函数矩阵

定义

定义7.2.1 设$a_{ij}(x)(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$都是定义在区间$(a,b)$上的实函数，则$m\times n$矩阵

$$A(x)=\begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \cdots & a_{mn}(x) \end{bmatrix}_{m\times n}$$

称为定义在(a,b)上的函数矩阵。

特别地，当$n=1$时，得到函数向量或称为向量值函数。通常用$\alpha(x)$ 等形式表示。

函数矩阵的逆

定义：设$A(x)$为一个n阶函数矩阵，如果存在n阶函数矩阵$B(x)$使得对于任何$x\in[a,b]$ 都有

$$A(x)B(x)=B(x)A(x)=I$$

那么我们称$A(x)$ 在区间$[a,b]$上是可逆的。

称$B(x)$是$A(x)$ 的逆矩阵，一般记为$A^{-1}(x)$

定理 n阶函数矩阵$A(x)$在区间(a,b)上可逆的充分必要条件是$|A(x)|$在(a,b)上处处不为零，并且

$$A^{-1}(x)=\frac{1}{|A(x)|}adj(A(x))$$

其中

$$adj(A(x))=\begin{bmatrix} A_{11}(x) & A_{21}(x) & \cdots & A_{m1}(x) \\ A_{12}(x) & A_{22}(x) & \cdots & A_{n2}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{1n}(x) & A_{2n}(x) & \cdots & A_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

是$A(x)$的伴随矩阵值函数，$A_{ij}(x)$是$A(x)$中元素$a_{ij}(x)$的代数余子式。

函数矩阵的秩

定义：区间$[a,b]$上的$m\times n$型函数矩阵不恒等于零的子式的最高阶数称为$A(x)$ 的秩。

特别地，设$A(x)$为区间$[a,b]$上的n阶函数矩阵，如果$A(x)$的秩为n，则称$A(x)$ 一个满秩矩阵。

注意：对于函数矩阵而言，满秩与可逆不是等价的。即：可逆的一定是满秩的，但是满秩的却不一定是可逆的。

函数矩阵的极限

极限存在的定义：如果$A(x)=(a_{ij}(x))_{m\times n}$的所有各元素$a_{ij}(x)$在$x=x_0$处有极限，即

$$\lim_{x\to x_0} a_{ij}(x)=a_{ij} \qquad (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$$

其中a_{ij}为固定常数。则称$A(x)$在$x=x_0$处有极限，且记为

$$\lim_{x\to x_0} A(x)=A$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

函数矩阵的连续

连续的定义：如果$A(x)$的各元素$a_{ij}(x)$在$x=x_0$处连续，即

$$\lim_{x\to x_0} a_{ij}(x)=a_{ij}(x_0) \qquad (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$$

则称$A(x)$在$x=x_0$处连续，且记为

$$\lim_{x\to x_0} A(x)=A(x_0)$$

其中

$$A(x_0)=\begin{bmatrix} a_{11}(x_0) & a_{12}(x_0) & \cdots & a_{1n}(x_0) \\ a_{21}(x_0) & a_{22}(x_0) & \cdots & a_{2n}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(x_0) & a_{m2}(x_0) & \cdots & a_{mn}(x_0) \end{bmatrix}$$

性质：

设$\lim\limits_{x\to x_0} A(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} B(x)=B$

则 (1) $\lim\limits_{x\to x_0}(A(x)\pm B(x))=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}(kA(x))=kA$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}(A(x)B(x))=AB$

函数矩阵求导

定义：如果 $A(x)=(a_{ij}(x))_{m\times n}$ 的所有各元素 $a_{ij}(x)\,(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ 在点 $x=x_0$ 处(或在区间 $[a,b]$ 上)可导，便称此函数矩阵 $A(x)$ 在点 $x=x_0$ 处(或在区间 $[a,b]$ 上)可导，并且记为

$$A'(x_0)=\left.\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x_0+\Delta x)-A(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\begin{bmatrix} a'_{11}(x_0) & a'_{12}(x_0) & \cdots & a'_{1n}(x_0) \\ a'_{21}(x_0) & a'_{22}(x_0) & \cdots & a'_{2n}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{m1}(x_0) & a'_{m2}(x_0) & \cdots & a'_{mn}(x_0) \end{bmatrix}$$

性质:

(1) $A(x)$ 是常数矩阵的充分必要条件是

$$\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}=0$$

(2) 设 $A(x)=(a_{ij}(x))_{m\times n}, B(x)=(b_{ij}(x))_{m\times n}$

均可导，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[A(x)+B(x)]=\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}B(x)}{\mathrm{d}x}$$

(3)设 $k(x)$ 是 x 的纯量函数，$A(x)$ 是函数矩阵，$k(x)$ 与 $A(x)$ 均可导，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k(x)A(x)]=\frac{\mathrm{d}k(x)}{\mathrm{d}x}A(x)+k(x)\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}$$

特别地，当 $k(x)$ 是常数 k 时有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[kA(x)]=k\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}$$

(4) 设 $A(x),B(x)$ 均可导，且 $A(x)$与$B(x)$ 是可乘的，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[A(x)B(x)]=\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}B(x)+A(x)\frac{\mathrm{d}B(x)}{\mathrm{d}x}$$

- 拓展：若$A(x)$可导，P,Q是数字矩阵，则：$\frac{d}{dx}[PA(x)]=P\frac{d}{dx}A(x)$；$\frac{d}{dx}[A(x)Q]=[\frac{d}{dx}A(x)]Q$

(5) 如果$x=f(t)$是t的可微函数，则

$$\frac{d}{dt}A(x)=\frac{dA(x)}{dx}f'(t)=f'(t)\frac{dA(x)}{dx}$$

因为矩阵乘法没有交换律，一般地，对正整数 $m>1$ 和可导的 n 阶矩阵值函数 $A(x)$

$$\frac{d}{dx}[A(x)]^m \neq m[A(x)]^{m-1}\frac{dA(x)}{dx}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A^2(x) \neq 2A(x)\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A^3(x) \neq 3A^2(x)\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}$$

17

如果方阵 $A(t)$ 的逆矩阵 $A^{-1}(t)$ 存在，则有

$$A(t)\cdot A^{-1}(t)=I$$

$$\frac{d}{dt}(A(t)A^{-1}(t))=\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A^{-1}(t)+A(t)\left(\frac{d}{dt}A^{-1}(t)\right)=0$$

于是有

$$\frac{d}{dt}(A^{-1}(t))=-A^{-1}(t)\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A^{-1}(t)$$

- 若$A(x)$可导，则$A^T(x)$可导，且$\frac{d}{dx}[A^T(x)]=(\frac{d}{dx}A(x))^T$

函数矩阵积分

定义7.2.6　设$A(x)=(a_{ij}(x))$是区间$[a,b]$上的$m\times n$函数矩阵.如果$A(x)$的所有元素$a_{ij}(x)\,(i=1,\cdots,m,$ $j=1,\cdots,n)$在区间$[a,b]$上可积,则称函数矩阵$A(x)$在$[a,b]$上可积,并称

$$\int_a^b A(x)dx=\left(\int_a^b a_{ij}(x)dx\right)$$

为 $A(x)$在$[a,b]$上的积分。

$$\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}\int_a^b a_{11}(x)\mathrm{d}x & \int_a^b a_{12}(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b a_{1n}(x)\mathrm{d}x\\ \int_a^b a_{21}(x)\mathrm{d}x & \int_a^b a_{22}(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b a_{2n}(x)\mathrm{d}x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \int_a^b a_{m1}(x)\mathrm{d}x & \int_a^b a_{m2}(x)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b a_{mn}(x)\mathrm{d}x\end{bmatrix}$$

性质

(1) $\int_a^b[A(x)+B(x)]dx=\int_a^b A(x)dx+\int_a^b B(x)dx;$

(2) 对常数$k\in R$,有$\int_a^b kA(x)dx=k\int_a^b A(x)dx;$

(3) 对常数矩阵 A和C，有

$$\int_a^b[AB(x)C]dx=A[\int_a^b B(x)dx]C$$

(4) 如果函数矩阵 $A(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\frac{d}{dx}\int_a^x A(t)dt=A(x)$$

(5) 如果函数矩阵$A'(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\int_a^b A'(x)dx=A(b)-A(a)$$