

Seminár 18

Téma

Algebraické výrazy a (ne)rovnice IV – zložitejšie nerovnosti

Ciele

Zoznámiť a precvičiť so študentami riešenie úloh zameraných na dokazovanie zložitejších nerovností, AG-nerovnosť

Úlohy a riešenia

Úloha 18.1. [66-II-4] Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla $a \leq b \leq c$ platí

$$(-a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3.$$

Riešenie*. Nerovnosť vynásobíme kladným výrazom abc a po roznásobení ju postupne (ekvivalentne) upravíme:

$$\begin{aligned} -a(bc + ac + ab) + b(bc + ac + ab) + c(bc + ac + ab) &\geq 3abc, \\ -abc - a^2c - a^2b + b^2c + abc + ab^2 + bc^2 + ac^2 + abc &\geq 3abc, \\ (b^2c - abc) + (bc^2 - abc) + (ac^2 - a^2c) + (ab^2 - a^2b) &\geq 0, \\ bc(b - a) + bc(c - a) + ac(c - a) + ab(b - a) &\geq 0. \end{aligned}$$

Vzhľadom na predpoklad $0 < a \leq b \leq c$ je výsledná, a teda aj pôvodná nerovnosť splnená.

Iné riešenie*. Dokazovanú nerovnosť postupne upravíme, pričom využijeme známu nerovnosť $b/c + c/b = 2$, ktorá je pre kladné čísla b, c ekvivalentná s nerovnosťou $(b - c)^2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} (-a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &= 1 + \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} - \frac{a}{c} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq \\ &\geq 1 + \frac{b^2 - a^2}{ab} + \frac{c^2 - a^2}{ac} + 2 \geq 3, \end{aligned}$$

pretože zrejme platí aj $a^2 \leq b^2 \leq c^2$.

Iné riešenie*. Podľa predpokladov úlohy platia nerovnosti $-a + b + c \geq c$ a $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$. Obe nerovnosti (s kladnými stranami) medzi sebou vynásobíme a získame tak

$$(-a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq c \left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 + \frac{2c}{b} \geq 3$$

pretože $c/b \geq 1$ podľa zadania.

Komentár. Úvodná úloha slúži na opakovanie, pripomenutie naučených postupov a overenie toho, čo sa študenti doteraz naučili o nerovnostiach. Považujeme za vhodné ukázať všetky tri zmienené postupy riešenia, keďže ekvivalentné úpravy rovníc, využívanie známych rovností aj sčítanie dvoch a viac rovností sú všetko užitočné metódy, ktoré sa oplatí mať v našej riešiteľskej zásobe.

Úloha 18.2. [61-II-1] Pre všetky reálne čísla x, y, z také, že $x < y < z$, dokážte nerovnosť

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

Riešenie*. Aby sme mohli použiť vzorec $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, presuňme najskôr jeden z krajných členov ľavej strany, napríklad člen z^2 , na pravú stranu:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &> (x - y + z)^2 - z^2, \\(x - y)(x + y) &> (x - y + z - z)(x - y + z + z), \\(x - y)(x + y) &> (x - y)(x - y + 2z).\end{aligned}$$

Keďže spoločný činiteľ $x - y$ oboch strán poslednej nerovnosti je podľa predpokladu úlohy číslo záporné, budeme s dôkazom hotoví, keď ukážeme, že zvyšné činitele spĺňajú opačnú nerovnosť $x + y < x - y + 2z$. Tá je však zrejme ekvivalentná s nerovnosťou $2y < 2z$, čiže $y < z$, ktorá podľa zadania úlohy naozaj platí.

Iné riešenie*. Podľa vzorca pre druhú mocninu trojčlena platí

$$(x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz.$$

Dosaďme to do pravej strany dokazovanej nerovnosti a urobme niekoľko ďalších ekvivalentných úprav:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 + z^2 &> x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \\0 &> 2y^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \\0 &> 2y(y - x) + 2z(x - y), \\0 &> 2(y - x)(y - z).\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť už vyplýva z predpokladov úlohy, podľa ktorých je činiteľ $y - x$ kladný, zatiaľ čo činiteľ $y - z$ je záporný.

Úloha 18.3. [62-I-2-N1] Ukážte, že nerovnosť $\frac{1}{2}(u + v) = \sqrt{uv}$ medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch ľubovoľných nezáporných čísel u a v vyplýva zo zrejmej nerovnosti $(a - b)^2 \geq 0$ vhodnou voľbou hodnôt a a b .

Riešenie*. Zvoľte $a = \sqrt{u}$ a $b = \sqrt{v}$.

Úloha 18.4. [62-I-2-N1] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c platí nerovnosť

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

a zistite, kedy prechádza v rovnosť.

Riešenie*. Ľavú stranu L dokazovanej nerovnosti najskôr upravíme roznásobením a vzniknuté členy zoskupíme do súčtov dvojíc navzájom prevrátených výrazov:

$$\begin{aligned}L &= \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) = \left(ab + \frac{a}{c} + 1 + \frac{1}{bc}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) = \\&= \left(abc + \frac{1}{abc}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right).\end{aligned}$$

Pretože pre $u > 0$ je $u + \frac{1}{u} \geq 2$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $u = 1$, pre výraz L platí $L \geq 2 + 2 + 2 + 2 = 8$, čo sme mali dokázať. Rovnosť $L = 8$ nastane práve vtedy, keď platí

$$abc + \frac{1}{abc} = a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c} = 2$$

teda, ako sme už spomenuli, práve vtedy, keď $abc = a = b = c = 1$, t. j. práve vtedy, keď $a = b = c = 1$.

Poznámka. Dodajme, že upravená nerovnosť

$$abc + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \geq 8$$

vyplýva okamžite aj z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom ôsmich čísel

$$abc, \quad a, \quad b, \quad c, \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{abc},$$

lebo ich súčin (a teda aj geometrický priemer) je rovný číslu 1, takže ich aritmetický priemer má hodnotu aspoň 1.

Iné riešenie*. V dokazovanej nerovnosti sa najskôr zbavíme zlomkov, a to tak, že obe jej strany vynásobíme kladným číslom abc . Dostaneme tak ekvivalentnú nerovnosť

$$(ab + 1)(bc + 1)(ac + 1) = 8abc,$$

ktorá má po roznásobení ľavej strany tvar

$$a^2b^2c^2 + a^2bc + ab^2c + abc^2 + ab + ac + bc + 1 \geq 8abc.$$

Poslednú nerovnosť možno upraviť na tvar

$$(abc - 1)^2 + ab(c - 1)^2 + ac(b - 1)^2 + bc(a - 1)^2 \geq 0.$$

Táto nerovnosť už zrejme platí, lebo na ľavej strane máme súčet štyroch nezáporných výrazov. Pritom rovnosť nastane práve vtedy, keď má každý z týchto štyroch výrazov nulovú hodnotu, teda práve vtedy, keď

$$abc - 1 = c - 1 = b - 1 = a - 1 = 0,$$

čiže

$$a = b = c = 1.$$

Iné riešenie*. Danú nerovnosť možno dokázať aj bez roznásobenia jej ľavej strany. Stačí napísať tri AG-nerovnosti

$$\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{b} \right) \geq \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{c} \right) \geq \sqrt{\frac{b}{c}}, \quad \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{a} \right) \geq \sqrt{\frac{c}{a}},$$

Ich vynásobením dostaneme

$$\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{b} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{c} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{a} \right) \geq \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} = 1,$$

odkiaľ po násobení ôsmimi obdržíme dokazovanú nerovnosť. Rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď nastane rovnosť v každej z troch použitých AG-nerovností, teda práve vtedy, keď sa čísla v každej „priemerovanej“ dvojici rovnajú:

$$a = \frac{1}{b}, \quad b = \frac{1}{c}, \quad c = \frac{1}{a}.$$

Z prvých dvoch rovností vyplýva $a = c$, po dosadení do tretej rovnosti potom vychádza $a = c = 1$, teda aj $b = 1$.

Komentár. Úloha sa dá riešiť využitím AG nerovnosti, tá však bude obsahom jedného z ďalších seminárov, v ktorom sa (okrem iného) k tejto úlohe vrátíme.

Úloha 18.5. [60-II-4] Nech x, y, z sú kladné reálne čísla. Ukážte, že aspoň jedno z čísel $x + y + z - xyz$ a $xy + yz + zx - 3$ je nezáporné.

Riešenie*. Ukážeme, že ak je číslo $xy + yz + zx - 3$ záporné, je číslo $x + y + z - xyz$ kladné. Ak $xy + yz + zx < 3$, je aspoň jedno z čísel xy, yz, zx menšie ako 1, napr. xy . Potom $x + y + z - xyz = x + y + z(1 - xy)$ je zjavne súčet troch kladných čísel.

Iné riešenie*. Ukážeme, že ak je číslo $x + y + z - xyz$ záporné, tak číslo $xy + yz + zx - 3$ je kladné. Predpokladajme, že $x + y + z < xyz$. Tým skôr $x < xyz$. Po skrátení kladného čísla x dostaneme $yz > 1$. Podobne odvodíme odhady $xy > 1$ a $zx > 1$. Teraz ich stačí sčítať a máme $xy + yz + zx > 3$.

Iné riešenie*. Tvrdenie úlohy dokážeme sporom. Predpokladajme, že $x + y + z < xyz$ a zároveň $xy + yz + zx < 3$. Obe tieto nerovnosti sú symetrické, preto môžeme predpokladať, že čísla x, y, z sú označené tak, že z je najmenšie. Z druhej nerovnosti dostaneme, že $xy < 3$. Potom však $x + y + z < xyz < 3z$, teda $x + y < 2z$. To je však spor s tým, že číslo z je najmenšie.

Iné riešenie*. Aritmetický priemer c čísel a, b má tú vlastnosť, že sa od neho obe čísla líšia o rovnakú hodnotu d . Ak nahradíme premenné a, b v daných nerovnostiach premennými c, d , zápis nerovností aj dôkaz oboch vzťahov sa zjednoduší. Položme teda $c = \frac{1}{2}(a + b)$, potom $a = c + d$ a $b = c - d$ (pričom $d = \frac{1}{2}(a - b)$, ako sa ľahko môžeme presvedčiť). Takže $a^2 + b^2 = 2(c^2 + d^2)$, $ab = c^2 - d^2$, odkiaľ $a^2 + 3ab + b^2 = 5c^2 - d^2$. Označme ešte písmenami m a n ľavú a pravú stranu prvej z dokazovaných nerovností. Potom

$$m = \sqrt{am} = \sqrt{c^2 - d^2},$$

$$n = \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} = \frac{2(5c^2 - d^2)}{5 \cdot 2c} = c - \frac{d^2}{5c} = \sqrt{\left(c - \frac{d^2}{5c}\right)^2} = \sqrt{\left(c - d^2 \frac{2}{5} - \frac{d^2}{25c^2}\right)}.$$

Keďže z vyjadrenia kladnej hodnoty m vidíme, že $d^2 < c^2$, pre výraz v poslednej zátvorke pod odmocninou platí

$$1 > \frac{2}{5} \geq \frac{2}{5} - \frac{d^2}{25c^2} > \frac{2}{5} - \frac{1}{25} = \frac{9}{25} > 0,$$

čo znamená, že výraz pod odmocninou leží v uzavretom intervale medzi číslami $c^2 - d^2$ a c^2 . Odtiaľ vyplýva $m \leq n \leq c$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $d = 0$, t. j. keď $a = b$.

Poznámka. Z výsledkov súťažnej úlohy vyplýva, že rozdiel medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch kladných čísel možno zdola odhadnúť nezáporným lomeným výrazom takto:

$$\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{a + b}{2} - \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} = \frac{(a - b)^2}{10(a + b)}.$$

Umocnením osamostatnenej odmocniny a ďalšími úpravami môžeme dokázať silnejší odhad rovnakého typu

$$\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(a - b)^2}{4(a + b)}.$$

Inú metódu dôkazov spolu s ďalšími podobnými nerovnosťami nájdete v článku J. Šimšu *Dolní odhady rozdílu průměrů* v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální 65 (1986/87), číslo 10, str. 403 – 407.

Úloha 18.6. [61-I-4] Reálne čísla a, b, c, d vyhovujú rovnici $ab + bc + cd + da = 16$.

- Dokážte, že medzi číslami a, b, c, d sa nájdu dve so súčtom najviac 4.
- Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$?

Riešenie*. a) Z rovnosti $16 = ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$ vyplýva, že obidva súčty $a + c$ a $b + d$ nemôžu byť väčšie ako 4 súčasne, lebo v opačnom prípade by bol ich súčin väčší ako 16. Preto vždy aspoň jeden zo súčtov $a + c$ alebo $b + d$ má požadovanú vlastnosť. b) Využijeme všeobecnú rovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}(b - c)^2 + \frac{1}{2}(c - d)^2 + \frac{1}{2}(d - a)^2 + ab + bc + cd + da,$$

o platnosti ktorej sa ľahko presvedčíme úpravou pravej strany. Vzhľadom na nezápornosť druhých mocnín $(a - b)^2$, $(b - c)^2$, $(c - d)^2$ a $(d - a)^2$ dostávame pre ľavú stranu rovnosti odhad

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da = 16.$$

Je nájdené číslo 16 najmenšou hodnotou uvažovaných súčtov? Ináč povedané: nastane pre niektorú vyhovujúcu štvoricu v odvodennej nerovnosti rovnosť? Z nášho postupu je jasné, že musíme rozhodnúť, či pre niektorú z uvažovaných štvoric platí $a - b = b - c = c - d = d - a = 0$, čiže $a = b = c = d$. Pre takú štvoricu má rovnosť $ab + bc + cd + da = 16$ tvar $4a^2 = 16$, čomu vyhovuje $a = \pm 2$. Pre vyhovujúce štvorice $a = b = c = d = 2$ a $a = b = c = d = -2$ má súčet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ naozaj hodnotu 16, preto ide o hľadané minimum.

Úloha 18.7. [62-I-2] Pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí

$$a + b = c + d, \quad ad = bc, \quad ac + bd = 1.$$

Akú najväčšiu hodnotu môže mať súčet $a + b + c + d$?

Riešenie*. Najskôr ukážeme, že prvé dve rovnosti zo zadania úlohy sú splnené len vtedy, keď platí $a = c$ a súčasne $b = d$. Naozaj, vďaka tomu, že zadané čísla sú kladné (a teda rôzne od nuly), môžeme uvedené rovnosti zapísať ako

$$a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = c\left(1 + \frac{d}{c}\right) \quad \text{a} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Podľa druhej rovnosti vidíme, že súčty v oboch zátvorkách z prvej rovnosti majú rovnakú kladnú hodnotu, takže sa musia rovnať prvé činitele oboch jej strán. Platí teda $a = c$, odkiaľ už vyplýva aj rovnosť $b = d$. Keď už vieme, že platí $a = c$ a $b = d$, vystačíme ďalej len s premennými a a b a nájdeme najväčšiu hodnotu zadaného súčtu

$$S = a + b + c + d = 2(a + b)$$

za jedinej podmienky, totiž že kladné čísla a, b spĺňajú rovnosť $a^2 + b^2 = 1$, ktorá je vyjadrením tretej zadanej rovnosti $ac + bd = 1$ (prvé dve sú vďaka rovnostiam $a = c$ a $b = d$ zrejmé). Všimnime si, že pre druhú mocninu (kladného) súčtu S platí

$$S^2 = 4(a + b)^2 = 4(a^2 + b^2) + 8ab = 4 \cdot 1 + 8ab = 4(1 + 2ab),$$

takže hodnota S bude najväčšia práve vtedy, keď bude najväčšia hodnota $2ab$. Zo zrejmej nerovnosti $(a - b)^2 \geq 0$ po roznásobení však dostaneme

$$2ab \leq a^2 + b^2 = 1,$$

pritom rovnosť $2ab = 1$ nastane práve vtedy, keď bude platiť $a = b$, čo pre kladné čísla a, b spolu s podmienkou $a^2 + b^2 = 1$ vedie k jedinej vyhovujúcej dvojici $a = b = 1/\sqrt{2}$. Najväčšia hodnota výrazu $2ab$ je teda 1, takže najväčšia hodnota výrazu S^2 je $4(1 + 1) = 8$, a teda najväčšia hodnota S je $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Dosiahne sa pre jedinú prípustnú štvoricu $a = b = c = d = 1/\sqrt{2}$.