矩阵谱分解

定义

单纯矩阵可以进行谱分解

> **定理**：设 $A\in C^{n\times n}$ 的k个相异的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_k$，
> 则A为单纯矩阵的充要条件是存在唯一的一组幂等
> 矩阵 $E_i\in C^{n\times n}, i=1,2,\cdots,\mathrm{k}$ 使
> (1) $E_iE_j=0(i\neq j)$ (2) $\sum_{i=1}^{k}E_i=I$
> (3) $A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iE_i$;
>
> 此处 $\lambda_i(1\le i\le k)$ 称为A的谱值，$E_i\in C^{n\times n}, i=1,2,\cdots,\mathrm{k}$称为A谱阵，$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iE_i$ 称为A的谱分解式。

性质

> 推论：设A的谱阵为 $E_i\in C^{n\times n}, i=1,2,\cdots,\mathrm{k}$
> 1） $E_i=\frac{1}{\varphi_i(\lambda_i)}\varphi_i(A)\quad i=1,\cdots,k$ 其中$\varphi_i(\lambda)=\prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{k}(\lambda-\lambda_l)$
> 2）若 $f(\lambda)$ 为任意多项式，则
> $$f(A)=f(\lambda_1)E_1+f(\lambda_2)E_2\cdots+f(\lambda_k)E_k$$
> 特别的$A^m=(\sum_{i=1}^{k}\lambda_iE_i)^m=\lambda_1^mE_1+\lambda_2^mE_2\cdots+\lambda_k^mE_k$

分解方法:

方法1 (常用)

谱分解要求矩阵为单纯矩阵，则一定可以相似对角化，要进行谱分解前要首先完成相似对角化。

1. 找矩阵的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_t$，其中，特征值分别为$n_1,n_2,\ldots,n_t$重，$n_1+n_2+\ldots+n_t=n$。
2. 求特征值对应的特征向量：
   $\lambda_1\rightarrow\xi_{1,1},\ldots,\xi_{1,n_1}$
   $\lambda_2\rightarrow\xi_{2,1},\ldots,\xi_{2,n_2}$
   $\ldots$
   $\lambda_t\rightarrow\xi_{t,1},\ldots,\xi_{t,n_t}$
3. 把这些特征向量按列排布：$P=(p_1,p_2,\ldots,p_t)$，其中，$p_i=(\xi_{i,1},\ldots,\xi_{i,n_i})$
4. 求出$Q=P^{-1}=(q_1,q_2,\ldots,q_t)^T$ （按行划分）
5. 求$E_i=p_i\ q_i$
6. 得到谱分解表达式：$A=\sum_{i=1}^{t}\lambda_iE_i$

方法2

按照性质求$E_i=\frac{1}{\phi_i(\lambda_i)}\phi_i(A)$

对于正规矩阵

若A是正规矩阵，则一定酉相似与对角矩阵，即存在酉矩阵P使得：正规矩阵

$$P^H AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

设 $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$

则有

$$A = P\Lambda P^H = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1^H \\ \boldsymbol{p}_2^H \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_n^H \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_1^H) + \lambda_2(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_2^H) + \cdots + \lambda_n(\boldsymbol{p}_n\boldsymbol{p}_n^H)$$

性质

定理：设 $A \in C^{n\times n}$ 的k个相异的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_k$，则A为正规矩阵的充要条件是存在唯一的一组幂等厄米特矩阵 $E_i \in C^{n\times n}, i = 1, 2, \cdots, \mathrm{k}$ 使

(1) $E_i E_j = 0 (i \neq j)$ (2) $\sum_{i=1}^{k} E_i = I$

(3) $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i$;

特有求解方法:

例求正规矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的谱分解

由矩阵A的特征多项式 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^3 (\lambda + 3)$

得A的特征值 $\lambda_1 = 1$(三重)$, \lambda_2 = -3$

对于 $\lambda_1 = 1$，相应的线性无关的特征向量为

$$x_1 = (1,1,0,0)^T, x_2 = (1,0,1,0)^T, x_3 = (-1,0,0,1)^T$$

对于$\lambda_2 = -3$，相应的特征向量为 $x_4 = (-1,1,1,-1)^T$

将x_1, x_2, x_3标准正交化得：

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)^T, \alpha_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)^T, \alpha_3 = -\left(\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}}\right)^T$$

将x_4标准化 $\alpha_4 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T$

记 $U_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $U_2 = (\alpha_4)$

$$P_1 = U_1 U_1^H,\ P_2 = U_2 U_2^H$$

则 $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = P_1 - 3P_2$