矩阵函数

定义

针对方阵而言

定义 设一元函数 $f(z)$ 能够展开为z 的幂级数 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \quad (|z|<r)$

其中 $r>0$ 表示该幂级数的收敛半径. 当n阶矩阵A的谱半径 $\rho(A)<r$ 时，将收敛的矩阵幂级数的和 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$ 称为矩阵函数. 记为 $f(A)$

即 $$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$$

常用的矩阵函数

根据数学分析的知识，可以得到当$|z|<+\infty$时有

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots$$

$$\sin z=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\cdots$$

$$\cos z=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}z^{2n}+\cdots$$

由前面的定理可知,对任意$A\in C^{n\times n}$,矩阵幂级数

$\rho(A)<R$

当 $|z|<1$ 时，有

$$(1+z)^{-1}=1-z+z^2+\cdots+(-1)^n z^n+\cdots$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n+\cdots$$

- 矩阵指数函数（任意矩阵）

$$e^A=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^n+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} \qquad (\forall A\in C^{n\times n})$$

- 矩阵三角函数（任意矩阵）

$$\sin A=A-\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{5!}A^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}A^{2n+1}+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1} \qquad (\forall A\in C^{n\times n})$$

$$\cos A=I-\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{4!}A^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}A^{2n}+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k} \qquad (\forall A\in C^{n\times n})$$

- 矩阵对数函数与矩阵分式函数（$\rho(A)<1$）

$$(I+A)^{-1}=I-A+A^2+\cdots+(-1)^nA^n+\cdots$$

$$\ln(I+A)=A-\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{3}A^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}A^n+\cdots$$

常用结论

$$(1)\quad e^{O_{n\times n}}=I_{n\times n}$$

$$(2)\quad e^Ae^{-A}=e^{-A}e^A=I$$

$$(3)\quad e^{iA}=\cos A+i\sin A,\quad i^2=1$$

$$(4)\quad \cos A=\frac{1}{2}(e^{jA}+e^{-jA})$$

$$(5)\quad \sin A=\frac{1}{2}(e^{jA}-e^{-jA})$$

$$(6)\quad \sin(-A)=-\sin A$$

$$(7)\quad \cos(-A)=\cos A$$

$$(8)\quad \sin^2A+\cos^2A=I$$

定理：设 $A,B\in C^{n\times n}$，那么当 $AB=BA$ 时，我们有

$$(1)\quad e^{A+B}=e^Ae^B=e^Be^A$$

$$(2)\quad \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin A$$

$$(3)\quad \sin 2A=2\sin A\cos A$$

$$(4)\quad \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$(5)\quad \cos 2A=\cos^2A-\sin^2A$$

矩阵函数的计算

思路

Mo Tu We Th Fr Sa Su

矩阵函数求解思路.

①看矩阵是否已是Jordan标准形. 若 $A=\begin{bmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{bmatrix}$. 则 $f(A)=\begin{bmatrix}f(J_1)&&&\\&f(J_2)&&\\&&\ddots&\\&&&f(J_s)\end{bmatrix}$.

若 J_i 是一阶Jordan块. $f(J_i)$ 就是一个数. $\Rightarrow f(\lambda_i)$.

若 J_i 是m阶Jordan块, $f(J_i)$ 是个m阶矩阵 $\Rightarrow\begin{bmatrix}f(\lambda_i)&\frac{1}{1!}f'(\lambda_i)&\cdots&\frac{1}{(m-1)!}f^{(m-1)}(\lambda_i)\\&\ddots&\ddots&\vdots\\&&f(\lambda_i)&\frac{1}{1!}f'(\lambda_i)\\&&&f(\lambda_i)\end{bmatrix}$.

②若不是Jordan标准形 可考虑化作Jordan标准型. $A=P\begin{bmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{bmatrix}P^{-1}$.

则 $f(A)=P\begin{pmatrix}f(J_1)&&&\\&f(J_2)&&\\&&\ddots&\\&&&f(J_s)\end{pmatrix}P^{-1}$

或者. 采用待定系数法.

③数项级数求和法需利用展开公式. 过于繁琐 不用.

1. 待定系数法（常用）

函数在矩阵谱上的值

定义：设 $A\in C^{n\times n}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$为 A 的 r 个互不相同的特征值，$m(\lambda)$为其最小多项式且有

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{d_1}(\lambda-\lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{d_r}$$

其中 $d_i\ge 1(i=1,2\cdots,r)$，$\sum_{i=1}^{r} d_i = m$

如果函数 $f(x)$ 具有足够高阶的导数并且下列 m 个值

$$f(\lambda_i),\ f'(\lambda_i),\cdots,\ f^{(d_i-1)}(\lambda_i),\quad i=1,2,\cdots,r$$

存在，则称函数 $f(x)$在矩阵 A 的谱上有定义。

定理：设函数 f(x) 与函数 g(x) 在矩阵 A 的谱上都有定义，那么 f(A)=g(A) 的充分必要条件是 f(x) 与 g(x) 在 A 的谱上的值完全相同。

函数 $f(x)$ 在矩阵 A 的谱上有定义，如果存在多项式 $g(x)$ 且满足

$$f^{(k)}(\lambda_i)=g^{(k)}(\lambda_i)$$

$$,i=1,2,\cdots,r;\quad k=1,2,\cdots,d_i-1$$

则定义矩阵函数为 $f(A)=g(A)$

因此，计算$f(A)$的一个思路就是寻找一个多项式$p(x)$，使得$p(A)=f(A)$

方法步骤

1. 求矩阵A的最小多项式$m(\lambda)$。
2. 设$f(\lambda)=m(\lambda)g(\lambda)+r(\lambda)$，其中，$r(\lambda)$是余式，$deg\,r(\lambda)=deg\,m(\lambda)-1$ 即比如$m(\lambda)$是三次的，则$r(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$，其中$a,b,c$是待定的系数）。
3. 根据$m(\lambda)$确定$r(\lambda)$系数。
4. 因此，$f(A)=r(A)$。

例 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$，求$\sin At(t\in R)$.

解 $\varphi(\lambda)=det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$ ，

因为 $2I-A\neq O$ ，$(2I-A)^2=O$ ，所以 A 的最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-2)^2$.

取 $f(\lambda)=\sin\lambda t$, 设 $f(\lambda)=m(\lambda)g(\lambda)+a\lambda+b$

由 $\begin{cases}f(2)=\sin 2t=2a+b\\ f'(2)=t\cos 2t=a\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=t\cos 2t\\ b=\sin 2t-2t\cos 2t\end{cases}$

所以 $r(\lambda)=(t\cos 2t)\lambda+\sin 2t-2t\cos 2t,$

从而
$$\begin{aligned}\sin At&=r(A)\\&=t\cos(2t)A+(\sin(2t)-2t\cos(2t))I\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}t\sin(2t)&0&0\\t\cos(2t)&\sin(2t)-t\cos(2t)&t\cos(2t)\\t\cos(2t)&-t\cos(2t)&\sin(2t)+t\cos(2t)\end{pmatrix}$$

2. 数项级数求和法

思路首先将$f(A)$展开成幂级数，由于A的高次幂不好求，因此利用方程特征多项式$\phi(\lambda)$，因为$\phi(A)=0$，可以利用此推出A高次幂与低次幂的关系，然后将高次幂用低次幂表示。采用这种方法首先矩阵阶次不能过高，而且只针对特定矩阵才好用。最小多项式

设 $\phi(\lambda)=\lambda^m+b_1\lambda^{m-1}+\cdots+b_{m-1}\lambda+b_m \quad (1\le m\le n)$

且 $\phi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ ，即

$$\boldsymbol{A}^m+b_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+b_{m-1}\boldsymbol{A}+b_m\boldsymbol{I}=O$$

或者

$$\boldsymbol{A}^m=-b_1\boldsymbol{A}^{m-1}-\cdots-b_{m-1}\boldsymbol{A}-b_m\boldsymbol{I}$$

可以求出

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}^{m+1}=k_{m-1}^{(1)}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+k_1^{(1)}\boldsymbol{A}+k_0^{(1)}\boldsymbol{I}\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{A}^{m+l}=k_{m-1}^{(l)}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+k_1^{(l)}\boldsymbol{A}+k_0^{(l)}\boldsymbol{I}\\ \quad\vdots\end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})&=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\boldsymbol{A}^k=\left(c_0\boldsymbol{I}+c_1\boldsymbol{A}+\cdots+c_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}\right)\\&+c_m\left(k_0\boldsymbol{I}+k_1\boldsymbol{A}+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}\right)+\cdots+\\&+c_{m+l}\left(k_0^{(l)}\boldsymbol{I}+k_1^{(l)}\boldsymbol{A}+\cdots+k_{m-1}^{(l)}\boldsymbol{A}^{m-1}\right)+\cdots\\&=(c_0+\sum_{l=0}^{\infty}c_{m+l}k_0^{(l)})\boldsymbol{I}+(c_1+\sum_{l=0}^{\infty}c_{m+l}k_1^{(l)})\boldsymbol{A}+\cdots\\&+(c_{m-1}+\sum_{l=0}^{\infty}c_{m+l}k_{m-1}^{(l)})\boldsymbol{A}^{m-1}\end{aligned}$$

例 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\pi&&&\\&-\pi&&\\&&0&1\\&&&0\end{pmatrix}$,求 $\sin\boldsymbol{A}$

解 $\varphi(\lambda)=det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\lambda^4-\pi^2\lambda^2.$

由于 $\varphi(\boldsymbol{A})=0$，所以 $\boldsymbol{A}^4=\pi^2\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^5=\pi^2\boldsymbol{A}^3,\cdots$

于是有

$$\begin{aligned}\sin\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A}-\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5-\cdots\\&=\boldsymbol{A}-\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{5!}\pi^2\boldsymbol{A}^3-\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=A+\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}\pi^2-\cdots\right)A^3\\&=A+\frac{1}{\pi^3}\left(\pi-\frac{1}{3!}\pi^3+\frac{1}{5!}\pi^5-\cdots\right)A^3-\frac{1}{\pi^2}A^3\\&=A+\frac{\sin\pi-\pi}{\pi^3}A^3=A-\pi^{-2}A^3=\\&\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. Jordan标准型法

思路也是将$f(A)$展开成幂级数，由于A的高次幂不好求，因此采用Jordan标准型来求解。Jordan标准型（宽泛意义的相似对角化）
这种方法比较适合矩阵A本身就是Jordan标准型的情况（这样可以省去求变换矩阵P的困难）

设 A 的Jordan 标准形为 J，则有可逆矩阵P使

得

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$$

则有 $A = PJP^{-1}, A^2 = PJ^2P^{-1}, \cdots$,于是有

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k PJ^k P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k J^k\right)P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_s^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_s) \end{pmatrix} P^{-1}$$

因为

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{m_i \times m_i}$$

所以 $f(J_i) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_i^k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{m_i-1} \lambda_i^{k-m_i+1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{pmatrix}$$

$f(J_i) =$

$$\begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!} f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!} f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & f(\lambda_i) & \frac{1}{1!} f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

以上写的太复杂，实际求解中不需要将$f(A)$展开成幂级数，简单总结就是：

1. 求A的Jordan标准型$J = \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \dots & \\ & & f(J_s) \end{bmatrix}$与变换矩阵P。
2. $f(A) = P \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \dots & \\ & & f(J_s) \end{bmatrix} P^{-1}$
3. 在求解$f(J_n)$, $n = 1, 2, \dots, s$时，如果J_n是1阶Jordan块很好做，就是$f(J_n)$就是一个数。但是如果其阶次大于1，计算$f(J_n)$可采用这种方式：

$$f(J_i)=\begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

例 设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$,求$e^A,e^{tA}(t\in R)$.

解 $\varphi(\lambda)=det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

对应 $\lambda_1=-2$，的特征向量 $p_1=(-1,1,1)^T$ ；对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的两个线性无关的特征向量

$p_2=(-2,1,0)^T, p_3=(0,0,1)^T.$ 构造矩阵

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则有 $e^A=P\begin{pmatrix} e^{-2} & & \\ & e & \\ & & e \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} 2e-e^{-2} & 2e-2e^{-2} & 0 \\ e^{-2}-e & 2e^{-2}-e & 0 \\ e^{-2}-e & 2e^{-2}-2e & e \end{pmatrix}$

$$e^{At}=P\begin{pmatrix} e^{-2t} & & \\ & e^t & \\ & & e^t \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 2e^t-e^{-2t} & 2e^t-2e^{-2t} & 0 \\ e^{-2t}-e^t & 2e^{-2t}-e^t & 0 \\ e^{-2t}-e^t & 2e^{-2t}-2e^t & e^t \end{pmatrix}$$

$$\cos A=P\begin{pmatrix} \cos(-2) & & \\ & \cos 1 & \\ & & \cos 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cos 1-\cos 2 & 2\cos 1-2\cos 2 & 0 \\ \cos 2-\cos 1 & 2\cos 2-\cos 1 & 0 \\ \cos 2-\cos 1 & 2\cos 2-2\cos 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$$

例如 $A=\begin{pmatrix} \pi & & & \\ & -\pi & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$,求$\sin A,\sin tA$.

$$J_1=\pi, J_2=-\pi, J_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $f(\lambda)=\sin\lambda,$ $f(A)=\begin{pmatrix} \sin J_1 & & \\ & \sin J_2 & \\ & & \sin J_3 \end{pmatrix}$

因为 $\sin J_1=\sin\pi=0, \sin J_2=\sin(-\pi)=0,$

$$\sin J_3=\begin{pmatrix} \sin 0 & \cos 0 \\ 0 & \sin 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $$\sin \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&1\\&&&0\end{pmatrix}$$

取 $f(\lambda)=\sin t\lambda,$ $$f(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}\sin(t\boldsymbol{J}_1)&&\\&\sin(t\boldsymbol{J}_2)&\\&&\sin(t\boldsymbol{J}_3)\end{pmatrix}$$

因为 $$\sin(t\boldsymbol{J}_1)=\sin t\pi,\ \sin(t\boldsymbol{J}_2)=\sin(-t\pi)=-\sin t\pi,$$

$$\sin(t\boldsymbol{J}_3)=\begin{pmatrix}\sin 0&t\cos 0\\0&\sin 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&t\\0&0\end{pmatrix}$$

所以 $$\sin t\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\sin t\pi&&&\\&-\sin t\pi&&\\&&0&t\\&&&0\end{pmatrix}$$