矩阵的秩与初等变换

矩阵的秩

定义

若在$m \times n$阶矩阵A中，有一个r阶子式不为0，而所有的r+1阶子式（若存在的话）都为0，则称r为矩阵A的秩，记为$R(A) = r$

性质

① $R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$；

② $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) - n \leqslant R(\boldsymbol{AB})$。

3. $R(A_1 + A_2) \leq R(A_1) + R(A_2)$
4. 初等变换不改变矩阵的秩，因此

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶与 n 阶可逆矩阵，则

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{PA}) = R(\boldsymbol{AQ}) = R(\boldsymbol{PAQ})$$

5. 若矩阵是方阵，当其可对角化时，方阵的秩等于非零特征值个数；当其不可对角化时，方阵的秩大于等于非零特征值个数。
6. $R(A^H A) = R(AA^H) = R(A)$
7. $R(A^T) = R(A)$

初等变换

A做初等行变换等价于左乘初等矩阵：EA；A做初等列变换等价于右乘初等矩阵：AE。

1. 互换i,j行（列）,对应初等矩阵E：

$$\boldsymbol{E}(i,j) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & \cdots & & 0 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

2. 倍乘：

$$\boldsymbol{E}(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & k & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

3. 倍加（第j行（i列）加到i行（j列））：

$$\boldsymbol{E}(i,j(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$