最小多项式

定义

- 定义1.11 方阵的最小多项式
  设$A \in C^{n\times n}$，在A的零化多项式中，次数最低的首一多项式称为A的最小多项式，记为$m_A(\lambda)$

性质

1. **定理1.14** 设$A \in C^{n\times n}$，$\forall f(\lambda)$且$f(A)=\mathbf{0}$，则$m_A(\lambda) | f(\lambda)$成立，且$m_A(\lambda)$是唯一的
2. **定理1.15** 设$A \in C^{n\times n}$，$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)$，又设$D_{n-1}$是$\lambda I-A$的n-1阶行列式因子，则有
   $$m_A(\lambda)=\frac{\det(\lambda I-A)}{D_{n-1}(\lambda)}=\frac{\varphi(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}$$
   $m_A(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}=d_n$
3. 相似矩阵有相同的最小多项式。矩阵相似
4. 矩阵A的特征根必定是矩阵A的最小多项式的根，A的最小多项式的根也必定是A的特征根。
   设$A \in C^{n\times n}$的所有不同的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t \in C$，则其特征多项式可写为：
   $$\det(\lambda I-A)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{n_t}$$
   那么A的最小多项式应该具有如下形式：
   $$m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{m_t} \quad m_i \le n_i \quad i=1,\cdots,t$$
5. 设$A \in C^{n\times n}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t \in C$是A的所有互不相同的特征值，则
   $$m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{m_t}$$
   其中m_i是A的Jordan标准形中含λ_i的Jordan块的最高阶数

   这一定理表明：矩阵A的最小多项式应是A的特征多项式的因式。又因为最小多项式也是零化多项式，由定理1.2知，它应包含矩阵A的所有互不相同的特征值。因此，求A的最小多项式可采用试探法，即先求出A的特征多项式，然后再找出特征多项式中包含A的所有互不相同特征值的因式，最后验证这些因式是否是A的零化多项式。