## Jordan标准型 (宽泛意义的相似对角化)

## 定义

### Jordan块

- Jordan块 称形如  $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}_{r_i \times r_i} \in C^{r_i \times r_i}$  的矩阵为  $r_i$  阶 Jordan块

# Jordan矩阵

- Jordan矩阵

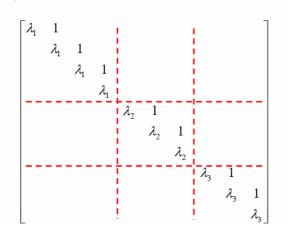
由若干个Jordan块构成的分块对角矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

为Jordan矩阵

- Jordan块与对角形的差别仅在其上对角线: 1: Jordan; 0: Diagonal
- 有的教科书上定义下对角线全为1的、其余元素为0的下三角阵为 Jordan块,它们之间是转置关系
- Jordan块本身就是一个分块数为1的Jordan矩阵
- 对角阵是一个特殊的Jordan矩阵: 其每个Jordan块都是1阶的

注意: Jordan矩阵上对角线并不全是1



### Jordan标准型

设  $A \in C^{n\times n}$ ,则A与一个Jordan矩阵J相似。即  $\exists P \in C^{n\times n}_n$  ,使得  $P^{-1}AP = J$  对此Jordan矩阵J,除其Jordan块的排列次序外,由A唯一确定,称J 为A的Jordan标准形

#### 注意

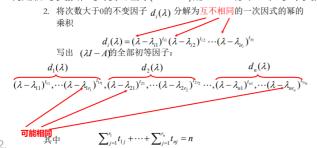
- 1. A的Jordan标准型的主对角线元素就是A的特征值。
- 2. 在Jordan标准型中,不同Jordan块的主对角线元素可能相同,因此不能通过Jordan块的阶数来判断此Jordan块对应的特征值的代数重数。

## 化Jordan标准型的方法

#### 1. 初等变换法

1. 利用初等变换,求特征矩阵 $(\lambda I - A)$ 的Smith标准型,求不变因子 $d_i(\lambda), (i = 1, 2, ..., n)$ 多项式矩阵与矩阵多项式

相同的λ不要合并。



写出每个初等因子  $(\lambda - \lambda_{ii})^{t_{ij}}$  对应的Jordan块

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{i} & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{i} \end{bmatrix} \in C^{t_{ij} \times t_{ij}} \ i = 1, \cdots, n \quad j = 1, \cdots, r_{ij}$$

初等因子的次数对应Jordan块的阶次, $\lambda_{ij}$ 对应主对角线元素。

以这些Jordan块构成的Jordan矩阵

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} J_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{n1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{nr_n} \end{pmatrix} \in C^{\sum_{i=1}^n r_i \times \sum_{i=1}^n r_i}$$

即为方阵A的Jordan标准形

## 2. 行列式因子法

#### 行列式因子的定义

定义1.9 设  $A(\lambda) \in C_r^{m \times n}$  对于 $k \in Z$   $(1 \le k \le r)$  ,称 $A(\lambda)$  的一切k阶非零子式的最大公因式 $D_k(\lambda)$  为  $A(\lambda)$  的k阶行列式因子

- $D_k(\lambda)$  是一个变数 $\lambda$  的多项式;
- 规定  $D_k(\lambda)$  的最高次项的系数是1(降幂排列是首一的)
- 规定  $D_0(\lambda) = 1$   $D_k(\lambda) = 0 \qquad (r < k \le \min(m, n))$

## 行列式因子的性质:

 $A(\lambda) \cong B(\lambda)$  **一**  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$  必有**相同的秩**及相同的各级行列式因子;

行列式因子与不变因子间的关系

定理1.11 设 $A(\lambda) \in C_r^{m \times n}$  , 则 $A(\lambda)$ 的k阶行列式因子 $D_k(\lambda)$  为

$$D_k(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda)$$
  $(k = 1, \dots r)$ 

其中  $d_i(\lambda)$ ,  $(i=1,2,\dots,r)$ 是  $A(\lambda)$  的不变因子

- 不变因子的等价定义

设  $A(\lambda) \in C_r^{m \times n}$  ,  $D_k(\lambda)$  为  $A(\lambda)$  的k阶行列式因子 , 则称

$$d_k(\lambda) = \begin{cases} \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)} & (1 \le k \le r) \\ 0 & (r < k \le \min(m, n)) \end{cases}$$

为 $A(\lambda)$ 的不变因子

#### 行列式因子法求方阵Jordan标准型的步骤

## 行列式因子法求方阵的Jordan标准形的步骤

1. 求特征矩阵  $(\lambda I - A)$  的n个行列式因子

$$D_k(\lambda), \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

2. 根据

$$d_k(\lambda) = \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)} \qquad (1 \le k \le n)$$

求出  $A(\lambda)$ 的不变因子

$$d_i(\lambda), \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

3. 求出  $A(\lambda)$  的初等因子,并据此写出A的Jordan标准形

### 性质

- 1. 任何一个方阵都与Jordan标准型矩阵相似。
- 2. Jordan块的幂:

定理1.12: r, 阶Jordan块

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} \in F^{r_i \times r_i}$$

的k次幂为

$$J^{k} = \begin{bmatrix} \lambda_{i}^{k} & C_{k}^{1} \lambda_{i}^{k-1} & C_{k}^{2} \lambda_{i}^{k-2} & \cdots & C_{k}^{r_{i}-1} \lambda_{i}^{k-r_{i}+1} \\ & \lambda_{i}^{k} & C_{k}^{1} \lambda_{i}^{k-1} & \cdots & C_{k}^{r_{i}-2} \lambda_{i}^{k-r_{i}+2} \\ & & \lambda_{i}^{k} & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & C_{k}^{1} \lambda_{i}^{k-1} \\ & & & & \lambda_{i}^{k} \end{bmatrix}$$

#### 3. Jordan矩阵的幂:

- Jordan矩阵的幂:

$$J = egin{bmatrix} J_1 & & & & & \ & J_2 & & & & \ & & \ddots & & & \ & & & J_s \end{bmatrix}$$

则

$$J^k = egin{bmatrix} J_1^k & & & & \ & J_2^k & & & \ & & \ddots & & \ & & & J_s^k \end{bmatrix}$$

# 如何求相似变换矩阵

#### 广义特征向量

对于矩阵A,前面已经解决了Jordan标准型的问题,下面看是什么的样的可逆矩阵P,可以使A相似于Jordan标准型。先看一个简单的例子:假设

矩阵
$$P$$
,可以使 $A$ 相似于 $J$ ordan标准型。先看一个简单的例子:假设 
$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \diamondsuit P = (p_1, p_2, p_3)$$
 则 
$$A(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
 知乎 @陌阳

显然, $p_1$ 是A的属于特征值 $\lambda_1$ 的特征向量, $p_2$ 是A的属于特征值 $\lambda_2$ 的特征向量,这两个可通过求解齐次线性方程组获得。 $p_3$ 为非齐次线性方程组的解,称 $p_3$ 为A的属于特征值 $\lambda_2$ 的广义特征向量。

注:可逆矩阵P的列向量本质上就是(广义)特征向量,实际就是求解系次或非齐次线性方程组。

参见: https://zhuanlan.zhihu.com/p/386898488