

## Seminár 4: Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti I – úprava výrazov

### Úlohy a riešenia

**Úloha 4.1.** [65-I-3-N1] Pre ľubovoľné reálne čísla  $x, y$  a  $z$  dokážte nezápornosť hodnoty každého z výrazov

$$x^2z^2 + y^2 - 2xyz, \quad x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 2x - 12y - 6z + 13, \quad 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz$$

a zistite tiež, kedy je dotyčná hodnota rovná nule.

**Úloha 4.2.** [63-I-1-N1-N4] a) Určte najmenšiu hodnotu výrazu  $V = 5 + (x - 2)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Pre ktoré  $x$  ju výraz nadobúda?

b) Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu  $W = 9 - ab$ , kde  $a, b$  sú reálne čísla spĺňajúce podmienku  $a + b = 6$ . Pre ktoré hodnoty  $a, b$  je  $W$  minimálne?

c) Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu  $Y = 12 - ab$ , kde  $a, b$  sú reálne čísla spĺňajúce podmienku  $a + b = 6$ . Pre ktoré hodnoty  $a, b$  je  $Y$  minimálne?

d) Určte najväčšiu možnú hodnotu výrazu  $K = 5 + ab$ , kde  $a, b$  sú reálne čísla spĺňajúce podmienku  $a + b = 8$ . Pre ktoré hodnoty  $a, b$  je  $K$  maximálne?

**Úloha 4.3.** [63-I-1] Určte, akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz  $V = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ , ak reálne čísla  $a, b, c$  spĺňajú dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 6, \\ -a + b - c &= 2. \end{aligned}$$

**Úloha 4.4.** [63-S-1] Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz  $V = ab + bc + cd + da$ , ak reálne čísla  $a, b, c, d$  spĺňajú dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} 2a - 5b + 2c - 5d &= 4, \\ 3a + 4b + 3c + 4d &= 6. \end{aligned}$$

**Úloha 4.5.** [65-I-3] Uvažujme výraz

$$2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4.$$

a) Nájdite všetky reálne čísla  $x$  a  $y$ , pre ktoré daný výraz nadobúda svoju najmenšiu hodnotu.

b) Určte všetky dvojice celých nezáporných čísel  $x$  a  $y$ , pre ktoré je hodnota daného výrazu rovná číslu 16.

**Úloha 4.6.** [65-II-1] Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$3x^2 - 12xy + y^4,$$

v ktorom  $x$  a  $y$  sú ľubovoľné celé nezáporné čísla.

**Úloha 4.7.** [65-I-3-D1, resp. B-61-S-1] V obore celých čísel vyriešte rovnicu

$$x^2 + y^2 + x + y = 4.$$