# 微分方程组

## 一阶常系数齐次微分方程组

### 定义

所谓齐次指的是不含常数项

设一阶线性常系数齐次微分方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n \\ \quad\vdots \\ \dfrac{d\xi_n}{dt} = a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n \end{cases}$$

其中$t$为自变量，$\xi_i = \xi_i(t)$ 是$t$的函数$(i = 1,2,\cdots,n)$，$a_{ij}$是复数$(i,j = 1,2,\cdots,n)$.令$x = x(t) = (\xi_1,\cdots,\xi_n)^T$

$A = (a_{ij})_{n\times n}$，方程组改写为矩阵方程

$$x' = \frac{dx}{dt} = Ax$$

### 求解

- 考虑初始条件时有唯一解：

  定理 满足初始条件 $\xi_1(0) = \gamma_1,\cdots,\xi_n(0) = \gamma_n$ 的一阶线性常系数齐次微分方程组 $\dfrac{dx}{dt} = Ax$，有且仅有唯一解$x = e^{tA}c$，其中$c = (\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)^T$.

- 不设初始条件时有通解：

  考虑向量集合 $S = \{x(t)|x' = Ax\}$，$S$构成一个向量空间，称为 $x' = Ax$ 的解空间.

  因为$e^{tA}$ 可逆，所以它的$n$个列向量 $x_1(t),x_2(t),\cdots x_n(t)$线性无关，又 $\forall x(t) \in S$，可由$x_1(t),x_2(t),\cdots x_n(t)$线性表示，故 $x_1(t),x_2(t),\cdots x_n(t)$ 是$S$的一个基，称为 $x' = Ax$ 基础解系，$x(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t) + \cdots + k_nx_n(t)$ 为其一般解（或通解）.

  注：求$e^{tA}$可采用矩阵函数中的待定系数法。微分方程组

## 一阶线性常系数非齐次微分方程组

### 定义

考虑一阶线性常系数非齐次微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\xi_1}{dt} = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n + \beta_1(t) \\
\dfrac{d\xi_2}{dt} = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n + \beta_2(t) \\
\qquad \vdots \\
\dfrac{d\xi_n}{dt} = a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n + \beta_n(t)
\end{cases}
$$

其中$t$为自变量，$\xi_i = \xi_i(t)$ 是$t$的函数$(i=1,2,\cdots,n)$

$\beta_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $t$ 的已知函数.

$\beta_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $t$ 的已知函数.

方程组可改写为矩阵方程

$$\boldsymbol{x}' = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$$

其中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{b}(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \cdots, \beta_n(t))^{\mathrm{T}}.$$

**求解**

解的形式为“通解+特解”：

即 $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c} + \tilde{\boldsymbol{x}}$.

- 未给定初始条件时，一般解：

$$\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c} + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}\boldsymbol{b}(s)ds$$

- 给定初始条件$x(t_0) = x_0$时，有唯一解：

$$\boldsymbol{x} = e^{tA}\left(e^{-t_0 A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-sA}\boldsymbol{b}(s)ds\right)$$

也就是$c = e^{-t_0 A}x_0$