矩阵极限

定义：

定义 设已知矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$，其中 $A^{(k)}=(a_{ij}^{k})_{m\times n}\in C^{m\times n}$，当 $k\to\infty$，$a_{ij}^{k}\to a_{ij}$时，称$\{A^{(k)}\}$收敛，并称矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$为$\{A^{(k)}\}$的极限，或称$\{A^{(k)}\}$收敛于A，记为

$$\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=A \quad 或 \quad A^{(k)}\to A$$

不收敛的矩阵序列称为发散。

矩阵数列收敛的充要条件：

定理 矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 收敛于A的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|=0$$

其中 $\left\|A^{(k)}-A\right\|$ 为任意一种矩阵范数。

- 矩阵数列收敛的必要不充分条件：

  推论：设 $\{A^{(k)}:A^{(k)}\in C^{m\times n},k=0,1,\cdots,\}$，$\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=A$，则有 $\lim_{k\to\infty}\left\|A^{(k)}\right\|=\|A\|$ 成立，反之不成立。

回顾一些常用的极限：

1. $\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$
2. $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$
3. $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$
4. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!})=e$
5. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$
6. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})$发散

- 等差数列求和公式：$S_n=n\times a_1+\frac{n(n-1)d}{2}=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$
- 等比数列求和公式：$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，$(q\neq 1)$

矩阵序列极限运算性质：

（1）收敛矩阵序列的极限是唯一的。

（2）设 $\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=A,\quad \lim_{k\to\infty}B^{(k)}=B$

则 $\lim_{k\to\infty}aA^{(k)}+bB^{(k)}=aA+bB,\quad a,b\in C$

（3）设 $\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=A,\quad \lim_{k\to\infty}B^{(k)}=B$，其中 $A^{(k)}\in C^{m\times l},B^{(k)}\in C^{l\times n}$

那么 $\lim_{k\to\infty}A^{(k)}B^{(k)}=AB$

（4）设 $\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=A$，那么 $\lim_{k\to\infty}PA^{(k)}Q=PAQ$

其中 $A^{(k)}\in C^{m\times n},P\in C^{m\times m},Q\in C^{n\times n}$

（5）设 $\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=A$，且 $\{A^{(k)}\}$ ，A均可逆，则 $\{(A^{(k)})^{-1}\}$

也收敛，且 $\lim_{k\to\infty}(A^{(k)})^{-1}=A^{-1}$

注意：收敛矩阵序列可逆，但是其极限矩阵可能不可逆。

6. $\lim_{k\to\infty}A^k=0$的充要条件是$\rho(A)<1$。矩阵的谱半径