多项式矩阵与矩阵多项式

矩阵多项式

对 $A \in F^{n\times n}$ ，定义

$$f(A) = a_s A^s + a_{s-1}A^{s-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

为矩阵A的多项式

多项式矩阵（λ矩阵）

定义

$A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda)) \in C^{m\times n}$
即元素都是变数λ的复系数多项式。
（$(\lambda I - A)$就是一个多项式矩阵。）

性质、不变因子、初等因子

1. Smith标准型

   定理1.10 秩为r的多项式矩阵 $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda)) \in C_r^{m\times n}$可通过有限次初等变换化为

   $$S(\lambda) = \left[\begin{array}{cccc:c} d_1(\lambda) & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & \boldsymbol{0} \\ & & \ddots & & \\ & & & d_r(\lambda) & \\ \hdashline & & \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{0} \end{array}\right] \in C_r^{m\times n} \qquad A(\lambda) \cong S(\lambda)$$

   - 其中 $d_i(\lambda)$，$(i = 1,2,\cdots,r)$ 都是**首一多项式**，且

     $d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda) \quad (i = 1,\cdots,r-1)$ **多项式** $d_i(\lambda)$ **整除** $d_{i+1}(\lambda)$
   - $S(\lambda)$ 由 $A(\lambda)$ 唯一确定，称之为 $A(\lambda)$ 的**Smith标准形**
   - 不变因子

     称 $A(\lambda)$ 的Smith标准形中非零的对角线元素

     $d_i(\lambda)$，$(i = 1,2,\cdots,r)$

     为 $A(\lambda)$的**不变因子** **规定:** $d_i(\lambda) = 0 \quad r < i \le n$
   - 初等因子

     将次数大于0的不变因子$d_i(\lambda)$ 分解为**互不相同**的一次因式的幂的乘积（在复数域内，这样的分解是可能的）

     $d_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_{i1})^{t_{i1}}(\lambda - \lambda_{i2})^{t_{i2}} \cdots (\lambda - \lambda_{ir_i})^{t_{ir_i}}$

     称 $(\lambda - \lambda_{ij})^{t_{ij}} \quad j = 1,\cdots,r_i$ 为 $A(\lambda)$ 的一个**初等因子**

   求Smith标准型的原则：凑常数、找次数低的。
2. 多项式矩阵经过初等变换后，其秩、不变因子、初等因子均不变。
3. 等价的多项式矩阵具有相同的Smith标准型。