特征值与特征向量

定义：

- 设 $A \in C^{n\times n}$，如果 $\exists \lambda \in F$ 和 $\exists 0 \neq x \in F^n$，使得

$$Ax = \lambda x$$

成立，则称λ为A的特征值，称x为A的对应于特征值λ的特征向量

注意

1. 特征值的定义是针对于方阵的
2. . x是非零向量，但特征值λ 可以是0。
3. $\lambda = 0$时即$Ax = 0$，对应核空间。

特征矩阵

- 设 $A \in F^{n\times n}$，称

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

为A的特征矩阵。

特征多项式

特征矩阵的行列式$det(\lambda I - A)$ 成为A的特征多项式。

特征方程

- 设$A \in C^{n\times n}$，称方程

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

为A的特征方程（首一的一元n次方程）

- A的特征值的等价定义：A的特征方程在C上的根称为A的特征值

$\det(\lambda I - A) = 0 \Longrightarrow (\lambda I - A)x = 0$ 有非零解 $x \neq 0$

$\Longrightarrow Ax = \lambda x$

特征值的代数重数与几何重数

– 若 λ_i 是 $A\in C^{n\times n}$ 的r_i 重特征值，则称λ_i 的代数重数为 r_i

– 对应 λ_i 有s_i 个线性无关的特征向量，则称λ_i 的几何重数为 s_i

特征子空间

– $(\lambda I-A)x=0$的解空间称为A的属于特征值λ的特征子空间，记为V_λ 。特征子空间的维数

$$\dim V_\lambda = n-\mathrm{rank}(\lambda I-A)$$

称为A的特征值λ的几何重数

特征值与特征向量的求解

1. 求特征方程$det(\lambda I-A)=0$的n个根：$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$，即A的全部特征值。
2. 求解齐次线性方程组$(\lambda_i I-A)x=0$，其非零解向量即为A的对应特征值的特征向量。

由于第二步涉及求解齐次线性方程，由于矩阵$(\lambda_i I-A)$的行列式为0，因此不满秩，因此方程有非零解，且解不唯一。所以需要确定基础解系，寻找线性无关的特征向量，具体过程：

1. 对系数矩阵$(\lambda_i I-A)$进行初等行变换，化为阶梯行
2. 确定自由变量数量，也就是基础解系个数：$n-R(\lambda_i I-A)$
3. 可以对一个自由变量赋值1，其他自由变量赋值0，确定最后一个自由变量，共赋值$n-R(\lambda_i I-A)$次，得到$n-R(\lambda_i I-A)$个线性无关的特征向量。（怎么确定？把系数带进去解方程。）

性质

1. 特征值的几何重数不超过其代数重数：$1\le s_i\le r_i$ （几何重数：特征值对应特征向量构成的特征子空间，也就是方程组$(\lambda I-A)x=0$的维数）
2. **定理1.2** 设$A\in C^{n\times n}$ 的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ ，对应的特征向量为$x_1,x_2,\cdots,x_n$ ，又设$f(\lambda)$是一多项式，则$f(A)$ 的特征值为$f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$对应的特征向量仍为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ，即

   $Ax=\lambda x \Rightarrow f(A)x=f(\lambda)x$

   $f(A)=O \Rightarrow f(\lambda)=0$ （对A的任一特征值λ）
3. 属于不同特征值的特征向量必定线性无关。
4. 方阵的迹等于特征值的和，方阵的行列式等于特征值的乘积：矩阵的迹、行列式

   定理1.4 设n阶方阵$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

   (1)$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

   (2)$\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$
5. 0是A特征值的充要条件是$det(A)=0$.
6. A^T的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，而$A^H=(\bar{a}_{ji})\in C^{n\times n}$的特征值为$\bar{\lambda}_1$，$\bar{\lambda}_2$，$\cdots$，$\bar{\lambda}_n$
7. A与A^T的特征值相同。
8. 方阵满秩等价于方阵所有特征值均不为0.
9. 0是特征值等价于方阵不满秩。
10. AB和BA有相同的非零特征值。