广义逆与线性方程组

定义

对于非齐次线性方程组$Ax=b$，其中$A\in C^{m\times n}$给定，$b\in C^m$给定，$x\in C^n$待定，有以下几种可能：

- 1. 有解：即相容方程组，对应$rank(A)=rank(A,b)$，或者$AA^{(1)}b=b$。通解：$x=A^{(1)}b+(I-A^{(1)}A)y$
    - 1.1 有唯一解：A列满秩。解：$x=A^{(1)}b$
    - 1.2 不唯一解：A列不满秩，但不唯一解中**极小范数解**唯一，极小范数解：$\|x_0\|=\min_{Ax=b}\|x\|$，解：$x=A^{(1,4)}b$
- 2.无解：即不相容（矛盾）方程组，对应$rank(A)\neq rank(A,b)$，或者$AA^{(1)}b\neq b$
    - 2.1 存在近似的 **最小二乘解**，且不唯一：$x_0=\min_x\|Ax-b\|$，解：$x=A^{(1,3)}b$
    - 2.2 最小二乘解中存在唯一的 **极小范数最小二乘解**：$\|x_0\|=\min_{\min\|Ax-b\|}\|x\|$，解：$x=A^{+}b$

相容方程组求解

矩阵方程求解：

定理 设 $A\in C^{m\times n}, B\in C^{p\times q}, D\in C^{m\times q}$，则矩阵方程 ***AXB=D*** 相容 $\Leftrightarrow AA^{(1)}DB^{(1)}B=D$，其中 $A^{(1)}\in A\{1\}, B^{(1)}\in B\{1\}$. 当方程相容时，其通解为

$$X=A^{(1)}DB^{(1)}+Y-A^{(1)}AYBB^{(1)}$$

其中 $Y\in C^{n\times p}$ 任意.

解析：实际上矩阵方程$AXB=D$可以写成线性方程组$Ax=b$的形式。
最后通解中$X_1=A^{(1)}DB^{(1)}$为特解，$AX_1B=D$；$X_2=Y-A^{(1)}AYBB^{(1)}$为一般解，$AX_2B=0$。

- 推论：矩阵广义逆（Moore-Penrose）

推论 设 $A\in C^{m\times n}, A^{(1)}\in A\{1\}$. 则

$$A\{1\}=\left\{A^{(1)}+Z-A^{(1)}AZAA^{(1)}\,\middle|\,Z\in C^{n\times m}\right\}$$

线性方程组求解：

线性方程组$Ax=b$相容$\Leftrightarrow AA^{(1)}b=b$，且其通解为：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}+\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{y}$$

其中 $\mathbf{y}\in\mathbf{C}^n$ 任意.

注：

（1） $\left(I-A^{(1)}A\right)y\in N(A)$ 是 ***Ax=O*** 的通解.

（2） $A^{+}\in A\{1\}$，因此***Ax=b***相容时，通解为

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{+}\mathbf{b}+\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right)\mathbf{y}$$

（3）相容方程***Ax=b***有唯一解当且仅当***A***列满秩。

极小范数解

引理 相容方程组 $Ax=b$ 的极小范数解唯一，且这个唯一解在 $R(A^H)$中.

引理 集合 $A\{1,4\}$ 由矩阵方程

$$XA=A^{(1,4)}A$$

的所有解组成，其中 $A^{(1,4)}\in A\{1,4\}$

定理 设 $A\in C^{m\times n}$，$A^{(1,4)}\in A\{1,4\}$，则

$$A\{1,4\}=\{A^{(1,4)}+Z(I-AA^{(1,4)})\mid Z\in C^{n\times m}\}$$

定理 设方程组 $Ax=b$ 相容，则

$$x=A^{(1,4)}b$$

是极小范数解，其中 $A^{(1,4)}\in A\{1,4\}$．反之，设 $X\in C^{n\times m}$，若对所有 $b\in R(A)$, $x=Xb$ 是方程组 $Ax=b$ 的极小范数解，则 $X\in A\{1,4\}$.

矛盾方程组求解

最小二乘解

引理： 设 $A\in C^{m\times n}$，集合 $A\{1,3\}$ 由矩阵方程 $AX=AA^{(1,3)}$ 的所有解 X 组成，其中 $A^{(1,3)}\in A\{1,3\}$.

定理 设 $A\in C^{m\times n}, A^{(1,3)}\in A\{1,3\}$，则

$$A\{1,3\}=\{A^{(1,3)}+(I-A^{(1,3)}A)Z\mid Z\in C^{n\times m}\}$$

定理 设 $A\in C^{m\times n}, b\in C^{m}, A^{(1,3)}\in A\{1,3\}$, 则 $x=A^{(1,3)}b$ 是方程 $Ax=b$ 的最小二乘解. 反之，设 $X\in C^{n\times m}$，若对所有 $b\in C^m$,$x=Xb$ 都是方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解，则

$$X\in A\{1,3\}$$

推论 x 是方程 $Ax=b$ 的最小二乘解$\Leftrightarrow$ x 为 $A^HAx=A^Hb$ 的解.

极小范数最小二乘解

定理 设 $A\in C^{m\times n}$, $b\in C^m$, 则 $x=A^+b$是方程组 $Ax=b$ 的极小范数最小二乘解. 反之，设$X\in C^{n\times m}$，若对所有 $b\in C^m$，$x=Xb$ 是方程组 $Ax=b$ 的极小范数最小二乘解，则 $X=A^+$.