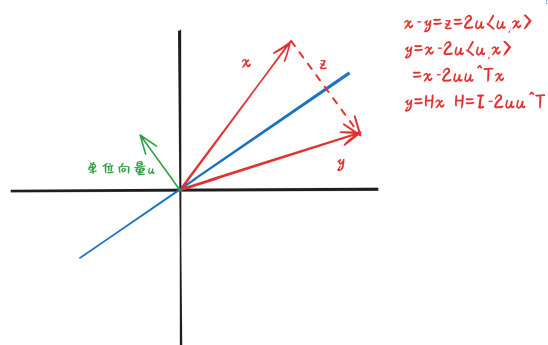


Householder矩阵（初等反射矩阵）与Householder变换

定义

设单位向量 $u \in R^n$ ，称 $H = I - 2uu^T$ 为Householder矩阵，即初等反射矩阵，由Householder矩阵确定的变换成为Householder变换。



性质

1. Householder矩阵是正交矩阵，且 $H^T = H^{-1} = H$ ， $H^2 = I$ （对合矩阵）。[正交矩阵与酉矩阵](#)
2. $\det H = -1$ 。
3. 任意给定非零列向量 $x \in R^n (n > 1)$ 及单位列向量 $z \in R^n$ ，则存在Householder矩阵 H ，使得 $Hx = |x|z$

证 当 $x = |x|z$ 时，取单位列向量 u 满足

$u^T x = 0$ ，则有

$$Hx = (I - 2uu^T)x = x - 2u(u^T x) = x = |x|z$$

当 $x \neq |x|z$ 时，取 $u = \frac{x - |x|z}{|x - |x|z|}$

4. 任何实非奇异矩阵 $A \in R^{n \times n}$ ，可以通过左乘有限个Householder矩阵化为上三角矩阵。[QR分解](#)
5. 对于Householder矩阵 H_i ，

$\begin{pmatrix} I_{n-i} & \\ & H_i \end{pmatrix}$ 是Householder矩阵。

6. Givens矩阵是两个Householder矩阵的乘积。[Givens矩阵（初等旋转矩阵）与Givens变换](#)