

## Seminár 8: Teória čísel II – úlohy o najmenšom spoločnom násobku a najväčšom spoločnom deliteli

### Úlohy a riešenia

**Úloha 8.1.** [61-I-3-N1] Určte, pre ktoré prirodzené čísla  $a, b$  platí  $(a, b) = 10$  a zároveň  $[a, b] = 150$ .

**Úloha 8.2.** [60-I-5-N1] Nech  $d$  je najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel  $a$  a  $b$ . Ukážte, že čísla  $a/d$  a  $b/d$  sú celé a nesúdeliteľné.

**Úloha 8.3.** [60-I-5-N2] Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla  $a, b$  platí vzťah

$$[a, b] \cdot (a, b) = ab.$$

**Úloha 8.4.** [64-I-5-N4] Platí pre každé tri prirodzené čísla  $a, b, c$  a ich najväčší spoločný deliteľ  $d$  a ich najmenší spoločný násobok  $n$  rovnosť  $abc = nd$ ?

**Úloha 8.5.** [64-I-5-N5] Ak majú prirodzené čísla  $a, b$  najväčšieho spoločného deliteľa  $d$ , majú rovnakého najväčšieho spoločného deliteľa aj čísla  $a, b, a - b, a + b$ . Dokážte. Platí rovnaké tvrdenie pre najmenší spoločný násobok?

**Úloha 8.6.** [61-I-3-N4, resp. 50-II-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel  $a, b$ , pre ktoré platí  $a + b + [a, b] + (a, b) = 50$ .

**Úloha 8.7.** [61-S-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel  $a, b$ , pre ktoré platí rovnosť množín

$$\{a \cdot [a, b], b \cdot (a, b)\} = \{45, 180\}.$$

**Úloha 8.8.** [64-I-5] Rozdiel dvoch prirodzených čísel je 2010 a ich najväčší spoločný deliteľ je 2014-krát menší ako ich najmenší spoločný násobok. Určte všetky také dvojice čísel.

**Úloha 8.9.** [60-I-5-D3] Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel  $a, b$ , pre ktoré má výraz

$$\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$$

celočíselnú hodnotu.

**Úloha 8.10.** [60-I-5] Dokážte, že najmenší spoločný násobok  $[a, b]$  a najväčší spoločný deliteľ  $(a, b)$  ľubovoľných dvoch kladných celých čísel  $a, b$  spĺňajú nerovnosť

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geq 2ab.$$

Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť.

**Úloha 8.11.** [61-I-3] Nájdite všetky trojice prirodzených čísel  $a, b, c$ , pre ktoré platí množinová rovnosť

$$\{(a, b), (a, c), (b, c), [a, b], [a, c], [b, c]\} = \{2, 3, 5, 60, 90, 180\},$$

pričom  $(x, y)$  a  $[x, y]$  označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel  $x$  a  $y$ .

**Úloha 8.12.** [63-S-2] Čísla  $1, 2, \dots, 10$  rozdeľte na dve skupiny tak, aby najmenší spoločný násobok súčiny všetkých čísel prvej skupiny a súčiny všetkých čísel druhej skupiny bol čo najmenší.