多项式矩阵与矩阵多项式

矩阵多项式

对
$$A\in F^{n\times n}$$
 , 定义
$$f(A)=a_sA^s+a_{s-1}A^{s-1}+\cdots+a_1A+a_0I$$
 为矩阵A的多项式

多项式矩阵 (²矩阵)

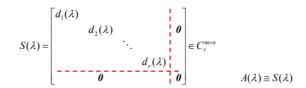
定义

 $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda)) \in C^{m imes n}$ 即元素都是变数λ的复系数多项式。 $((\lambda I - A)$ 就是一个多项式矩阵。)

性质、不变因子、初等因子

1. Smith标准型

定理1.10 秩为r的多项式矩阵 $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda)) \in C_r^{m \times n}$ 可通过有限次初 等变换化为



- 其中 $d_i(\lambda)$, $(i=1,2,\cdots,r)$ 都是**首一多项式**,且 $d_{\scriptscriptstyle i}(\lambda)\big|d_{\scriptscriptstyle i+1}(\lambda) \qquad (i=1,\cdots,r-1) \qquad \textbf{多项式}\ d_{\scriptscriptstyle i}(\lambda)\,$ 整除 $d_{\scriptscriptstyle i+1}(\lambda)$
- $S(\lambda)$ 由 $A(\lambda)$ 唯一确定,称之为 $A(\lambda)$ 的Smith标准形
- 不变因子

称 $A(\lambda)$ 的Smith标准形中非零的对角线元素

$$d_i(\lambda), \quad (i=1,2,\cdots,r)$$

为
$$A(\lambda)$$
的**不变因子**

为
$$A(\lambda)$$
的不变因子 规定: $d_i(\lambda) = 0$ $r < i \le n$

- 初等因子

将次数大于0的不变因子 $d_{i}(\lambda)$ 分解为**互不相同**的一次因式的幂的 乘积 (在复数域内,这样的分解是可能的)

$$\begin{split} &d_{_{l}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_{_{l1}})^{t_{l1}}(\lambda - \lambda_{_{l2}})^{t_{l2}}\cdots(\lambda - \lambda_{_{lr_{l}}})^{t_{l\eta}}\\ \hbox{称 }&(\lambda - \lambda_{_{ij}})^{t_{ij}}\qquad j = 1,\cdots,r_{_{i}}\; \hbox{为 }&A(\lambda)\;\hbox{的一个初等因子} \end{split}$$

求Smith标准型的原则:凑常数、找次数低的。

- 2. 多项式矩阵经过初等变换后, 其秩、不变因子、初等因子均不变。
- 3. 等价的多项式矩阵具有相同的Smith标准型。