Jordan标准型（宽泛意义的相似对角化）

定义

Jordan块

－Jordan块

称形如

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}_{r_i \times r_i} \in C^{r_i \times r_i}$$

的矩阵为 r_i 阶Jordan块

Jordan矩阵

－Jordan矩阵

由若干个Jordan块构成的分块对角矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

为Jordan矩阵

－Jordan块与对角形的差别仅在其上对角线：1：Jordan; 0：Diagonal

－有的教科书上定义下对角线全为1的、其余元素为0的下三角阵为Jordan块，它们之间是转置关系

－Jordan块本身就是一个分块数为1的Jordan矩阵

－对角阵是一个特殊的Jordan矩阵：其每个Jordan块都是1阶的

注意：Jordan矩阵上对角线并不全是1

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|ccc} \lambda_1 & 1 & & & & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & 1 & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & & & \\ \hline & & & & \lambda_2 & 1 & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & 1 & & & \\ & & & & & & \lambda_2 & & & \\ \hline & & & & & & & \lambda_3 & 1 & \\ & & & & & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & & & & & \lambda_3 \end{array}\right]$$

Jordan标准型

设 $A \in C^{n\times n}$，则A与一个Jordan矩阵J相似。即 $\exists P \in C_n^{n\times n}$，使得

$$P^{-1}AP = J$$

对此Jordan矩阵J，**除其Jordan块的排列次序外**，由A唯一确定，称J为A的**Jordan标准形**

注意

1. **A的Jordan标准型的主对角线元素就是A的特征值。**
2. 在Jordan标准型中，不同Jordan块的主对角线元素可能相同，因此不能通过Jordan块的阶数来判断此Jordan块对应的特征值的代数重数。

化Jordan标准型的方法

有两种方法求jordan标准型，都需要首先求矩阵的不变因子。

1. 初等变换法

1. 利用初等变换，求特征矩阵$(\lambda I - A)$的Smith标准型，求不变因子$d_i(\lambda), (i = 1, 2, \ldots, n)$[多项式矩阵与矩阵多项式]

2. 2. 将次数大于0的不变因子 $d_i(\lambda)$ 分解为互不相同的一次因式的幂的乘积

$$d_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_{i1})^{t_{i1}} (\lambda - \lambda_{i2})^{t_{i2}} \cdots (\lambda - \lambda_{ir_i})^{t_{ir_i}}$$

写出 $(\lambda I - A)$的全部初等因子：

$$\underbrace{(\lambda - \lambda_{11})^{t_{11}}, \cdots (\lambda - \lambda_{1r_1})^{t_{1r_1}}}_{d_1(\lambda)}, \underbrace{(\lambda - \lambda_{21})^{t_{21}}, \cdots (\lambda - \lambda_{2r_2})^{t_{2r_2}}}_{d_2(\lambda)} \cdots, \underbrace{(\lambda - \lambda_{n1})^{t_{n1}}, \cdots (\lambda - \lambda_{nr_n})^{t_{1r_n}}}_{d_n(\lambda)}$$

可能相同

其中 $\sum_{j=1}^{r_1} t_{1j} + \cdots + \sum_{j=1}^{r_n} t_{nj} = n$

相同的λ不要合并。

3. 写出每个初等因子 $(\lambda - \lambda_{ij})^{t_{ij}}$ 对应的Jordan块

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} \in C^{t_{ij} \times t_{ij}} \quad i = 1, \cdots, n \quad j = 1, \cdots, r_i$$

初等因子的次数对应Jordan块的阶次，λ_{ij}对应主对角线元素。

4. 以这些Jordan块构成的Jordan矩阵

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} J_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{n1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{nr_n} \end{pmatrix} \in C^{\sum_{i=1}^{n} r_i \times \sum_{i=1}^{n} r_i}$$

即为方阵A的Jordan标准形

2. 行列式因子法

行列式因子的定义

定义1.9 设 $A(\lambda) \in C_r^{m \times n}$ 对于$k \in Z$ $(1 \le k \le r)$ ，称$A(\lambda)$ 的一切k阶非零子式的最大公因式$D_k(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的k阶行列式因子

- $D_k(\lambda)$ 是一个变数λ的多项式；
- 规定 $D_k(\lambda)$ 的最高次项的系数是1（降幂排列是首一的）
- 规定 $D_0(\lambda) = 1$
  $D_k(\lambda) = 0 \quad (r < k \le \min(m, n))$

行列式因子的性质：

$A(\lambda) \cong B(\lambda) \Longrightarrow$ $A(\lambda)$，$B(\lambda)$ 必有**相同的秩**及相同的各级行列式因子；

行列式因子与不变因子间的关系

定理1.11　设$A(\lambda)\in C_r^{m\times n}$，则$A(\lambda)$的$k$阶行列式因子$D_k(\lambda)$为

$$D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda)\qquad(k=1,\cdots r)$$

其中$d_i(\lambda)$，$(i=1,2,\cdots,r)$是$A(\lambda)$的不变因子

- 不变因子的等价定义

设 $A(\lambda)\in C_r^{m\times n}$，$D_k(\lambda)$为$A(\lambda)$的$k$阶行列式因子，则称

$$d_k(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)} & (1\le k\le r)\\ 0 & (r<k\le\min(m,n))\end{cases}$$

为$A(\lambda)$的不变因子

行列式因子法求方阵Jordan标准型的步骤

行列式因子法求方阵的Jordan标准形的步骤

1. 求特征矩阵$(\lambda I-A)$的n个行列式因子

$$D_k(\lambda),\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

2. 根据

$$d_k(\lambda)=\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}\qquad(1\le k\le n)$$

求出$A(\lambda)$的不变因子　$d_i(\lambda)$，$(i=1,2,\cdots,n)$

3. 求出$A(\lambda)$的初等因子，并据此写出A的Jordan标准形

性质

1. 任何一个方阵都与Jordan标准型矩阵相似。
2. Jordan块的幂：

定理1.12：r_i阶Jordan块

$$J=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i\end{bmatrix}\in F^{r_i\times r_i}$$

的k次幂为

$$J^k=\begin{bmatrix}\lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & C_k^2\lambda_i^{k-2} & \cdots & C_k^{r_i-1}\lambda_i^{k-r_i+1}\\ & \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{r_i-2}\lambda_i^{k-r_i+2}\\ & & \lambda_i^k & \ddots & \vdots\\ & & & \ddots & C_k^1\lambda_i^{k-1}\\ & & & & \lambda_i^k\end{bmatrix}$$

3. Jordan矩阵的幂：

- Jordan矩阵的幂：

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

则

$$J^k = \begin{bmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^k \end{bmatrix}$$

如何求相似变换矩阵

广义特征向量

对于矩阵A，前面已经解决了Jordan标准型的问题，下面看是什么的样的可逆矩阵P，可以使A相似于Jordan标准型。先看一个简单的例子：假设

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad 令P = (p_1, p_2, p_3)$$

则

$$A(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

则 $\begin{cases} Ap_1 = \lambda_1 p_1 \\ Ap_2 = \lambda_2 p_2 \\ Ap_3 = \lambda_2 p_3 + p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda_1 I - A) p_1 = 0 \\ (\lambda_2 I - A) p_2 = 0 \\ (\lambda_2 I - A) p_3 = -p_2 \end{cases}$

显然，p_1是A的属于特征值λ_1的特征向量，p_2是A的属于特征值λ_2的特征向量，这两个可通过求解齐次线性方程组获得。p_3为非齐次线性方程组的解，称p_3为A的属于特征值λ_2的广义特征向量。

注：可逆矩阵P的列向量本质上就是(广义)特征向量，实际就是求解齐次或非齐次线性方程组。

参见：https://zhuanlan.zhihu.com/p/386898488