向量范数

定义

定义 1 如果V是数域K上的线性空间，且对于V的任意一向量x，对应一个实值函数，

它满足以下三个条件：

（1）非负性：当$x \neq 0$时，$\|x\| > 0$；当$x = 0$时，$\|x\| = 0$；

（2）齐次性：$\|ax\| = |a|\|x\|, a \in K, x \in V$

（3）三角不等式：$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|, x, y \in V$.

则称$\|x\|$为V上向量x的范数，简称向量范数 .

常用范数：

对于复向量$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in C^n$

1. l_1范数：$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$
2. l_2范数：$\|x\|_2 = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots |\xi_n|^2}$
3. l_∞范数：$\|x\|_\infty = \max_i |\xi_i|$
4. l_p范数：$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{1/p}, 1 \le p \le +\infty$
   前三种范数可以看作第四种范数对应的p取值。之后是一些不常用的范数：
5. 加权范数\椭圆范数：

   例 设A是任意一个n阶对称正定矩阵,列向量$x \in R^n$,则函数 $\|x\|_A = (x^T A x)^{1/2}$ 是一种向量范数，称为加权范数或椭圆范数.

性质：

1. 等价性：

   定义 设 $\|x\|_\alpha$和$\|x\|_\beta$为有限维线性空间V的任意两种向量范数，若存在两个与向量无关的正常数 c_1和 c_2 使下面不等式成立

   $$c_1\|x\|_\beta \le \|x\|_\alpha \le c_2\|x\|_\beta$$

   则称 $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$ 是等价的。
2. 有限维空间中任何两种范数都是等价的。

证明中常见不等式

1. 柯西-施瓦兹不等式：$(\sum x_i y_i)^2 \le \sum x_i^2 \sum y_i^2$,拓展为：$|(x, y)| \le \sqrt{(x, x)(y, y)}$
2. 引理-Young不等式：已知u,v是非负实数，p>1,q>1，且$1/p + 1/q = 1$，则$uv \le \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}u^q$
3. Hoider不等式：

   $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T, Y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T \in C^n$

   则

   $$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

   其中 $p > 1$， $q > 1$ 且$1/p + 1/q = 1$ 。

   证明见PPT

4. Minkowski不等式：

$\alpha=\left[a_1,a_2,\cdots,a_n\right]^T,\beta=\left[b_1,b_2,\cdots,b_n\right]^T\in C^n$

则$(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p)^{1/p}\le(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{1/p}+(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p)^{1/p}$

其中实数$p\ge 1$。