

## 特征值估计

### 特征值模的上界

**定理：** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$  的特征值为  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ，则

$$|\lambda_l| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (= \|A\|_1)$$

$$|\lambda_l| \leq \max_{1 \leq l \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{lj}| \quad (= \|A\|_\infty) \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{l=1}^n |\lambda_l|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \quad (\text{Schur})$$

### 特征值虚部绝对值的上界

**定理** 设  $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ ，令

$$M = \max_{1 \leq r, s \leq n} \frac{1}{2} |a_{rs} - a_{sr}|.$$

若  $\lambda$  表示  $A$  的任一特征值，则  $\lambda$  的虚部  $\text{Im}(\lambda)$  满足

不等式 
$$|\text{Im}(\lambda)| \leq M \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$$

实际上， $M$  是矩阵与矩阵转置相减对应元素取模  $\times \frac{1}{2}$  的最大值。

当  $A$  对称时， $M=0$ ，则  $|\text{Im}(\lambda)| \leq 0 \rightarrow |\text{Im}(\lambda)| = 0$ ，可以通过此定理证明对称矩阵的特征值都是实数。

### 特征值实部与虚部的上界：

• 引理：

**引理 1** 设  $B \in C^{n \times n}$ ，列向量  $y \in C^n$  满足  $\|y\|_2 = 1$ ，

则  $|y^H B y| \leq \|B\|_{m_{\infty}}$ 。

• 定理：

**定理** 设  $A \in C^{n \times n}$ ，则  $A$  的任一特征值  $\lambda$  满足

$$|\lambda| \leq \|A\|_{m_{\infty}},$$

$$|\text{Re}(\lambda)| \leq \frac{1}{2} \|A + A^H\|_{m_{\infty}}, |\text{Im}(\lambda)| \leq \frac{1}{2} \|A - A^H\|_{m_{\infty}}$$

### 特征值的包含区域

#### 行盖尔圆

**定义** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ ，称由不等式

$$|z - a_{ii}| \leq R_i$$

在复平面上确定的区域为矩阵  $A$  的第  $i$  个

**Gerschgorin** 圆（盖尔圆），并用记号  $G_i$  来表示。其中  $R_i = R_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$  称为盖尔圆  $G_i$  的半径  $(i = 1, \dots, n)$ 。

$R_i$  是第  $i$  行除对角线元素  $a_{ii}$  外元素的模值之和。

## 圆盘定理1

**定理（圆盘定理1）** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ ，则  $A$  的一切特征值都在它的  $n$  个盖尔圆的并集之内，即  $A$  的任一特征值  $\lambda$  满足

$$\lambda \in S = \bigcup_{i=1}^n S_i.$$

## 圆盘定理2

**定理（圆盘定理2）** 在矩阵  $A$  所

有盖尔圆组成的任一连通部分中，含有  $A$  的特征值的个数等于该连通部分的盖尔圆的个数。

由圆盘定理 2 可知，由一个盖尔圆组成的连通部分有且仅有一个特征值，由两个盖尔圆组成的连通部分有且仅有两个特征值，但可能这两个特征值都落在一个圆盘中，而另一个圆盘中没有特征值。

## 推论

1. 设  $n$  阶矩阵  $A$  的  $n$  个盖尔圆两两互不相交（都是孤立的），则  $A$  相似于对角矩阵（说明有  $n$  个不一样的特征值，特征值都是单根）
2. 设  $n$  阶实矩阵  $A$  的  $n$  个盖尔圆两两互不相交，则  $A$  的特征值都是实数。
3. 判断行列式是否为 0（是否可逆）：

**例** 如果矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，按行（列）严格对角占优，则  $\det A \neq 0$ 。

按行严格对角占优：矩阵每个主对角元素的模都大于与它同行的其他元素的模的和。

## 列盖尔圆

**定义** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ ，则称圆盘

$$S'_j = \{z \mid |z - a_{jj}| \leq R'_j, z \in C\}$$

为矩阵  $A$  在复平面上的第  $j$  个列盖尔圆（ $j = 1, 2, \dots, n$ ），其中

$$R'_j = R'_j(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \quad (j = 1, 2, \dots, n) \text{ 称为 } S'_j \text{ 的半径.}$$

因为矩阵  $A$  与  $A^T$  有相同的特征值，所以若对矩阵  $A^T$  应用圆盘定理 1 与圆盘定理 2，则得到关于矩阵  $A$  的列的圆盘定理。

**推论 3** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ ，则  $A$  的一切特征值都在它的  $n$  个列盖尔圆的并集之内，即  $A$  的任一特征值  $\lambda$  满足

$$\lambda \in G = \bigcup_{j=1}^n G_j.$$

**推论 4** 设矩阵  $A$  的  $n$  个列盖尔圆中有  $k$  个互相连通且与其余  $n - k$  个不相交，则这个连通区域中恰有  $A$  的  $k$  个特征值（当  $A$  的主对角线上有相同元素时，则按重复次数计算，有特征值相同时也按重复次数计算）。

## 特征值的满意估计

### 行盖尔圆+列盖尔圆

**推论 5** 设  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ ，则  $A$  的一切特征值都在平面区域

$$T = \left( \bigcup_{i=1}^n S_i \right) \cap \left( \bigcup_{j=1}^n G_j \right)$$

之中。

取行盖尔圆的并集与列盖尔圆的并集的交一般可以得到比较满意的特征值估计。

## 盖尔圆的应用：矩阵特征值的隔离

设  $A = (a_{i,j})_{n \times n}$ , 构造对角矩阵  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , 其中  $d_1, d_2, \dots, d_n$  都是正数, 由于  $B = DAD^{-1} = (a_{i,j} \frac{d_i}{d_j})_{n \times n}$  (通过  $\frac{d_i}{d_j}$  可以控制元素大小), 所以B与A的特征值相同, 且对角线上元素相等。