

## 标准型

### 1. 阶梯型:

非零行在下，每行第一个不为0的元素所在的列以下全为0。仅通过初等行变换可以得到。 [矩阵的秩与初等变换](#)

例如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2. 简化阶梯型:

阶梯型，非零行第一个非零元素为1，所在列其他元素全0。仅通过初等行变换可以得到。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

### 3. 标准型:

左上角为单位阵，其他位置元素全是0。通过初等行+列变换得到。

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

### 4. Hermite标准型 (行最简形)

仅通过初等行变换可以得到。

设  $B \in C_r^{m \times n}$ , 满足:

1. B的前r行中每一行至少含有一个非零元素，且第一个非零元素是1，而后的m-r行元素全为0（但是PPT里的定义不强调第一个非零元素为1）；
2. 若B中第i行的第一个非零元素（即1）在第 $k_i$ 列( $i = 1, 2, \dots, r$ )，则 $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ ；
3. B中的 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 列为单位矩阵 $I_m$ 的前r列。

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$(k_1) \qquad \qquad (k_2) \qquad \qquad (k_r)$