Hamilton-Cayley定理

定义

任一方阵都是其特征多项式的根：

设 $A \in C^{nxn}$，$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$，则 $\varphi(A) = \boldsymbol{0}$

（运算结果是零矩阵）

应用

1. 化矩阵多项式计算

- 当n阶方阵的矩阵多项式 $f(A)$ 中A的最高次幂超过n时，可用多项式的带余除法，将此矩阵多项式对应的多项式$f(\lambda)$ 表示为$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ 与商 $g(\lambda)$ 的积，再加上余式$\boxed{r(\lambda)}$ 的形式：

  $$f(\lambda) = g(\lambda)\varphi(\lambda) + r(\lambda)$$

  $\deg r(\lambda) < n$

  那么根据Hamilton-Cayley定理

  $$f(A) = g(A)\varphi(A) + r(A) = r(A)$$

  这样可简化 $f(A)$ 的计算

多项式的带余除法

设$f(\lambda)$，$g(\lambda)$为任意多项式，$g(\lambda)$不恒等于0，则必有两个多项式$q(\lambda)$和$r(\lambda)$，使得

$$f(\lambda) = q(\lambda)g(\lambda) + r(\lambda)$$

式中 $r(\lambda) = 0$ 或 $\deg r(\lambda) < \deg g(\lambda)$

2. 求矩阵的逆

由$\phi(A) = 0$。基于此，把此方程改写为$Ag(A) = I$的形式。则矩阵多项式$g(A) = A^{-1}$。求此矩阵多项式即相当于求得了矩阵的逆。