对称矩阵特征值极性

实对称矩阵Rayleigh商的极性

定义

对称矩阵与Hermite矩阵

定义 设A是n阶实对称矩阵，$x\in R^n$. 称

$$R(x)=\frac{x^TAx}{x^Tx}\quad x\neq O$$

为矩阵A的Rayleigh商.

性质

1. $R(x)$是x的连续函数
2. 性质2 $R(x)$的最大值和最小值存在，且能够在单位球面 $S=\{x|x\in R^n,\|x\|_2=1\}$上达到.
3. 零次齐次性：$R(x)=R(\lambda x)$，因此：
   注：$R(x)$ 在S 上的最大值与最小值，就是在 $x\neq O$ 的整个区域上的最大值与最小值.
   设实对称矩阵A的特征值按其大小顺序排列为 $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$
   对应的标准正交特征向量系为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$
4. 定理 设A为实对称矩阵，则
   $$\min_{x\neq O}R(x)=\lambda_1\quad,\max_{x\neq O}R(x)=\lambda_n$$
   1. 在$\|x\|_2=1$上，p_1和p_n分别是$R(x)$的一个极小值点和一个极大值点。
   2. 推论2 如果 $\lambda_1=\cdots=\lambda_k(1\le k\le n)$ ，则在 $\|x\|_2=1$ 上，$R(x)$的所有极小点为
   $$l_1p_1+l_2p_2+\cdots l_kp_k$$
   其中 $l_i\in R(i=1,\cdots,k)$ ，且满足 $l_1^2+l_2^2+\cdots+l_k^2=1$
5. 从标准正交特征向量系中截取一部分生成的子空间也有一样的性质：
   定理 设 $x\in L(p_r,p_{r+1},\cdots,p_s)$, $1\le r\le s\le n$,
   则有 $\min_{x\neq O}R(x)=\lambda_r\quad,\max_{x\neq O}R(x)=\lambda_s$
6. 对于R^n的任意一个k维子空间V_k，$1\le k\le n$：
   定理 设实对称矩阵A，则A的第k个特征值
   $$\lambda_k=\min_{V_k}\max\{x^TAx|x\in V_k,\|x\|_2=1\}$$
7. 定理 设实对称矩阵A 和$A+Q$的特征值分别为 $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$和$\mu_1\le\mu_2\le\cdots\le\mu_n$,
   则有 $|\lambda_i-\mu_i|\le\|Q\|\quad(i=1,\cdots,n)$

8. **定理** 设实对称矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}$ 和$\boldsymbol{Q}$ 的特征值分别是 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n, \mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_n$ 和 $\gamma_1 \le \gamma_2 \le \cdots \le \gamma_n$ ，并定义向量

$$u = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)^T, v = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^T$$

$w = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)^T$ ，则 $\|u - v\|_2 \le \|w\|_2$