľkosť  $\beta$  a – celkom analogicky – uhol BKQ má veľkosť  $\alpha$ .

V každom z trojuholníkov AKP a BKQ už poznáme veľkosti dvoch vnútorných uhlov  $(\beta, \gamma, \text{resp.} \alpha, \gamma)$ , takže vidíme, že zostávajúce uhly KAP a KBQ majú veľkosti $\alpha$ , resp.  $\beta$ .

Z predošlého vyplýva, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné podľa vety usu, lebo majú zhodné strany AK a KB aj obe dvojice k nim priľahlých vnútorných uhlov.

K uvedenému postupu dodajme, že výpočet uhlov KAP a KBQ cez uhly APK a BQK možno obísť takto: zhodnosť uhlov KAP a BAC (resp. KBQ a ABC) vyplýva zo zhodnosti uhlov KAB a PAC (resp. KBA a QBC).

### Domáca práca