矩阵幂级数

定义

定义 设 $A^{(k)}=(a_{ij}^{k})_{m\times n}\in C^{n\times n}$，称形如

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k=c_0I+c_1A+c_2A^2+\cdots+c_kA^k+\cdots$$

的矩阵级数为矩阵幂级数。

收敛判别

定理 设幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}c_kx$的收敛半径为R，A为n阶方阵。若$\rho(A)<R$，则矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k$绝对收敛；若 $\rho(A)>R$，则 $\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k$ 发散。

推论 如果$\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$ 在整个复平面上收敛, 那么不论A是任何方阵， $\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k$ 总是绝对收敛的.

- 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛半径：$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Neuman级数

定理 方阵A的幂级数（Neuman级数）

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k=I+A+A^2+\cdots+A^k+\cdots$$

收敛 $\Leftrightarrow$ A为收敛矩阵，且在收敛时，其和为 $(I-A)^{-1}$.