## Seminár 11

### Téma

Geometria III – obsahy trojuholníkov a štvoruholníkov

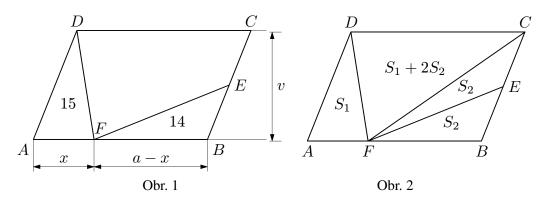
### Ciele

Precvičenie úloh zaoberajúcich sa obsahmi trojuholníkov a štvoruholníkov, rôznorodé určovanie obsahu, príp. pomeru obsahov trojuholníkov v úlohách.

# Úlohy a riešenia

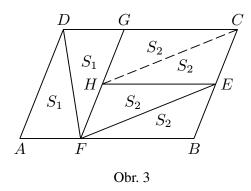
**Úloha 11.1.** [57-S-2] V danom rovnobežníku ABCD je bod E stred strany BC a bod F leží vnútri strany AB. Obsah trojuholníka AFD je  $15 \text{ cm}^2$  a obsah trojuholníka FBE je  $14 \text{ cm}^2$ . Určte obsah štvoruholníka FECD.

**Riešenie\*.** Označme v vzdialenosť bodu C od priamky AB, a = |AB| a x = |AF|. Pre obsahy trojuholníkov AFD a FBE (obr. 1) platí  $\frac{1}{2}x \cdot v = 15$ ,  $\frac{1}{2}(a-x) \cdot \frac{1}{2}v = 14$ . Odtiaľ xv = 30, av - xv = 56. Sčítaním oboch rovností nájdeme obsah rovnobežníka ABCD:  $S_{ABCD} = av = 86 \, \mathrm{cm}^2$ . Obsah štvoruholníka FECD je teda  $S_{FECD} = S_{ABCD} - (S_{AFD} + S_{FBE}) = 57 \, \mathrm{cm}^2$ .



**Iné riešenie.** Trojuholníky BEF a ECF majú spoločnú výšku z vrcholu F a zhodné základne BE a EC. Preto sú obsahy oboch trojuholníkov rovnaké. Z obr. 2 vidíme, že obsah trojuholníka CDF je polovicou obsahu rovnobežníka ABCD (oba útvary majú spoločnú základňu CD a rovnakú výšku). Druhú polovicu tvorí súčet obsahov trojuholníkov AFD a BCF. Odtial'  $S_{FECD} = S_{ECF} + S_{CDF} = S_{ECF} + (S_{AFD} + S_{BCF}) = S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57 \text{ cm}^2$ .

**Iné riešenie.** Do rovnobežníka dokreslíme úsečky FG a EH rovnobežné so stranami BC a AB tak, ako znázorňuje obr. 3.



Rovnobežníky AFGD a FBEH sú svojimi uhlopriečkami DF a EF rozdelené na dvojice zhodných trojuholníkov. Takže  $S_{GDF} = S_{AFD} = 15 \text{ cm}^2$  a  $S_{HFE} = S_{BEF} = 14 \text{ cm}^2$ . Zo zhodnosti rovnobežníkov HECG a FBEH navyše ľahko usúdime, že všetky štyri trojuholníky FBE, EHF, HEC a CGH sú zhodné, takže obsah štvoruholníka FECD je  $S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57 \text{ cm}^2$ .

**Komentár.** Úloha je zaradená ako rozcvička pred komplexnejšími problémami, nie je totiž veľmi náročná na vyriešenie. Pekne tiež demonštruje, že niekedy nám vhodný prístup, náčrtok alebo správne nakreslená priamka v obrázku riešenie úlohy významne zjednoduší.

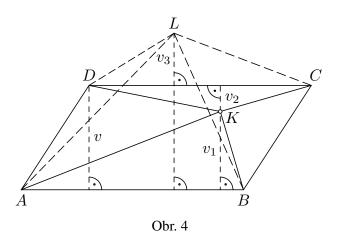
**Úloha 11.2.** [62-II-2] Vnútri rovnobežníka ABCD je daný bod K a v páse medzi rovnobežkami BC a AD v polrovine opačnej k CDA je daný bod L. Obsahy trojuholníkov ABK, BCK, DAK a DCL sú  $S_{ABK} = 18 \text{ cm}^2$ ,  $S_{BCK} = 8 \text{ cm}^2$ ,  $S_{DAK} = 16 \text{ cm}^2$ ,  $S_{DCL} = 36 \text{ cm}^2$ . Vypočítajte obsahy trojuholníkov CDK a ABL.

**Riešenie\*.** Trojuholníky ABK a CDK majú zhodné strany AB a CD a súčet ich výšok  $v_1$  a  $v_2$  (vzdialeností bodu K od priamky AB, resp. CD) je rovný výške v rovnobežníka ABCD (vzdialenosti rovnobežných priamok AB a CD, obr. 4). Preto súčet ich obsahov dáva polovicu súčtu obsahu daného rovnobežníka:

$$S_{ABK} + S_{CDK} = \frac{1}{2}|AB|v_1 + \frac{1}{2}|CD|v_2 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v_1 + v_2) = \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Podobne aj  $S_{BCK} + S_{DAK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ , teda

$$S_{CDK} = S_{BCK} + S_{DAK} - S_{ABK} = 6 \,\mathrm{cm}^2.$$



Trojuholníky ABL a DCL majú zhodné strany AB a CD. Ak  $v_3$  označuje príslušnú výšku druhého z nich, je výška prvého z nich rovná  $v + v_3$ , takže pre rozdiel obsahov týchto trojuholníkov platí

$$S_{ABL} - S_{DCL} = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v + v_3) - \frac{1}{2}|CD| \cdot v_3 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v + v_3 - v_3) =$$

$$= \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{BCK} + S_{DAK}.$$

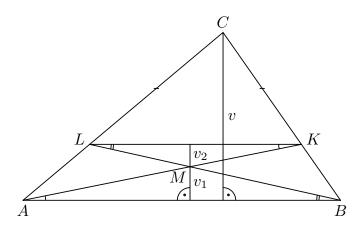
Odtiaľ vyplýva

$$S_{ABL} = S_{BCK} + S_{DAK} + S_{DCL} = 60 \,\mathrm{cm}^2.$$

**Komentár.** Úloha precvičuje použitie tvrdenia, ktoré sme dokázali v prvom geometrickom seminári, a to, že ak majú dva trojuholníky základňu rovnakej dĺžky, potom ich obsahy sú v rovnakom pomere ako ich výšky na túto základňu.

**Úloha 11.3.** [64-S-2] Označme K a L postupne body strán BC a AC trojuholníka ABC, pre ktoré platí  $|BK| = \frac{1}{3}|BC|$ ,  $|AL| = \frac{1}{3}|AC|$ . Nech M je priesečník úsečiek AK a BL. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníkov ABM a ABC.

**Riešenie\*.** Označme v výšku trojuholníka ABC na stranu AB,  $v_1$  výšku trojuholníka ABM na stranu AB a  $v_2$  výšku trojuholníka KLM na stranu KL (obr. 5). Z podobnosti trojuholníkov LKC a ABC (zaručenej vetou sus) vyplýva, že  $|KL| = \frac{2}{3}|AB|$ . Z porovnania ich výšok zo spoločného vrcholu C vidíme, že výška v trojuholníka ABC je rovná trojnásobku vzdialenosti priečky KL od strany AB, teda  $v = 3(v_1 + v_2)$ . Keď že AK a BL sú priečky rovnobežiek KL a AB, vyplýva zo zhodnosti prislúchajúcich striedavých uhlov podobnosť trojuholníkov ABM a KLM.



Obr. 5

Keď že  $|KL| = \frac{2}{3}|AB|$ , je tiež  $v_2 = \frac{2}{3}v_1$ , a preto  $v_1 + v_2 = \frac{5}{3}v_1$ , čiže

$$v = 3(v_1 + v_2) = 5v_1.$$

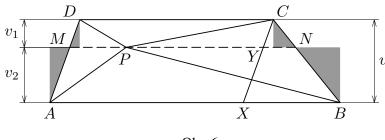
Trojuholníky *ABM* a *ABC* majú spoločnú stranu *AB*, preto ich obsahy sú v pomere výšok na túto stranu, takže obsah trojuholníka *ABC* je päť krát väčší ako obsah trojuholníka *ABM*.

**Komentár.** Ďalšia úloha, ktorá precvičuje rovnaké tvrdenie ako predchádzajúca. Pomery výšok je tentoraz potrebné určiť z podobnosti trojuholníkov. Tu sa teda uplatnia znalosti precvičované na minulom seminárnom stretnutí.

**Úloha 11.4.** [64-II-3] Daný je lichobežník *ABCD* so základňami *AB*, *CD*, pričom 2|AB| = 3|CD|.

- a) Nájdite bod *P* vnútri lichobežníka tak, aby obsahy trojuholníkov *ABP* a *CDP* boli v pomere 3 : 1 a aj obsahy trojuholníkov *BCP* a *DAP* boli v pomere 3 : 1.
- b) Pre nájdený bod P určte postupný pomer obsahov trojuholníkov ABP, BCP, CDP a DAP.

**Riešenie\*.** Predpokladajme, že bod P má požadované vlastnosti. Priamka rovnobežná so základňami lichobežníka a prechádzajúca bodom P pretína ramená AD a BC postupne v bodoch M a N (obr. 6). Označme v výšku daného lichobežníka,  $v_1$  výšku trojuholníka CDP a  $v_2$  výšku trojuholníka ABP.



Obr. 6

a) Keď že obsahy trojuholníkov ABP a CDP sú v pomere 3 : 1, platí

$$\frac{|AB|v_2}{2}: \frac{|CD|v_1}{2} = 3:1, \quad \text{\'ei\'ze} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Z vyznačených dvojíc podobných pravouhlých trojuholníkov vyplýva, že v práve určenom pomere 2:1 výšok  $v_2$  a  $v_1$  delí aj bod M rameno AD a bod N rameno BC (v prípade pravého uhla pri jednom z vrcholov A či B je to zrejmé rovno). Tým je konštrukcia bodov M a N, a teda aj úsečky MN určená. Teraz zistíme, v akom pomere ju delí uvažovaný bod P.

Keď že obsahy trojuholníkov BCP a DAP sú v pomere 3 : 1, platí

$$\left(\frac{|NP|v_1}{2} + \frac{|NP|v_2}{2}\right) : \left(\frac{|MP|v_1}{2} + \frac{|MP|v_2}{2}\right) = 3 : 1,$$

$$\frac{|NP|(v_1+v_2)}{2}:\frac{|MP|(v_1+v_2)}{2}=3:1, \quad |NP|:|MP|=3:1.$$

Tým je konštrukcia (jediného) vyhovujúceho bodu P úplne opísaná.

b) Doplňme trojuholník DAC na rovnobežník DAXC. Jeho strana CX delí priečku MN na dve časti, a keď že  $v_1=\frac{1}{3}v$ , môžeme dĺžku priečky MN vyjadriť ako  $|MN|=|MY|+|YN|=|AX|+\frac{1}{3}|XB|=|CD|+\frac{1}{3}(|AB|-|CD|)=\frac{1}{3}|AB|+\frac{2}{3}|CD|=\frac{7}{6}|CD|$ , lebo podľ a zadania platí  $|AB|=\frac{3}{2}|CD|$ . Preto

$$|MP| = \frac{1}{4}|MN| = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{6}|CD| = \frac{7}{24}|CD|,$$

takže pre pomer obsahov trojuholníkov CDP a DAP platí

$$\frac{|CD|v_1}{2}: \frac{|MP|(v_1+v_2)}{2} = (|CD|v_1): \left(\frac{7}{24} \cdot |CD| \cdot 3v_1\right) = 1: \frac{7}{8} = 8:7.$$

Pomer obsahov trojuholníkov *BCP* a *CDP* je teda 21 : 8 a pomer obsahov trojuholníkov *ABP* a *BCP* je tak 24 : 21. Postupný pomer obsahov trojuholníkov *ABP*, *BCP*, *CDP* a *DAP* je preto 24 : 21 : 8 : 7.

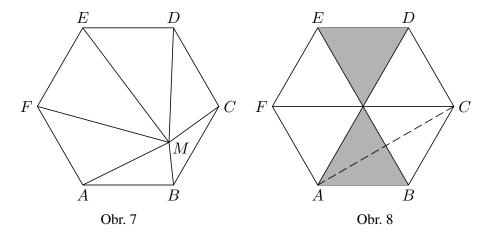
**Komentár.** Táto komplexná úloha je vrcholom tohto seminárneho stretnutia. Vyžaduje umnú prácu s pomermi obsahov, podobnými trojuholníkmi aj netriviálny nápad doplnenia trojuholníka *DAC* na rovnobežník. Je tak vhodné skôr než samostatne úlohu riešiť spoločne na tabuľu. Študentom tiež pripomenieme, že podobne ako v úvodnej úlohe, aj tu našlo vhodné rozdelenie zadaného útvaru svoje opodstatnenie a prispelo k úspešnému rozklúsknutiu problému.

**Úloha 11.5.** [62-I-6] Vnútri pravidelného šesť uholníka *ABCDEF* s obsahom 30 cm<sup>2</sup> je zvolený bod *M*. Obsahy trojuholníkov *ABM* a *BCM* sú postupne 3 cm<sup>2</sup> a 2 cm<sup>2</sup>. Určte obsahy trojuholníkov *CDM*, *DEM*, *EFM* a *FAM*.

**Riešenie\*.** Úloha je o obsahu šiestich trojuholníkov, na ktoré je daný pravidelný šesť uholník rozdelený spojnicami jeho vrcholov s bodom M (obr. 7). Celý šesť uholník s daným obsahom, ktorý označíme S, možno rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov s obsahom S/6 (obr. 8). Ak označíme r ich stranu, v vzdialenosť rovnobežiek AB, CD a  $v_1$  vzdialenosť bodu M od priamky AB, dostaneme

$$S_{ABM} + S_{EDM} = \frac{1}{2}rv_1 + \frac{1}{2}r(v - v_1) = \frac{1}{2}rv = \frac{S}{3},$$

lebo S/3 je súčet obsahov dvoch vyfarbených rovnostranných trojuholníkov. Vď aka symetrii majú tú istú hodnotu S/3 aj súčty  $S_{BCM} + S_{EFM}$  a  $S_{CDM} + S_{FAM}$ . Odtiaľ už dostávame prvé dva neznáme obsahy  $S_DEM = S/3 - S_{ABM} = 7 \text{ cm}^2$  a  $S_{EFM} = S/3 - S_{BCM} = 8 \text{ cm}^2$ .



Ako určiť zvyšné dva obsahy  $S_{CDM}$  a  $S_{FAM}$ , keď zatiaľ poznáme len ich súčet S/3? Všimnime si, že súčet zadaných obsahov trojuholníkov ABM a BCM má významnú hodnotu S/6, ktorá je aj obsahom trojuholníka ABC (to vyplýva opäť z obr. 8). Taká zhoda obsahov znamená práve to, že bod M leží na uhlopriečke AC. Trojuholníky ABM a BCM tak majú zhodné výšky zo spoločného vrcholu B a to isté platí aj pre výšky trojuholníkov CDM a FAM z vrcholov F a D ( t. j. bodov, ktoré majú od priamky AC rovnakú vzdialenosť). Pre pomery obsahov týchto dvojíc trojuholníkov tak dostávame

$$\frac{S_{CDM}}{S_{FAM}} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{S_{BCM}}{S_{ABM}} = \frac{2}{3}.$$

V súčte  $S_{CDM} + S_{FAM}$  majúcom hodnotu S/3 sú teda sčítance v pomere 2 : 3. Preto  $S_{CDM} = 4 \text{ cm}^2$  a  $S_{FAM} = 6 \text{ cm}^2$ .

**Komentár.** Úloha je odľahčeným a netradičným príkladom využitia princípu, na ktorom sme stavali celé toto seminárne stretnutie: súčty obsahov "protiľahlých" trojuholníkov sú stále rovnaké. Posledná časť úlohy vyžaduje netriviálny nápad a študenti tak možno budú potrebovať malú radu.

## Domáca práca

**Úloha 11.6.** [65-I-4] Vnútri strán AB, AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body E, F, pričom  $EF \parallel BC$ . Úsečka EF je potom rozdelená bodom D tak, že platí

$$p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|.$$

- a) Ukážte, že pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD je pre p = 2:3 rovnaký ako pre p = 3:2.
- b) Zdôvodnite, prečo pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD má hodnotu aspoň 4.

 $Riešenie^*$ . Pre spoločnú hodnotu p oboch pomerov zo zadania platí

$$|ED| = p|DF|$$
 a zároveň  $|BE| = p|EA|$ . (1)

Pred vlastným riešením oboch úloh a) a b) vyjadríme pomocou daného čísla p skúmaný pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD. Ten je rovný – keď že trojuholníky majú spoločnú stranu AB – pomeru dĺžok ich výšok  $CC_0$  a  $DD_0$  (obr. XXX), ktorý je rovnaký ako

### **OBRAZOK**

pomer dĺžok úsečiek BC a ED, a to na základe podobnosti pravouhlých trojuholníkov  $BCC_0$  a  $EDD_0$  podľa vety uu (uplatnenej vďaka  $BC \parallel ED$ ). Platí teda rovnosť

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{|BC|}{|ED|}.$$
 (2)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>V prípade pravých uhlov *ABC* a *AED* to platí triviálne, lebo vtedy  $B = C_0$  a E = D0.

Vráť me sa teraz k rovnostiam (1), podľ a ktorých

$$|EF| = (1+p)|DF|$$
 a  $|AB| = (1+p)|EA|$ ,

a všimnime si, že trojuholníky ABC a AEF majú spoločný uhol pri vrchole A a zhodné uhly pri vrcholoch C a F (pretože  $BC \parallel EF$ ), takže sú podľ a vety uu podobné. Preto pre dĺžky ich strán platí

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|EF|}, \quad \text{\'ei\'ze} \quad 1 + p = \frac{|BC|}{(1+p)|DF|}, \quad \text{odkial'} \quad |BC| = (1+p)^2|DF|.$$

Keď vydelíme posledný vzť ah hodnotou |ED|, ktorá je rovná p|DF| podľ a (1), získame podiel z pravej strany (2) a tým aj hľ adané vyjadrenie

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{(1+p)^2}{p}.$$
 (3)

a) Algebraickou úpravou zlomku zo vzťahu (3)

$$\frac{(1+p)^2}{p} = \frac{1+2p+p^2}{p} = 2+p+\frac{1}{p}$$

zisť ujeme, že hodnota pomeru  $S_{ABC}$ :  $S_{ABD}$  je pre akékoľ vek dve navzájom prevrátené hodnoty p a 1/p rovnaká, teda nielen pre hodnoty 2/3 a 3/2, ako sme mali ukázať.

b) Podľa vzťahu (3) je našou úlohou overiť pre každé p > 0 nerovnosť

$$\frac{(1+p)^2}{p} \ge 4$$
, čiže  $(1+p)^2 \ge 4p$ .

To je však zrejme ekvivalentné s nerovnosť ou  $(1-p)^2 \ge 0$ , ktorá skutočne platí, nech je základ druhej mocniny akýkoľ vek (rovnosť nastane jedine pre p=1).

Dodajme, že pre iný dôkaz bolo možné využiť aj vyššie uvedené "symetrické" vyjadrenie

$$\frac{(1+p)^2}{p} = 2 + p + \frac{1}{p}$$

a uplatniť naň dobre známu nerovnosť  $p+1/p \ge 2$ , ktorej platnosť pre každé p>0 vyplýva napr. z porovnania aritmetického a geometrického priemeru dvojice čísel p a 1/p, nazývaného AG-nerovnosť:

$$\frac{1}{2} \left( p + \frac{1}{p} \right) \ge \sqrt{p \cdot \frac{1}{p}} = 1, \quad \text{pretože všeobecne} \quad \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{a \cdot b} \quad (\forall a, b \ge 0).$$

#### Doplňujúce zdroje a materiály

Rovnako ako v predchádzajúcich geometrických seminároch ostávame v odporúčaniach verní publikáciám [ [?]] a [ [?]].