

Lean で正規表現エンジンをつくる

そして正しさを証明する

井山梶子歴史館 (pandaman64)

2025-06-15

発表の目的

- 内容
 - ▶ Lean とは？
 - ▶ なぜ Lean で定理を証明するのか？
 - ▶ プログラムの正しさを証明するとは？
 - デモ
- 仲間を探しに来た
 - ▶ みんなも定理証明、やろう！
 - ▶ みんなも定理証明、やろう！
 - ▶ みんなも定理証明、やろう！
 - ▶ (あわよくば) [lean-regex](#) にコントリビュート、しよう！

Lean とは？

Lean とは何か

- Lean の二面性
 - ▶ 純粹関数プログラミング言語
 - 依存型: 型の中に値が含まれる
 - モナドを使った手続き型プログラミング
 - 自由なマクロシステム
 - [正規表現](#)、[HTML](#)、[SQL](#)
 - ▶ 定理証明支援系
 - 数学の定理やプログラムの性質、それらの証明を記述する言語
 - Lean のカーネルが証明が成立することを厳密にチェックする

Lean のコード例

```
def fib (n : Nat) : Nat :=  
  match n with  
  | 0 | 1 => 1  
  | n + 2 => fib n + fib (n + 1)  
def main : IO Unit := do  
  IO.println s!"fib 10 = {fib 10}"
```

プログラムの例



```
theorem reverse_reverse (xs : List  $\alpha$ ) :  
  xs.reverse.reverse = xs := by  
  induction xs with  
  | nil => rfl  
  | cons x xs ih =>  
    simp [ih]
```

証明の例

```
def sumAt {n} (xs ys : Vector Nat n) (i : Nat) : Option Nat :=  
  -- `h` is a proof that `i < n` holds  
  if h : i < n then  
    some (xs[i]'h + ys[i]'h)  
  else  
    none
```

証明を使うプログラムの例

Lean で正規表現を実装する

- [lean-regex](#): 自作の正規表現ライブラリ
 - ▶ 正規表現をオートマトンにコンパイルして実行
 - ▶ Lean 上で実装が正しいことを検証した
- 「実装が正しい」とは？
 - ▶ 正規表現マッチの仕様を厳密に定義し、それに合致することを示す
 - `inductive Captures : Iterator → Iterator → CaptureGroups → Expr → Prop`
 - ▶ 検索関数 `def Regex.find : Iterator → Regex → Option CaptureGroups` について
 -  [健全性](#): 見つかったマッチは Captures を必ず満たす
 -  [完全性](#): Captures を満たすマッチが存在するなら必ずマッチを見つける
 - これらを示す Lean の証明を書いた

なぜ正規表現？

1. 正規表現は広く使われている
 - ・ テキスト処理の場面でよく出てくる
 - ・ 実用的なプログラミング言語には正規表現実装がつきもの
2. 仕様・実装がほどよく複雑
 - ・ 検索関数の正しさを数学的に明確に定式化できる（けど、細部は微妙）
 - ・ 実装はオートマトンへのコンパイルや探索など、そこそこ複雑
 - ・ エッジケースも含めて定理証明支援系で厳密に表現・検証する価値あり
3. パフォーマンスが重要
 - ・ 大量のテキストを効率よく処理したい
 - ・ Lean の最適化の出番！

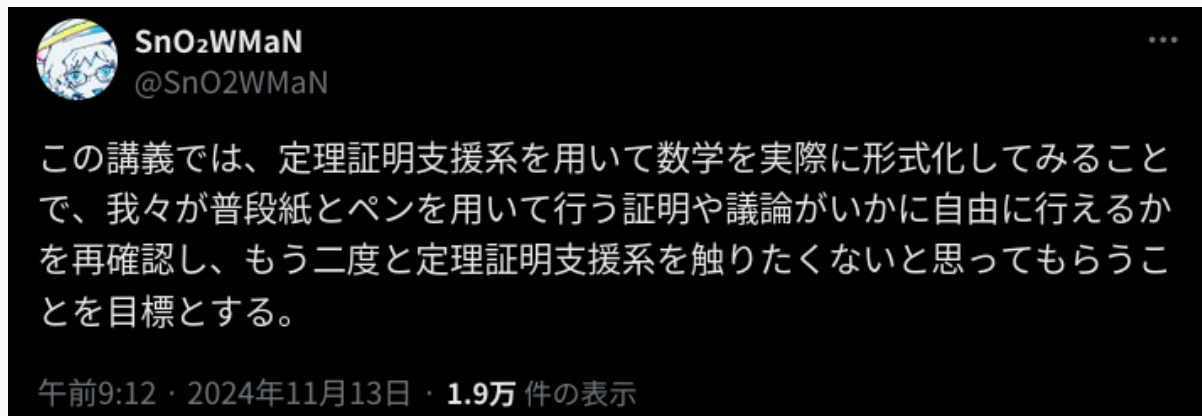
Lean の最適化

- 2つの実行モデル
 1. カーネルによるインタプリタ: 証明の検証・エディタでの実行など
 2. C へのコンパイル: Lean を C 言語に変換してネイティブコードを生成
- C へのコンパイル時はオブジェクトを参照カウンタで保持
 - ▶ 正格な純粋関数型言語なので（基本的には）参照サイクルが発生しない
- 参照カウンタを見るとデータ構造の更新を**破壊的変更**に最適化できる
 - ▶ 例: `let xs' := Array.set xs i v` のような操作が実質 $O(1)$ で実行
 - 証明の検証時は `xs` と `xs'` の両方が同時に存在するかのよう扱える
 - ▶ オートマトンベースの正規表現エンジンに最適

なぜ定理証明するのか？

なぜ定理証明するのか？

- 定理証明は苦しい…
 - ▶ 証明のコード量は実装の 2～10 倍
 - ▶ 定理証明支援系のご機嫌取りでボイラープレートが増える

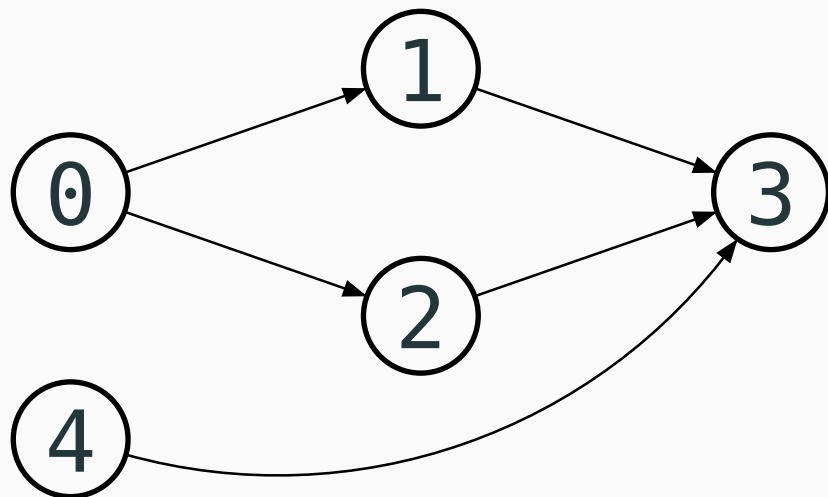


- それでもなぜやるのか？
 - ▶ 信頼性の保証: 暗号処理など、信頼性が要求される領域で確実な保証を得る
 - ▶ 実装の品質向上: 証明過程でバグを発見
 - ▶ パズル的な面白さ: 証明が通った瞬間の達成感は中毒性がある
 - ▶ **深い理解**が得られる: これが最も重要！

定理証明で得られる「深い理解」とは

- 証明を書くには**なぜ定理が成立するか**を理解しなければならない
 - ▶ 書いたプログラムがなぜ正しく動くのか？を深く理解する必要がある
- プログラムはなぜ正しく動くのか？ = **よい不変条件**が成立しているから
 - ▶ 不変条件: プログラムの各ステップ前後で常に成立している性質
 - ▶ プログラムの性質を証明するには
 1. 不変条件を見つける
 2. 各処理が見つけた不変条件を**保存**することを示す
 3. 見つけた不変条件が所望の性質を**導く**ことを示す
 - ▶ どうやって不変条件を見つけるの？
 - 頑張る🤖
 - 具体例を計算したり欲しい性質から逆算したりする

例: DFS で到達可能性を計算する



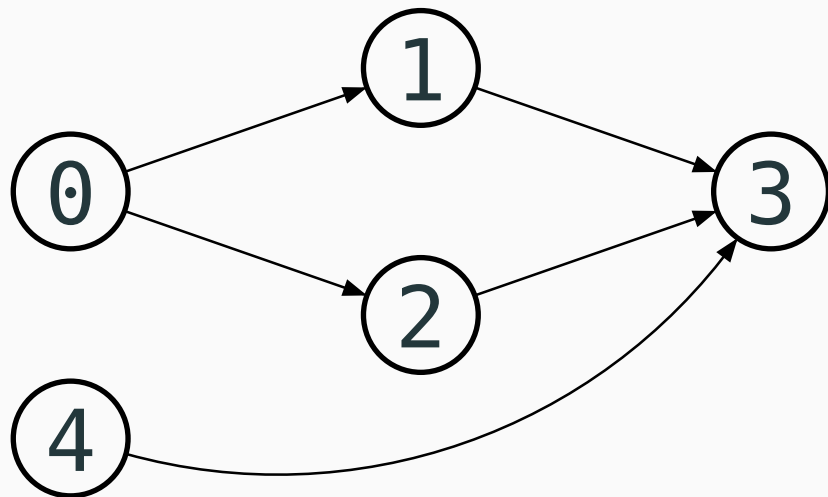
グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている



これから探索する頂点のスタック

- グラフの到達可能性: 頂点 0 から到達できる頂点の集合は?
 - ▶ 正規表現のマッチ \equiv 正規表現をコンパイルしたオートマトンの到達可能性
- DFS (深さ優先探索) で到達可能性の判定ができる。なぜ?
 - ▶ DFS が **よい不変条件** を満たすから

DFS の不変条件

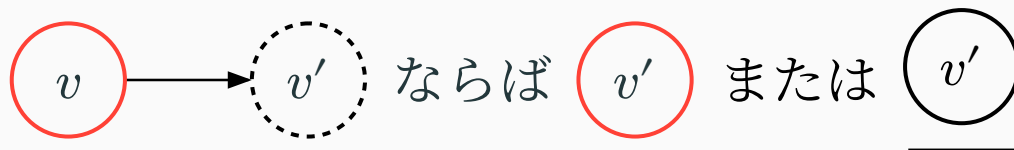


グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

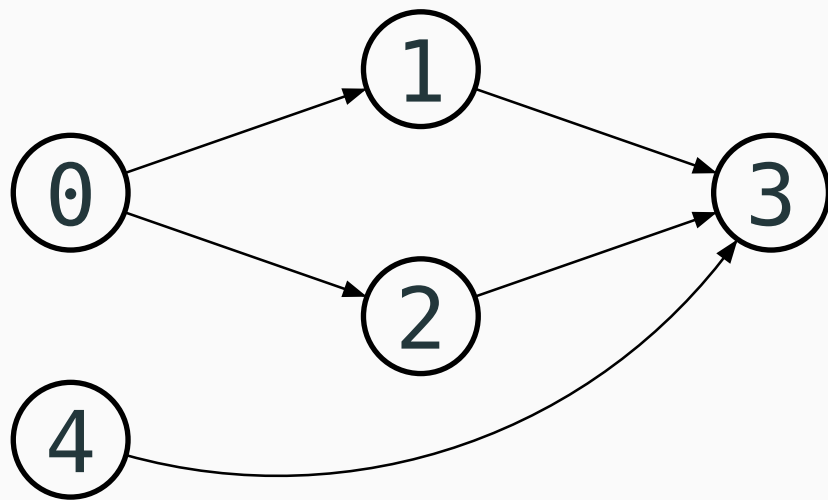


これから探索する頂点のスタック

- **不変条件:** 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上



不変条件の保存

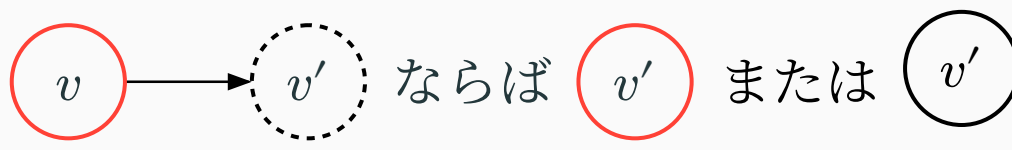


グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

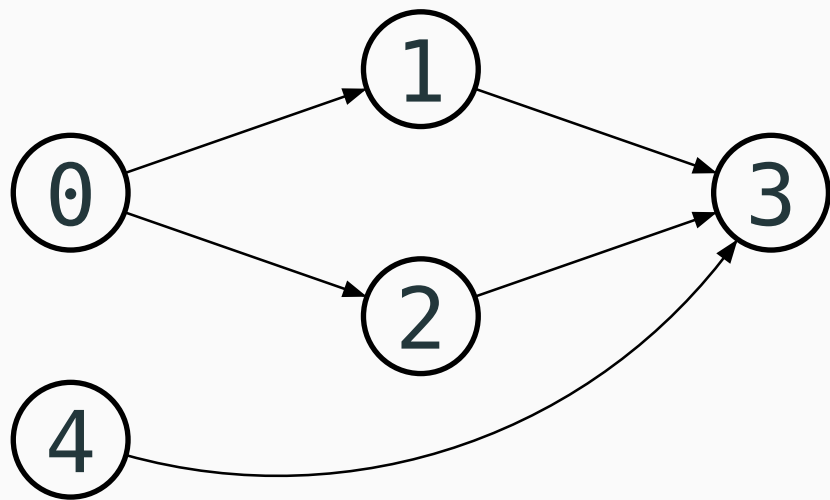


これから探索する頂点のスタック

- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - DFS の各ステップが不変条件を**保存**する



不変条件の保存

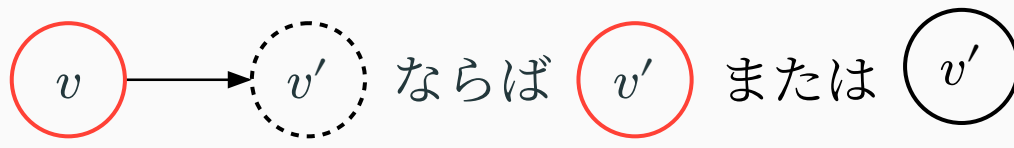


グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

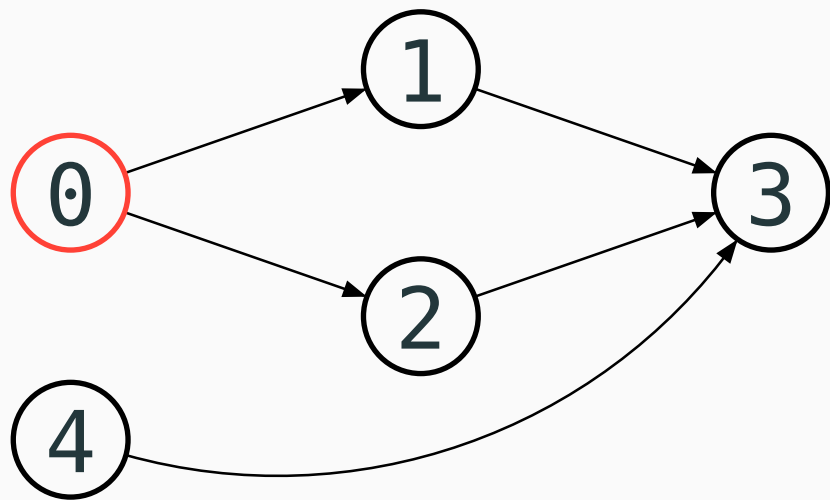


これから探索する頂点のスタック

- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - DFS の各ステップが不変条件を**保存**する



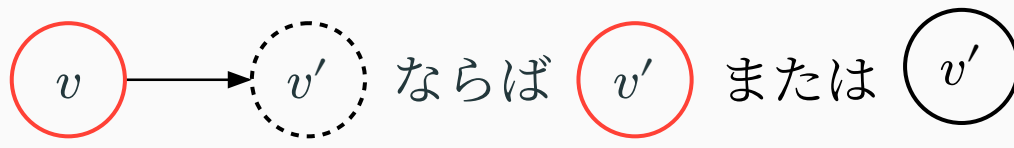
不変条件の保存



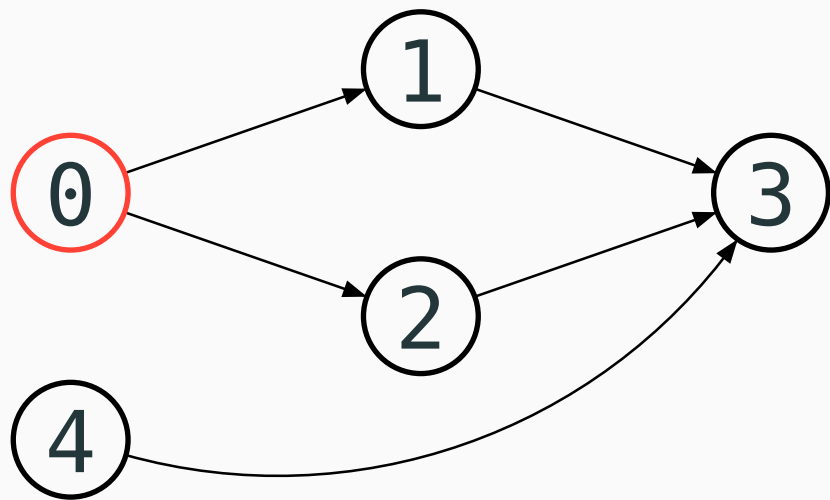
グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

これから探索する頂点のスタック

- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - DFS の各ステップが不変条件を**保存**する



不変条件の保存



グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

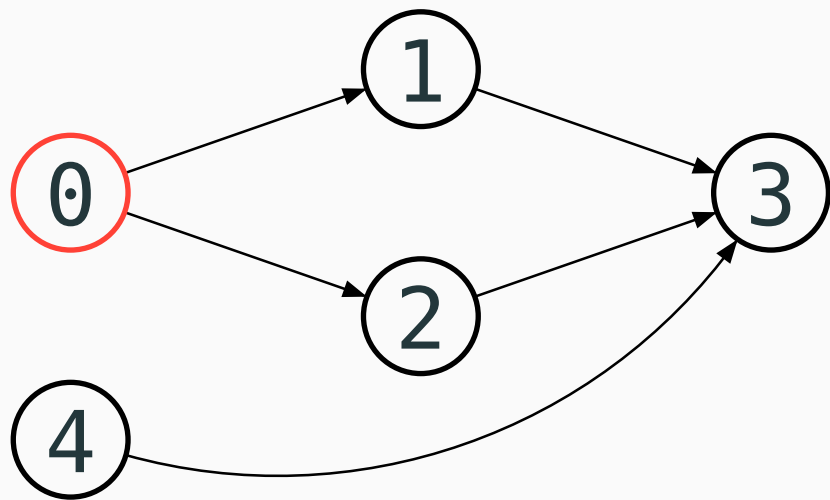


これから探索する頂点のスタック

- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - DFS の各ステップが不変条件を**保存**する



不変条件の保存

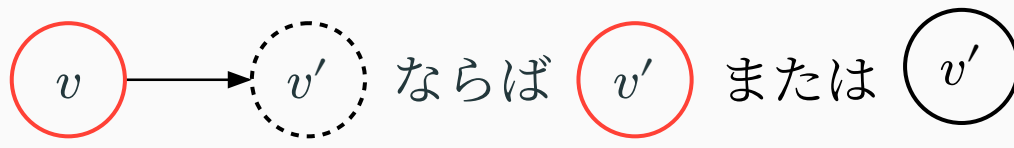


グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

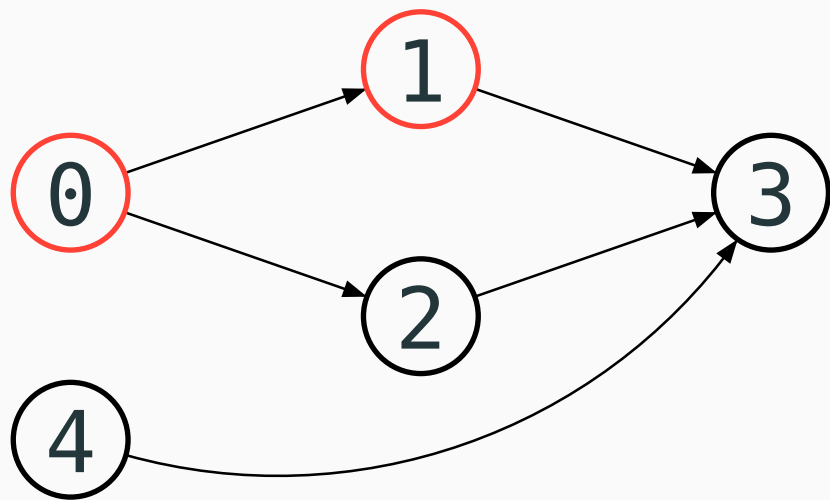


これから探索する頂点のスタック

- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - DFS の各ステップが不変条件を**保存**する



不変条件の保存

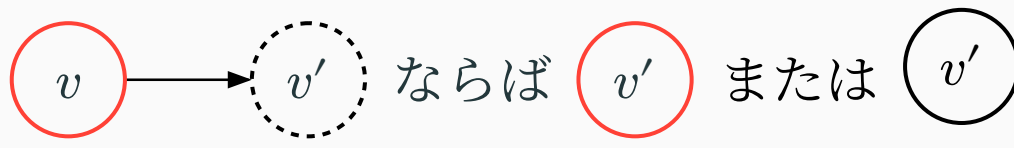


グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

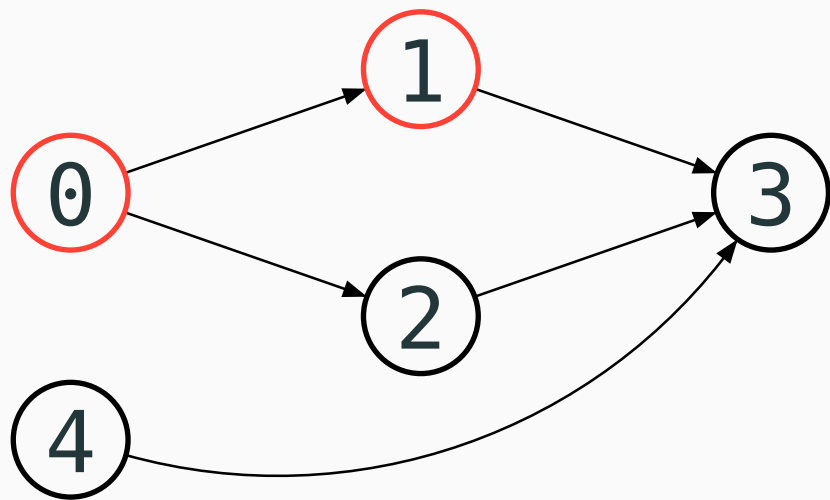


これから探索する頂点のスタック

- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - DFS の各ステップが不変条件を**保存**する



不変条件の保存



グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

3

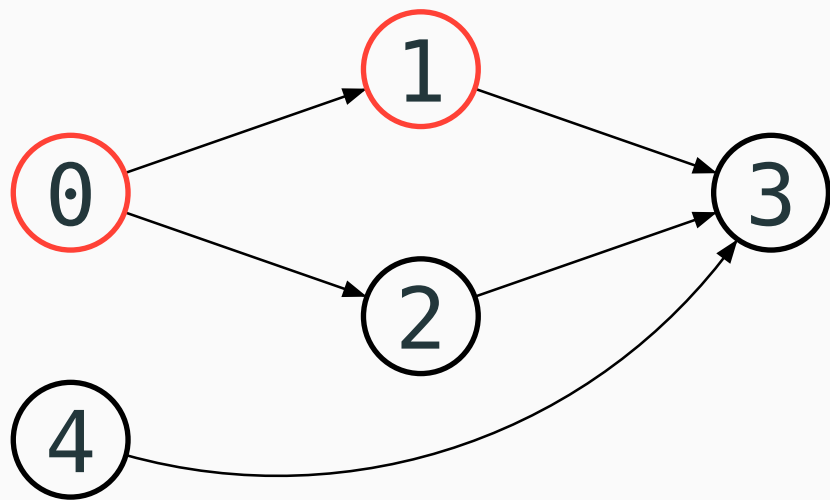
2

これから探索する頂点のスタック

- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - DFS の各ステップが不変条件を**保存**する



不変条件の保存



グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

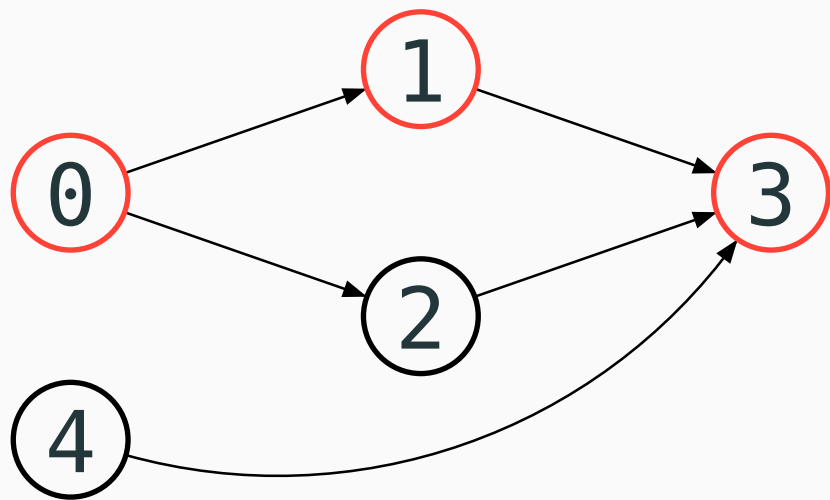


これから探索する頂点のスタック

- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - DFS の各ステップが不変条件を**保存**する



不変条件の保存



グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

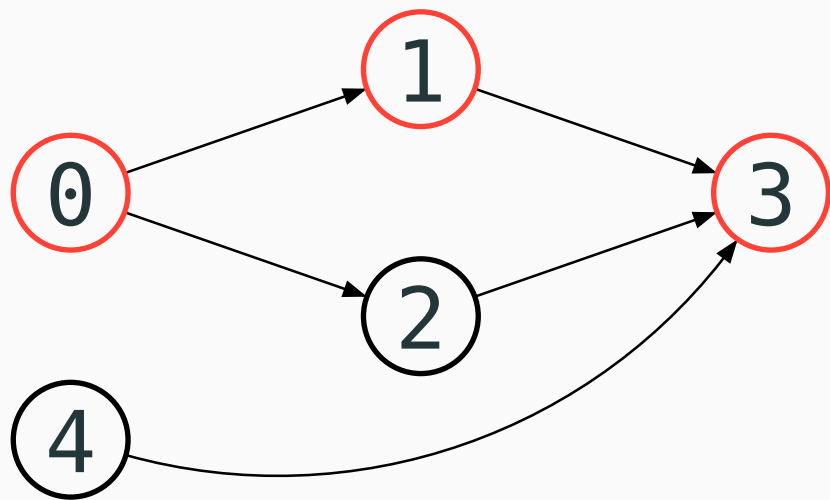


これから探索する頂点のスタック

- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - DFS の各ステップが不変条件を**保存**する



不変条件の保存

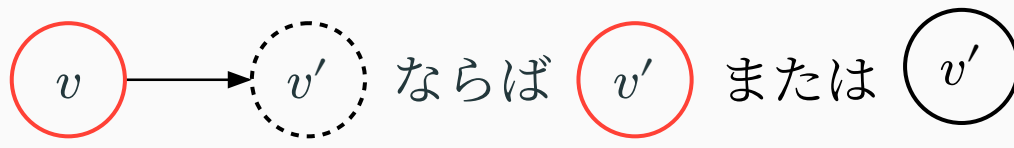


グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

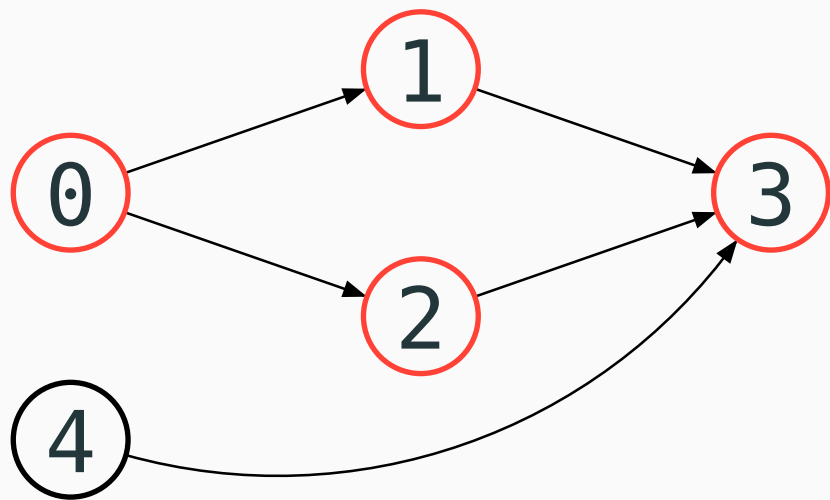


これから探索する頂点のスタック

- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - DFS の各ステップが不変条件を**保存**する



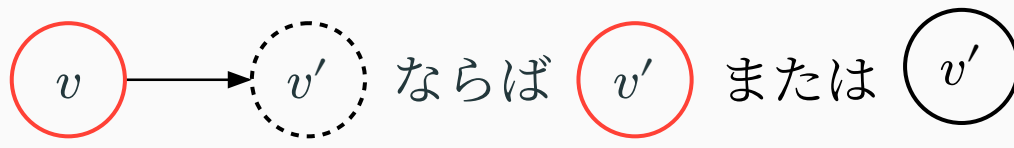
不変条件の保存



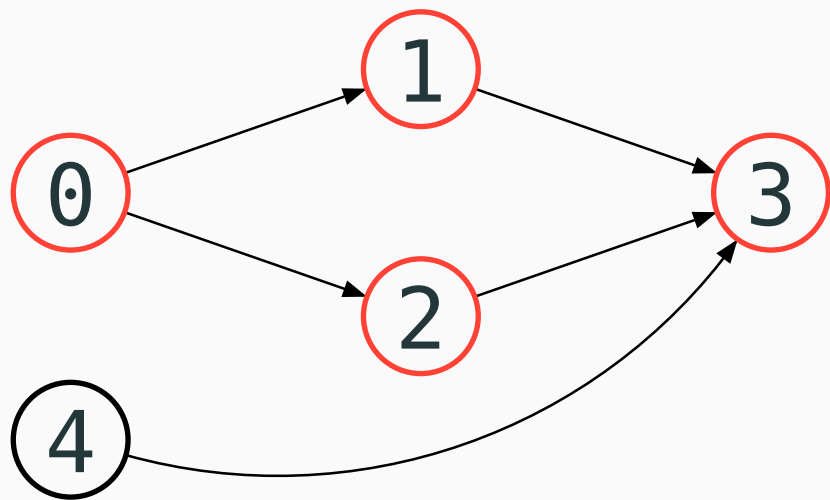
グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

これから探索する頂点のスタック

- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - DFS の各ステップが不変条件を**保存**する



不変条件の保存

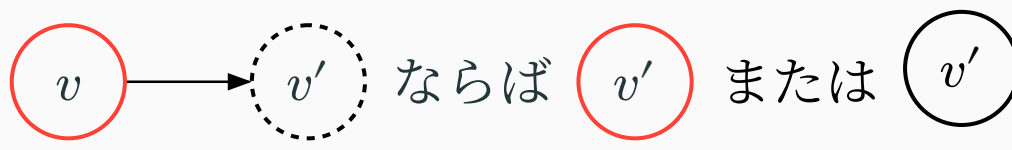


グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

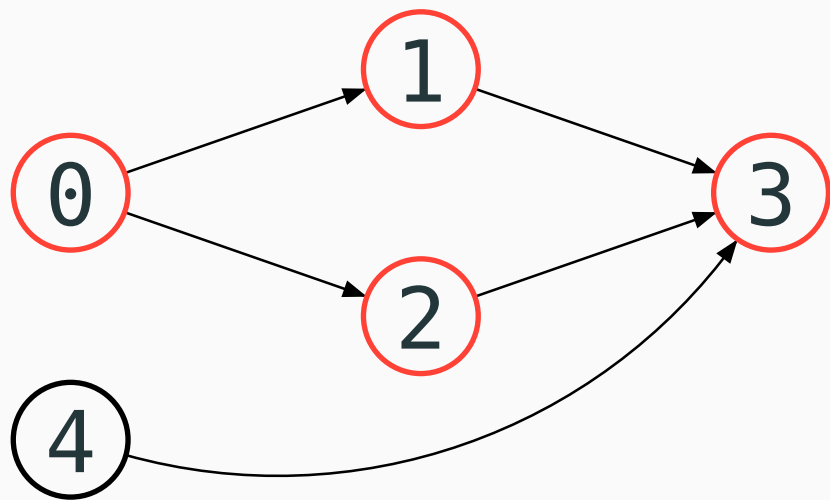


これから探索する頂点のスタック

- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - DFS の各ステップが不変条件を**保存**する



不変条件の保存



グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

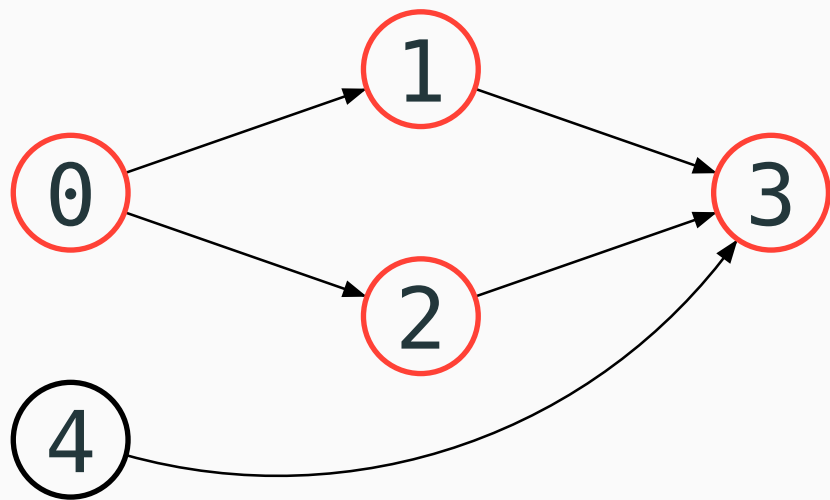


これから探索する頂点のスタック

- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - DFS の各ステップが不変条件を**保存**する



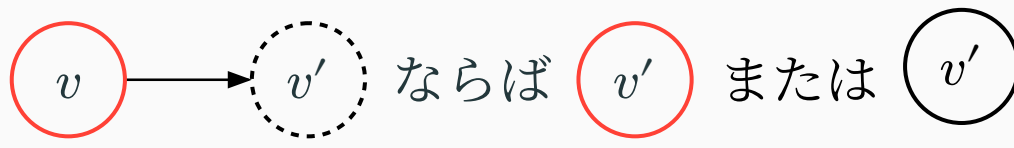
不変条件の保存



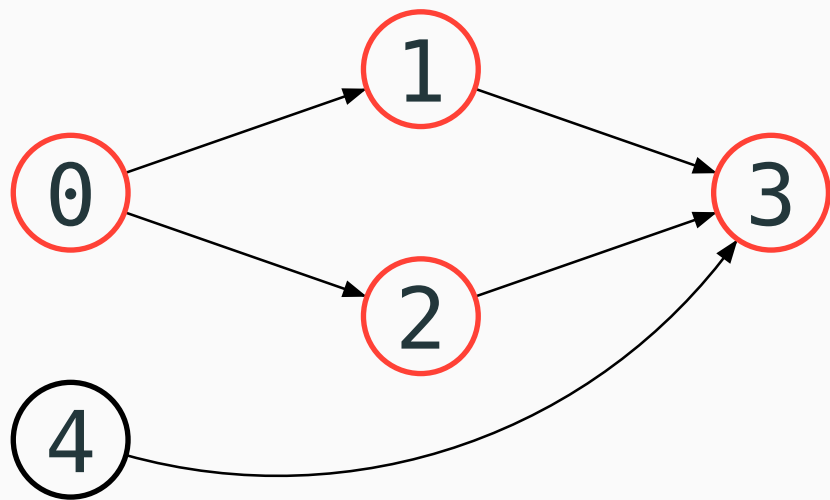
グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

これから探索する頂点のスタック

- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - DFS の各ステップが不変条件を**保存**する



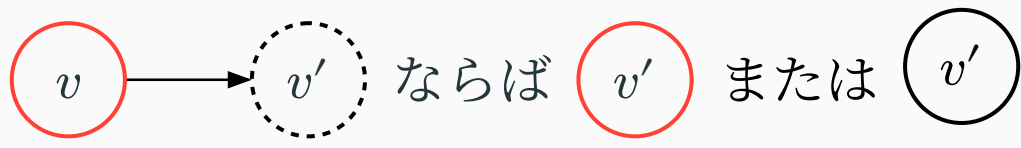
不変条件が到達可能性を導く



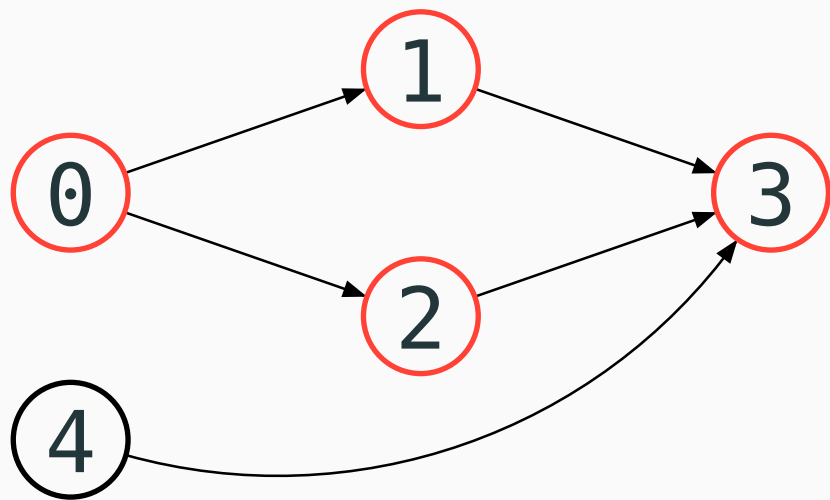
グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

これから探索する頂点のスタック

- スタックが空になったら計算が完了
- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上



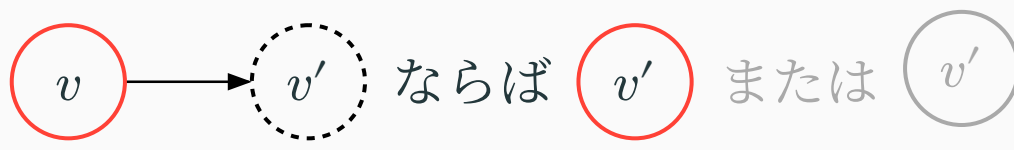
不変条件が到達可能性を導く



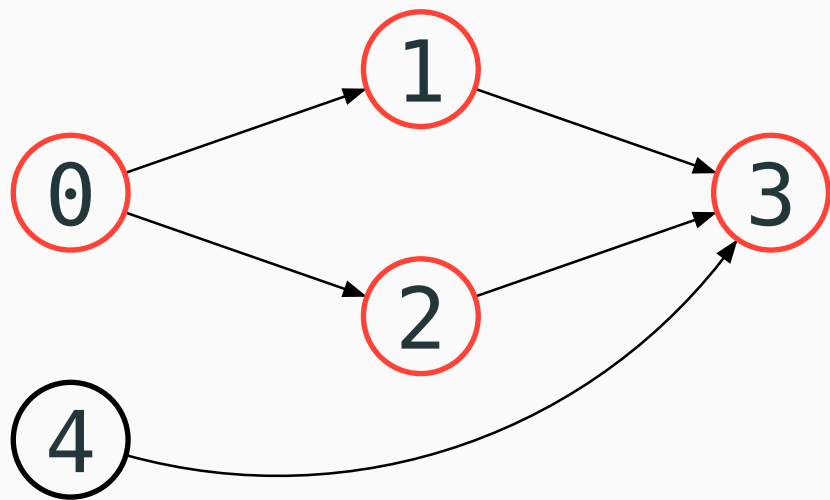
グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

これから探索する頂点のスタック

- スタックが空になったら計算が完了
- **不変条件**: 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上



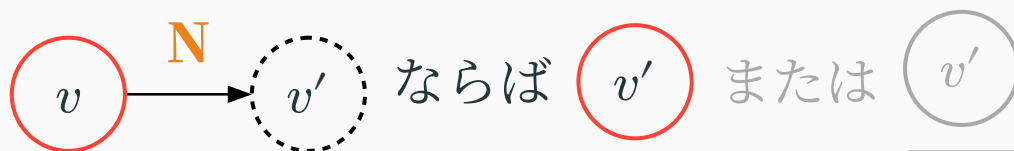
不変条件が到達可能性を導く



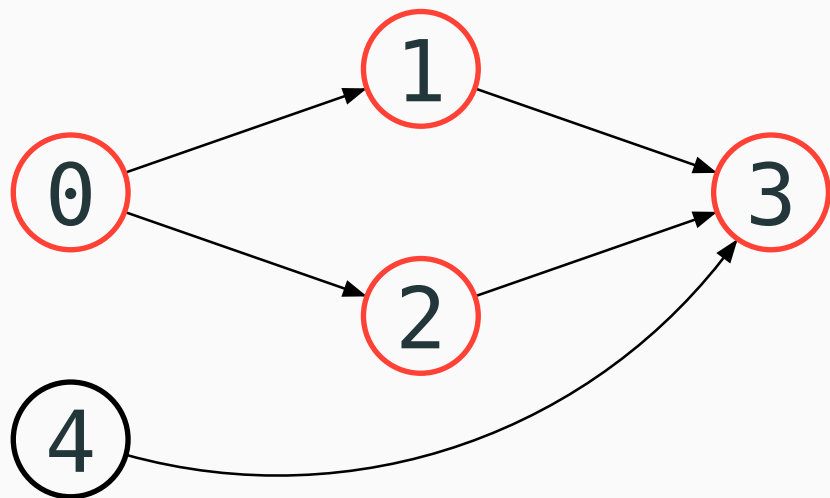
グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

これから探索する頂点のスタック

- スタックが空になったら計算が完了
- **不変条件**: 探索済みの頂点から **N** ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上



不変条件が到達可能性を導く



グラフの例。探索した頂点を赤く塗っている

これから探索する頂点のスタック

- **不変条件:** 探索済みの頂点から 1 ステップ先の頂点は既に探索済み or スタック上
 - よって、N ステップ先の頂点(= 到達可能な頂点)は全て探索済み
- 逆に、別の不変条件を使うと到達可能な頂点だけ探索することが分かる
- したがって、到達可能性を計算するには DFS でグラフを探索すればよい 🎉
 - **よい不変条件が DFS の正しさを導いた**

なぜ定理証明するのか？のまとめ

- 定理証明はたいへん苦しい
- 定理証明は定理の**深い理解**をもたらす
 - ▶ プログラムの深い理解 = **よい不変条件**を見つけること
 - ▶ (形式的には、不変条件を使って帰納法の仮定を強めている)
- 定理証明はとても**やりがいがある**
 - ▶ 全てが繋がった瞬間の気持ちよさはとんでもない

証明をエンジニアリングする

証明をエンジニアリングする

- 定理証明の苦しみを軽減する
 - ▶ 問題を分割することで一度に扱う複雑さを低減する
 - 証明の一部分を補題として切り出して再利用する
 - ▶ コードを再利用してボイラープレーンを減らす
 - 定理証明パターンがありそう
 - 例: [ProofData で中間的な定義や証明を整理する](#)
- ソフトウェア開発と同じ !!
- Lean 特有の苦しみ
 - ▶ do 構文は糖衣構文
 - 証明時は脱糖後の式について証明を書くことになる
 - ▶ **依存型**は用法用量にお気をつけて

依存型は諸刃の剣

- 依存型: 型の中に値を含められる
 - ▶ `let i : Fin 5` のとき、`i` は 5 未満の自然数
- メリット:
 - ▶ 型の表現力が上がる
 - ▶ パフォーマンス向上
 - `def Array.get : (xs : Array α) → Fin xs.size → α` は境界チェックしない
- デメリット:
 - ▶ 型チェックが複雑になる (値の等しさもチェックしないといけないため)
 - 明示的なキャストが必要な場合はコードが冗長になる
 - `((x : Fin (n + 1)).cast (...n + 1 = 1 + nの証明...)) : Fin (1 + n)`
 - ▶ 実質的に「等しい」値でも型システムの的に等しくならないことがある
 - 例: `(3 : Fin 5) ≠ (3 : Fin 10)`

依存型の利用戦略

- 使うのは控えめに
 - ▶ 🧑‍🎓 型に登場する値が変わらないとき（キャストが必要無いとき）
 - ▶ 🧑‍🎓 パフォーマンスが重要なとき
 - ▶ 🧑‍🎓 型に登場する値が変わるとき（キャストが必要なとき）
- 値と一緒に命題を渡すほうが問題が起きないがち
 - ▶ ? `def Array.get : (xs : Array α) \rightarrow (i : Fin xs.size) : α`
 - ▶ 👍 `def Array.get' : (xs : Array α) \rightarrow (i : Nat) \rightarrow (lt : i < xs.size) : α`
 - ▶ i が単なる自然数なのでキャストの問題が起きない

- Lean は純粋関数プログラミング言語であり定理証明支援系でもある
 - Lean で記述したプログラムの性質を Lean 内で証明できる
- Lean で正規表現ライブラリ `lean-regex` を作っている
 - しかも、`lean-regex` の正しさを Lean の定理として証明した
- プログラムの性質の証明は対象のプログラムの深い理解をもたらす
 - 定理証明は苦しいが、とってもやりがいがある
 - 苦しみもエンジニアリング力で立ち向かうぞ💪
- **みんなも定理証明、やろう！**

(Lean で)定理証明がやりたくなったら

- [Natural Numbers Game](#): Lean の楽しいチュートリアル
- [Functional Programming in Lean](#): Lean でのプログラムの書き方と検証
- [Mathematics in Lean](#): Lean で数学を表現する方法 (Mathlib の紹介)
- [Lean Zulip](#): 親切的なコミュニティ

みんなも定理証明、やろう！

[lean-regex](#) はいつでもコントリビュータ募集中！

話せなかった話題

- LLM/強化学習の定理証明への応用
- 形式手法を実用するなら？
- どのような数学が Lean で形式化されている？ご利益は？