图论

2018

目录

1、 导论

1.1、 图的定义与图论模型

1.1.1、 图的定义

定义 1:

一个图是一个序偶<V, E>，记为 G=(V, E)。

其中：

1) V 是一个有限的非空集合，称为顶点集合，其元素称为顶点或点。用|V|表示顶点数；
2) E 是由 V 中的点组成的无序对构成的集合，称之为边集，其元素称为边，且同一点对在 E 中可以重复出现多次。用|E|表示边数。

定义 2：

一个图(Graph)是一个有序三元组<V, E, Ψ >，记为 G = <V, E, Ψ >。

其中 Ψ 表示关联函数（Incident Function）

1) 含义 1：边与点对儿
2) 含义 2：权重

1.1.2、 图的相关概念

- **有限图**： 顶点集和边集都有限的图称为有限图；
- **平凡图**： 只有一个顶点的图称为平凡图；
- **空图**： 边集为空的图称为空图；
- **n 阶图**： 顶点数为 n 的图称为 n 阶图；
- **(n, m) 图**： 顶点数为 n,边数为 m 的图称为(n, m) 图；
- **边的重数**： 连接两个相同顶点的边的条数称之为边的重数，重数大于 1 的边称之为重边；
- **环**： 端点重合为一点的边称之为环；
- **简单图**： 无环无重边的图称为简单图；其余的图称为复合图；
- **顶点 u 与 v 相邻接**： 顶点 u 与 v 间有边相连接；其中 u 与 v 称为该边的两个端点；
- **顶点 u 与边 e 相关联**： 顶点 u 是边 e 的端点；
- **边 e_1 与边 e_2 相邻接**： 边 e_1 与边 e_2 有公共端点；

1.1.3、 图论模型

为了抽象和简化现实世界，常常建立数学模型。图是关系的数学表示，为了深刻理解事物之间的联系，图是常用的数学模型。

1.1.4、 图的同构

定义 3

设有两个图 $G_1=(V_1, E_1)$和 $G_2=(V_2, E_2)$，若在其顶点集合间存在双射，使得边之间存在如下关系：设 $u_1 \leftrightarrow u_2$、$v_1 \leftrightarrow v_2$ 其中 $u_1, v_1 \in V_1$、$u_2, v_2 \in V_2$； $u_1, v_1 \in E_1$，当且仅当 $u_2, v_2 \in E_2$,且 u_1v_1 与 u_2v_2 的重数相同。称 G_1 与 G_2 同构，记为：

$$G_1 \cong G_2$$

由定义可以得到图同构的几个必要条件：

1) 顶点数相同；
2) 边数相同；
3) 关联的边数相同的顶点个数相同。

1.2、 完全图、偶图与补图

完全图

每两个不同的顶点之间都有一条边相连的简单图称为完全图。在同构意义下，n 个顶点的完全图只有一个，记为 K_n。容易求得

$$\mathrm{m}(K_n) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

偶图

所谓具有二分类(X, Y)的偶图（或二部图）是指一个图，它的点集合可以分解为两个（非空）子集 X 和 Y，使得每条边的一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中。完全偶图是指具有二分类（X, Y）的简单偶图，其中 X 的每个顶点与 Y 的每个顶点相连，若$|X|=m$，$|Y|=n$，则这样的偶图记为 $K_{m,n}$。

补图

对于一个简单图 G=(V, E)，令集合 $E_1=\{<u, v> \mid u \neq v, u, v \in V\}$。则称 $H=(V, E_1 \setminus E)$为 G 的补图，记为 $H=\bar{G}$。补图是相对于完全图定义的。补图是图论中经常涉及的概念，在图论研究中有重要的作用如果图 G 与其补图同构，则称 G 为自补图。

定理 1

若 n 阶的图 G 是自补图($G_1 \cong G_2$)，则有：n=0, 1(mod 4)。

证明：n 阶的图 G 是自补图，则有：

$$\mathrm{m}(\mathrm{G}) + \mathrm{m}(\bar{\mathrm{G}}) = \mathrm{m}(\mathrm{K}_n) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

所以：

$$m(G)=\frac{1}{4}n(n-1)$$

由于 n 是正整数，所以 n=0, 1(mod 4)。

1.3、 顶点的度与图的度序列

1.3.1、 顶点的度

G 的顶点 v 的度 d (v)是指 G 中与 v 关联的边的数目，每个环分别计算两次。分别用 δ(G)和 Δ(G)表示图 G 的**最小与最大度**。奇数度的顶点称为**奇点**，偶数度的顶点称**偶点**。设 G = (V, E)为简单图，如果对所有 v∈V，有 d (v) = k，称图 G 为 **k-正则图**。

握手定理

图 G= (V, E)中所有顶点的度的和等于边数 m 的 2 倍，即：

$$\sum_{v\epsilon V(G)} d(v)=2m$$

证明：由顶点度的定义知：图中每条边给图的总度数贡献 2 度，所以，总度数等于边数的 2 倍。

推论 1

在任何图中，奇点个数为偶数。

证明：设 V_1, V_2 分别是 G 中奇点集和偶点集，则由握手定理有：

$$\sum_{v\epsilon V_1} d(v)+\sum_{v\epsilon V_2} d(v)=\sum_{v\epsilon V} d(v)$$

由于$\sum_{v\epsilon V} d(v)$是偶数， $\sum_{v\epsilon V_2} d(v)$是偶数，因此$\sum_{v\epsilon V_1} d(v)$是偶数。于是$|V_1|$是偶数。

推论 2

正则图的阶数和度数不同时为奇数 。

证明： 设 G 是 k-正则图，若 k 为奇数，则由推论 1 知正则图 G 的点数必为偶数

1.3.2、 图的度序列及其性质

一个图 G 的各个点的度 d_1, d_2, …, d_n 构成的非负整数组 (d_1, d_2, …, d_n)称为 G 的度序列。任意一个图 G 对应唯一一个度序列，图的度序列是刻画图的特征的重要“拓扑不变量”。图 G 的“拓扑不变量”是指与图 G 有关的一个数或数组(向量)。它对于与图 G 同构的所有图来说，不会发生改变。一个图 G 可以对应很多拓扑不变量。如果某组不变量可完全决定一个图，称它为不变量的完全集。

定理 3

非负整数组(d_1, d_2, …., d_n)是图的度序列的充分必要条件是：$\sum_{v\epsilon V} d(v)$为偶数。

证明：必要性由握手定理立即得到。

如果$\sum_{v\in V} d(v)$为偶数，则数组中为奇数的数字个数必为偶数。按照如下方式作图 G：若 d_i 为偶数，则在与之对应的点作 $d_i/2$ 个环；对于剩下的偶数个奇数，两两配对后分别在每配对点间先连一条边，然后在每个顶点画 d_j-1/2 个环。该图的度序列就是已知数组。

一个非负数组如果是某简单图的度序列，我们称它为可图序列，简称**图序列**。

定理：非负整数组

$$\pi = (d_1, d_2, \cdots, d_n), d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n, \sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$$

是图序列的充分必要条件是：

$$\pi_1 = \left(d_2 - 1, d_3 - 1, \cdots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \cdots, d_n\right)$$

是图序列。

定理 5

一个满足 $d_2=d_{n-1}$ 的图序列$\pi = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$是唯一图序列的充分必要条件是下列条件之一满足：

1. $d_1 = d_n, d_n \in \{1, n-1, n-2\}$
2. $d_1 = d_n = 2, n = 5$
3. $d_1 > d_2 = d_n = 1$
4. $d_1 > d_2 = d_n = 2, d_1 \in \{n-1, n-2\}$
5. $\mathrm{n} - 2 = d_1 = d_{n-1} > d_n$
6. $n - 3 = d_1 = d_{n-1} > d_n = 1$
7. $n - 1 = d_1 > d_2 = d_n = 3, n = 6$

1.3.3、 图的频序列及其性质

定理 6

一个简单图 G 的 n 个点的度不能互不相同。

证明：因为图 G 为简单图，所以：$\triangle(G) \leq n-1$。

定义

设 n 阶图 G 的各点的度取 s 个不同的非负整数 $d_1, d_2, \ldots, d_s$。又设度为 d_i 的点有 b_i 个 $(i = 1, 2, \ldots, s)$，则

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = n$$

故非整数组$(b_1, b_2, \ldots, b_s)$是 n 的一个划分，称为 G 的频序列。

定理

一个 n 阶图 G 和它的补图有相同的频序列。

2、 图的基本概念

2.1、 子图的相关概念

2.1.1、 子图

简单地说，图 G 的任意一部分(包括本身)都称为是图 G 的一个子图。

定义

如果 V(H)⊆V(G), E(H)⊆E(G)且 H 中边的重数不超过 G 中对应边的条数，则称 H 为 G 的子图，记为 H⊆G。当 H⊆G, H≠G 时，称 H 是 G 的真子图，记为 H⊂G。

2.1.2、 点与边的导出子图

顶点的导出子图

如果 V`⊆V(G)，则以 V`为顶点集，以两个端点均在 V`中的边集组成的图，称为图 G 的点导出子图。记为：G[V`]。

边的导出子图

如果 E`⊆V(E)，则以 E`为边集，以 E`中边的所有端点为顶点集组成的图，称为图 G 的边导出子图。记为：G[E`]。

生成子图

如果图 G 的一个子图包含 G 的所有顶点，称该子图为 G 的一个生成子图。

定理：简单图 G=(n, m)的所有生成子图个数为 2m。

2.2、 图运算

在图论中，将两个或更多的图按照某种方式合并，或者对一个图作某种形式的操作，可以得到很有意义的新图。将图合并或对一个图进行操作，称为图运算。图运算形式很多。

2.2.1、 图的删点、删边运算

设 V`⊆V(G)，在 G 中删去 V`中的顶点和 G 中与之关联的所有边的操作，称为删点运算。记为 G-V`。特别的，如果只删去一个点 v，则记为 G-v。

设 E`⊆E(G)，在 G 中删去 E`中的所有边的操作，称为删边运算。记为 G-E`。特别的，如果只删去一条边 e，则记为 G-e。

删点、删边后得到的图是原图的子图。

2.2.2、 图的并运算

设 G_1, G_2 是 G 的两个子图，G_1 与 G_2 并是指由 $V(G_1) \cup V(G_2)$为顶点集，以 $E(G_1) \cup E(G_2)$为边集组成的子图。记为：$G_1 \cup G_2$。特别是，如果 G1, G2 不相交(没有公共顶点)，称它们的并为直接并，可以记为：G_1+G_2。

2.2.3、 图的交运算

设 G_1, G_2 是 G 的两个子图，G_1 与 G_2 交是指由 $V(G_1)\, \mathrm{I}\, V(G_2)$为顶点集，以 $E(G_1)\, \mathrm{I}\, E(G_2)$为边集组成的子图。记为：$G_1 \mathrm{I} G_2$。

2.2.4、 图的差运算

设 G_1, G_2 是两个图，G_1 与 G_2 的差是指从 G_1 中删去 G_2 中的边得到的新图。记为 G_1-G_2。

2.2.5、 图的对称差运算(或环和运算)

设 G_1, G_2 是两个图，G_1 与 G_2 的对称差定义为：

$$G_1 \Delta G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \, \mathrm{I} \, G_2)$$

2.2.6、 图的联运算

设 G_1, G_2 是两个不相交的图，作 G_1+G_2，并且将 G_1 中每个顶点和 G_2 中的每个顶点连接，这样得到的新图称为 G_1 与 G_2 的联图。记为 ：$G_1 \vee G_2$。

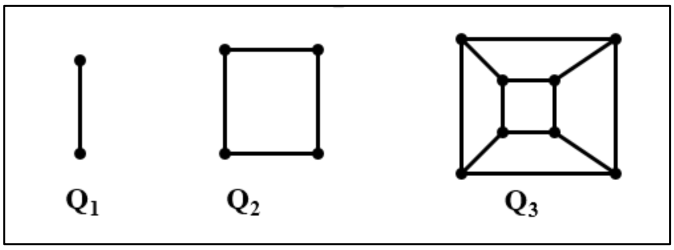
2.2.7、 图的积图

$G_1=(V_1, E_1), G_2=(V_2, E_2)$,是两个图。对点集 $V=V_1 \times V_2$ 的任意两个点 $v=(v_1, v_2)$，$u=(u_1, u_2)$当 $v_1=u_1$ 且 v_2 adj u_2 时或当 $v_2=u_2$ 且 v_1 adj u_1 时，把 u 与 v 相连。如此得到的新图称为 G_1 与 G_2 的积图。记为 $G=G_1 \times G_2$。

图的积运算是网络构造的常用方法。并行计算机中的网络拓扑常采用所谓的“超立方体”结构。采用该结构可使网络具有较好的可靠性、较小的通信延迟和很好的可扩展性以及便于并行编程等优点。“超立方体”可以采用积图来递归构造。定义如下：

a) 1 方体：$Q_1=K_2$

b) n 方体定义为：$Q_n=K_2 \times Q_{n-1}$



n 方体 Q_n 的顶点可用一个长度为 n 的二进制码来表示。Q_n 的顶点数目正好等于 2n 个。由 n-1 方体 Q_{n-}

$_1$ 构造 Q_n 的方法是：将 Q_{n-1} 拷贝一个。将原 Q_{n-1} 每个顶点的码前再添加一个零，将拷贝得来的 n-1 方体每个顶点的码前面再添加一个 1。然后在两个 n-1 方体之间连线：当且仅当两个顶点码只有一位对应位数字不同时，该两点连线。如此得到的图即为 n 方体。

2.2.8、 图的合成图

设 $G_1=(V_1,E_1),G_2=(V_2,E_2)$是两个图。对于点集 $V=V_1\times V_2$ 的任意两个点 $u=(u_1,u_2)$与 $v=(v_1,v_2)$,当 (u_1 adj v_1) 或 ($u_1=v_1$ 和 u_2 adj v_2) 时，把 u 与 v 相连。如此得到的新图称为 G_1 与 G_2 的合成图。记为 $G=G_1[G_2]$。

2.2.9、 图的联合

把 G_1 的一个顶点和 G_2 的一个顶点粘合在一起后得到的新图称为 G_1 与 G_2 的联合。记为：$G=G_1gG_2$。

2.3、 路与连通性

对图的路与连通性进行研究，在计算机网络研究中有十分重要的意义。因为网络的抽象就是一个图。研究网络信息传递，信息寻径是主要问题之一，这恰对应于图中路的研究；在网络研究中，可靠性也是主要问题之一，它与图的连通性问题相对应。

2.3.1、 路与连通性的相关概念

途径

G 的一条途径（或通道或通路）是指一个有限非空序列 $w= v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, e_k, v_k$。它的项交替地为顶点和边，使得 $1\leqslant i\leqslant k$，e_i 的端点是 v_{i-1} 和 v_i。途径中边数称为途径的长度；v_0, v_k 分别称为途径的起点与终点，其余顶点称为途径的内部点。

迹

边不重复的途径称为图的一条迹。

路

顶点不重复的途径称为图的一条路。（注：起点与终点重合的途径、迹、路分别称为图的闭途径、闭迹与圈。闭迹也称为回路。长度为 k 的圈称为 k 圈，k 为奇数时称为奇圈，k 为偶数时称为偶圈。）

两顶点的距离

图中顶点 u 与 v 的距离：u 与 v 间最短路的长度称为 u 与 v 间距离。记为 d (u, v). 如果 u 与 v 间不存在路，定义 $d(u,v)=\infty$。

两顶点的连通性

图 G 中点 u 与 v 说是连通的，如果 u 与 v 间存在通路。否则称 u 与 v 不连通。点的连通关系是等价关系。如果图 G 中任意两点是连通的，称 G 是连通图，否则，称 G 是非连通图。非连通图中每一个极大连通部分，称为 G 的连通分支。G 的连通分支的个数，称为 G 的分支数，记为 $\omega(G)$

直径

连通图 G 的直径定义为：

$$d(G) = max\{\, d(u,v)\,|\,u,v\epsilon V(G)\,\}$$

如果 G 不连通，图 G 的直径定义为 d(G)=∞。

2.3.2、 连通性性质

定理 1

若图 G 不连通，则其补图连通

证明：对∀u, v ϵV($\bar{G}$)，如果 u, v 属于 G 的同一分支，设 w 是与 u, v 处于不同分支中的点，则在 G 的补图中，u 与 w, v 与 w 分别邻接，于是，u 与 v 在 G 的补图中是连通的。如果 u 与 v 在 G 的两个不同分支中，则在 G 的补图中必然邻接，因此，也连通。所以，若 G 不连通，G 的补图是连通的。

定理 2

设图 G 为 n 阶图，若对 G 中任意两个不相邻顶点 u 与 v，有：

$$\mathrm{d(u)} + \mathrm{d(v)} \geq \mathrm{n} - 1$$

则 G 是连通的,且 d (G)≤2.

证明：我们证明，对 G 中任意两点 x 与 y,一定存在一条长度若 x, y ϵ E(G)，则上面论断成立！若 x, y ∉ E(G) 可以证明，存在点 w，它与 x, y 同时邻接。若不然，在 G 的剩下的 n-2 个顶点中，假设有 k 个与 x 邻接，但与 y 不邻接，有 l 个顶点和 y 邻接，但不和 x 邻接，同时假定有 m 个顶点和 x, y 均不邻接。则：d (x)=k ,d (y)= l。由于 k+ l+ m=n-2，所以，d (x)+ d (y) =n -m- 2≤n-2,矛盾！

推论

设图 G 为 n 阶图，若 Δ ≥(n-1)/2,则 G 连通。

证明：对 G 中任意两个不相邻顶点 u 与 v，有：

$$\mathrm{d(u)} + \mathrm{d(v)} \geq \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = n - 1$$

所以，G 是连通的。

注意：定理 2 的界是紧的(Sharpness)。即不能再修改！例如：设 G 由两个分支作成的图，两个分支均为 Km, 则 G 中不相邻顶点度数之和恰为 n-2.(n=2m)。

2.3.3、 偶图的判定定理

定理 3

一个图是偶图当且当它不包含奇圈。

证明：

必要性：设 G 是具有二分类（X, Y）的偶图，并且 C = v_0, v_1, ⋯, v_k, v_0 是 G 的一个圈。不失一般性，可假定 v_0 ϵ X。一般说来，v_{2i} ϵ X。v_{21+1} ϵ Y。又因为 v_0 ϵ X，所以 v_k ϵ Y。由此即得 C 是偶圈。

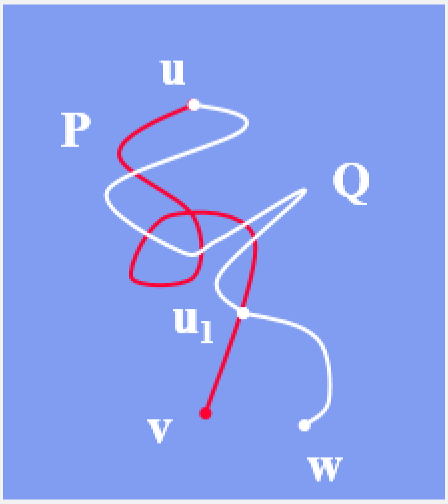
充分性：在 G 中任意选取点 u, 定义 V 的分类如下：

$$X = \{x|d(u,x)\text{是偶数}，x \in V(G)\}$$

$$Y = \{y|d(u,y)\text{是奇数}，y \in V(G)\}$$

证明：对 X 中任意两点 v 与 w , v 与 w 不邻接！

设 v 与 w 是 X 中任意两个顶点。P 是一条最短(u , v)路 ，而 Q 是一条最短的(u, w)路。



又设 u_1 是 P 和 Q 的最后一个交点。由于 P, Q 是最短路，所以，P, Q 中 u 到 u_1 段长度相同，因此奇偶性相同。又 P,Q 的长均是偶数，所以，P,Q 中 u_1v 段和 u_1w 段奇偶性相同。如果 v 与 w 邻接，则可得到奇圈，矛盾！

2.4、 最短路径算法

2.4.1、 相关概念

赋权图

在图 G 的每条边上标上一个实数 w(e)后，称 G 为边赋权图。被标上的实数称为边的权值。若 H 是赋权图 G 的一个子图，称 $W(H)=\sum_{e\in E(H)} w(e)$ 为子图 H 的权值。权值的意义是广泛的。可以表示距离，可以表示交通运费，可以表示网络流量，在朋友关系图甚至可以表示友谊深度。但都可以抽象为距离。

赋权图中的最短路

设 G 为边赋权图。u 与 v 是 G 中两点，在连接 u 与 v 的所有路中，路中各边权值之和最小的路，称为 u 与 v 间的最短路。

算法

解决某类问题的一组有穷规则，称为算法。算法总运算量是问题规模的多项式函数时，称该算法为好算法。(问题规模：描述或表示问题需要的信息量) 算法中的运算包括算术运算、比较运算等。运算量用运算次数表示。对算法进行分析，主要对时间复杂性进行分析。分析运算量和问题规模之间的关系。

2.4.2、 迪杰斯特拉算法

1959 年，旦捷希(Dantjig）发现了在赋权图中求由点 a 到点 b 的最短路好算法，称为顶点标号法。

- t (a_n)：点 a_n 的标号值，表示点 $a=a_1$ 到 a_n 的最短路长度。
- $A_i = \{a_1, a_2, ..., a_i\}$：已经标号的顶点集合。
- T_i：a_1 到 a_i 的最短路上的边集合。
- $N(a_n)$：与 a_n 直接相连的点。

算法叙述如下:

1. 记 $a=a_1$, $t(a_1)=0$, $A_1=\{a_1\}$, $T_1=\emptyset$;
2. 若已经得到 $A_i = \{a_1, a_2, \cdots, a_i\}$, 且对于 $1\leqslant n\leqslant i$，已知 $t(a_n)$,对每一个 $a_n\in A_i$, 求一点：

$$b_n^i \in \mathrm{N}(a_n) - A_i = B_n^i$$

使得：

$$l\left(a_n b_n^i\right) = \min_{v\epsilon B_n^i}(a_n v)$$

3. 设有 m_i，$1\leqslant m_i\leqslant i$，而 b_{mi}^i 是使得 $t(a_{mi})+l(a_{mi}b_{mi}^i)$取最小值，令：

$$b_{m_i}^i = a_{i+1}, t(a_{i+1}) = t\left(a_{m_i}\right) + l(a_m a_{i+1}), T_{i+1} = T_i \cup \{a_m a_{i+1}\}$$

4. 若 $a_{i+1}=b$，则停止，否则记 $A_{i+1}=A_i\cup\{a_{i+1}\}$，转第 2 步。

时间复杂性分析

对第 i 次循环：步骤 2 要进行 i 次比较运算，步骤 3 要进行 i 次加法与 i 次比较运算。所以，该次循环运算量为 3i .所以，在最坏的情况下，运算量为 n2 级，是好算法。

图论角度说明 Dijkstra algorithm

1. 该算法的输入包含了一个有权重的有向图 G
   a) 以及 G 中的一个来源顶点 S。
2. 边的权重则由权重函数 w:E→[0, ∞]定义。
   a) w(u, v) 就是从顶点 u 到顶点 v 的非负权重（weight)。
   b) 边的权重可以想象成两个顶点之间的距离。
   c) 任两点间路径的权重是该路径上所有边的权重总和。
3. 已知有 V 中有顶点 s 及 t，Dijkstra 算法可以找到 s 到 t 的最低权重路径。

2.5、 图的代数表示

用邻接矩阵或关联矩阵表示图，称为图的代数表示。用矩阵表示图，主要有两个优点：(1) 能够把图输入到计算机中；(2) 可以用代数方法研究图论。

2.5.1、 图的邻接矩阵

定义

设 G 为 n 阶图，$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$,邻接矩阵 $A(G)=(a_{ij})$,其中：,

- $a_{ij}=l$，v_i 与 v_j 间的边数
- $a_{ij}=0$，v_i 与 v_j 不邻接

邻接矩阵的性质

1. 非负性与对称性
   由邻接矩阵定义知 a_{ij} 是非负整数，即邻接矩阵是非负整数矩阵；
   在图中点 v_i 与 v_j 邻接，有 v_j 与 v_i 邻接，即 $a_{ij}=a_{ji}$.所以，邻接矩阵是对称矩阵。
2. 同一图的不同形式的邻接矩阵是相似矩阵。
   这是因为，同图的两种不同形式矩阵可以通过交换行和相应的列变成一致。
3. 如果 G 为简单图，则 A(G)为布尔矩阵;行和(列和)等于对应顶点的度数；矩阵元素总和为图的总度数，也就是 G 的边数的 2 倍。
4. G 连通的充分必要条件是：A(G)不能与如下矩阵相似

$$\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$$

2.5.2、 关联矩阵

定义

若 G 是(n, m)图。定义 G 的关联矩阵：$M(G)=(a_{ij})_{n\times m}$，其中 $a_{ij}=l$, 即 v_i 与 e_j 关联的次数（0,1，或 2（环））。

关联矩阵的性质

1. 关联矩阵的元素为 0，1 或 2；
2. 关联矩阵的每列和为 2；每行的和为对应顶点度数；
3. 无环图 G 连通的充分必要条件是 R(M) = n-1；

定义：

在 G 的关联矩阵中删掉任意一行后得到的矩阵可以完全决定 G，该矩阵称为 G 的基本关联矩阵。删掉的行对应的顶点称为该**基本关联矩阵**的参考点。

3、 树

3.1、 树的概念

定义

不含圈的图称为无圈图，树是连通的无圈图。

定义

称无圈图 G 为森林。

注: (1)树与森林都是单图; (2) 树与森林都是偶图。

3.2、 树的性质

定理 1

每棵非平凡树至少有两片树叶。

证明：设 $P=v_1, v_2, \cdots, v_k$ 是非平凡树 T 中一条最长路，则 v_1 与 v_k 在 T 中的邻接点只能有一个，否则，要么推出 P 不是最长路，要么推出 T 中存在圈，这都是矛盾！即说明 v_1 与 v_2 是树叶。

定理 2

图 G 是树当且仅当 G 中任意两点都被唯一的路连接。

证明：必要性：

若不然，设 P_1 与 P_2 是连接 u 与 v 的两条不同的路。则

由这两条路的全部或部分将构成一个圈，这与 G 是树相矛盾。

充分性：

首先，因 G 的任意两点均由唯一路相连，所以 G 是连通的。

其次，若 G 中存在圈，则在圈中任取点 u 与 v，可得到连接 u 与 v 的两条不同的路，与条件矛盾。

定理 3

设 T 是(n, m)树，则：m=n-1。

证明：对 n 作数学归纳。

当 n=1 时，等式显然成立；

设 n=k 时等式成立。考虑 n=k+1 的树 T。

由定理 1 可知 T 中至少有两片树叶，设 u 是 T 中树叶，考虑

$T_1=T-u$,则 T_1 为 k 阶树，于是 $m(T_1)=k-1$，得 $m(T)=k$。

这就证明了定理 3。

推论 1

具有 k 个分支的森林有 n-k 条边。

证明：设森林 G 的 k 个分支为 T_i ($1≦i≦k$).对每个分支，使用定理 3 得：

$$\mathrm{m}(T_i) = n_i - 1, (n_i = |V(T_i)|)$$

所以：

$$\mathrm{m}(G) = \sum_{i=1}^{k} m(T_i) = n - k$$

定理 4

每个 n 阶连通图的边数至少为 n-1。

证明：如果 n 阶连通图没有一度顶点，那么由握手定理有：

$$\mathrm{m}(G) = \frac{1}{2}\sum_{v \in V(G)} d(v) \geq n$$

如果 G 有一度顶点。对顶点数作数学归纳。

当 n=1 时，结论显然

设当 n=k 时，结论成立。

当 n=k+1 时，设 u 是 G 的一度顶点，则 G-u 为具有 k 个顶点的连通图。

若 G-u 有一度顶点，则由归纳假设，其边数至少 k-1,于是 G 的边数至少有 k 条。

若 G-u 没有一度顶点，则由握手定理：

$$\mathrm{m}(G-u) = \frac{1}{2}\sum_{v \in V(G-u)} d(v) \geq k$$

所以 G 至少有 k+1 条边。

而当 G 是树时，边数恰为 n-1。所以 n 阶连通图 G 至少有 n-1 条边。所以，树也被称为**最小连通图**。

定理 5

任意树 T 的两个不邻接顶点之间添加一条边后，可以得到唯一圈。

证明：设 u 与 v 是树 T 的任意两个不邻接顶点，由定理 2 知：有唯一路 P 连接 u 与 v.于是 P∪{u v}是一个圈。显然，由 P 的唯一性也就决定了 P ∪{u v}的唯一性。

定理 6

设 S={d_1, d_2, ⋯, d_n}是 n 个正整数序列，它们满足：$d_1≧d_2≧⋯≧d_n$,$\sum d_i$=2(n-1).则存在一颗树 T，其度序列为 S。

证明：对 n 作数学归纳。

当 n=1 和 2 时，结论显然。

假设对 n=k 时结论成立。设 n=k+1

首先,序列中至少一个数为 1，否则，序列和大于 2k，与条件相矛盾！

所以，$d_{k+1}=1$.我们从序列中删掉 d_1 和 d_{k+1},增加数 $d^*=d_1-1$ 放在它应该在的位置。得到序列 S_1.该序列含 k 个数，序列和为 2(k-1),由归纳假设，存在树 T_1，它的度序列为 S_1。

现在，增加结点 v，把它和 T_1 中点 d*相连得到树 T。树 T 为所求。

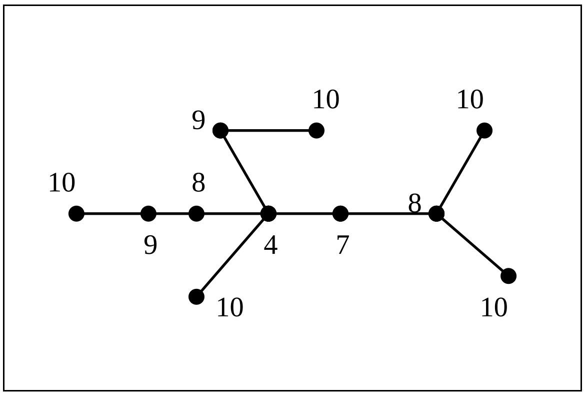
3.3、 树的中心与形心

3.3.1、 树的中心概念与性质

1. 图的顶点的离心率：$e(v)=\max\{d(u,v) \mid u\in V(G)\}$
2. 图的半径：$r(G)=\min\{e(v) \mid v\in V(G)\}$
3. 图的直径：最大离心率。
4. 图的中心点：离心率等于半径的点。
5. 图的中心：中心点的集合。

3.3.2、 的形心概念与性质

设 u 是树 T 的任意一个顶点，树 T 在顶点 u 的分支是指包含 u 作为一个叶点的极大子树，其分支数为顶点 u 的度数；树 T 在 u 点的分支中边的最大数目称为点 u 的权；树 T 中权值最小的点称为它的一个形心点。全体形心点的集合称为树 T 的形心。



3.4、 遍历

3.4.1、 *深度优先遍历

3.4.2、 *广度优先遍历

4、 生成树

4.1、 生成树的概念与性质

4.1.1、 概念

定义 1

图 G 的一个生成子图 T 如果是树，称它为 G 的一棵生成树；若 T 为森林，称它为 G 的一个生成森林。生成树的边称为树枝，G 中非生成树的边称为弦

4.1.2、 性质

定理 1

每个连通图至少包含一棵生成树。

证明：如果连通图 G 是树，则其本身是一棵生成树。若连通图 G 中有圈 C，则去掉 C 中一条边后得到的图仍然是连通的，这样不断去掉 G 中圈，最后得到一个 G 的无圈连通子图 T，它为 G 的一棵生成树。

定理 1 的证明实际上给出了连通图 G 的生成树的求法，该方法称为破圈法。利用破圈法，显然也可以求出任意图的一个生成森林。

推论

若 G 是(n, m)连通图，则 $m \geq n-1$。

4.2、 生成树的计数

4.2.1、 凯莱递推计数法

定义 2

图 G 的边 e 称为被收缩，是指删掉 e 后，把 e 的两个端点重合，如此得到的图记为 G.e。

定理 2(Cayley)

设 e 是 G 的一条边，则有：$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G.e)$。（用 $\tau(G)$表示 G 的生成树棵数。）

证明：对于 G 的一条边 e 来说，G 的生成树中包含边 e 的棵数为 G.e ，而不包含 e 的棵数为 G-e。

4.2.2、 关联矩阵计数法

定义 3

$n \times m$ 矩阵的一个阶数为 $\min\{ n, m \}$的子方阵，称为它的一个主子阵；主子阵的行列式称为主子行列式。

显然，当 $n<m$ 时，$n \times m$ 矩阵 C_m^n 个主子阵。

定理 3

设 A_m 是连通图 G 的基本关联矩阵的主子阵，则 A_m 非奇异的充分必要条件是相应于 A_m 的列的那些边构成 G 的一棵生成树

证明：必要性：

设 A_m 是 A_f 的一个非奇异主子阵，并设与 A_m 的列相对应的边构成 G 的子图为 G_m。

由于 A_m 有 n-1 行，故 G_m 应该有 n 个顶点(包括参考点)；又 A_m 有 n-1 列,所以 G_m 有 n-1 条边。而 A_m 非奇异，故 Am 的秩为 n-1 ,即 G_m 连通。这说明 G_m 是 n 个点，n-1 条边的连通图，所以，它是树。

充分性

如果 A_m 的列对应的边作成 G 的一棵生成树，因树是连通的，所以，它对应的基本关联矩阵 A_m 非奇异。

该定理给出了求连通图 G 的所有生成树的方法：

1. 写出 G 的关联矩阵，进一步写出基本关联矩阵，记住参考点；
2. 找出基本关联矩阵的非奇异主子阵，对每个这样的主子阵，画出相应的生成树。

4.2.3、 矩阵树理论

定理 3 (矩阵树定理)

设 G 是顶点集合为 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$,的图，设 $A=(a_{ij})$是 G 的邻接矩阵，$C=(c_{ij})$是 n 阶方阵，其中：

1. $c_{ij} = d(v), i=j$
2. $c_{ij} = -a_{ij}, i\neq j$

则 G 的生成树棵数为 C 的任意一个余子式的值。

定理中的矩阵 C 又称为图的拉普拉斯矩阵，又可定义为：$C = D(G) - A(G)$。其中，D(G)是图的度对角矩阵，即主对角元为对应顶点度数，其余元素为 0。A(G)是图的邻接矩阵。

4.3、 回路

定义 4

设 T 是连通图 G 的一棵生成树，把属于 G 但不属于 T 的边称为 G 关于 T 的连枝，T 中的边称为 G 关于 T 的树枝。

定义 5

设 T 是连通图 G 的一棵生成树，由 G 的对应于 T 一条连枝与 T 中树枝构成的唯一圈 C，称为 G 关于 T 的一个基本圈或基本回路。若 G 是(n, m)连通图，把 G 对应于 T 的 m-n+1 个基本回路称为 G 对应于 T 的基本回路组。记为 C_f。

定理 4

设 T 是连通图 G=(n, m) 的一棵生成树,C_1, C_2, …, C_{m-n+1} 是 G 对应于 T 的基本回路组。定义：$1 \cdot G_i = G_i$, $0 \cdot G_i = \phi$, G_i 是 G 的回路。则 G 的回路组作成的集合对于该乘法和图的对称差运算来说作成数域 F={0,1} 上的 m-n+1 维向量空间。

5、 图的连通性

5.1、 割边及其性质

定义 1

边 e 为图 G 的一条割边，如果 $\omega(G-e) > \omega(G)$。

注：割边又称为图的“桥”。

定理 1

边 e 是图 G 的割边当且仅当 e 不在 G 的任何圈中。

证明

可以假设 G 连通。

必要性：

若不然。设 e 在图 G 的某圈 C 中，且令 $e = uv$。考虑 $P = C-e$,则 P 是一条 uv 路。

下面证明 G-e 连通。

对任意 $x, y \in V(G-e)$ ，由于 G 连通，所以存在 x---y 路 Q。若 Q 不含 e，则 x 与 y 在 G-e 里连通；若 Q 含有 e，则可选择路：x---u P v---y,说明 x 与 y 在 G-e 里也连通。所以,若边 e 在 G 的某圈中，则 G-e 连通。但这与 e 是 G 的割边矛盾！

充分性：

如果 e 不是 G 的割边，则 G-e 连通，于是在 G-e 中存在一条 u---v 路。显然，该路并上边 e 得到 G 中一个包含边 e 的圈，矛盾。

推论 1

e 为连通图 G 的一条边，如果 e 含于 G 的某圈中，则 G-e 连通。

证明：

若不然，G-e 不连通，于是 e 是割边。由定理 1，e 不在 G 的任意圈中，矛盾！

定义 2

一个具有 n 个顶点的连通图 G,定义 n-1 为该连通图的秩；具有 p 个分支的图的秩定义为 n-p。记为 R(G)。

定义 3

设 S 是连通图 G 的一个边子集，如果：

(1).$R(G-S) = n-2$;

(2).对 S 的任一真子集 S_1,有 $R(G-S_1) = n-1$。称 S 为 G 的一个边割集，简称 G 的一个边割。

定义 4

在 G 中，与顶点 v 关联的边的集合，称为 v 的关联集，记为：S (v)。

定义 5

在 G 中，如果 $V=V_1\cup V_2, V_1\cap V_2=\phi$, E_1 是 G 中端点分属于 V1 与 V2 的 G 的边子集，称 E1 是 G 的一个断集。

注：割集、关联集是断集，但逆不一定。断集和关联集之间的关系定理 2。

定理 2

任意一个断集均是若干关联集的环和。

定理 3

连通图 G 的断集的集合作成子图空间的一个子空间，其维数为 n-1。该空间称为图的断集空间。(其基为 n-1 个线性无关的关联集)

定义 6

设 G 是连通图，T 是 G 的一棵生成树。如果 G 的一个割集 S 恰好包含 T 的一条树枝，称 S 是 G 的对于 T 的一个基本割集。

定理 4

连通图 G 的断集均可表为 G 的对应于某生成树 T 的基本割集的环和。

定理 5

连通图 G 对应于某生成树 T 的基本割集的个数为 n-1,它们作成断集空间的一组基。

注：到目前为止，我们在子图空间基础上，先后引进了图的回路空间和断集空间，它们都是子图空间的子空间，这些概念，均是网络图论的基本概念，当然也是代数图论的基本概念。

5.2、 割点及其性质

定义 7

在 G 中，如果 E(G)可以划分为两个非空子集 E_1 与 E_2，使 $G[E_1]$和 $G[E_2]$以点 v 为公共顶点，称 v 为 G 的一个割点。

定理 6

G 无环且非平凡，则 v 是 G 的割点，当且仅当 $\omega(G-v)>\omega(G)$。

证明

必要性：

设 v 是 G 的割点。则 E(G)可划分为两个非空边子集 E_1 与 E_2，使 $G[E_1]$,$G[E_2]$恰好以 v 为公共点。由于 G 没有环，所以，$G[E_1]$，$G[E_2]$分别至少包含异于 v 的 G 的点，这样，G-v 的分支数比 G 的分支数至少多 1，所以 $\omega(G-v)>\omega(G)$。

充分性：

由割点定义结论显然。

定理 7

v 是树 T 的顶点，则 v 是割点，当且仅当 v 是树的分支点。

证明：

必要性：

若不然，有 d (v)=1,即 v 是树叶，显然不能是割点。

充分性：

设 v 是分支点，则 d (v)>1.于是设 x 与 y 是 v 的邻点，由树的性质，只有唯一路连接 x 与 y，所以 G-v 分离 x 与 y。即 v 为割点。

定理 8

设 v 是无环连通图 G 的一个顶点，则 v 是 G 的割点，当且仅当 V(G-v)可以划分为两个非空子集 V1 与 V2,使得对任意 x ∈V1, y ∈V2, 点 v 在每一条 x,y 路上。

证明

必要性：

v 是无环连通图 G 的割点，由定理 6，G-v 至少有两个连通分支。设其中一个连通分支顶点集合为 V1,另外连通分支顶点集合为 V2,即 V1 与 V2 构成 V 的划分。

对于任意的 x ∈V1, y ∈V2，如果点 v 不在某一条 xy 路上，那么，该路也是连接 G-v 中的 x 与 y 的路，这与 x,y 处于 G-v 的不同分支矛盾。

充分性：

若 v 不是图 G 的割点，那么 G-v 连通，因此在 G-v 中存在 x,y 路，当然也是 G 中一条没有经过点 v 的 x,y 路。矛盾。

5.3、 块及其性质

定义 8

没有割点的连通图称为是一个块图，简称块；G 的一个子图 B 称为是 G 的一个块，如果

(1).它本身是块；

(2).若没有真包含 B 的 G 的块存在。

定理 9

若|V(G)|≧3,则 G 是块，当且仅当 G 无环且任意两顶点位于同一圈上。

5.4、 连通度的概念与性质

定义 1

给定连通图 G，设 V'∈V(G)，若 G -V' 不连通，称 V'为 G 的一个点割集，含有 k 个顶点的点割集称为 k 顶点割。G 中点数最少的顶点割称为最小顶点割。

定义 2

在 G 中，若存在顶点割，称 G 的最小顶点割的顶点数称为 G 的点连通度；否则称 n-1 为其点连通度。

G 的点连通度记为 $k(G)$, 简记为 k。若 G 不连通，$k(G)=0$。

定义 3

在 G 中，最小边割集所含边数称为 G 的边连通度。边连通度记为 $\lambda(G)$ 。若 G 不连通或 G 是平凡图，则定义 $\lambda(G)=0$

定义 4

在 G 中，若 $k(G)\geqq k$, 称 G 是 k 连通的；若 $\lambda(G)\geqq k$，称 G 是 k 边连通的。

6、 平面图

6.1、 平面图概念与性质

6.1.1、 平面图的概念

定义 1

如果能把图 G 画在平面上，使得除顶点外，边与边之间没有交叉，称 G 可以嵌入平面，或称 G 是可平面图。可平面图 G 的边不交叉的一种画法，称为 G 的一种平面嵌入，G 的平面嵌入表示的图称为平面图。

6.1.2、 平面图性质

定义 2

1) 一个平面图 G 把平面分成若干连通片，这些连通片称为 G 的区域，或 G 的一个面。G 的面组成的集合用 ϕ 表示。
2) 面积有限的区域称为平面图 G 的内部面，否则称为 G 的外部面。
3) 在 G 中，顶点和边都与某个给定区域关联的子图，称为该面的边界。某面 f 的边界中含有的边数(割边计算 2 次)称为该面 f 的次数，记为 deg (f)。

6.1.2.1、 平面图的次数公式

定理 1

设 G=(n, m)是平面图，则：

$$\sum_{f\in\Phi} deg(f) = 2m$$

证明：

对 G 的任意一条边 e，如果 e 是某面割边，那么由面的次数定义，该边给 G 的总次数贡献 2 次；如果 e 不是割边，那么，它必然是两个面的公共边，因此，由面的次数定义，它也给总次数贡献 2 次。于是有：

$$\sum_{f\in\Phi} deg(f) = 2m$$

6.1.2.2、 平面图的欧拉公式

定理 2(欧拉公式)

设 G=(n, m)是连通平面图，ϕ 是 G 的面数，则：n - m + ϕ =2。

证明：

情形 1，如果 G 是树，那么 m=n-1, ϕ =1。在这种情况下，容易验证，定理中的恒等式是成立的。

情形 2，G 不是树的连通平面图。

假设在这种情形下，欧拉恒等式不成立。则存在一个含有最少边数的连通平面图 G，使得它不满足欧拉恒等式。设这个最少边数连通平面图 G=(n, m)，面数为 ϕ，则：$n-m+\phi\neq 2$。

因为 G 不是树，所以存在非割边 e。显然，G-e 是连通平面图，边数为 m-1，顶点数为 n，面数为 $\phi-1$。由最少性假设，G-e 满足欧拉等式：$n-(m-1)+(\phi-1)=2$。

化简得：$n-m+\phi\neq 2$。

这是一个矛盾。

推论

设平面图 G 的连通分支数为 k，并有 n 个顶点，m 条边，d 个域，则有 $n-m+d=k+1$。

定理 3

一个连通平面图是 2 连通的，当且仅当它的每个面的边界是圈。

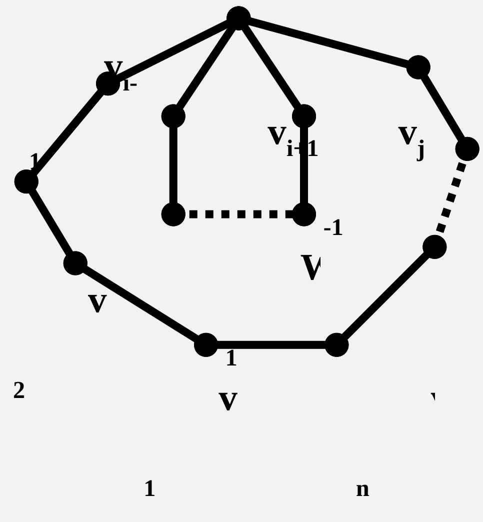
证明：

“必要性”：设 G 是 2 连通的平面图，因为环总是两个面的边界，且环面显然由圈围成。不失一般性，假设 G 没有环，那么 G 没有割边，也没有割点。所以，每个面的边界一定是一条闭迹。

设 C 是 G 的任意面的一个边界，我们证明，它一定为圈。

若不然，设 C 是 G 的某面的边界，但它不是圈。

因 C 是一条闭迹且不是圈，因此，C 中存在子圈。设该子圈是 W1.因 C 是某面的边界，所以 W1 与 C 的关系可以表示为下图的形式：



容易知道：v 为 G 的割点。矛盾！

“充分性” 设平面图 G 的每个面的边界均为圈。此时删去 G 中任意一个点不破坏 G 的连通性，这表明 G 是 2 连通的。

推论 6

若一个平面图是 2 连通的，则它的每条边恰在两个面的边界上。

定理 4

设简单平面连通图 G 有 n 个顶点，m 条边，d 个域，各个域的度至少是 l，则有

$$m \le \frac{(n-2)l}{l-2}$$

证明：

由欧拉公式： n-m+d =2 得 d =2+m-n

由定理 1：2m≥ld = l (2+m-n)= (2-n)l +ml

联立得不等式： (l-2)m ≤ (n-2)l

又 G 是简单图， l >2，结论形式可以得到证明。

6.1.2.3、 极大平面图

设 $G=(V, E)$为简单平面图，$|V| \ge 3$，若对任意 $v_i, v_j \in V$，且 $(v_i, v_j) \notin E$，有 $G'=(V, E \cup \{(v_i,v_j)\})$为非平面图，则称 G 为一个极大平面图。

- 极大平面图是连通图。
- 极大平面图的每个面都由 3 条边组成。
- 极大平面图有 3d=2m（d 为面数目，m 为边数目）。
- 极大平面图 $G=(V, E)$，若$|V| \ge 4$，则$\forall v_i \in V$，有 $\deg(v_i) \ge 3$。

6.1.3、 图的嵌入性问题简介

定理 4

G 可球面嵌入当且仅当 G 可平面嵌入。

证明：

我们用建立球极平面射影的方法给出证明。

将求面 S 放在一个平面 P 上，设切点为 O，过 O 作垂直于 P 的直线，该直线与 S 相交于 z。

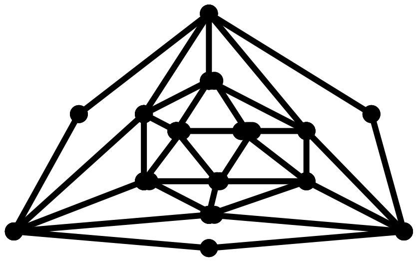
定理 5

所有图均可嵌入 R3 中。

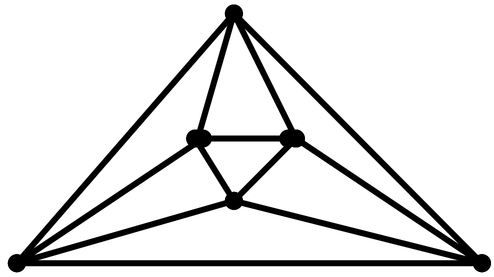
6.1.4、 凸多面体与平面图

一个多面体称为凸多面体，如果在体上任取两点，其连线均在体上。

凸多面体的一维骨架：把一个凸多面体压缩在平面上，得到一个对应的平面图，该平面图称为该凸多面体的一维骨架。



正二十面体一维骨架



正八面体一维骨架

定理 6

存在且只存在 5 种正多面体：它们是正四、六、八、十二、二十面体。

证明：

任取一个正 ϕ 面体，其顶点数、棱数分别是 n 和 m。对应的一维骨架是一个每个面次数为 l,顶点度数为 r 的简单平面正则图 G。

由次数公式得：$2m=\phi l$ …(1)

由握手定理得：$2m=nr$ …(2)

以上两式中：$l\geq 3, r\geq 3$

由(1)与(2)得：$m=nr/2; \phi=2m/l=nr/l$ …(3)

将(3)带入欧拉公式得：$n=4l/(2l-lr+2r)$ …(4)

在(4)式中，$2l-lr+2r>0 \Rightarrow 2(l+r)>lr$

于是得不等式组：

$$\begin{cases} 2(l+r)>lr \\ l\geq 3 \\ r\geq 3 \end{cases}$$

而该不等式恰有五组解。

6.2、 平面图的对偶图

图 G=(V, E)，满足下列条件的图 G*= (V*, E*) 称为图 G 的对偶图：

1. G 的任一域 f_i 内有且仅有一点 v_i^*;
2. 对 G 的域 f_i, f_j 的共同边界 e_k，画一条 $e_k^*=(v_i^*, v_j^*)$ 且只与 e_k 交于一点；
3. 若 e_k 完全处于 f_i中，则 v_i^*有一自环 e_k^* 且与 e_k 相交与一点。

上述过程称为求对偶图的 D 过程，得到的对偶图称为原图的拓扑对偶。

- 对平面图 G，D 过程构造的 G*是唯一的；对于非平面图， D 过程可能不成立；

- 对平面图 G， D 过程构造的 G*也是平面图；
- 不论图 G 是否连通，D 过程得到的 G*是连通的；
- 若图 G 连通，且存在 G*，则 (G*)*=G；
- 对图 G，若存在 G*，则 G 中回路相对应于 G*中割集，G 中割集相对应于 G*中回路；
- 若 G≅G*，称 G 为一个自对偶图。

定理 1(Whitney)

图 G 有对偶图当且仅当 G 是平面图。

证明

在平面图上施行 D 过程即得。

反证：设 G 有对偶 G*且 G 不是平图。

由 Kuratowski 定理，此时 G 中含有 K 型子图。只需证明 K(1)型图和 K(2)型图，或 K5 和 K3,3 都没有对偶即引起矛盾。

定理 2

对图 G 施行 D 过程得到 G*，设 n, m, d 和 n*,m*,d* 分别表示 G 和 G*的结点数、边数及域数，则有：m*=m , n*=d , $\deg(v_i^*)=\deg(f_i)$。

证明

由 D 过程直接得到。

定理 3

设 G 为平面图，施行 D 过程得到 G*，设 n, m, d 和 n*,m*,d* 如上所述，k 为 G 的连通分支数，则有：d* = n-k+1

证明

G*是平面连通图 : n*-m*+d*=2

G 是平面图 : n-m+d=k+1

由定理 2: m*=m , n*=d

综上可得：d*=n-k+1

定理 4

设 G 为平面图，则下列命题等价

1. G 是二分图；
2. G 的任意面的度是偶数；
3. G 的对偶图是 Euler 图。

[注] Euler 图：含一切边的闭回路的图。

7、 匹配理论

7.1、 最大匹配

定义

若图 G = (V, E)的顶点可以分成 X，Y 两个子集，每个子集里的顶点互不相邻，这样的图称为二分图（偶图）。

定义

若 M 是图 G = (V, E)的边子集，且 M 中的任意两条边在 G 中不相邻，则称 M 为 G 中的一个匹配，M 中的每条边的两个端点称为在 M 中是配对的。

定义

若图 G 中每个顶点均被 M 许配时，称 M 为 G 中的一个**完备匹配**。

定义

图 G 中边数最多的匹配 M，称为 G 中的一个**最大匹配**。

定义

若匹配 M 的某边和顶点 v 关联，称 v 是 M-**饱和的**，否则就是 M-**不饱和的**。

定义

若 M 是图 G 的一个匹配，若从 G 中一个顶点到另一个顶点存在一条道路，此路径由属于 M 和不属于 M 的边交替出现组成的，则称此路径为**交互道**。

定义

若交互道的两个端点为关于 M 的不饱和顶点时，称此交互道为**可增广道路**。

7.2、 Hall 定理(1935)：

二分图 G 存在一匹配 M，使得 X 的所有顶点关于 M 饱和的充要条件是：对于 X 任一子集 A，及与 A 邻接的点集为 N(A)，恒有：$|N(A)| \geq |A|$。

7.3、 匈牙利算法

1965 年，匈牙利著名数学家 Edmonds 设计了一种求最大匹配的算法，称为匈牙利(Hungarian)算法。

匈牙利(Hungarian)算法：

（1） 任给一个初始匹配；

（2） 若 X 已经饱和，结束；

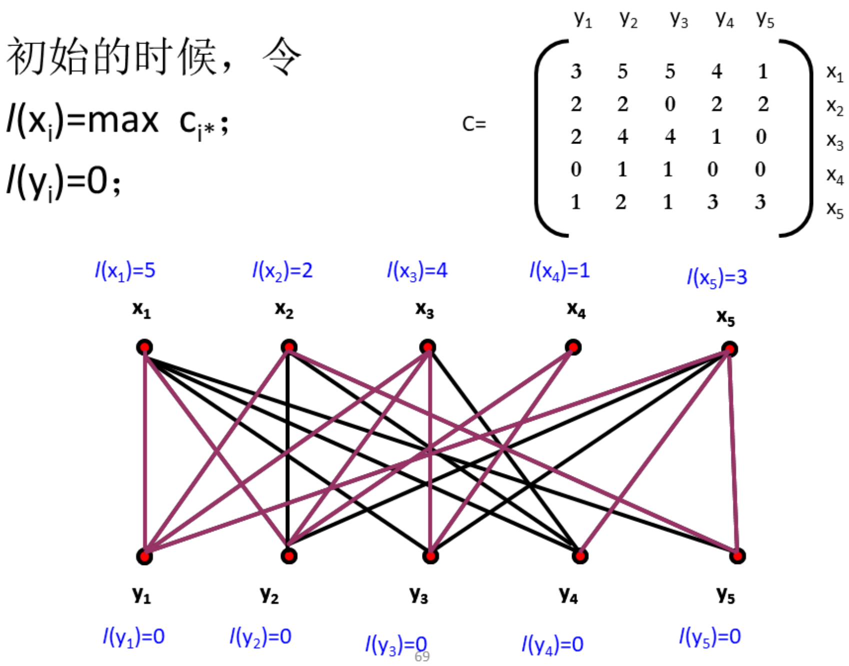
（3） 在 X 中找一个非饱和点 x_0，$V_1=\{x_0\}$，$V2=\{\}$；

（4） 若 $N(V_1)=V_2$ 则停止，否则任选一点 $y \in N(V_1)-V_2$；

（5） 若 y 已饱和， M 中必有(y,z) ，$V_1=V_1 \cup \{z\}$ ， $V_2=V_2 \cup \{y\}$，转（4）。否则求一条从 x_0 到 y 的可增广道路 P，对之进行增广，转（2）

7.4、 最佳匹配

Kuhn 和 Munkras 设计了求最佳匹配的有效算法，他们把求最佳匹配的问题转化成可用匈牙利算法求另一个图的完备匹配的问题。为此，他们对加权的二分图每个顶点 v 给一个顶标 l(v)，当 $x_i \in X$，$y_j \in Y$，$l(x_i)+l(y_j) \geq c_{ij}$ 时，称这样的顶标为正常顶标。



设二分图 $K_{n,n}=G$ 是具有正常顶标 l 的加权图，取 G 的边子集 $E_l=\{e_{ij} \mid e_{ij} \in E(G), l(i)+l(j)=c_{ij}\}$。令 G_l 是以 E_l 为边集的生成子图，如果有 G_l 完备匹配 M，则 M 即为 G 的最佳匹配。

KM 算法：

（1） 选定初始正常标顶 l，构作图 G_l，在 G_l 中用匈牙利算法求一个最大匹配；

（2） 若 X 饱和则结束，此时所得匹配就是最佳匹配，否则在 X 中任选一个非饱和点 x_0，令 $V_1=\{x_0\}$ ，$V_2=\{\}$；

（3） 若 $NG_l(V_1)=V_2$，则取 $\alpha=\min(l(x_i)+l(y_j)-c_{ij})$，其中 $x_i \in V_1$，$y_j \in NG(V_1)-V_2$，使得

$$l(v)=\begin{cases} l(v)-\alpha, & v \in V_1 \\ l(v)+\alpha, & v \in V_2 \\ l(v), & \text{其他} \end{cases}$$

重新构作图 G_l，在 $NG_l(V_1)-V_2$ 任取一点 y，转向（4）；否则在 $NG_l(V_1)-V_2$ 任取一点 y，

转向（4）

（4） 若 y 已饱和， M 中必有(y, z) ；作 $V_1 = V_1 \cup \{z\}$ ， $V_2 = V_2 \cup \{y\}$； 转（3），否则求一条从 x_0 到 y 的可增广道路 P，对之进行增广；转（2）

8、 顶点着色

8.1、 相关概念

定义 1

设 G 是一个图，对 G 的每个顶点着色，使得相邻顶点着不同颜色，称为对 G 的正常顶点着色；如果用 k 种颜色可以对 G 进行正常顶点着色，称 G 可 k 正常顶点着色；对图 G 正常顶点着色需要的最少颜色数，称为图 G 的点色数。图 G 的点色数用 $\chi(G)$表示。

注：对图的正常顶点着色，带来的是图的顶点集合的一种划分方式。所以，对应的实际问题也是分类问题。属于同一种颜色的顶点集合称为一个色组，它们彼此不相邻接，所以又称为点独立集。用点色数种颜色对图 G 正常着色，称为对图 G 的最优点着色。

定义 2

色数为 k 的图称为 k 色图。

8.2、 相关结论

定理 1

对任意的图 G，有：$\chi(G) \le \Delta(G) + 1$。

证明：

当 n=1 时，结论显然成立。

设对顶点数少于 n 的图来说，定理结论成立。考虑一般的 n 阶图 G。

任取 $v \in V(G)$, 令 G_1=G-v， 由归纳假设：

$$\chi(G_1) \le \Delta(G_1) + 1 \le \Delta(G) + 1$$

设 π 是 G_1 的一种 Δ(G)+1 正常点着色方案，因为 v 的邻点在 π 下至多用去 Δ(G)种色，所以给 v 染上其邻点没有用过的色，就把 π 扩充成了 G 的 Δ(G)+1 着色方案。

对于 G 来说，可以给出其 Δ(G)+1 正常点着色算法。

G 的 Δ(G)+1 正常点着色算法

设 G=(V, E), V={$v_1, v_2, \cdots, v_n$},色集合 C={1, 2, ⋯, Δ+1},着色方案为 π。

1. 令 $\pi(v_1)=1, i=1$;
2. 若 i=n,则停止；否则令 $C(v_{i+1})=\{\pi(v_j) \mid j \le i$，并且 v_j 与 v_{i+1} 相邻}。设 k 为 C-$C(v_{i+1})$中的最小整数，令 $\pi(v_{i+1})=k$。
3. 令 i=i+1,转(2)。

最大度优先策略

Welsh—Powell 稍微对上面算法做了一个修改，着色时按所谓最大度优先策略，即使用上面算法时，

按顶点度数由大到小的次序着色。这样的着色方案起到了对上面算法的一个改进作用。

定理 2(布鲁克斯，1941)

若 G 是连通的简单图，并且它既不是奇圈，又不是完全图，则 $\chi(G) \le \Delta(G)$。

定义 3

设 G 是至少有一条边的简单图，定义：

$$\Delta_2(G) = \max_{u \in V(G)} \max_{\substack{v \in N(u) \\ d(v) \le d(u)}} d(v)$$

其中 N(u)为 G 中点 u 的邻域。称 $\Delta_2(G)$为 G 的次大度。

如果令：

$$V_2(G) = \{v | v \in V(G)\text{，}N(v)\text{中存在点 u，满足}d(u) \ge d(v)\}$$

那么：

$$\Delta_2(G) = \max\{d(v) | v \in V_2(G)\}$$

定理 3

设 G 是非空简单图，则 $\chi(G) \le \Delta_2(G) + 1$。

推论

设 G 是非空简单图，若 G 中最大度点互不邻接，则有：$\chi(G) \le \Delta(G)$。

定理 4 (希伍德)

每个平面图是 5 可着色的。

9、 边着色

9.1、 相关概念

定义 1

设 G 是图，对 G 的边进行染色，若相邻边染不同颜色，则称对 G 进行正常边着色；

定义 2

设 G 是图，对 G 进行正常边着色需要的最少颜色数，称为 G 的边色数，记为：$\chi'(G)$

9.2、 几类特殊图的边色数

9.2.1、 偶图的边色数

定理 1

$\chi'(K_{m,n}) = \Delta$

证明：

设 $X=\{x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}\}$、$Y=\{y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}\}$、$\Delta=n$、颜色集合为$\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$，$\pi$ 是 $K_{m,n}$ 的一种着色方案，满足：$\forall x_i, y_j \in E(K_{m,n}), \pi(x_i, y_j) = (i+j)(\mathrm{mod}\ n)$。

证明：上面的着色是正常边着色。

对 $K_{m,n}$ 中任意的两条邻接边 x_i, y_j 和 x_i, y_k。若 $\pi(x_i, y_j) = \pi(x_i, y_k)$

则：$i+j\ (\mathrm{mod}\ n)=i+k\ (\mathrm{mod}\ n)$,得到 $j=k$，矛盾！

所以，上面着色是正常作色。所以：$\chi'(K_{m,n}) \cup n$，又显然 $\chi'(K_{m,n}) \geq \Delta=n$，所以 $\chi'(K_{m,n}) = \Delta$。

定义 3

设 π 是 G 的一种正常边着色，若点 u 关联的边的着色没有用到色 i，则称点 u 缺 i 色。

定理 2 (哥尼，1916)

若 G 是偶图，则 $\chi'(G) = \Delta$。

证明：

我们对 G 的边数 m 作数学归纳。

当 m=1 时，$\Delta=1$，有 $\chi'(G) = \Delta=1$

设对于小于 m 条边的偶图来说命题成立。

设 G 是具有 m 条边的偶图。

取 $uv \in E(G)$, 考虑 $G1=G-uv$,由归纳假设有：$\chi'(G1)= \Delta(G1) \leq \Delta(G)$

这说明，G1 存在一种 $\Delta(G)$边着色方案 π。对于该着色方案，因为 uv 未着色，所以点 u 与 v 均至少缺少一种色。

情形 1 如果 u 与 v 均缺同一种色 i，则在 G1+uv 中给 uv 着色 i，而 G1 其它边，按π方案着色。这样得到 G 的Δ着色方案，所以：$\chi'(G) = \Delta$。

情形 2 如果 u 缺色 i，而 v 缺色 j，但不缺色 i。

设 H (i, j) 表示 G1 中由 i 色边与 j 色边导出的子图。显然，该图每个分支是 i 色边和 j 色边交替出现的路或圈。对于 H(i, j)中含点 v 的分支来说，因 v 缺色 j，但不缺色 i，所以，在 H(i, j)中,点 v 的度数为 1。这说明，H(i ,j)中含 v 的分支是一条路 P。进一步地，我们可以说明，上面的路 P 不含点 u。因为，如果 P 含有点 u，那么 P 必然是一条长度为偶数的路，这样，P+uv 是 G 中的奇圈，这与 G 是偶图矛盾！既然 P 不含点 u，所以我们可以交换 P 中着色，而不破坏 G1 的正常边着色。但交换着色后，u 与 v 均缺色 i，于是由情形 1,可以得到 G 的Δ正常边着色，即证明：$\chi'(G) = \Delta$。

9.2.2、 一般简单图的边色数

引理

设 G 是简单图，x 与 y1 是 G 中不相邻的两个顶点，π 是 G 的一个正常 k 边着色。若对该着色 π，x, y1 以及与 x 相邻点均至少缺少一种颜色，则 G+xy1 是 k 边可着色的。

定理 3 (维津定理，1964)

若 G 是单图，则：$\chi'(G) = \Delta$ 或 $\chi'(G) = \Delta+1$

证明：

只需要证明 $\chi'(G) \le \Delta+1$ 即可。

对 G 的边数 m 作数学归纳证明。

当 m=1 时，Δ=1，$\chi'(G)=1 \le \Delta+1$

设当边数少于 m 时，结论成立。下面考虑边数为 m≥2 的单图 G。

设 xy ∈E(G)，令 G1=G-xy。由归纳假设有：$\chi'(G1) \le \Delta(G1)+1 \le \Delta(G)+1$

于是,存在 G1 的Δ(G)+1 正常边作色π。显然 G1 的每个顶点都至少缺少一种颜色。根据引理知 G1+xy 是Δ(G)+1 可着色的。即证明 $\chi'(G) \le \Delta+1$

9.2.3、 三类特殊的简单图的边色数

定理 4

设 G 是单图且 Δ(G)>0。若 G 中只有一个最大度点或恰有两个相邻的最大度点，则：$\chi'(G) = \Delta$。

证明：

若单图 G 恰有一个最大度点 u，取 u 的一个邻点 v,作 G1=G-uv。

那么，Δ(G1)= Δ(G)-1。由维津定理：$\chi'(G1) \le \Delta(G)-1+1=\Delta(G)$。

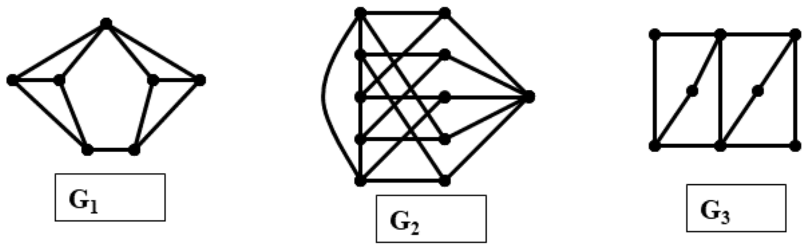
于是 G1 是可 Δ(G) 正常边着色的，因为 G1 的每个顶点都至少缺少一种颜色，所以由引理：G1+uv=G 是可 Δ(G) 正常边着色的，即：$\chi'(G) = \Delta$。

若单图 G 恰有 2 个邻接的最大度点 u 与 v。设 G1=G-uv。

那么，Δ(G1)= Δ(G)-1。由维津定理：χ'(G1) ≤Δ(G)-1+1=Δ(G)

于是 G1 是可 Δ(G) 正常边着色的，因为 G1 的每个顶点都至少缺少一种颜色，所以由引理：G1+uv=G 是可 Δ(G) 正常边着色的，即：χ'(G) = Δ。

例 确定下图的边色数。



解：由定理4知道：

$\chi'(G_1) = 4$　　$\chi'(G_2) = 5$　　$\chi'(G_3) = 4$

定理 5

设 G 是单图。若点数 n=2k+1 且边数 m(G)>kΔ,则：χ'(G) = Δ(G)+1。

证明：

若不然，由维津定理，χ'(G) = Δ

设 π 是 G 的 Δ(G)正常边着色方案，对于 G 的每个色组来说，包含的边数至多(n-1)/2=k。这样：m(G) ≤kΔ，与条件矛盾。

定理 6

设 G 是奇数阶 Δ 正则单图,若 Δ>0,则：χ'(G) = Δ(G)+1。

证明：

设 n=2k+1。因 G 是 Δ 正则单图，且 Δ>0，所以：

$$\mathrm{m(G)} = \frac{\mathrm{n}\Delta}{2} = \frac{(2k+1)\Delta}{2} > \mathrm{k}\Delta$$

由定理 5：χ'(G) = Δ(G)+1

定理 7 （Vizing 定理）

设无环图 G 中边的最大重数为 μ，则 χ'(G) = Δ(G)+ μ。

10、 欧拉图

10.1、 欧拉图及其性质

定义 1

对于连通图 G，如果 G 中存在经过每条边的闭迹，则称 G 为欧拉图，简称 G 为 E 图。欧拉闭迹又称为欧拉环游，或欧拉回路。

定理 1

下列陈述对于非平凡连通图 G 是等价的：

(1) G 是欧拉图；

(2) G 的顶点度数为偶数；

(3) G 的边集合能划分为圈。

证明:

(1)→(2)

由(1)，设 C 是欧拉图 G 的任一欧拉环游，v 是 G 中任意顶点，v 在环游中每出现一次，意味在 G 中有两条不同边与 v 关联，所以，在 G 中与 v 关联的边数为偶数，即 v 的度数为偶数，由 v 的任意性，即证明(2)。

(2)→(3)

由于 G 是连通非平凡的且每个顶点度数为偶数，所以 G 中至少存在圈 C1,从 G 中去掉 C1 中的边，得到 G 的生成子图 G1,若 G1 没有边，则(3)成立。否则，G1 的每个非平凡分支是度数为偶数的连通图，于是又可以抽取一个圈。反复这样抽取，E(G)最终划分为若干圈。

(3)→(1)

设 C1 是 G 的边划分中的一个圈。若 G 仅由此圈组成，则 G 显然是欧拉图。

否则，由于 G 连通，所以，必然存在圈 C2,它和 C1 有公共顶点。于是，C1∪C2 是一条含有 C1 与 C2 的边的欧拉闭迹，如此拼接下去，得到包含 G 的所有边的一条欧拉闭迹。即证 G 是欧拉图。

推论 1

连通图 G 是欧拉图当且仅当 G 的顶点度数为偶。

推论 2

连通非欧拉图 G 存在欧拉迹当且仅当 G 中只有两个顶点度数为奇数。

10.2、 Fleury(弗勒里)算法

该算法解决了在欧拉图中求出一条具体欧拉环游的方法。方法是尽可能避割边行走。

算法:

(1) 任意选择一个顶点 v_0,置 $w_0=v_0$;

(2) 假设迹 $w_i=v_0, e_1, v_1, \cdots, e_i, v_i$ 已经选定，那么按下述方法从 $E-\{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$中选取边 e_i+1:

   a) e_{i+1} 与 v_i 相关联；

   b) 除非没有别的边可选择，否则 e_{i+1} 不能是 $G_i=G-\{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$的割边。

(3) 当(2)不能执行时，算法停止。

10.3、 中国邮路问题

问题

邮递员派信的街道是边赋权连通图。从邮局出发，每条街道至少行走一次，再回邮局。如何行走，使其行走的环游路程最短？

如果邮路图本身是欧拉图，那么由 Fleury 算法，可得到他的行走路线。

如果邮路图本身是非欧拉图，如何重复行走街道才能使行走总路程最短？

定理 2（管梅谷）

若 W 是包含图 G 的每条边至少一次的闭途径，则 W 具有最小权值当且仅当下列两个条件被满足：

(1) G 的每条边在 W 中最多重复一次；

(2) 对于 G 的每个圈上的边来说，在 W 中重复的边的总权值不超过该圈非重复边总权值。

定理：最优欧拉环游算法

(1) 在 u 与 v 间求出一条最短路 P; (最短路算法)

(2) 在最短路 P 上，给每条边添加一条平行边得 G 的欧拉母图 G*;

(3) 在 G 的欧拉母图 G* 中用 Fleury 算法求出一条欧拉环游。

11、 哈密尔顿图

11.1、 哈密尔顿图的概念

定义 1

如果经过图 G 的每个顶点恰好一次后能够回到出发点，称这样的图为哈密尔顿图，简称 H 图。所经过的闭途径是 G 的一个生成圈，称为 G 的哈密尔顿圈。

定义 2

如果存在经过 G 的每个顶点恰好一次的路，称该路为 G 的哈密尔顿路，简称 H 路。

11.2、 性质与判定

定理 1 (必要条件)

若 G 为 H 图，则对 V(G)的任一非空顶点子集 S，有：$\omega(G-S) \le |S|$。

证明：

G 是 H 图，设 C 是 G 的 H 圈。则对 V(G)的任意非空子集 S，容易知道：$\omega(C-S) \le |S|$

所以，有：$\omega(G-S) \le \omega(C-S) \le |S|$

定理 2 (充分条件)

对于 n≧3 的单图 G，如果 G 中有：

$$\delta(G) \ge \frac{n}{2}$$

那么 G 是 H 图。

定理 3 (充分条件)

对于 n≧3 的单图 G，如果 G 中的任意两个不相邻顶点 u 与 v，有：

$$d(u) + d(v) \ge n$$

注：

该定理的条件是紧的。例如：设 G 是由 Kk+1 的一个顶点和另一个 Kk+1 的一个顶点重合得到的图，那么对于 G 的任意两个不相邻顶点 u 与 v，有：d(u) + d(v) = 2k = n-1

定义 3

在 n 阶单图中，若对 d (u) + d (v) ≥ n 的任意一对顶点 u 与 v，均有 u adj v，则称 G 是闭图。

引理 2

若 G1 和 G2 是同一个点集 V 的两个闭图，则 G=G1∩G2 是闭图。

定义 4

称 $\bar{G}$是图 G 的闭包，如果它是包含 G 的极小闭图。

引理 3

图 G 的闭包是唯一的。

定理 4(帮迪一闭包定理)

图 G 是 H 图当且仅当它的闭包是 H 图。

推论 1

设 G 是 $n \geq 3$ 的单图，若 G 的闭包是完全图，则 G 是 H 图。

定理 5(Chvátal——度序列判定法)

设简单图 G 的度序列是$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，这里，$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$,并且 $n \geq 3$.若对任意的 $m < n/2$,或有 $d_m > m$,或有 $d_{n-m} \geq n-m$,则 G 是 H 图。

12、 拉姆齐问题

12.1、 独立集与覆盖

定义 1

设 $G=(V, E)$是一个图。V 的一个顶点子集 V_1 称为 G 的一个点独立集，如果 V_1 中的顶点互不邻接；

G 的一个包含顶点数最多的独立集称为 G 的最大独立集。最大独立集包含的顶点数，称为 G 的点独立数，记为 $\alpha(G)$。

定义 2

设 $G=(V,E)$是一个图。V 的一个顶点子集 K 称为 G 的一个点覆盖，如果 E 中的每条边至少有一个端点在 K 中。

G 的一个包含顶点数最少的点覆盖称为 G 的最小点覆盖。最小点覆盖包含的顶点数，称为 G 的点覆盖数，记为 $\beta(G)$。

定理 1（加莱恒等式）

对任意不含孤立点的 n 阶图 G，有：$\alpha(G)+\beta(G)=n$。

证明：

一方面，设 V_1 是 G 的最大点独立集。因为 G 中每条边的端点最多一个在 V_1 中，所以 G 中每条边的端点至少有一个在 $V-V_1$ 中。即 $V-V_1$ 构成 G 的一个点覆盖，于是有：$\beta(G) \le |V-V_1|=n-\alpha(G)$。

另一方面，设 K 是 G 的最小点覆盖。因为 G 中每条边的端点至少有一个在 K 中，所以 G 中每条边的端点至多有一个在 V-K 中。即 V-K 构成 G 的一个点独立集，于是有：$\alpha(G) \ge |V-K|=n-\beta(G)$。

由上面两个不等式，得到：

$\alpha(G)+\beta(G)=n$

12.2、 边独立集与边覆盖

定义 3

设 $G=(V, E)$是一个图。E 的一个边子集 E_1 称为 G 的一个边独立集,如果 E_1 中的边互不邻接；

G 的一个包含边数最多的边独立集称为 G 的最大边独立集。最大边独立集包含的边数，称为 G 的边独立数，记为 $\alpha'(G)$ 。

注：一个边独立集实际上就是图的一个匹配，一个最大边独立集就是图的一个最大匹配。

定义 4

设 $G=(V, E)$是一个图。E 的一个边子集 L 称为 G 的一个边覆盖,如果 G 中的每个顶点均是 L 中某条边的端点。

G 的一个包含边数最少的边覆盖称为 G 的最小边覆盖。最小边覆盖包含的边数，称为 G 的边覆盖数，

记为 $\beta'(G)$ 。

定理 2（加莱恒等式）

对任意不含孤立点的 n 阶图 G，有：$\alpha'(G)+\beta'(G)=n$

定理 3

设 G 是无孤立点的偶图，则 G 中最大点独立集包含的顶点数等于最小边覆盖所包含的边数，$\alpha(G)=\beta'(G)$。

12.3、　点临界图与边临界图

定义 5

设 $G=(V,E)$是一个图。v 是 G 的一个顶点，e 是 G 的一条边。若 $\beta(G-v)<\beta(G)$，称 v 是 G 的 β 临界点；若 $\beta(G-e)<\beta(G)$,称 e 是 G 的 β 临界边。

定理 4

点 v 是图 G 的 β 临界点当且仅当 v 含于 G 的某个最小点覆盖中。

注：(1) 有 β 临界边的图必有 β 临界点。(2) 有 β 临界点的图不一定有 β 临界边。

定义 6

设 $G=(V,E)$是一个图。若 G 的每个顶点是 G 的 β 临界点，称该图是 β 点临界图；若 G 的每条边均是 G 的 β 临界边，称该图是 β 边临界图。

注：β 边临界图一定是 β 点临界图，反之不一定！

12.4、　拉姆齐数 r(m, n)

定义 7

设 m 和 n 是两个正整数，如果存在最小的 r(m, n)阶的图 G,使得 G 中或者有 K_m 或者有 n 个顶点的独立集，则称正整数 r(m, n)为(m, n)拉姆齐数。

求 r(3, 3)

首先我们可以知道 C_5 中既不含 K_3，也不含有 3 点独立集，所有 $r(3,3)\geq 6$；

其次，可以证明，任一 6 阶单图，或者含有 K_3，或者含有 3 点独立集。

情形 1：若 G 中至少有 3 个点与 v_1 邻接。不失一般性，设 v1 与 v2, v3, v4 邻接。如果 v2, v3, v4 互不邻接，则他们构成 G 的 3 点独立集；否则，显然在 G 中存在 K_3。

情形 2：若 G 中至多有 3 个点与 v1 邻接。那么在 G 的补图中至少有 3 个顶点与 v1 邻接。于是有情形 1，G 的补图中或者存在 K_3，或者存在 3 点独立集，当然在 G 中也就或者存在 3 点独立集或者存在 K_3。

所以，r(3, 3)=6。

定理 1

对于任意两个正整数 m 和 n, 且 $m, n\geqslant 2$,有：$r(m, n)\geq r(m, n-1)+r(m-1, n)$。并且，如果 r(m, n-1)和

$r(m-1, n)$都是偶数，则上面严格不等式成立。

13、 总复习

13.1、 重点概念

1） 图
2） 简单图
3） 图的同构与自同构
4） 度序列与图序列
5） 补图与自补图
6） 两个图的连图
7） 两个图的积图
8） 偶图
9） 树
10） 森林
11） 生成树
12） 最小树
13） 根数
14） 完全 m 数
15） 途径（闭途径）
16） 迹（闭迹）
17） 路（圈）
18） 最短路
19） 连通图
20） 连通分支
21） 点连通度
22） 边连通度
23） 欧拉图
24） 欧拉环游
25） 欧拉迹
26） 哈密尔顿圈
27） 哈密尔顿图
28） 哈密尔顿路
29） 中国邮路问题
30） 最优 H 圈
31） 匹配
32） 最大匹配（匈牙利算法）
33） 完美匹配
34） 最优匹配
35） 平面图
36） 极大平面图
37） 平面图的对偶图
38） 边色数
39） 点色数
40） 强连通图
41） 弱连通图
42） 单向连通图

相关符号

v： 点
e： 边
V： 点集合
E： 边集合
n： 点数
m： 边数
d(v)： 顶点 v 的度
K{m,n}：偶图
δ(G)： 最小度
Δ(G)： 最大度
τ(G)： 生成树的棵数
χ(G)： 点色数
χ'(G)： 边色数
ϕ： G 的面组成的集合

d： 域的个数

f： 面

l： 各个域的至少度

k(G)： 点连通度

λ(G)： 边连通度

ω(G)： 分支数

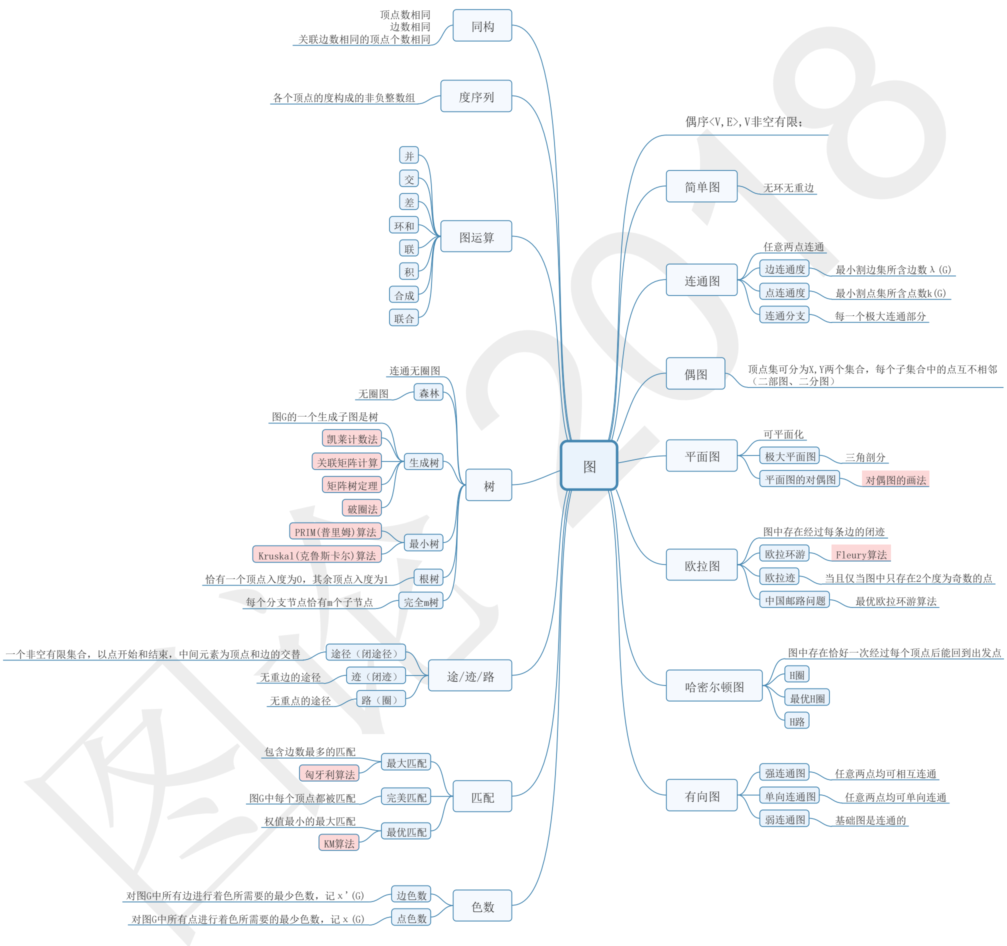
α(G)： 最大点独立集

β(G)： 最小点覆盖

α'(G)： 最大边独立集

β'(G)： 最小边覆盖

总结图



13.2、 重要结论

1. 握手定理及其推论

定理：图 G= (V, E)中所有顶点的度的和等于边数 m 的 2 倍，即：

$$\sum_{v \epsilon V(G)} d(v) = 2m$$

推论 1：在任何图中，奇点个数为偶数。

推论 2：正则图的阶数和度数不同时为奇数。

证明：

定理 1：

由顶点度的定义可知，每条边对度的贡献为 2，所以总度数为边数的 2 倍。

推论 1：

设 V_1，V_2 分别为图 G 中度为奇数和偶数的点，由握手定理可知：

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \epsilon V} d(v)$$

由于$\sum_{v \epsilon V} d(v)$是偶数，$\sum_{v \epsilon V_2} d(v)$是偶数，因此$\sum_{v \epsilon V_1} d(v)$是偶数。于是$|V_1|$是偶数。

推论 2：

设图 G 为 k 正则图，k 为奇数时由握手定理推论 1 可知，顶点个数必为偶数。

2. 树的性质

定理：设 T 是(n, m)树，则：m=n-1。

证明：

对 n 做数学归纳法有：

当 n=1 时，定理显然成立。

设当 n=k 时，定理成立，现考虑树 T 的 n 为 k+1 时的情形。

因为每一个非平凡树至少有两个叶子，所以树 T 至少有两个叶子节点，设 u 是其一个叶子节点。

考虑树 T_1=T-u，T_1 为 k 阶数，其 $m(T_1)$=k-1,故 m(T)=k。因此定理得证。

3. 最小生成树算法

Prim 算法：

1) 输入：一个加权连通图，其顶点集合为 V，边集合为 E；
2) 初始化：V_{new}={x},其中 x 为集合 V 中的任意一顶点，E_{new}={}为空；
3) 重复下列操作，知道 V_{new}=V：

a) 在集合 E 中选取权值最小的边<u,v>，其中 u 为集合 V_{new} 中的元素，而 v 不在集合 V_{new} 中，并且 v∈V（如果存在多条具有相同权值的边，则可任意选一条）

b) 将 v 加入集合 V_{new} 中，将<u,v>边加入集合 E_{new} 中；

4) 输出 V_{new} 和 E_{new} 所描述的最小树

Kruskal 算法

1) 先用图 G 中的所有顶点 V 构造一个只含 n 个顶点，而边集 Enew 为空的子图。则它是一个含有 n 棵树的森林；

2) 从图 G 的边集合 E 中挑选权值最小的边 e，若边 e 的两个顶点属于不同的树，则将 e 加入集合 Enew 中，若 e 的两个顶点在同一棵树上，则重新取除 e 边外的最小边。重复该步骤直到森林中只含有一棵树。

4. 偶图判定定理

定理：图 G 是偶图当且仅当 G 中没有奇回路。

证明：

必要性：设图 G 是具有二分类的偶图，并且 C={v0, v1, v2, ..., vk, v0}是图 G 的一个圈。不失一般性令 v0∈X。设 v2i∈X，v2i+1∈Y。由此可得 v0∈X，vk∈Y。故圈 C 是偶圈。

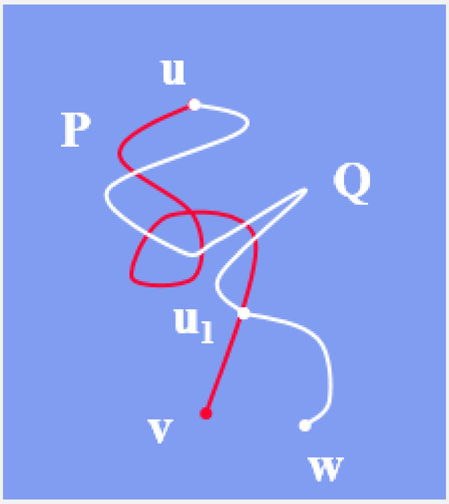
充分性：在图 G 中任意取一点 u，并对 V(G)做如下分类：

$$X = \{x | d(u,x)\text{为偶数，} x \in V(G)\}$$

$$Y = \{y | d(u,y)\text{为奇数，} y \in V(G)\}$$

证明：对 X 中任意两点 v 与 w , v 与 w 不邻接！

设 v 与 w 是 X 中任意两个顶点。P 是一条最短(u , v)路 ，而 Q 是一条最短的(u, w)路。



又设 u1 是 P 和 Q 的最后一个交点。由于 P, Q 是最短路，所以，P, Q 中 u 到 u1 段长度相同，因此奇偶性相同。又 P, Q 的长均是偶数，所以，P,Q 中 u1v 段和 u1w 段奇偶性相同。如果 v 与 w 邻接，则可得到奇圈，矛盾！

5. 欧拉图、欧拉迹的判定

定理：下列陈述对于非平凡连通图 G 是等价的：

1） G 是欧拉图；

2） G 的顶点度数为偶数；

3） G 的边集合能划分为圈；

推论：连通非欧拉图 G 存在欧拉迹当且仅当 G 中只有两个顶点度数为奇数；

证明：

1➞2：

设 C 是欧拉图 G 中的任意一环游，v 是图 G 中的任意一顶点。v 在环游中每出现一次就意味着有两条不同的边与其关联。由顶点 v 的任意性可知欧拉图 G 中的所有顶点度数为偶数。

2➞3：

由于图 G 是连通非平凡且每个顶点度数为偶数的图。故在图 G 中至少存在圈 C1。从图 G 中删去 C1 得到图 G 的生成子图 G1。若 G1 没有边，则 3 成立。否则，G1 中的每个非平凡连通分支均是度数为偶数的连通图。由此又可以抽取到圈 C2，反复如此抽取，图 G 最终将被划分为若干个圈。

3➞1：

若圈 C1 是图 G 中的一个划分，当图 G 仅由此圈组成则 1 成立。否则由于 G 连通，圈 C2 必然与圈 C1 有公共顶点。则 C1∪C2 是一条包含 C1 与 C2 的闭迹。如此拼接下去，可以得到包含图 G 中所有边的一条欧拉闭迹。

6. H 图的判定

定理：（必要条件）若 G 为 H 图，则对 V(G)的任一非空顶点子集 S，有：$\omega(G-S) \le |S|$。

证明：

图 G 是 H 图，设 C 是图 G 的 H 圈，则对于图 G 的任意的非空顶点子集 S，容易可知：

$$\omega(C-S) \le |S|$$

所以，有：

$$\omega(G-S) \le \omega(C-S) \le |S|$$

定理：（充分条件）对于 $n\ge3$ 的单图 G，如果图 G 中有 $\delta(G) \ge n/2$；

证明：

假设该命题为假，设图 G 是一个满足该条件的极大非 H 图。显然图 G 不能是完全图，否则它将是 H 图。

在图 G 中任意找出两个不相邻的点 u,v。由于图 G 的极大性，G+uv 将是一个 H 图，且图中的任意 H 圈将包含边 uv。所以图 G 中将存在以 u 为起点，v 为终点的 H 路 P。不失一般性，设起点为 u，终点为 v。

$$P = \{v_1, v_2, \dots, v_n\},\ u = v_1, v = v_n$$

令：

$$S=\{v_i|uv_{i+1}\in E(G)\}$$
$$T=\{v_j|v_jv\in E(G)\}$$

对于 S 和 T，显然 $v_n\notin S\cup T$，所以$|S\cup T|<n$

另一方面可以证明 $S\cap T=\phi$

否则，设 $v_i\in S\cap T$，那么由 $v_i\in S$，有 $v_1v_{i+1}\in E(G)$，由 $v_i\in T$ 有 $v_iv_n\in E(G)$

这样在图 G 中就有 H 圈，与假设矛盾。

于是：

$$d(u)+d(v)=|S|+|T|=|S\cup T|+|S\cap T|<n$$

而这与已知的 $\delta(G)\geq n/2$ 相矛盾。

定理：（充分条件）对于 n≥3 的单图 G，如果 G 中的任意两个不相邻顶点 u 和 v，有：

$$d(u)+d(v)\geq n$$

证明同上。

7. 最优匹配算法（匈牙利算法）

1) 任意给出一个初始匹配；
2) 若 X 以饱和，结束；
3) 在 X 中寻找一非饱和点 x0，令 V1={x0}，V2={}；
4) 若 N(V1)=V2 则停止，否则任意选择一点 y∈N(V1)-V2；
5) 若 y 已饱和，M 中必有(y,z)，令 V1=V1∪{z}，V2=V2∪{y}，转 4；否则求一条从 x0 到 y 的可增广道路 P，对之进行增广，转 2；

8. 平面图及其对偶图

1） 次数公式

定理：设 G=(n, m)是平面图，则

$$\sum_{f\in\Phi}deg(f)=2m$$

证明：

对于图 G 的任意一条边 e，如果 e 是割边，那么由面的次数定义可知该边给 G 的总次数贡献为 2。如果 e 不是割边，那么 e 必然是两个面的公共边，由面的次数定义可知该边对图 G 的总次数贡献也为 2。因此有：

$$\sum_{f\in\phi}\deg(f)=2m$$

2） 平面图的欧拉公式

定理：设 G=(n, m)是连通平面图，φ 是 G 的面数，则：$n-m+\phi=2$。

证明：

情形 1：如 G 是树，那么 m=n-1, ϕ=1。此时容易验证该定理成立。

情形 2：如 G 是不是树的连通平面图。

假设此时该定理为假，则存在一个含有最少边的非树连通平面图 G，使得图 G 不满足该恒等式。设这个最少边的连通平面图为 G(n,m)，面数为 ϕ，则有 n-m+ϕ≠2。

因为 G 不是树，所以存在非割边 e，显然 G-e 是连通平面图，边数为 m-1，顶点数为 n，面数为 ϕ-1。由最少性假设 G-e 满足欧拉恒等式：n-(m-1)+(ϕ-1)=2，化简为 n-m+ϕ=2。

而这与假设矛盾。

3） 几个重要推论

推论 1：设 G 是具有 n 个点，m 条边，ϕ 个面的连通平面图，如果对 G 的每个面 f，有 deg(f) ≥l≥3，则：

$$m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$$

证明：

联系欧拉恒等式和次数公式有：

$$\begin{cases} (n)-m+d=2 \\ 2m \ge ld \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=2+m-n \\ d \le \dfrac{2m}{l} \end{cases}$$

$$2+m-n \le \frac{2m}{l}$$

$$m \le \frac{(n-2)l}{l-2}$$

推论 2：设 G 是具有 n 个点，m 条边，ϕ 个面的简单平面图，则：m ≤ 3n-6。

证明：

情形 1：当图 G 是连通图的简单平面图，因 G 中至少有 3 个点，故 G 相应的平面图中每个面的次数至少为 3，有将 l=3 带入推论 1 中的不等式得:

$$m \le \frac{3}{3-2}(n-2)=3n-6$$

情形 2：当图 G 是不连通的，对于每一个顶点数大于 3 的连通分支由情形 1 可知不等式成立。

对于 G 中所有小于 3 个顶点的连通分支的边数为 m2,中顶点数为 n2，此时有 m2≤n2≤3n2。

于是 m1+m2≤3(n1+n2)-6，从而有 m≤3n-6

若 G 中没有大于两个顶点的连通分支，此时 m≤n。

因 n≥3 时，n≤3n-6，所以有 m≤3n-6

推论 3：设 G 是具有 n 个点，m 条边的简单平面图，则：δ ≤ 5。（证明）

证明：

对于 n 为 1,2 时，可直接验证等式成立。

设 $n\geq3$，若 $\delta\geq6$，则有：

$$6n \leq \sum_{V\in V(G)} d(v) = 2m \Rightarrow m > 3n > 3n-6$$

这与推论 2 相矛盾，所以 $\delta \leq 5$。

4） 对偶图的性质

定理：平面图 G 的对偶图必然连通。

证明：

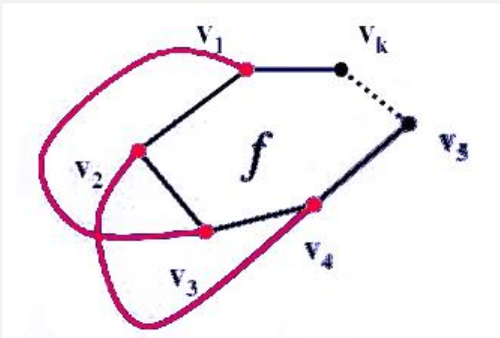
在图 G 的对偶图 G*中任取两点 v_i*和 v_j*。用一条曲线 l 把 v_i*和 v_j*连接起来，且 l 不与 G*中任意顶点相交。显然，曲线 l 从 v_i*到 v_j*经过的面边序列对应的从 v_i*到 v_j*的点边序列，该点边序列就是该两点在 G*中的通路。

5） 极大平面图的性质

定理：设 G 是至少 3 个顶点的平面图，则 G 是极大平面图，当且仅当 G 的每个面的次数是 3 且为单图。

证明：

必要性： 已知 G 是单图，无割边且 G 的每个面的次数大于等于 3。假设图 G 中存在某个面 f 的次数大于 4，记 f 的边界为 $v_1,v_2,v_3,v_4,\ldots,v_k$。如下所示：



如果 v1 与 v3 不邻接，则连接 v1 与 v3，虽然没有破坏 G 的平面性但这与 G 是极大平面图矛盾，所以 v1 与 v3 必须邻接但必须在 f 面的外面。同理 v2 与 v4 也必须邻接且边在 f 的外面。但边 v1v3 与边 v2v4 在 f 外交叉，这又与 G 是可平面图矛盾。

所以，G 的每一个面的次数一定是 3。

6） 定理：存在且只存在 5 种正多面体：他们是正四，六，八，十二，二十面体。

证明：

任取一正 ϕ 面体，其顶点数、棱数分别是 n 和 m。对应的一维骨架是一个每个面次数为 l，顶点度数为 r 的简单平面正则图 G。

由握手定理得：

$$2m = nr \Rightarrow m = \frac{nr}{2} \cdots (1)$$

由次数公式和 1 式得：

$$2m = \Phi l \Rightarrow \Phi = \frac{2m}{l} = \frac{nr}{l} \cdots (2)$$

将 1 式和 2 式带入欧拉公式得：

$$n - m + \Phi = 2$$

$$n = \frac{4l}{2l - lr + 2r} \cdots (3)$$

由 3 式可知 2l-lr+2r>0 ⇒ 2>lr/(l+r)，故有以下不等式组：

$$\begin{cases} 2 > \frac{lr}{r+l} \\ l \geq 3 \\ r \geq 3 \end{cases}$$

此不等式有 5 组解。

9. 着色问题

1） 边着色

定理：$\chi'(K_{m,n}) = \Delta$。

证明：

设 $X=\{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\}$、$Y=\{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$

又设 Δ=n，设颜色集合为{0, 1, 2, ..., n-1}，π 是 $K_{m,n}$ 的一种着色方案，满足：

$$\forall x_i y_j \in E(K_{m,n}), \ \pi(x_i y_j) = (i + j)(mod\ n)$$

此时证明，上面的着色是正常边着色。

对 Km,n 中任的两条邻接边 x_iy_j 和 x_iy_k。若 $\pi(x_iy_j) = \pi(x_iy_k)$，

则：i+j(mod n) = i+k(mod n)，从而得到 j=k，矛盾。所以上边着色是正常着色

因此：$\chi'(K_{m,n}) \leq n$

又显然 $\chi'(K_{m,n}) \geq \Delta = n$，所以 $\chi'(K_{m,n}) = n$。

定理：（哥尼）若 G 是偶图，则 χ'(G)= Δ。

证明：

对偶图 G 的边数做数学归纳法

当 m=1 时，Δ=1，有 χ'(G)= Δ=1。

假设对于小于 m 条边的偶图来说该命题成立，则设图 G 是具有 m 条边的偶图。

取 uv∈E(G)，考虑 G1=G-uv，由归纳假设可得：

$$\chi`(G_1)=\Delta(G_1)\le\Delta(G)$$

这说明 G1 存在一种Δ(G)边着色方案，对于该方案来说，因为 uv 边未着色，所有 u，v 两点均至少缺少一个颜色。

情形 1：若 u,v 两点缺少同种颜色 i，则在 G1+uv 中给 uv 着色 i，而其他边按 G1 着色。这样可得到 G 的 Δ 着色方案。所以 χ′(G)= Δ。

情形 2：若 u 点缺 i 色，v 点缺 j 色但不缺 i 色。设 H(i,j)表示 G1 中由 i 色边和 j 色边导出的子图。显然该图的每个连通分支应当是 i 色边和 j 色边交替出现的路或圈。

对于 H(i,j)中含 v 点的分支来说因为 v 缺 i 色但不缺 j 色，所以在 H(i,j)中，点 v 的度数为 1。这说明 H 中含 v 的分支是一条路 P，进一步也可以说明，该分支中不含 u。如果 P 中含 u 则 P 的长度一定为偶数，这样 P+uv 就是 G 中的奇圈，这与 G 是偶图想矛盾。

所以 P 不含 u，故可以交换 P 中的着色，而不破坏 G1 的正常边着色。交换着色后，v，u 均缺 i 色，由情形 1 可知 χ′(G)= Δ。

定理：（维津定理）若 G 是单图，则：χ′(G)= Δ 或 χ′(G)= Δ+1。

证明：

只需证明 χ′(G) ≤Δ+1 即可。

对 G 的边数 m 做数学归纳法。

当 m=1 时，Δ=1，χ′(G) = 1 ≤ Δ+1

设当图 G 的边数少于 m 时，该定理成立。现考虑含有 m 条边的单图 G。

设 xy∈E(G)，令 G_1=G-xy。由数学归纳法有：

$$\chi`(G_1)\le\Delta(G_1)+1\le\Delta(G)+1$$

于是 G1 存在 Δ(G)+1 正常边着色 π。显然图 G_1 中每个顶点都至少缺一种颜色。由引理可知 G_1+xy 是可 Δ+1 边着色的。

引理：图 G 是简单图，x 与 y_1 是不相邻的两点。π 是图 G 的一种 k 边着色方案。若 x，y_1 以及 x 的相邻点均至少缺一种颜色，则 G+xy_1 是 k 边可着色的。

定理：设 G 是单图且 Δ(G)>0。若 G 中只有一个最大度点或恰有两个相邻的最大度点，则 χ′(G)= Δ(G)。

证明：

情形 1：若单图 G 恰有一个最大度点 u，做 G_1=G-uv，v 点是 u 点任意一相邻点。那么由维津定理可得：

$$\chi`(G_1)\le\Delta(G)-1+1=\Delta(G)$$

即图 G_1 是可 Δ(G)边色着色的。可知图 G_1 中任意顶点都至少缺一种颜色，由引理可得图 G_1+uv 是可 Δ(G)边色着色的。因此 χ′(G)= Δ(G)。

情形 2：若单图 G 恰有两个邻接的最大度顶点 u,v。做图 G1=G-uv。由维津定理可得：

$$\chi'(G_1) \leq \Delta(G) - 1 + 1 = \Delta(G)$$

即图 G1 是可 Δ(G)边色着色的。可知图 G_1 中任意顶点都至少缺一种颜色，由引理可得图 G_1+uv 是可 Δ(G)边色着色的。因此 χ'(G)= Δ(G)。

引理：图 G 是简单图，x 和 y1 是两个不相邻的顶点，π 是图 G 的一种 k 边可着色方案。若 x，y1 以及 x 相邻的顶点均至少缺一种颜色的话，那么 G+xy1 是 k 边可着色的。

定理：设 G 是单图，若点数 n=2k+1 且边数 m>kΔ，则：χ'(G)= Δ+1。

证明：

假设该命题为假，有维津定理可知该单图 G 的边色数 χ'(G)= Δ。

设 π 是图 G 的一种着色方案，对于 G 中的每个色组来说，其所包含的边数至多为(n-1)/2=k。

而这样则有 m(G) ≤kΔ。而这与边数 m>kΔ 相矛盾。所以原命题为真。

定理：设 G 是奇数阶 Δ 正则图，若 Δ>0，则：χ'(G)= Δ+1。

证明：

设图 G 的顶点数 n=2k+1，且图 G 为 Δ 正则图，Δ>0，由此可得：

$$m(G) = \frac{n\Delta}{2} = \frac{2k+1}{2}\Delta > k\Delta$$

由定理 1 可知，χ'(G)= Δ+1。

定理 1：若图 G 是单图，点数 n=2k+1 且 m>kΔ，那么 χ'(G)= Δ+1。

2） 点着色

定理：对任意的图 G，有 χ(G) ≤ Δ(G)+1

证明：

对顶点做数学归纳法

当 n=1 时，结论显然成立

假设该结论对顶点数少于 n 的图成立，现考虑顶点数为 n 的图 G，设 G_1=G-v，v 为图 G 中的任意一点。

$$\chi(G_1) \leq \Delta(G_1) + 1 \leq \Delta(G) + 1$$

即图 G_1 存在这一种 Δ(G)+1 点着色方案 π，由于点 v 的邻接点至多用去 Δ(G_1)种颜色，所以给点 v 染上其邻接点都没有用过的颜色。就可以把点着色方案 π 扩充为图 G 的 Δ(G)+1 点着色方案。

10. 根树问题

在完全 m 元树 T 中，若树叶树为 t，分支点树为 i，则：(m-1)i=t-1。

> **证明：**
>
> 由前提条件可知，该完全 m 元树 T 共有顶点数 n=t+i
>
> 由于 T 是树，所以其边数 l=n-1=t+i-1
>
> 因为根树是有向树，所以边数 l 应当等于所有入度之和，即：
>
> $$mi = t + i - 1$$
> $$(m-1)i = t - 1$$

11. 拉姆齐数

设 m 和 n 是两个正整数，如果存在最小的 r(m, n)阶的图 G,使得 G 中或者有 K_m 或者有 n 个顶点的独立集，则称正整数 r(m, n)为(m, n)拉姆齐数。

> **求 r(3,3)**
>
> 首先我们可以知道 C_5 中既不含 K_3，也不含有 3 点独立集，所有 r(3,3) ≥6；
>
> 其次，可以证明，任一 6 阶单图，或者含有 K_3，或者含有 3 点独立集。
>
> 情形 1：若 G 中至少有 3 个点与 v_1 邻接。不失一般性，设 v_1 与 v_2, v_3, v_4 邻接。如果 v_2, v_3, v_4 互不邻接，则他们构成 G 的 3 点独立集；否则，显然在 G 中存在 K_3。
>
> 情形 2：若 G 中至多有 2 个点与 v_1 邻接。那么在 G 的补图中至少有 3 个顶点与 v_1 邻接。于是有情形 1，G 的补图中或者存在 K_3，或者存在 3 点独立集，当然在 G 中也就或者存在 3 点独立集或者存在 K_3。
>
> 所以，r(3, 3)=6。

12. 独立集与覆盖

定理：（加莱恒等式）对任意不含孤立点的 n 阶图 G，有：α(G)+ β(G)=n。

> **证明：**
>
> 一方面，设 V_1 是 G 的最大点独立集。因为 G 中每条边的端点最多一个在 V_1 中，所以 G 中每条边的端点至少有一个在 V-V_1 中。即 V-V_1 构成 G 的一个点覆盖，于是有：β((G) ≤|V-V-$_1$|=n-α(G)。
>
> 另一方面，设 K 是 G 的最小点覆盖。因为 G 中每条边的端点至少有一个在 K 中，所以 G 中每条边的端点至多有一个在 V-K 中。即 V-K 构成 G 的一个点独立集，于是有：α(G) ≥|V-K|=n-β (G)。
>
> 由上面两个不等式，得到：
>
> α (G)+ β(G)=n

定理：（加莱恒等式）对任意不含孤立点的 n 阶图 G，有：α'(G)+ β'(G)=n。

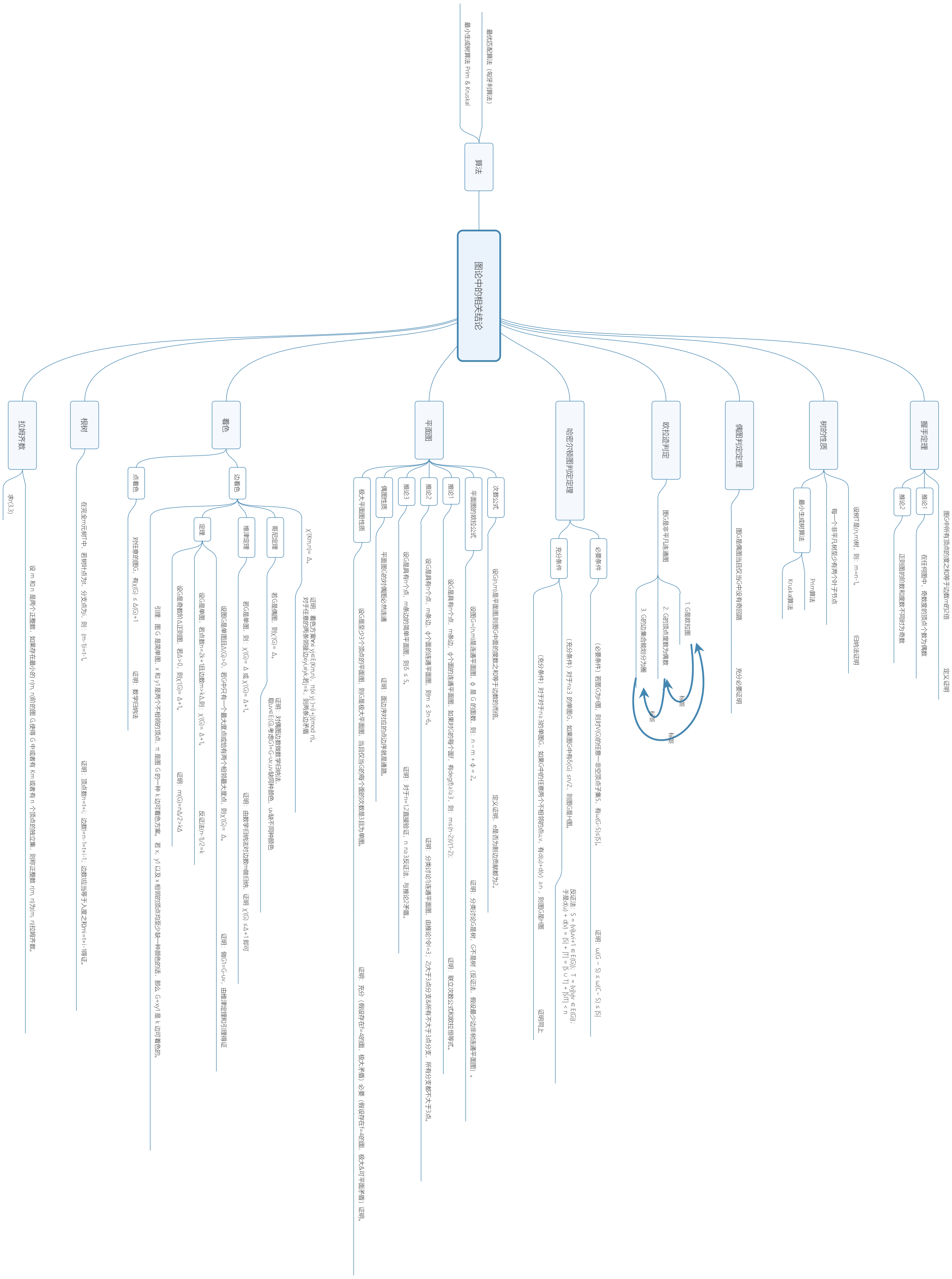
> **证明：**
>
> 一方面，设 α'(G)=k，则图 G 的一个最大匹配由 k 条边组成，且覆盖了 2k 个点，所以，余下的 n-2k 个点最多需要 n-2k 条边覆盖，因此有 β'(G) ≤k+(n-2k)=n-k=n-α'(G)；

另一方面，设 X 是图 G 的一个最小边覆盖，则$|X|=\beta'(G)$。考虑 $F=G[X]$的导出子图，可以得知 F 中不包含长度为 3 的迹，否则取长度为 3 的迹的中间一条边，删去该条边并不影响边覆盖这与最小边覆盖矛盾。

所以 F 是的每个连通分支都是星图，F 是森林。对于森林，有 $m=n-k$。m 是边数，n 是点数，k 是连通分支数。对于 F 有 $\beta'(G)=n-(n-\beta'(G))$，故 F 的连通分支数为 $n-\beta'(G)$。从 F 中的每个连通分支中选择一条边，即构成图 G 的一个匹配。则有 $\alpha'(G) \geq n-\beta'(G)$

综上所述因此有 $\alpha'(G)+\beta'(G)=n$

13. 总结



13.3、 图论应用

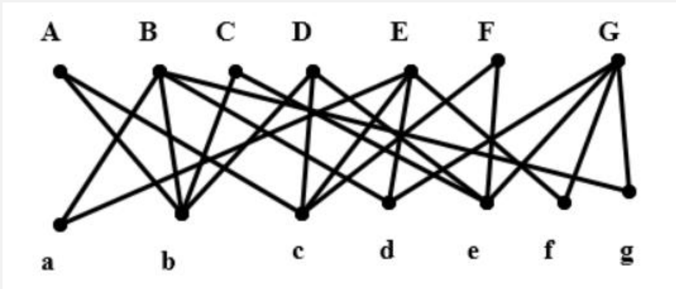
例 1

有 7 名研究生 A，B，C，D，E，F，G 毕业寻找工作。就业处提供的公开职位是：会计师（a）,咨询师（b），编辑（c），程序员（d），记者（e），秘书（f）和教师（g）。每个学生申请的职位如下：A:b,c； B:a,b,d,f,g；C:b,e；D:b,c,e；E:a,c,d,f；F:c,e；G:d,e,f,g；

问：学生能找到理想的工作吗？

答：

令 X={A,B,C,D,E,F,G}，Y={a,b,c,d,e,f,g}，X 中顶点与 Y 中顶点相连当且仅当学生申请了该工作。于是如下偶图 G，该问题可转化为图 G 是否存在完美匹配。



解法 1：

对图 G 实施匈牙利算法过程如下：

1） 任选一个匹配 M={<Ac>}作为初始匹配;
在 V 中寻找一不饱和点 B,令 V1={B},V2={};
此时 N(V1)={abdfg},令 y=a∈N(V1)-V2;
y 不饱和，故将 M=M∪{<Ba>}={<Ac>,<Ba>};

2） 在 V 中寻找一不饱和点 C，令 V1={C},V2={};
此时 N(V1)={be},令 y=b∈N(V1)-V2;
y 不饱和，故将 M=M∪{<Cb>}={<Ac>,<Ba>,<Cb>};
在 V 中寻找一不饱和点 D,令 V1={D},V2={};

3） 此时 N(V1)={bce}，令 y=b∈N(V1)-V2;
y 饱和，M 中已存在<Cb>，V1=V1∪C={D,C},V2=V2v{b}={b};
此时 N(V1)={bce},令 y=c∈N(V1)-V2;
y 饱和，M 中已存在<Ac>,V1=V1∪A={A,C,D},V2=V2∪{c}={b,c};
此时 N(V1)={bce}，令 y=e∈N(V1)-V2;
此时 y 不饱和，故 M=M∪{<D,e>}={<Ac>,<Ba>,<Cb>,<De>}

4） 在 V 中寻找一不饱和点 E，令 V1={E},V2={};
此时 N(V1)={acdf},令 y=d∈N(V1)-V2;
此时 y 不饱和，故 M=M∪{<E,d>}={<Ac>,<Ba>,<Cb>,<De>,<Ed>}

5） 在 V 中寻找一不饱和点 F，令 V1={F},V2={};
此时 N(V1)={ce},令 y=c∈N(V1)-V2;
y 饱和，M 中存在<Ac>，令 V1=V1∪{A}={FA},V2=V2∪{c}={c};
此时 N(V1)={bce},令 y=b∈N(V1)-V2;

y 饱和，M 中存在<Cb>，令 V1=V1∪{C}={FAC},V2=V2∪{b}={cb};

此时 N(V1)={bce},令 y=e∈N(V1)-V2;

y 饱和，M 中存在<De>,令 V1=V1∪{D}={FACD},V2=V2∪{e}={cbe};

此时 N(V1)={bce}

因为 N(V1)=V2 所以算法结束。此时 V 中依然还有不饱和的点，所以无完美匹配。

由此可值，图 G 中不存在完美匹配。即不能让每个学生都找到理想的工作。

解法 2：

当 S 取 X 中的四个元素集时，若取 S={A,C,D,F},则有 3=|N(S)|<|S|=4。所以不存饱和 X 每个顶点的匹配。

例 2

（排课问题）在一个学校中，有 7 个教师 12 个班级。在每周 5 天教学日条件下，教课的要求由如下矩阵给出：x_i 表示第 i 行，y_j 表示第 j 列。

$$P=\begin{bmatrix}3&2&3&3&3&3&3&3&3&3&3&3\\1&3&6&0&4&2&5&1&3&3&0&4\\5&0&5&5&0&0&5&0&5&0&5&5\\2&4&2&4&2&4&2&4&2&4&2&3\\3&5&3&3&0&3&1&4&4&3&2&5\\5&5&0&0&5&5&0&5&0&5&5&0\\0&3&4&3&4&3&4&3&4&3&3&0\end{bmatrix}$$

其中 p_{ij} 表示 x_i 必须教 y_j 班的节数。求：

1) 一天分成几节课，才能满足所提出的要求？
2) 若安排出每天 8 节课的时间表，需要多少教室？

答：

令 X={x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7}，Y={y1, y2, y3, y4, y5, y6, y7, y8, y9, y10, y11, y12}。X 中顶点与 Y 中顶点相连当且仅当教师 x_i 上 y_j 的课，p_{ij} 为重边的数。则该问可以化为偶图的边着色问题。一节课对应着一个色组。

因为图 G 中Δ(G)=35，这样，最少的总课时 35 节课。平均每天 7 节课。

图 G 中总边数为 240，每天安排 8 节课，一周 5 天，总共需要教室数量为：240/40=6 间。

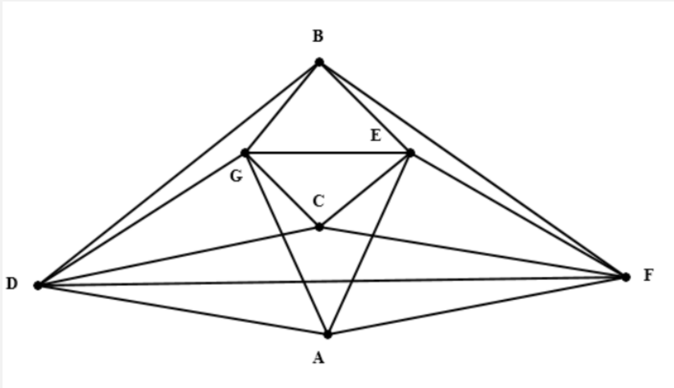
例 3

（比赛问题）Alvin(A)曾邀请 3 对夫妇到他家的避暑别墅住一个星期。他们是：Bob(B)和 Carrie(C)、David(D)和 Edith(E)、Frank(F)和 Gena(G)。由于这 6 个人都喜欢网球运动，所以他们决定进行网球比赛，6 位客人都喜欢网球运动，所以他们决定进行网球比赛。6 位客人的每一位都要和其配偶之外的每位客人比赛。另外，Alvin 将分别和 David、Edith、Frank，Gena 进行一场比赛。若没有人在同一天进行 2 场比赛，则要在最少天数完成比赛，如何安排?

答：

用点表示人，两点之间连线当且仅当两人之间有比赛。这样就可以构建一个图 G。则该问题可以转化为对图 G 进行边着色，每一个色组表示一天要进行的比赛。

图 G 如下所示：



图G

可在图 G 中，顶点 n=3*2+1=7，m=16，Δ(G)=5。由定理 1 可知边着色数 χ`(G)= Δ(G)+1=6。

定理 1：在单图 G 中，若点数 n=2*k+1，且边数 m>kΔ，那么 χ`(G)= Δ(G)+1。

例 4：

（课程安排问题）某大学数学系要为这个夏季安排课程表。所要开设的课程为：图论(GT)、统计学(S)、线性代数(LA)、高等微积分(AC)、几何学(G)和近似代数(MA)。现有 10 名学生（如下所示）需要选修这些课程。根据这些信息，确定开设这些课程所需要的最少时间段数，使得学生选课不会发生冲突。

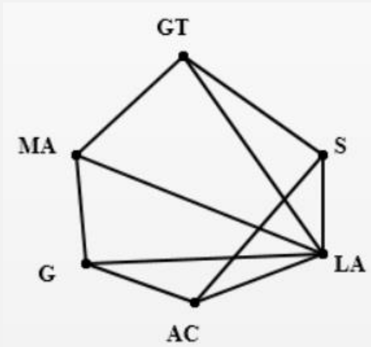
A1:LA, S；A2:MA,LA,G；A3:MA,G,LA；A4:G,LA,AC；A5:AC,LA,S；

A6:G,AC；A7:GT,MA,LA；A8:LA,GT,S；A9:AC,S,LA；A10:GS,S；

答：

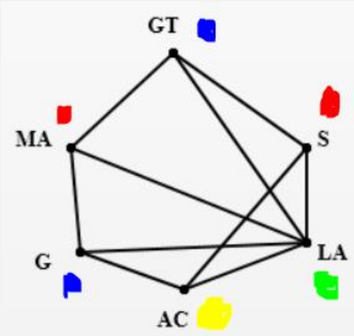
将要开设的课程看做点，两点之间连线当且仅当有同学同时选择了这两门课程。如此即可构建图 G。同一个学生不能同时上两门课当且仅当相邻顶点不能用同种颜色着色。这样就讲该问题转化为对图 G 的点着色问题。

如上所述构建图 G 如下：



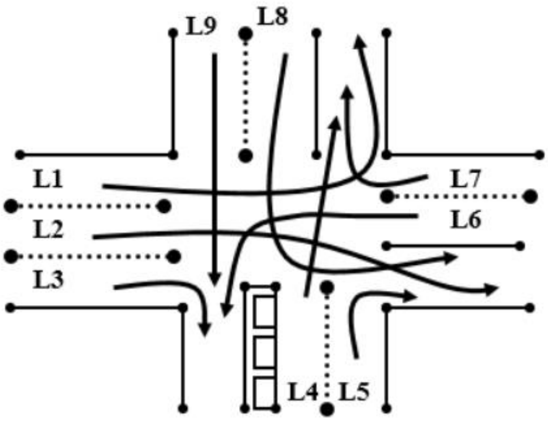
由图可知，图 G 中存在奇圈{GT, S, AC, G, MA, GT}。因此图 G 的点色数 χ(G) ≥3。又因为 LA 点与圈上的每个点都相连，故 χ(G) ≥4；

另一方面，图 G 可以被 4 中颜色着色，方案如下，故至少需要 4 个时间段。



例 5

交通灯的相位设置问题：如图所示，列出了繁华街道路口处的交通车道 L1, L2, L3, ..., L9。在此路口处安置了交通灯。当交通灯处于某个相位时，亮绿灯的车道上的车辆就可以安全通过路口。为了（最终）让所有车辆的灯都能安全通过路口，对于交通灯来说，所需要的相位的最小数是多少？



答：

将该路口的车道视为顶点，两顶点连线当且仅当两车道的车不能同时安全的通过路口。由此可以构建图 G。

由道路图可知

1)L1 与 L9, L8, L4, L7 冲突；

2)L2 与 L9, L6, L8, L4, L5 冲突；

3)L3 与 L9, L6 冲突；

4)L4 与 L8, L2, L6, L1, L7 冲突；

5)L5 与 L2, L8 冲突；

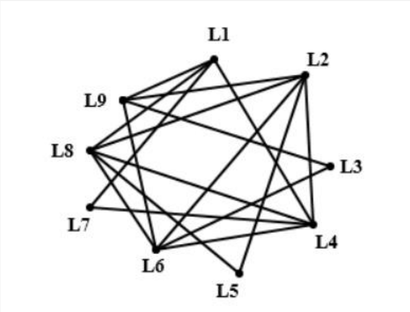
6)L6 与 L4, L8, L2, L9, L3 冲突；

7)L7 与 L1, L4 冲突；

8)L8 与 L1, L6, L2, L4, L5 冲突；

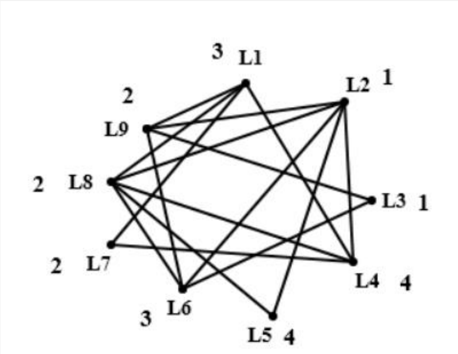
9)L9 与 L1, L2, L3, L6 冲突；

由此可做图 G 如下所示：



两个车道不能同时同行，当且仅当两点之间有连线。即该问题可以转为对图 G 进行点着色问题，即相邻顶点不能用同一种颜色着色。每一种颜色代表可同时同行的道路。观察图 G 可知，L2, L4, L6, L8 四个点构成了 K4。故 $\chi(G) \geq 4$。

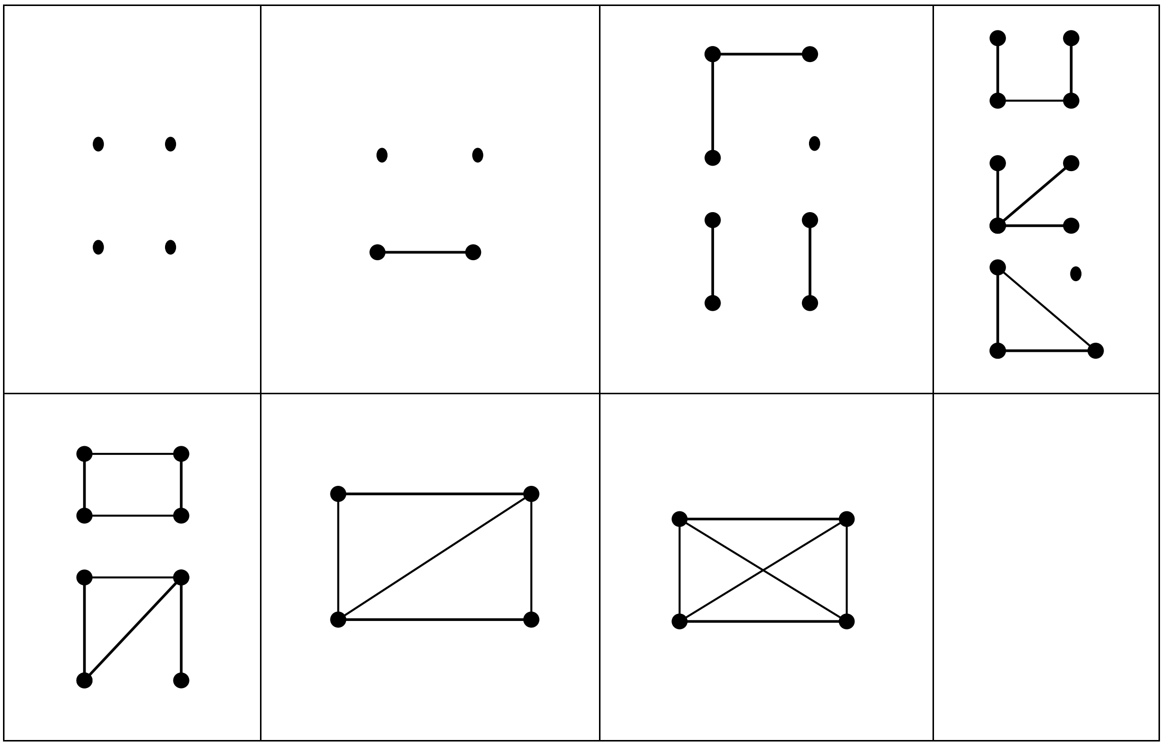
另一方面对图 G 尝试，可以实现用 4 中颜色进行着色。着色方案如下所示。



所以，交通灯的最小相位为 4。

13.4、 例题

1. 指出 4 个顶点的非同构的所有简单图



2. 证明若 n 阶的图 G 是自补图(G1≅G2)，则有：n=0, 1(mod 4)。

证明：n 阶的图 G 是自补图，则有：

$$m(G)+m(\bar{G})=m(K_n)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

所以：

$$m(G)=\frac{1}{4}n(n-1)$$

由于 n 是正整数，所以 n=0, 1(mod 4)。

3. 定理 6 存在且只存在 5 种正多面体：它们是正四、六、八、十二、二十面体。