矩阵级数

定义

定义 设矩阵序列$\{A^{(k)}\}$，则无穷和

$A^{(0)}+A^{(1)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$ 称为矩阵级数，记为

$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$，即有

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = A^{(0)}+A^{(1)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$$

收敛的定义

定义 设 $S^{(N)}=\sum_{k=0}^{N} A^{(k)}$，称其为矩阵级数的部分和．如果矩阵序列$\{S^{(N)}\}$收敛，且有

$$\lim_{N\to\infty} S^{(N)} = S$$

则称矩阵级数$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$收敛，且和是$S$，记为

$S=\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$，不收敛的矩阵级数称为是发散的．

绝对收敛

定义 如果 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$中的$mn$个数项级数都是绝对收敛的，则称 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$是绝对收敛的．

性质

性质1 若 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$是绝对收敛的，则它也一定收敛，并且任意调换其项的顺序所得的级数还是收敛的，且其和不变．

性质2 $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 为绝对收敛的 $\Leftrightarrow$ 正项级数$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|$ 收敛, 其中$\|A\|$为任意一种矩阵范数。

性质3 如果 $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 是收敛（或绝对收敛）的，那么 $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{Q}$ 也是收敛（或绝对收敛）的，并且有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}\right)\boldsymbol{Q}$$

性质4 设 $C^{n\times n}$ 中的两个矩阵级数

$$S_1: \ \boldsymbol{A}^{(0)} + \boldsymbol{A}^{(1)} + \cdots + \boldsymbol{A}^{(k)} + \cdots$$
$$S_2: \ \boldsymbol{B}^{(0)} + \boldsymbol{B}^{(1)} + \cdots + \boldsymbol{B}^{(k)} + \cdots$$

都绝对收敛，其和分别为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$． 则级数 S_1 与级数 S_2 按项相乘所得的矩阵级数

$$\begin{aligned} S_3: \ & \boldsymbol{A}^{(0)}\boldsymbol{B}^{(0)} + \left(\boldsymbol{A}^{(0)}\boldsymbol{B}^{(1)} + \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{B}^{(0)}\right) + \\ & + \left(\boldsymbol{A}^{(0)}\boldsymbol{B}^{(2)} + \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{B}^{(1)} + \boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{B}^{(0)}\right) + \cdots \\ & + \left(\boldsymbol{A}^{(0)}\boldsymbol{B}^{(k)} + \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{B}^{(k-1)} + \cdots + \boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{B}^{(0)}\right) + \cdots \\ & = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} \boldsymbol{A}^{(i)}\boldsymbol{B}^{(k-i)}\right) \end{aligned}$$

绝对收敛，且和为 $\boldsymbol{AB}$.