三角分解

定义：

1. 若**方阵**$A=LU$，其中L为下三角矩阵，U为上三角矩阵，则称A可以作三角分解（LU或LR分解）。若$A=LDU$,其中，L为单位下三角矩阵，U为单位上三角矩阵，D为对角矩阵，则称A可以作LDU分解。

三角分解的充要条件

$\mathbf{A}=(a_{ij})\in F^{n\times n}$，$rank(\mathbf{A})=k(k\leq n)$，如果 $\mathbf{A}$ 的顺序主子式 $\Delta_j\neq 0$ $(j=1,2,\cdots,k)$，则 $\mathbf{A}$ 有LU分解。

性质

1. 一个矩阵的LU分解不唯一
2. n阶矩阵A可唯一分解为$A=LDU$的充要条件是A的顺序主子式$\triangle_k\neq 0,k=1,2,\ldots,n-1$。其中，L为单位下三角矩阵，U为单位上三角矩阵，$D=diag(d_1,d_2,\ldots,d_n)$为对角矩阵，这里$d_i=\frac{\triangle_i}{\triangle_{i-1}},\triangle_0=1$。

分解方法

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

步骤1：设$A^{(0)}=A$，其元素$a_{ij}^{(0)}=a_{ij}$，若A的1阶顺序主子式$\Delta_1=a_{11}^{(0)}\neq 0$，令$c_{i1}=a_{i1}^{(0)}/a_{11}^{(0)}$, i=2, …, n, 构造矩阵

$L_1=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ c_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & & & 1 \end{pmatrix}$，则 $L_1^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -c_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -c_{n1} & & & 1 \end{pmatrix}$

计算$A^{(1)}=L_1^{-1}A^{(0)}$, 其第一列主元素下的元素全为零，而$A^{(0)}=L_1A^{(1)}$；

其中 $A^{(1)}=\begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \cdots & a_{1n}^0 \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nn}^1 \end{pmatrix}$

步骤2. 若 $A^{(1)}$ 的2阶顺序主子式$\Delta_2=a_{11}^{(0)}a_{22}^{(1)}\neq 0$，令$c_{i2}=a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$, i=3, 4, …, n, 构造矩阵$L_2$,

$L_2=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & c_{32} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & c_{n2} & & & 1 \end{pmatrix}$，则 $L_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -c_{32} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & -c_{n2} & & & 1 \end{pmatrix}$

计算$A^{(2)}=L_2^{-1}A^{(1)}$, 其前两列主元以下的元素全为零；
重复上述过程，在n−1步后得到的$A^{(n-1)}$为上三角阵。

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

计算 $L = L_1 L_2 \cdots L_{n-1}$

$$L^{-1} = L_{n-1}^{-1} L_{n-2}^{-1} \cdots L_1^{-1}$$

$$L^{-1}A = L_{n-1}^{-1} L_{n-2}^{-1} \cdots L_1^{-1} A = A^{(n-1)} = U$$

$$A = LU$$

应用

线性方程组的求解:

若矩阵A存在三角分解A=LU，则求解线性方程组即可转化为消元过程和回代过程

$$Ax = b \qquad LUx = b$$

消元过程 $Ly = b$

回代过程 $Ux = y$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

实正定对称矩阵的三角分解（Cholesky分解）

$A = GG^T$,其中，A是实正定矩阵，G是下三角矩阵。

(正定矩阵的顺序主子式都大于0)

若矩阵A是实对称正定矩阵时，有唯一的LDU分解，即

$$A = LDU = L \cdot diag(d_1, d_2, ..., d_n) \cdot U$$

这里 $d_i > 0, i = 1, 2, ..., n$,令 $\tilde{D} = diag(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, ..., \sqrt{d_n})$,则 $A = L\tilde{D}^2U$，根据 $A = A^T$ 得到

$$A = L\tilde{D}^2U = U^T\tilde{D}^2L^T$$

再根据分解的唯一性，可知 $L = U^T, U = L^T$,因而，有

$$A = L\tilde{D}^2L^T = (L\tilde{D}) \cdot (L\tilde{D})^T = GG^T$$

这里, $G = L\tilde{D}$ 是下三角矩阵。这种分解方式叫做实对称正定矩阵的Cholesky分解（或平方根分解、对称三角分解）。