$$\begin{cases} \phi^{-\prime} = \dfrac{\phi}{V}\dfrac{\psi^{-} + \Psi_0^{-} - \xi/V}{K} \\ \psi^{-\prime} = \rho^{-} \\ \rho^{-\prime} = \phi^{-} - V\rho^{-} \end{cases} \tag{4.21}$$

この系を $(\phi^{-\prime}, \psi^{-\prime}, \rho^{-\prime}) = (0,0,0)$ 周りで一次近似し, 次の系を考える.

$$\begin{cases} \phi^{-\prime} = \dfrac{\phi}{V}\dfrac{\Psi_0^{-} - \xi/V}{K} \\ \psi^{-\prime} = \rho^{-} \\ \rho^{-\prime} = \phi^{-} - V\rho^{-} \end{cases} \tag{4.22}$$

第一式を $\phi^{-\prime}$ について解くと,

$$\phi^{-\prime}(\xi) = \phi^{-}(0)\exp\left(\frac{\Psi_0^{-}}{VK}\xi - \frac{1}{2V^2K}\xi^2\right) \tag{4.23}$$

これを第三式に代入すれば,

$$\rho^{-\prime} = \phi^{-}(0)\exp\left(\frac{\Psi_0^{-}}{VK}\xi - \frac{1}{2V^2K}\xi^2\right) - V\rho^{-} \tag{4.24}$$

ここで,

$$C_1(\xi) := \exp\left(\frac{\Psi_0^{-}}{VK}\xi - \frac{1}{2V^2K}\xi^2\right) \tag{4.25}$$

とおけば, この式は, 次の 1 階非同次線形微分方程式となる.

$$\rho^{-\prime} + V\rho^{-} = \phi^{-}(0)e^{C_1(\xi)} \tag{4.26}$$

一旦,

$$\rho^{-\prime} + V\rho^{-} = 0 \tag{4.27}$$

を解くと, 任意定数 C_2 を用いて, $\rho^{-}(\xi) = C_2 e^{-V\xi}$ とかけるので, C_2 を ξ の関数 $C_2(\xi)$ として, 元の式の代入すると,

$$C_2' = \phi^{-}(0)e^{C_1(\xi)+V\xi} \tag{4.28}$$

となる. よって,

$$C_2(\xi) = C_2(0) + \int_0^{\xi} \phi^{-}(0)e^{C_1(\zeta)+V\zeta}\,d\zeta \tag{4.29}$$

よって, $\rho^{-}(\xi)$ は,

$$\rho^{-}(\xi) = C_2(0)e^{-V\xi} + e^{-V\xi}\int_0^{\xi} \phi^{-}(0)e^{C_1(\zeta)+V\zeta}\,d\zeta \tag{4.30}$$

第二式に代入すると,

$$\psi^{-\prime} = C_2(0)e^{-V\xi} + e^{-V\xi}\int_0^{\xi} \phi^{-}(0)e^{C_1(\zeta)+V\zeta}\,d\zeta \tag{4.31}$$

となるので, ψ^{-} は,

$$\psi^{-}(\xi) = C_3 - \frac{C_2(0)}{V}e^{-V\xi} + \int_0^{\xi} e^{-V\eta}\int_0^{\eta} \phi^{-}(0)e^{C_1(\zeta)+V\zeta}\,d\zeta\,d\eta \tag{4.32}$$