奇异值分解

引理

1. 设$A \in C^{m\times n}$，则$A=0 \Leftrightarrow A^HA=0$
2. $R(A^HA)=R(AA^H)=R(A)$
3. 设$A \in C_r^{m\times n}\ (r>0)$，则$A^HA$与$AA^H$都是半正定Hermite矩阵，其特征值都是非负实数，且非零特征值相同（这里的相同指的是非零特征值相同且对应的代数重数也相同）。对称矩阵与Hermite矩阵

定义

奇异值

定义 设$A\in C_r^{m\times n}(r>0)$,$A^HA$的特征值

为 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_r>\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$

则称 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 为A的奇异值.

奇异值分解

定理 设 $A\in C_r^{m\times n}(r>0)$, 则存在$m$阶酉矩阵$U$和$n$阶酉矩阵$V$，使得

$$U^HAV=\begin{pmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

其中 $\Sigma=diag(\sigma_1,\sigma_2,\cdots\sigma_r)$, 而 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为A的全部非零奇异值.

即$A=U\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^H$

例： 基于前述的定理条件，在奇异值分解中，设U和V的列向量分别为$u_1,u_2,\cdots,u_m$ 和$v_1,v_2,\cdots,v_n$，则有

$$N(A)=L(v_{r+1},v_{r+2},\cdots,v_n)$$
$$R(A)=L(u_1,u_2,\cdots,u_r)$$
$$A=\sigma_1u_1v_1^H+\sigma_2u_2v_2^H+\cdots+\sigma_ru_rv_r^H$$

分解步骤

△ 求复矩阵$A_{m\times n}$的奇异值分解，可按下述步骤进行.

(1) 求出A^HA的全部特征值及奇异值，由所有非零奇异值(包括重复的)$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$得到正线对角矩阵$\Sigma$，进而得到奇异值矩阵$S$.

(2) 对A^HA的每一个不同的特征根，求出与之相应的特征向量的极大无关组，经正交化、单位化得A^HA相应于该特征根的标准正交特征向量组.将其中与非零特征根相应的那些小组(作为一些列向量)顺序排成矩阵V_1，其次序应与Σ中相关奇异值在对角线上的排列顺序相一致.再以A^HA相应于$\boxed{\text{零特征根}}$的标准正交特征向量(极大无关)组排成矩阵V_2.于是可得酉矩阵$V=(V_1,V_2)$.

如果有的话.

(3) 计算$U_1=AV_1\Sigma^{-1}$.

(4) 求出AA^H相应于零特征根的一个标准正交特征向量(极大无关)组，由它们排成$m\times(m-r)$的部分酉阵U_2，可得$U=(U_1,U_2)$.

综上，便得到奇异值分解$A=USV^H$.

对U_2的求法，亦可按如下方法：

(5) 在U_1的r个列基础上，再扩充$m-r$个列使总共m个列成为一个标准正交向量组，由后扩充进来的$m-r$个列排成的矩阵就是U_2.

说明：由于A^HA是Hermite矩阵，因此其一定有n个线性无关的特征向量、几何重数也肯定等于代数重数。

性质：

1. A的奇异值分解$A=U\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^H$中，U的列向量是$AA^H$的特征向量，V的列向量是$A^HA$的特征向量。