

新冠肺炎疫情传播建模分析与预测

盛华雄¹, 吴琳^{2*}, 肖长亮¹

(1. 国防大学研究生院, 北京 100856; 2. 国防大学联合作战学院, 北京 100856)

摘要: 对武汉封城前后的新冠肺炎疫情传播进行建模分析。在对疫情数据预处理的基础上, 在控制阶段运用经典的 SIR 模型和差分递推方法分析和预测疫情, 理论值和实测值吻合较好。在自由传播阶段运用 Logistic 模型, 比较分析提前五天或延后五天的疫情数据与实测数据, 说明及时采取防疫措施的重要性。模型对相关地区的疾病传播分析具有普遍适用性。

关键词: 新冠肺炎; 疫情传播; 建模; 预测

中图分类号: TP391.9

文献标识码: A

文章编号: 1004-731X (2020) 05-0759-08

DOI: 10.16182/j.issn1004731x.joss.20-0156

Modeling Analysis and Prediction on NCP Epidemic Transmission

Sheng Huaxiong¹, Wu Lin^{2*}, Xiao Changliang¹

(1. Graduate School of National Defense University, Beijing 100856, China;

2. Joint Operation College of National Defense University, Beijing 100856, China)

Abstract: The modeling analysis on the NCP (Novel Coronavirus Pneumonia) epidemic transmission before and after the closure of Wuhan is presented. On the basis of preprocessing the epidemic data, the classical SIR model and differential recurrence method are used to analyze and forecast the epidemic situation in the stage of control. The theoretical value and measured value fits well. In the stage of free transmission, the logistic model is used to compare and analyze the epidemic data five days in advance or later with the actual data to show the importance of taking the epidemic prevention measures in time. The model is universally applicable to the analysis of the disease transmission in other related areas.

Keywords: NCP; epidemic transmission; modeling; prediction

引言

在全球抗击新冠肺炎疫情的过程中, 相关科研人员对疫情传播和发展趋势进行了大量研究。文献[1]对新冠肺炎的潜伏期、病死率进行估计, He Xi 等[2]研究了新冠肺炎的症状前病毒量变化和病毒传播特性。国内许多科研院所利用模型对新冠肺炎传播

的分析与预测作出了定量研究, 对疫情防控起到了积极作用。陈彬等[3]利用计算实验进行疫情期间复工复产风险分析, 季秀才[4]对北京市新冠肺炎疫情数据进行了初步分析, 智能网络实验室[5]通过 R 的动态估计分析了 2019-nCoV 防控的有效性。

数学建模方法对新冠肺炎传播过程的描述、分析、预报和控制有着重要作用。国家卫健委组织每天发布疫情信息, 这些数据为新冠肺炎的建模和分析提供了良好的基础[6]。文献[7]描述了 SARS 传播的 SIR 数学模型, 对控制阶段的疫情进行分析和预测; 文献[8]给出了改进的 logistic 生长模型, 对防治 SARS 传染有很好地指导作用。本文在充分借鉴



收稿日期: 2020-04-01

修回日期: 2020-05-08;

作者简介: 盛华雄(1988-), 男, 江西, 硕士生, 工程师, 研究方向为军事运筹、建模与仿真; 吴琳(1974-), 男, 山东, 博士, 教授, 研究方向为军事运筹、人工智能。

<http://www.china-simulation.com>

文献[7-8]研究方法的基础上,运用差分递推方法改进模型,将理论模型与实际数据结合,使疫情分析和预测更有针对性。

以武汉市为研究对象,将新冠肺炎传播分为 2 个阶段进行建模分析。一个是封城后的控制阶段新冠肺炎的疫情分析,即运用经典的 SIR 模型(模型 I)和差分递推方法,计算得到日接触率和日退出率的离散值和拟合曲线,再反推得到感染新冠肺炎的人数,比较理论值和实际值,验证了模型的有效性;另一个是封城前的自由传染阶段的疫情分析,运用 Logistic 模型(模型 II)进行刻画,并模拟出提前或延后 5 天实施隔离政策所引起新冠肺炎发展趋势变化的曲线,分析政府实施隔离政策的日期对疫情控制的影响。模型用于北京市等地区疫情分析,检验了模型的适用性。

1 基本假设与符号说明

新冠肺炎是一种冠状病毒引起的传染性很强的呼吸道传染病,传染性超过 2003 年的 SARS,主要通过近距离空气飞沫以及接触病人呼吸道分泌物和密切接触进行传播。治愈后的病人复发率非常低,可以忽略不计;潜伏期一般为 7 天,且无周期性发作趋势。

由此作出 5 点基本假设: (1) 国家卫健委提供的全国疫情统计数据真实可信; (2) 只对确诊人群进行分析和预测,不考虑潜在和疑似病人,确诊病人一旦和易感人群接触就有一定的传染性; (3) 新冠肺炎康复者不会被再次感染,并且不具备传染性; (4) 不考虑在新冠肺炎传播期间人口的自然出生和自然死亡; (5) 国内采取严格的封城措施,该段时间内人口的迁入迁出可忽略不计,所研究地区的人口总量不变。

对符号说明如下: (1) S 表示健康者在人群中的数量,健康者即易受感染者,也称易感人群; (2) I 表示病人在人群中的数量,病人即已受感染者; (3) R 表示退出者在人群中的数量,退出者包括“被治愈者”和“死亡者”; (4) N 表示城市人口总数; (5)

λ 表示日接触率,即全部人群中每日被感染的比例; (6) $\mu+\eta$ 表示日退出率。其中 μ 表示日治愈率,即全部人群中每天被治愈的人所占的比例; η 表示日死亡率,即全部人群中每天死亡的人所占的比例。

2 控制阶段建模

2.1 基于经典的 SIR 模型(模型 I)建立微分方程组

在传染病动力学中, SIR 模型由 Kermack 与 McKendrick 于 1927 年研究流行于伦敦的黑死病时提出的,至今使用非常广泛并不断发展。借鉴经典的 SIR 模型,对封城后武汉市新冠肺炎疫情传播进行分析和预测,可将人员分易感人群(S)、感染人群(I)和退出人群(R),其中退出人群包括为康复人群和死亡人群,如图 1 所示。

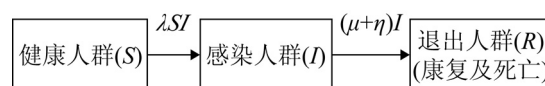


图 1 SIR 疾病传播模型

Fig. 1 Sir epidemic transmission model

列出微分方程组:

$$\begin{cases} dS/dt = -\lambda SI \\ dI/dt = \lambda SI - (\mu + \eta)I \\ dR/dt = (\mu + \eta)I \\ S + I + R = N \end{cases} \quad (1)$$

2.2 数据预处理

2020 年 1 月 23 日,武汉市实行出行禁令,采取了最严厉的防疫措施—封城。可认为封城期间武汉市人口总数的值保持不变,以 2019 年常住人口计,约为 1 100 万。2 月 12 日,湖北省增加“临床诊断病例”分类,对疑似病例具有肺炎影像学特征者,确定为临床诊断病例,因此当日武汉新增确诊人数出现陡增。

考虑到当日新增统计数据是封城后累计的结果,所以需要对统计数据进行处理。2 月 12 日武汉新增确诊病例(含“临床诊断”)达到 13 436。

2 月 11 日和 13 日武汉新增确诊人数分别为 1 104 和 2 997, 2 月 12 日新增确诊人数为 2 051 比较合理, 由此推测, 当天添加“临床诊断病例”人数约为 11 400。假设“临床诊断病例”人员数量线性增加, 线性函数为 $Y=650X-300$ 。从 1 月 24 日($t=1$)到 2 月 22 日($t=30$), 预处理前后的武汉市感染人群、累计治愈及死亡人群数据见图 2。

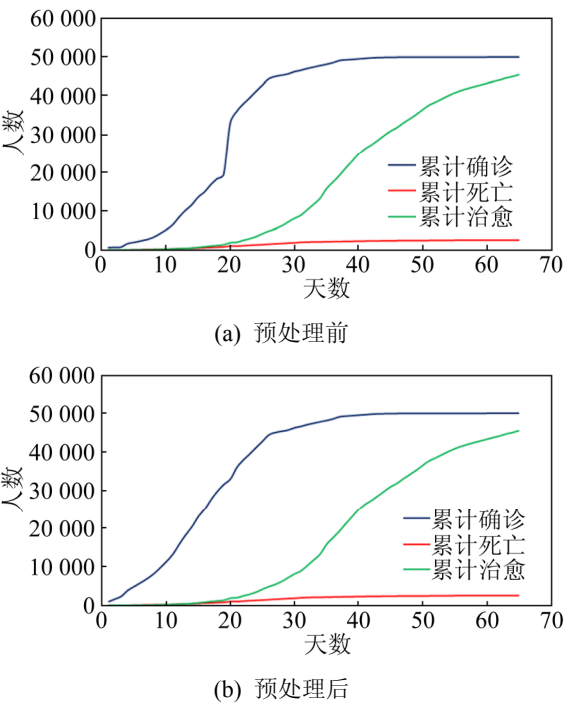


图 2 武汉感染人群数量走势
Fig. 2 Trend of the number of people infected in Wuhan

从 1 月 24 日($t=1$)到 2 月 22 日($t=30$), 预处理后的武汉市感染人群、累计治愈及死亡人群数据见表 1。

2.3 运用差分递推法计算日接触率 λ 和日退出率 $\mu+\eta$

日接触率 λ 和日退出率 $\mu+\eta$ 是描述疫情新冠肺炎传播和控制的关键参数, 而且随着时间的变化而变化。通过龙格库塔法 ode45 无法拟合实际数据, 式(1)求解析解非常困难, 这里使用差分递推法求解。式(1)可变形为

$$\lambda = -\frac{dS}{dt} / (SI) \tag{2}$$

$$\mu + \eta = -\left(\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt}\right) / I \tag{3}$$

S 和 I 的含义分别为封城之日(1 月 23 日)起武汉市的疫情数据中易感染人数和已经染病人数。 dS/dt 和 dI/dt 表示相邻两天里 S 和 I 各自增加的人数。根据式(2)~(3)和武汉市的实测数据, 利用第 t 天的 S 和 I 以及 dS/dt 和 dI/dt 的离散值计算出当天对应的 λ 和 $\mu+\eta$ 的离散值。

表 1 武汉疫情数据
Tab. 1 Wuhan epidemic data

序号	累计确诊	累计死亡	累计治愈
1	922	38	32
2	1 618	45	40
3	2 348	63	42
4	3 890	85	42
5	4 855	104	75
6	5 861	129	82
7	6 889	159	103
8	8 115	192	139
9	9 659	224	171
10	11 342	265	224
11	13 234	313	303
12	15 851	362	368
13	18 267	414	431
14	20 418	478	534
15	23 053	545	698
16	25 082	608	877
17	27 652	681	1 044
18	29 854	748	1 206
19	31 608	820	1 377
20	32 994	1 036	1 915
21	35 991	1 016	2 016
22	37 914	1 123	2 502
23	39 462	1 233	2 915
24	41 152	1 309	3 458
25	42 752	1 381	4 219
26	44 412	1 497	4 895
27	45 027	1 585	5 448
28	45 346	1 684	6 214
29	45 660	1 774	7 206
30	46 259	1 856	8 171

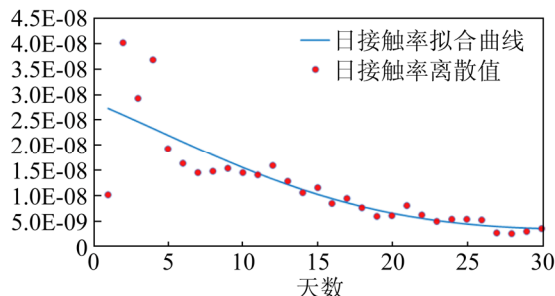
获取 λ 和 $\mu+\eta$ 关于 t 的离散值后, 使用拟合方法分别求出 λ 和 $\mu+\eta$ 的多项式拟合函数。因为随着

疫情的演化, 社会控制水平会逐步加强, 有效接触率 λ 应在预测中呈下降趋势, 兼顾精度要求, 选取奇次的 5 次多项式进行拟合。同理, $\mu+\eta$ 为退出率, 其中治愈率将有上升的趋势, 这是人们防疫意识提升、政府控制措施得当以及治疗水平进步的必然结果, 所以选取偶次的 2 次多项式进行拟合。经 Matlab 计算得拟合的结果为

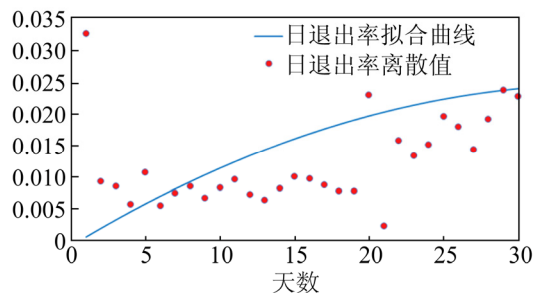
$$\begin{cases} \lambda(t) = a_0 t^5 + a_1 t^4 + a_2 t^3 + a_3 t^2 + a_4 t + a_5 \\ a_0 = 1.399\ 633\ 073\ 448\ 364\text{E-}15 \\ a_1 = -1.940\ 500\ 838\ 329\ 903\text{E-}13 \\ a_2 = 9.258\ 889\ 167\ 520\ 508\text{E-}12 \\ a_3 = -1.576\ 344\ 244\ 255\ 012\text{E-}10 \\ a_4 = -2.525\ 278\ 076\ 622\ 344\text{E-}10 \\ a_5 = 2.653\ 645\ 633\ 889\ 905\text{E-}08 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} (\mu+\eta)(t) = b_0 t^2 + b_1 t + b_2 \\ b_0 = -7.417\ 684\ 077\ 355\ 750\text{E-}06 \\ b_1 = 8.544\ 100\ 242\ 301\ 858\text{E-}04 \\ b_2 = 0.003\ 315\ 039\ 360\ 847 \end{cases} \quad (5)$$

图 3 给出了 λ 和 $\mu+\eta$ 的理论值和实际值之间的比较, 其中曲线代表的是经前 30 项数据拟合后推出的 λ 和 $\mu+\eta$ 的理论值, 星点则是对应时间的 λ 和 $\mu+\eta$ 的真实值。可知, λ 呈下降趋势, 而 $\mu+\eta$ 呈上升趋势, 说明自 1 月 23 日封城后政府的控制力和社会人群的主观能动性不断增强, 人员流动减少; 医疗保障水平不断提高, 病患治愈率不断提高, 与实际情况相符。



(a) 日接触率



(b) 日退出率

图 3 日接触率和日退出率的离散值及其拟合曲线
Fig. 3 Discrete values of daily contact rate and daily exit rate and their fitting curves

2.4 利用日接触率 λ 和日退出率 $\mu+\eta$ 计算后续感染人数

在利用武汉市提供的前 30 组数据得到的 λ 和 $\mu+\eta$ 关于 t 的拟合方程之后, 下面进一步讨论如何利用已知的前 30 组数据, 按照微分方程模型, 用差分递推方法对后 30 组数据进行预测。

由差分定义可知

$$dS/dt = S_t - S_{t-1} \quad (6)$$

$$dI/dt = I_t - I_{t-1} \quad (7)$$

将式(6)和(7)代入式(2)和(3), 可得

$$\begin{cases} S_t = S_{t-1}/(\lambda I_t + 1) \\ I_t = I_{t-1}/[1 + (\mu + \eta) - \lambda S_t] \end{cases} \quad (8)$$

为实现模型预测, 将式(8)整理为迭代的形式:

$$\begin{cases} S_t = [\lambda I_{t-1} + 1 + (\mu + \eta) + \lambda S_{t-1} - \\ \sqrt{(\lambda I_{t-1} + 1 + (\mu + \eta) + \lambda S_{t-1})^2 - 4\lambda(1 + \mu + \eta)}] / 2\lambda \\ I_t = I_{t-1}/(1 + \mu + \eta - \lambda S_t) \end{cases} \quad (9)$$

由表 1 可知 $S_0=10\ 999\ 008$, $I_0=922$ 。将式(4), (5)中的 λ 和 $\mu+\eta$ 代入式(9), 可得封城后每天的感染人群的理论值。如图 4 所示, 感染人群实际值和模型计算出的理论值两者随时间变化的走势基本相同, 总体吻合较好。根据模型预测, 在疫情防控后 52 左右趋于稳定, 预测感染人数峰值为 50 465, 与实际峰值 50 006 误差不到 1%, 预测效果较好。

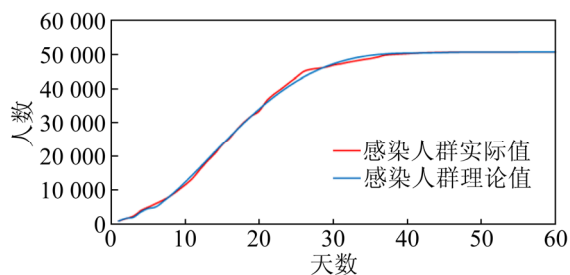


图 4 感染人群实际值和理论值

Fig. 4 Actual and theoretical values of infected population

为了检验模型预测的准确性,通过计算理论值和实际值的绝对误差和相对误差进行误差分析,结果见表 2。在第 36 天出现最大绝对误差和最大相对误差,最大绝对误差值为 744,最大相对误差值为 0.015 32。误差值在允许误差范围内,满足疫情传播解释性预测的要求。

表 2 误差分析结果
Tab. 2 Error analysis results

统计量	天数	实际值	理论值	误差值
最大绝对误差	36	48 557	49 301	744
最小绝对误差	55	50 005	50 033	28
最大相对误差	36	48 557	49 301	0.015 32
最小相对误差	55	50 005	50 033	0.005 6

3 自由传播阶段建模

3.1 利用 Logistic 模型(模型 II)刻画阻滞增长过程

在 1 月 23 日之前的患病人数,显然不能通过拟合的 λ 值算得结果,主要是因为:(1) 封城前,宏观控制力不够,没能采取严格的隔离措施。(2) 社会人群能动性不足,不能及时有效的采取合理的方法防治新冠肺炎。由此,结合传染病理论的相关知识,可以认为新冠肺炎在初期没有人为干预情况下表现为自由传播。

这一阶段的患病人数的增长可用 Logistic 模型(阻滞增长模型)刻画,见式(10)。

$$\begin{cases} dI/dt = rI(1 - I/N) \\ I(0) = 1 \end{cases} \quad (10)$$

式中: t 为距首例患病者被发现时的天数; N 为人

口总数; r 为 Logistic 模型中的固有增长率; $I(t)$ 为第 t 天的已确诊的病人数。由式(10)求解得:

$$I(t) = 1/[1 + (N - 1)e^{-rt}] \quad (11)$$

武汉市第一例新冠肺炎病人出现于 12 月 8 日,与 1 月 24 日相距 48 天。则有

$$I(48) = 922 \quad (12)$$

结合式(11),可以算得固有增长率 $r=0.1422$ 。

从而得到新冠肺炎前期传染的数学模型为

$$I(t) = 1/[1 + (N - 1)e^{-0.1422t}] \quad (13)$$

由式(13)计算可得感染人数走势,如图 5 所示。

由图 5 可知,在距首例患者被发现后 48 天感染人数达到 922。若提前 5 天,感染人数为 452;而延后 5 天,则感染人数达到 1 877。

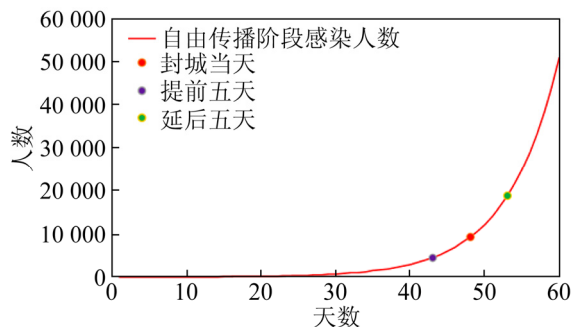


图 5 封城前新冠肺炎传播走势

Fig. 5 Trend of NPC epidemic transmission before closure of city

3.2 提前或延后 5 天的疫情分析

利用 Logistic 模型(模型 II)得到提前和延后 5 天的感染人数,作为 SIR 模型(模型 I)的输入,在其他参数不变的情况,对后期的疫情走势进行预测和比较分析。由式(7)和 $I(53)=1\ 877$ 可推算感染人群 I 随时间变化的迭代结果如表 3 所示,同样的方法可以计算出提前 5 天的情况。

图 6 所示,根据提前 5 天和退后 5 天的迭代数据以及真实数据分别进行拟合得到的患病人数的增长曲线。提前 5 天的情况下,疫情控制需要 45 天左右,总感染人数达到约 2.3 万,而延后 5 天的情况下,疫情控制需要 55 天左右,总感染人数达到约 7.6 万。由此可见:在疾病的传染性和毒

性保持不变的情况下,控制新冠肺炎疫情越晚,总感染人数将显著增加,疫情控制的时间也越长。因此,政府尽早采取措施、民众及时提升防护意识对疫情的控制至关重要。

表 3 延后 5 天的感染人数
Tab. 3 Number of infected people five days later

<i>t</i>	<i>I</i>	<i>t</i>	<i>I</i>	<i>t</i>	<i>I</i>
1	1 877	21	53 421	41	74 346
2	2 450	22	55 974	42	74 388
3	3 106	23	58 347	43	74 421
4	3 916	24	60 537	44	74 457
5	5 301	25	62 540	45	74 503
6	7 178	26	64 357	46	74 566
7	9 467	27	65 989	47	74 651
8	12 094	28	67 442	48	74 763
9	14 993	29	68 721	49	74 901
10	18 101	30	69 833	50	75 066
11	21 363	31	70 789	51	75 252
12	24 727	32	71 598	52	75 455
13	28 147	33	72 272	53	75 665
14	31 581	34	72 823	54	75 870
15	34 991	35	73 264	55	76 054
16	38 346	36	73 608	56	76 198
17	41 617	37	73 869	57	76 280
18	44 779	38	74 060	58	76 273
19	47 811	39	74 194	59	76 147
20	50 696	40	74 285	60	75 867

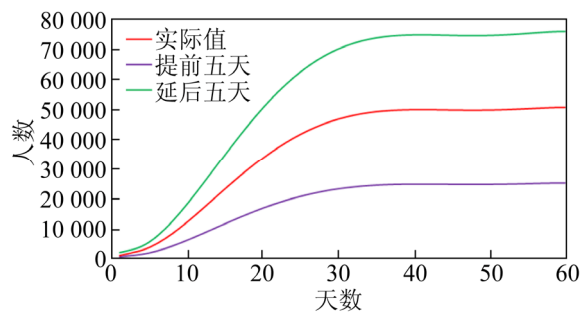


图 6 提前或延后 5 天与实际情况下感染人数对比
Fig. 6 Comparison of number of infected people five days in advance or later with real number

4 模型的验证

国家卫健委提供了北京市的确诊人群、治愈人群和死亡人群的数据。如图 7(a)所示,北京市确诊人数在 3 月中旬趋稳后又出现增多现象,这是因为

境外返京人员出现很多确诊人群。因此,需要进行数据预处理,剔除境外返京人员这一情况外因素带来的影响。境外返京人员从 2 月 29 日有 2 人确诊,到 3 月 23 日确诊人数达到 160 人。其传播走势符合 Logistic 模型,由此推算出境外返京人员造成的北京市本地感染人数。经过剔除处理后,北京市确诊人数走势如见图 7(b)。

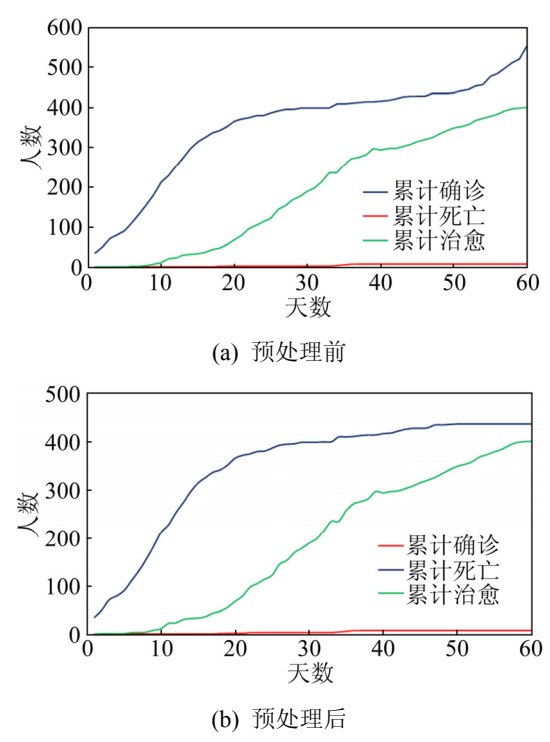
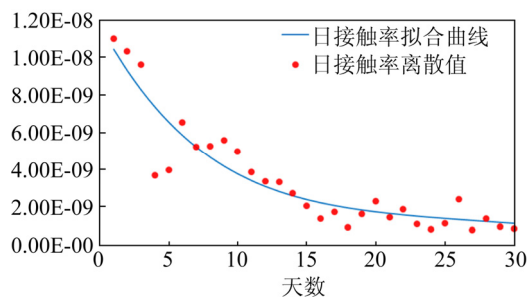


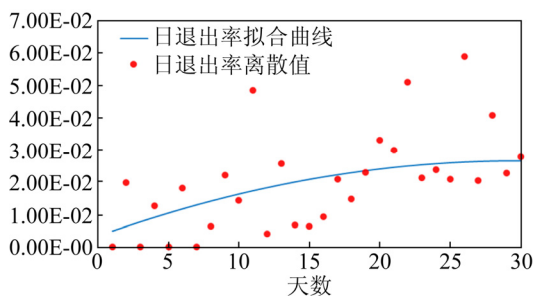
图 7 北京感染人群数量走势
Fig. 7 Trend of number of infected people in Beijing

使用 SIR(模型 I)和 Logistic(模型 II)对 2 月 24 日至 3 月 23 日期间北京新冠肺炎进行疫情分析和预测。

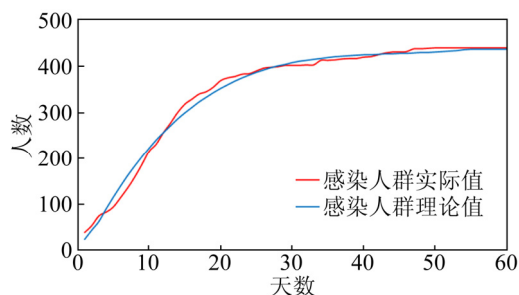
如图 8 所示,日接触率 λ 呈下降趋势,而日退出率 $\mu+\eta$ 呈上升趋势,与真实情况相符。感染人数的预测值与实际值的曲线吻合较好。采取防控措施后 40 天左右疫情趋于稳定,感染人数不再增加。图 8(d)显示,控制得越早,感染人数明显越少,疫情稳定所需的时间也越少。提前 5 天总感染人数减少到 203 人,约 35 天就趋于稳定;而延后 5 天总感染人数则增加至 615 人,需要 50 天疫情才能稳定。



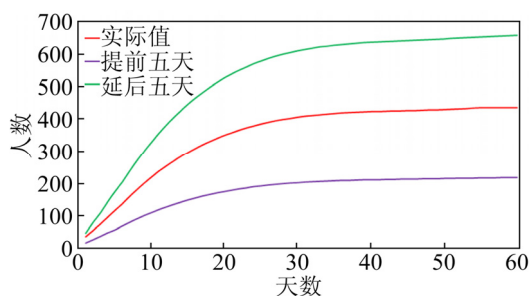
(a) 日接触率的离散值及其拟合曲线



(b) 日退出率的离散值及其拟合曲线



(c) 感染人群实际值和理论值



(d) 提前或延后 5 天与实际情况下感染人数对比

图 8 运用模型分析北京市疫情

Fig. 8 Using model to analyze epidemic situation in Beijing

5 结论

本文从控制阶段和自由传播阶段对武汉疫情传播过程中感染人群发展走势进行建模分析。运用经典的 SIR 模型和差分递推方法,既能从总量上对疫情进行宏观描述和数据外推,也能动态跟踪日接

触率和日退出率,逻辑上更加符合客观事实,从而比较准确地刻画出各类人群在控制阶段随时间变化的规律。运用 Logistic 模型描述自由传染阶段的疫情发展情况,对提早 5 天与推迟 5 天控制所产生的影响进行预测和比较,说明了及时采取措施的重要性。模型同样适用于北京等城市和地区,对疾病传播进行分析和预测具有广泛适用性。

模型的不足和改进意见主要有:一是模型预测的可靠性主要取决于日接触率和日退出率这 2 个关键参数的准确程度。为此,随着疫情发展,新冠肺炎病毒的相关特性将愈发明朗,数据更加充足,模型的预测也将更加准确。二是无法描述个体在疾病传播过程中的差异性。为此,需要借助 SWN (small world network) 等其他建模手段进行辅助分析。三是模型的确立以一系列假设为前提,如没有超级感染者、潜伏期内没有传染性,但这些前提目前还不确定。为此,需要及时根据实际情况对模型进行修正,如针对国外疫情蔓延采用元胞自动机模型分析各地区疫情的时空特性。

参考文献:

- [1] Guan W J, Ni Z Y, Hu Y, et al. Clinical Characteristics of Coronavirus Disease 2019 in China[J]. The New England Journal of Medicine (S0028-4793), 2020, 382(18): 1708-1720.
- [2] He Xi, Lau Eric H Y, Wu Peng, et al. Temporal dynamics in viral shedding and transmissibility of COVID-19[J]. Nature medicine (S1078-8956), 2020, 26: 672-675.
- [3] 陈彬, 艾川, 马亮. 大局稳定、局部冒泡, 应对疫情应做好持久战的准备——利用计算机实验进行疫情期间复工复产风险分析[EB/OL]. [2020-02-24]. http://journal19.magtechjournal.com/Jwk3_xtfzxb/CN/abstract/abstract1006.shtml.
- [4] 季秀才. 北京市新冠肺炎疫情数据初步分析[EB/OL]. [2020-02-24]. http://journal19.magtechjournal.com/Jwk3_xtfzxb/CN/abstract/abstract1005.shtml.

- Ji Xiucui. Preliminary analysis of novel coronavirus pneumonia in Beijing [EB/OL]. [2020-02-24] http://journal19.magtechjournal.com/Jwk3_xtfzxb/CN/abstract/abstract1005.shtml.
- [5] 智能网络实验室. 通过 R 的动态估计分析 2019-nCoV 防抗的有效性[EB/OL]. [2020-02-10]. <https://mp.weixin.qq.com/s/8Pyqntuin6uvWkyghHi0Iw>. Intelligent network laboratory. Analysis of 2019-nCoV anti-jamming effectiveness by dynamic estimation of R[EB/OL]. [2020-02-10]. <https://mp.weixin.qq.com/s/8Pyqntuin6uvWkyghHi0Iw>.
- [6] 国家卫健委. 疫情公告 [EB/OL]. [2020-03-23] http://www.nhc.gov.cn/xcs/yqtb/list_gzbd_3.shtml. National Health Commission of the PRC. Epidemic announcement[EB/OL]. [2020-03-23]. http://www.nhc.gov.cn/xcs/yqtb/list_gzbd_3.shtml.
- [7] 夏承遗, 刘忠信, 陈增强. 移动群体中基于 SIR 模型的疾病传播行为[J]. 吉林大学学报(工学版), 2009, 39(5): 1274-1277. Xia Chengyi, Liu Zhongxin, Chen Zengqiang. Disease spreading behavior based on SIR model within population of mobile individuals[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2009, 39(5): 1274-1277.
- [8] 石月莲, 李灿. 一类具有 logistic 增长和饱和发生率的 SIR 传染病模型的全局动力学性态[J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(7): 299-307. Shi Yuelian, Li Can. Global Dynamics of an SIR Epidemic Model with Logistic Growth and Saturation Incidence[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2019, 49(7): 299-307.
- [9] 赵一帆. 复杂网络中基于疾病传播模型的阻塞传播[J]. 科学技术与工程, 2007(24): 6397-6400. Zhao Yifan. Spreading Congestions Based on Epidemic Models in Complex Networks[J]. Science Technology and Engineering, 2007(24): 6397-6400.
- [10] 韩怡如. 几类传染病模型的动力学研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2017. Han Yiru. On dynamics for several epidemic models[D]. Xi'an: Xidian University, 2017.
- [11] 胡杨林. 传染病模型的复杂时空动力学分析[D]. 太原: 中北大学, 2013. Hu Yanglin. Complex spatiotemporal dynamics analysis of infectious disease model[D]. Taiyuan: North Central University, 2013.
- [12] 陈鑫, 徐赫屿. 一类具有线性传染力的 SIRS 传染病动力系统分析与控制[J]. 沈阳师范大学学报: 自然科学版, 2012, 30(2): 28-30. Chen Xin, Xu Heyu. Analysis and control of an SIRS epidemic system with linear infection rate[J]. Journal of Shenyang Normal University (Natural Science), 2012, 30(2): 28-30.
- [13] 瞿毅臻, 李琦, 甘杰夫. 基于 Repast 平台的 SARS 传播仿真建模研究[J]. 计算机科学, 2008(2): 286-288, 304. Qu Yizhen, Li Qi, Gan Jiefu. SARS Transmission Simulation and Modeling Based on Repast Platform[J]. Computer Science, 2008(2): 286-288, 304.
- [14] 方兆本, 李红星, 杨建萍. 基于公开数据的 SARS 流行规律的建模及预报[J]. 数理统计与管理, 2003(5): 48-52, 57. Fang Zhaoben, Li Hongxing, Yang Jianping. Models and Prediction of the SARS' Prevalence[J]. Application of Statistics and Management, 2003(5): 48-52, 57.
- [15] 肖海军, 王玲, 程明. 基于 Matlab 的疾病传播研究—SARS 疫情的传播预测与控制[J]. 计算机与数字工程, 2005, 33(4): 50-52. Xiao Haijun, Wang Ling, Cheng Ming. Research of Prediction and Control in SARS's Spreading[J]. Computer and Digital Engineering, 2005, 33(4): 50-52.
- [16] 刘云忠, 宣慧玉, 林国玺. SARS 传染病数学建模及预防、控制机理研究[J]. 中国管理科学, 2004, 12(2): 143-148. Liu Yunzhong, Xuan Huiyu, Lin Guoxi. Mathematical Models of SARS Epidemic Disease & Mechanism of Prevention and Control[J]. Chinese Journal of Management Science, 2004, 12(2): 143-148.
- [17] 王正行, 张建玮, 唐毅南. 北京 SARS 疫情走势的模型分析与预测[J]. 物理, 2003(5): 341-344. Wang Zhengxing, Zhang Jianwei, Tang Yinan. A model analysis and evaluation of the SARS epidemic in Beijing[J]. Physics, 2003(5): 341-344.
- [18] 罗荣桂, 江涛. 基于 SIR 传染病模型的技术扩散模型的研究[J]. 管理工程学报, 2006(1): 32-35. Luo Ronggui, Jiang Tao. The Research of Technology Diffusion Model Based on the SIR Epidemic Model[J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2006(1): 32-35.
- [19] 黄德生, 关鹏, 周宝森. SIR 模型对北京市 SARS 疫情流行规律的拟合研究[J]. 疾病控制杂志, 2004, 8(5): 398-401. Huang Desheng, Guan Peng, Zhou Baosen. Study on the fit of SIR model to the epidemic law of SARS in Beijing[J]. Chinese Journal of Disease Control & Prevention, 2004, 8(5): 398-401.