矩阵广义逆（Moore-Penrose）

定义

定义 设矩阵$A\in C^{m\times n}$，若矩阵$X\in C^{n\times m}$满足如下四个Moore-Penrose方程

$$AXA=A \quad (\text{i})$$

$$XAX=X \quad (\text{ii})$$

$$(AX)^H=AX \quad (\text{iii})$$

$$(XA)^H=XA \quad (\text{iv})$$

的某几个或全部，则称 X为A的广义逆矩阵；满足全部四个方程的广义逆矩阵 X称为A 的Penrose逆，记为A^+.

能产生15类广义逆。

定义对任意 $A\in C^{m\times n}$，若 $X\in C^{n\times m}$满足Moore-Penrose 方程中的$(i),(j),(k),(l)$ 等方程，则称 X为 A 的 $\{i,j,\dots,l\}$- 逆，记为$A^{(i,j,\dots,l)}$，其全体记为 $A\{i,j,\dots,l\}$

存在与唯一性

定理 对任意 $A\in C^{m\times n}$ ，A^+存在且唯一.

一般来说，其余各类逆矩阵都不唯一。

定理 矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 有唯一 $\{1\}$ -逆$\Leftrightarrow$ A 为非奇异矩阵，且这个 $\{1\}$-逆与 A^{-1}一致.

求A^+广义逆

1. 奇异值分解法

设$A\in C_r^{m\times n}$，$(r>0)$，对A进行奇异值分解奇异值分解：$A=U\begin{pmatrix}S_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^H$，其中，U和V分别为m和n阶酉矩阵。

则$A^+=V\begin{pmatrix}S_r^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^H$。

（S_r是对角矩阵，求逆直接将对角线元素取倒数即可。注意中间矩阵的维度！）

2. 满秩分解法

设$A\in C_r^{m\times n}$，$(r>0)$，且有满秩分解，$A=FG$，$F\in C_r^{m\times r}$，$G\in C_r^{r\times n}$，则有：

$$A^+=G^H(GG^H)^{-1}(F^HF)^{-1}F^H=G^H(F^HAG^H)^{-1}F^H$$

解析：

若对于列满秩矩阵$F\in C_r^{m\times r}$：$F^+=(F^HF)^{-1}F^H$

若对于行满秩矩阵$G\in C_r^{r\times n}$：$G^+=G^H(GG^H)^{-1}$

3. 谱分解法

定理：设 $A\in C^{m\times n}$ $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$为$A^HA$的互异特征值，且

A^HA 的谱分解为 $A^HA=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i$，则

$$A^+=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^+ G_i A^H=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^+\frac{\varphi_i(A^HA)}{\varphi_i(\lambda_i)}A^H$$

其中 $\varphi_i(\lambda)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(\lambda-\lambda_j)$

4. 秩为1矩阵广义逆的快速求解：

若$A=(a_{ij})_{m\times n},r(A)=1$,则$A^+=\frac{1}{\sum|a_{ij}|^2}A^H=\frac{1}{tr(A^HA)}A^H$

由于$r(A)=1$,则A^HA优相似与对角阵$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}$，其中$\sqrt{\lambda_1}$为正奇值$\Rightarrow$

$tr(A^HA)=tr(AA^H)=\lambda_1=\sum|a_{ij}|^2$,则$A$的正$SVD$为$A=P\Delta Q^H=P\left(\sqrt{\lambda_1}\right)Q^H$,

其中$P^HP=Q^HQ=I$

$A^H=Q\Delta P^H=Q(\sqrt{\lambda_1})P^H, A^+=Q\Delta^{-1}P^H=Q(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}})P^H$

$\Rightarrow A^+=\frac{1}{(\sqrt{\lambda_1})^2}Q(\sqrt{\lambda_1})P^H=\frac{1}{(\sqrt{\lambda_1})^2}Q\Delta P^H=\frac{1}{(\sqrt{\lambda_1})^2}A^H=\frac{1}{tr(A^HA)}A^H=\frac{1}{\sum|a_{ij}|^2}A^H$

求{1}-逆与{1,2}-逆

方法1

定理：设 $A\in C_r^{m\times n}$, 又设 $Q\in C_m^{m\times m}$ 和 $P\in C_n^{n\times n}$

使得 $QAP=\begin{pmatrix}I_r & K\\ O & O\end{pmatrix}$，则 $X=P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & L\end{pmatrix}Q$

是A的{1}-逆.当$L=O$，X是A的{1,2}-逆.

其中L为$C^{(n-r)\times(m-r)}$中任意一个矩阵

注：由上面定理得到的A的{1}-逆只是$A\{1\}$的一个子集。

方法2

定理：设 $A\in C_r^{m\times n}$, 又设 $Q\in C_m^{m\times m}$ 和 $P\in C_n^{n\times n}$

使得 $\mathbf{QAP}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & 0\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix}$，则

$A\{1\}=\{\mathbf{P}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}\mathbf{Q}\mid X_{12},X_{21},X_{22}$为适当阶数的任意矩阵$\}$

满秩分解求广义逆其他方法

定理 设 $A\in C_r^{m\times n}(r>0)$ 的满秩分解

$A=FG$ 其中 $F\in C_r^{m\times r},G\in C_r^{r\times n}$. 则

(1) $G^{(i)}F^{(1)}\in A\{i\},i=1,2,4;$

(2) $G^{(1)}F^{(i)}\in A\{i\},i=1,2,3;$

(3) $G^{(1)}F^+\in A\{1,2,3\},\ G^+F^{(1)}\in A\{1,2,4\};$

(4) $A^+=G^+F^{(1,3)}=G^{(1,4)}F^+;$

(5) $A^+=G^+F^+=G^H(GG^H)^{-1}(F^HF)^{-1}F^H$

A^+广义逆的性质

（1）$rankA^+=rankA$

（2）$(A^+)^+=A$

（3）$(A^H)^+=(A^+)^H$，$(A^T)^+=(A^+)^T$

（4）$(A^HA)^+=A^+(A^H)^+$, $(AA^H)^+=(A^H)^+A^+$

（5）$A^+=(A^HA)^+A^H=A^H(AA^H)^+$

（6）$R(A^+)=R(A^H)$, $N(A^+)=N(A^H)$

其他广义逆的性质

定义 $\lambda^+=\begin{cases}\lambda^{-1} & \lambda\neq 0\\ 0 & \lambda=0\end{cases}$

定理 设 $A\in C^{m\times n}, B\in C^{n\times p}, \lambda\in C$, 则

（1） $(A^{(1)})^H\in A^H\{1\}$;

（2） $\lambda^+A^{(1)}\in(\lambda A)\{1\}$;

（3）若S和T非奇异，则

$$T^{-1}A^{(1)}S^{-1}\in(SAT)\{1\}$$

（4） $rankA^{(1)}\geq rankA$

（5）$AA^{(1)}$和 $A^{(1)}A$ 均为幂等矩阵且与 A同秩.

（6） $R(AA^{(1)})=R(A), N(A^{(1)}A)=N(A)$,

$R\left((A^{(1)}A)^H\right)=R(A^H)$;

（7） $A^{(1)}A=I_n\Leftrightarrow rankA=n$,

$AA^{(1)}=I_m\Leftrightarrow rankA=m$;

（8） $AB(AB)^{(1)}A=A\Leftrightarrow rankAB=rankA$,

$B(AB)^{(1)}AB=B\Leftrightarrow rankAB=rankB$;

定理 设矩阵 $Y,Z\in A\{1\}$，又设$X=YAZ$,

则 $X\in A\{1,2\}$.

定理 已知矩阵 A 和 $X\in A\{1\}$，则

$X\in A\{1,2\}\Leftrightarrow rankX=rankA$.

定理 设矩阵A给定，则

$$Y=(A^HA)^{(1)}A^H\in A\{1,2,3\}$$

$$Z=A^H(AA^H)^{(1)}\in A\{1,2,4\}$$

由单个广义逆求广义逆的集合

推论 设 $A\in C^{m\times n}, A^{(1)}\in A\{1\}$. 则

1. $A\{1\}=\left\{A^{(1)}+Z-A^{(1)}AZAA^{(1)}\,\middle|\,Z\in C^{n\times m}\right\}$

定理 设 $A\in C^{m\times n}$，$A^{(1,4)}\in A\{1,4\}$，则

2. $$A\{1,4\}=\left\{A^{(1,4)}+Z(I-AA^{(1,4)})\,\middle|\,Z\in C^{n\times m}\right\}$$

定理 设 $A\in C^{m\times n}, A^{(1,3)}\in A\{1,3\}$，则

3. $$A\{1,3\}=\left\{A^{(1,3)}+(I-A^{(1,3)}A)Z\,\middle|\,Z\in C^{n\times m}\right\}$$