正规矩阵

定义

设$A \in C^{n\times n}$，且$A^HA = AA^H$，则称A为正规矩阵。
设$A \in R^{n\times n}$，且$A^TA = AA^T$，则称A为实正规矩阵。

举例

1. 实对称矩阵：$A = A^T$ 对称矩阵与Hermite矩阵
2. 实反对称矩阵：$A = -A^T$
3. Hermite矩阵：$A = A^H$
4. 反Hermite矩阵：$A = -A^H$
5. 正交矩阵：$A^{-1} = A^T$ 正交矩阵与酉矩阵
6. 酉矩阵：$A^{-1} = A^H$

性质

1. 设$A \in C^{n\times n}$，且A酉相似于对角矩阵 $\Leftrightarrow$ A为正规矩阵（说明正规矩阵一定可以相似对角化，正规矩阵一定是**单纯矩阵**）。相似对角化与单纯矩阵
2. 设$A \in R^{n\times n}$，且A正交相似于对角矩阵 $\Leftrightarrow$ A为正规矩阵（实际上，A一定是对称矩阵）
3. n阶正规矩阵有n个线性无关的特征向量
4. 正规矩阵的奇异值是特征值的模
5. 若A是n阶正规矩阵：
    1. 与A酉相似的矩阵一定为正规矩阵。
    2. 若A还是三角矩阵，那么A一定是对角矩阵。对角矩阵
    3. A是Hermite矩阵的充要条件是A的特征值都是实数。
    4. A是反Hermite矩阵的充要条件是A的特征值的实部都为0。
    5. A是酉矩阵的充要条件是A的特征值模长都等于1。
    6. A的n个特征向量构成C^n的一组标准正交基。
    7. 不同特征值的特征向量彼此正交。