Seminár 4

Téma

Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti II – nerovnosti

Ciele

Zoznámiť študentov so základnými metódami pri dokazovaní nerovností a nerovnosťou $a + \frac{1}{a} \geq 2$, ktorá platí pre každé kladné reálne číslo a.

Úvodný komentár

Dokazovanie nerovností nie je bežným obsahom základoškolskej, príp. gymnaziálnej výuky, keďže študenti sa stretávajú prevažne s cvičeniami a problémami, kde je ich úlohou riešiť (lineárne) nerovnice. Dokazovanie nerovností je však častou súčasťou všetkých kôl MO, preto považujeme za vhodné tieto typy úloh so študentami precvičovať. Keďže je tento seminár jedným z dvoch, ktoré sú na nerovnosti zamerané, budeme sa v ňom zaoberať jednoduchšími úlohami. Študenti si tak osvoja základné postupy, ktoré im neskôr (snáď) poslúžia pri úlohách zložitejších, zaradených do seminára v budúcnosti.

Úlohy a riešenia

Úloha 4.1. [58-S-1] Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné čísla a, b, c platí

$$(a+bc)(b+ac) \geq ab(c+1)^2.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť.

Úloha 4.2. [66-I-1-N1] Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla x, y a z platia nerovnosti

a) $2xyz \leq x^2 + y^2z^2$,

b) $(x^2 - y^2)^2 \geq 4xy(x-y)^2$.

Úloha 4.3. [66-I-1-N2] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b platí nerovnosť

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Úloha 4.4. [62-I-2-N1] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c platí nerovnosť

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

a zistite, kedy prechádza v rovnosť.

Úloha 4.5. [66-I-1] Dokážte, že pre ľubovoľné reálne číslo a platí nerovnosť

$$a^2 + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geq a + 1.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 4.6. [59-I-5] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leq \frac{a+b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť.

Domáca práca

Doplňujúce zdroje a materiály

Publikácií a článkov zaoberajúcich sa dokazovaním nerovností existuje veľké množstvo. Ak by študenti mali záujem o širšie štúdium tejto problematiky, na úvod je vhodné odporučiť im napr. publikácie [?] alebo [YY]TODO.