

Seminár 31

Téma

Geometria – stredové, obvodové, úsekové uhly, tetivové štvoruholníky

Ciele

Úlohy a riešenia

Úloha 31.1. [B-65-I-5-D1] Daná je tetiva AB kružnice k so stredom v bode S . Na úsečke AB zvolíme bod M a priesečník kružnice opísanej trojuholníku AMS s kružnicou k označíme C . Dokážte, že uhly MCS a MBS sú zhodné.

Riešenie*. Stačí využiť rovnosť uhlov v rovnoramennom trojuholníku ABS a obvodové uhly nad MS v kružnici opísanej trojuholníku AMS .

Komentár. Úloha je veľmi jednoduchá, preto ju považujeme skôr za rozcvičku ako plnohodnotný matematický oriešok. Pekne však demonštruje to

Úloha 31.2. [B-66-II-3] V rovine sú dané kružnice k a l , ktoré sa pretínajú v bodoch E a F . Dotyčnica ku kružnici l zostrojená v bode E pretína kružnicu k v bode H ($H \neq E$). Na oblúku EH kružnice k , ktorý neobsahuje bod F , zvolíme bod C ($E \neq C \neq H$) a priesečník priamky CE s kružnicou l označíme D ($D \neq E$). Dokážte, že trojuholníky DEF a CHF sú podobné.

Riešenie*. Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou HF kružnice k vyplýva $|\angle HCF| = |\angle HEF|$. Uhol HEF je zároveň úsekovým uhlom prislúchajúcim tetive EF kružnice l , ktorý je však zhodný s obvodovým uhlom EDF (doplniť (obr. 1)). Celkovo tak platí

$$|\angle HCF| = |\angle HEF| = |\angle EDF|. \quad (1)$$

(DOPLNIŤ Obr. 1)

Vzhľadom na to, že $CEFH$ je tetivový štvoruholník, je jeho vnútorný uhol pri vrchole H zhodný s vonkajším uhlom pri jeho protiľahlom vrchole E . Platí teda

$$|\angle CHF| = |\angle DEF|. \quad (2)$$

Z rovností ((1) a (2)) vyplýva na základe vety *uu* podobnosť trojuholníkov DEF a CHF . Tým je dôkaz hotový.

Úloha 31.3. [B-65-II-2] Daná je úsečka AB , jej stred C a vnútri úsečky AB bod D . Kružnice $k(C, |BC|)$ a $m(B, |BD|)$ sa pretínajú v bodoch E a F . Zdôvodnite, prečo je polpriamka FD osou uhla AFE .

Riešenie*. Kružnica k je Tálesovou kružnicou nad priemerom AB , takže trojuholník ABF je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole F . Inými slovami, priamka AF je kolmá

(DOPLNIŤ Obr. 1)

na polomer BF kružnice m , a preto sa priamka AF dotýka kružnice m v bode F ((obr. 1)). Z rovnosti úsekového uhla zovretého tetivou DF s dotyčnicou AF a obvodového uhla nad tou istou tetivou máme (ako už je vyznačené na obrázku)

$$|\angle AFD| = |\angle DEF|.$$

Zo súmernosti úsečky EF podľa osi AB tak vyplýva

$$|\angle AFD| = |\angle DEF| = |\angle DFE|,$$

čo znamená, že FD je osou uhla AFE .

Iné riešenie*. Označme β veľkosť uhla ABF a dopočítajme veľkosti uhlov DFE a AFE . Trojuholník DBF je rovnoramenný, lebo jeho ramená BD a BF sú polomery kružnice m , preto

$$|\angle DFB| = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Keďže podobne aj trojuholník EBF je rovnoramenný s osou BD , platí

$$|\angle EFB| = 90^\circ - \beta.$$

Spojením oboch predchádzajúcich rovností tak dostávame

$$|\angle DFE| = |\angle DFB| - |\angle EFB| = \frac{\beta}{2}.$$

Z vlastností Tálesovej kružnice k nad priemerom AB vieme, že uhol AFB je pravý. Pritom jeho časť uhol EFB má, ako sme už zistili, veľkosť $90^\circ - \beta$, takže jeho druhá časť, uhol AFE , má veľkosť β , čo je presne dvojnásobok veľkosti uhla DFE . Tým sme dokázali, že priamka FD je osou uhla AFE .

Iné riešenie*. Nad oblúkom AE kružnice k sa zhodujú uhly ABE a AFE ((obr. 2)). Oblúku DE kružnice m prislúcha obvodový uhol DFE a stredový uhol DBE . Spolu tak dostávame

$$|\angle DFE| = \frac{1}{2}|\angle DBE| = \frac{1}{2}|\angle ABE| = \frac{1}{2}|\angle AFE|,$$

čo dokazuje, že FD je osou uhla AFE .

(DOPLNIŤ Obr. 2)

Úloha 31.4. [B-65-I-5] Vrcholy konvexného šesťuholníka $ABCDEF$ ležia na kružnici, pričom $|AB| = |CD|$. Úsečky AE a CF sa pretínajú v bode G a úsečky BE a DF sa pretínajú v bode H . Dokážte, že úsečky GH , AD a BC sú navzájom rovnobežné.

Riešenie*. Najskôr ukážeme, že $AD \parallel BC$. Keďže $|AB| = |CD|$, sú obvodové uhly nad tetivami AB a CD kružnice opísanej šesťuholníku $ABCDEF$ zhodné ((obr. 3)), teda $|\angle ADB| = |\angle DBC|$; to sú však striedavé uhly priečky BD priamok AD a BC , preto $AD \parallel BC$. Ostáva ukázať, že $GH \parallel AD$. Využitím zhodných obvodových uhlov nad tetivami

(DOPLNIŤ Obr.3)

AB a CD pri vrcholoch E a F dostávame

$$|\angle GEH| = |\angle AEB| = |\angle CFD| = |\angle GFH|,$$

čo znamená, že body E , F , G a H ležia na jednej kružnici, pretože vrcholy zhodných uhlov GEH a GFH ležia v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou GH . Z toho vyplýva, že uhly EFH a EGH nad jej tetivou EH sú zhodné. To spolu so zhodnosťou uhlov EFD a EAD nad tetivou ED pôvodnej kružnice ((obr. 3)) vedie na zhodnosť súhlasných uhlov EGH a EAD priečky AE priamok GH a AD , ktoré sú teda naozaj rovnobežné. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Úloha 31.5. [B-58-I-5] Trojuholníku ABC je opísaná kružnica k . Os strany AB pretne kružnicu k v bode K , ktorý leží v polrovine opačnej k polrovine ABC . Osi strán AC a BC pretnú priamku CK postupne v bodoch P a Q . Dokážte, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné.

Riešenie*. Označme α, β, γ zvyčajným spôsobom veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC (doplňte (obr. 4)). Bod K leží na osi úsečky AB , preto $|AK| = |KB|$. Trojuholník AKB je rovnoramenný so základňou AB , jeho vnútorné uhly pri vrcholoch A a B sú

(DOPLNIŤ Obr. 4)

teda zhodné. Podľa vety o obvodových uhloch sú zhodné aj uhly BCK a BAK , resp. ACK a ABK , preto sú zhodné aj uhly BCK a ACK . Polpriamka CK je teda osou uhla ACB :

$$|\angle ACK| = |\angle BCK| = \frac{\gamma}{2}.$$

Keďže bod P leží na osi strany AC , je trojuholník ACP rovnoramenný a jeho vnútorné uhly pri základni AC majú veľkosť $\frac{1}{2}\gamma$, takže jeho vonkajší uhol APK pri vrchole P má veľkosť $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma = \gamma$. Rovnako z rovnoramenného trojuholníka BCQ odvodíme, že aj veľkosť uhla BQK je γ . Podľa vety o obvodových uhloch sú zhodné uhly ABC a AKC , teda uhol AKC (čiže uhol AKP) má veľkosť β a – celkom analogicky – uhol BKQ má veľkosť α .

V každom z trojuholníkov AKP a BKQ už poznáme veľkosti dvoch vnútorných uhlov (β , γ , resp. α , γ), takže vidíme, že zostávajúce uhly KAP a KBQ majú veľkosti α , resp. β .

Z predošlého vyplýva, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné podľa vety *usu*, lebo majú zhodné strany AK a KB aj obe dvojice k nim príľahlých vnútorných uhlov.

K uvedenému postupu dodajme, že výpočet uhlov KAP a KBQ cez uhly APK a BQK možno obísť takto: zhodnosť uhlov KAP a BAC (resp. KBQ a ABC) vyplýva zo zhodnosti uhlov KAB a PAC (resp. KBA a QBC).

Domáca práca