矩阵范数

定义:

定义 设$A\in\mathbf{C}^{m\times n}$，定义一个实值函数$\|A\|$
它满足以下三个条件

(1) 非负性: 当 $A\neq O$时, $\|A\|>0$; 当 $A=O$ 时, $\|A\|=0$

(2) 齐次性: $\|aA\|=|a|\|A\|, a\in C$;

(3)三角不等式: $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|, B\in C^{m\times n}$

则称$\|A\|$为A的广义矩阵范数.

若对 $\mathbf{C}^{m\times n}$,$\mathbf{C}^{n\times l}$ 与$\mathbf{C}^{m\times l}$上的同类广义矩阵范数 $\|\bullet\|$ 有

（4）相容性: $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|, B\in C^{n\times l}$

则称$\|A\|$为A的矩阵范数.

常用范数:

设$A=(a_{i,j})\in C^{n\times n}$

1. $\|A\|_{m_1}=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{i,j}|$
2. $\|A\|_{m_\infty}=n\cdot\max_{i,j}|a_{i,j}|$
   设$A=(a_{i,j})\in C^{m\times n}$
3. Frobennius范数: $\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|^2\right)^{1/2}=\left(tr\left(A^HA\right)\right)^{1/2}$
   诱导范数、算子范数、从属范数: 设$A=(a_{i,j})\in C^{m\times n}$
4. 列和范数(从属向量1范数): $\|A\|_1=\max_j\sum_{i=1}^{m}|a_{i,j}|$
5. 谱范数(从属向量2范数): $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_1}$, λ_1是A^HA的最大特征值(就是A最大的奇异值)。
6. 行和范数(从属向量∞范数): $\|A\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|$

其他范数:
7. 核范数nuclear norm: $\|A\|_*=\sum\sigma_i$ ，所有奇异值的和。

性质

1. 诱导范数:
   定理 已知C^n与C^m上的同类向量范数 $\|\bullet\|$ ，
   设$A\in C^{m\times n}$ ，则函数$\|A\|=\max\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$ 是 $C^{m\times n}$
   上的矩阵范数，且与已知向量范数相容.
2. 对于F范数:
   定理 设$A\in C^{m\times n}$，且$P\in C^{m\times m}$与 $Q\in C^{n\times n}$
   都是酉矩阵，则 $\|PA\|_F=\|A\|_F=\|AQ\|_F$
   推论: 与A酉相似矩阵的F-范数都是相同的。
3. 向量范数与矩阵范数的相容: 向量范数
   定义 对于 $\mathbf{C}^{m\times n}$上的矩阵范数 $\|\bullet\|_M$ 和
   C^n 上的向量范数 $\|\bullet\|_V$ ，如果
   $\|Ax\|_v\leq\|A\|_M\|x\|_V, \forall A\in C^{m\times n}, \forall x\in C^n$
   则称矩阵范数$\|\bullet\|_M$与向量范数$\|\bullet\|_V$ 是相容的.
   例: 矩阵m_1范数与向量l_1范数相容。
   矩阵F范数与向量l_2范数相容。

定理：设$\|\bullet\|_M$ 是 $C^{m\times n}$上的矩阵范数，任取C^n中的非零向量y，则函数$\|x\|_V=\|xy^H\|_M,\forall x\in C^n$是 C^n上的向量范数，且矩阵范数$\|\bullet\|_M$ 与向量范数$\|\bullet\|_V$ 相容。

4.

5. 矩阵的非奇异条件：满秩矩阵

定理 设 $A\in C^{n\times n}$，且对 $C^{n\times n}$上的某种矩阵范数$\|\bullet\|$，有 $\|A\|<1$，则矩阵$I-A$非奇异，且有

$$\|(I-A)^{-1}\|\le\frac{\|I\|}{1-\|A\|}$$

6. 设$A\in C^{n\times n}$，且对于$C^{n\times n}$上的某种矩阵范数$\|\cdot\|$，有$\|A\|<1$，则矩阵$I-A$非奇异，有$\|I-(I-A)^{-1}\|\le\frac{\|A\|}{1-\|A\|}$.

7. 单位矩阵范数：$\|I\|\ge 1$，对于任何范数。

8. 矩阵的谱半径是任意范数的下界：

定理 设 $A\in C^{n\times n}$，则对 $C^{n\times n}$ 上的任何一种矩阵范数 $\|\bullet\|$，都有 $\rho(A)\le\|A\|$

9. 矩阵谱半径是某种矩阵范数的下确界：矩阵的谱半径

定理 设 $A\in C^{n\times n}$，对 $\forall\varepsilon>0$，存在某种矩阵范数 $\|\bullet\|_M$，使得 $\|A\|_M\le\rho(A)+\varepsilon$.

10. 当A是Hermite矩阵时，$\|A\|_2=\rho(A)$