

Seminár 34: Opakovanie II – samostatné riešenie úloh

Ciele

Samostatne overiť schopnosti študentov riešiť úlohy MO kategórie B (školské kolo).

Úvodný komentár

Posledné seminárne stretnutie študenti stravia riešením troch úloh školského kola MO kategórie B. Môžeme využiť školské kolo použité v roku, keď seminár prebieha, príp. využiť niektorý zo starších ročníkov. My sme zvolili ročník 51, ktorý sa nám skladbou úloh zdal veľmi vhodný. Vzhľadom na časové možnosti študentov nebudeme vyžadovať popísaný postup riešenia, necháme študentov len samostatne pracovať bez akéhokoľvek napovedania. Na riešenie študentom ponecháme 90 minút.

Vo zvyšnom čase so študentami prejdeme kľúčové myšlienky jednotlivých úloh, príp. ich vlastné nápady. Posledných niekoľko minút seminára je tiež vhodné venovať spätnej väzbe od študentov. Nezaškodí sa vrátiť k diskusii z prvého seminárneho stretnutia a zistiť, či seminár splnil očakávania, čo študenti na stretnutiach oceňovali a čo by, naopak, ešte privítali.

Úlohy a riešenia

Úloha 34.1. [B-51-S-1] Určte reálne číslo p tak, aby rovnica

$$x^2 + 4px + 5p^2 + 6p - 16 = 0$$

mala dva rôzne korene x_1, x_2 a aby súčet $x_1^2 + x_2^2$ bol čo najmenší.

Úloha 34.2. [B-51-S-2] Vnútri strán BC, CA, AB daného ostrohľého trojuholníka ABC sú po rade vybrané body X, Y a Z tak, že každému zo štvoruholníkov $ABXY, BCYZ$ a $CAZX$ sa dá opísať kružnica. Dokážte, že body X, Y, Z sú päty výšok trojuholníka ABC .

Úloha 34.3. [B-51-S-3] Na tabuli sú napísané čísla $1, 2, \dots, 17$. Čísla postupne zotierame, a to tak, že z doposiaľ nezotretých čísel zvolíme ľubovoľné číslo k a zotrieme všetky tie čísla na tabuli, ktoré delia číslo $k + 17$. Dokážte, že opakovaním tejto procedúry sa nám nepodari zotrieť všetky čísla.