Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

SANAS

Repaso de algebra lineal

Problemas

Autor:
Ivan Imanol Robles Mejia

Septiembre 2024

1. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $i - j$, $3i + 2k$ y $-7j + 3k$.

Por la definición del triple producto escalar $u \cdot (v \times w)$ sabemos que su definición de valor absoluto es ser el volumen de un paralelepípedo formado por tres vectores distintos. Entonces definimos los vectores u, v y w como:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

El triple producto escalar se define como:

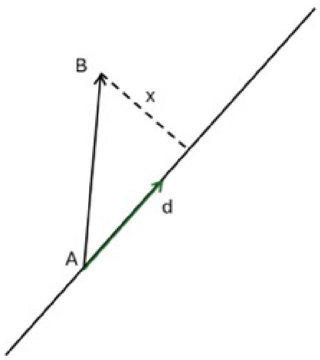
$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Siendo a_1, b_1, y c_1 los elementos del vector u, a_2, b_2 y c_2 son los elementos del vector v y así sucesivamente. Entonces sustituyendo (1) en los valores de los vectores en (2) y desarrollando el determinante, tenemos como resultado:

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 23 \tag{3}$$

Por lo tanto, el volumen será igual a 23 u^3.

2. Encuentra la distancia desde el punto $B = (1, 0, 2)$ hasta la recta "l" a través del punto $A = (3, 1, 1)$ con vector director $d = (-1, 1, 0)$.



Para encontrar la distancia más corta x entre B y l debemos encontrar un vector formado entre un punto de la recta y B, para así proyectarlo sobre la recta y restar el vector encontrado con dicha proyección.

Observamos gracias a la figura que podemos obtener un vector u a partir de los puntos A y B, obteniendo así:

$$u = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que la proyección esta definida como:

$$\text{proy}_d u = \frac{u \cdot d}{|d|^2} d \tag{1}$$

Sustituyendo los vectores d y u en (1) tenemos que:

$$u \cdot d = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$|d|^2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2}^2 = 2$$

$$\text{proy}_d u = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Ahora para obtener a x tenemos que:

$$x = |u - \text{proy}_d u| = \left| -2 + \tfrac{1}{2}, \quad -1 - \tfrac{1}{2}, \quad 1 \right| = \left| -\tfrac{3}{2}, \quad -\tfrac{3}{2}, \quad 1 \right| \tag{3}$$

Resolviendo (3) obtenemos que la distancia entre B y l es:

$$x = 2.345\ u$$

3. Sea la matriz A y suponiendo que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Demuestre que $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$.

   Definiendo a la matriz A como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

   Debemos tener en cuenta que la determinante de A es:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

   Sabemos que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Realizando la operación obtenemos que:

$$A^{-1}A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & a_{22}a_{12} - a_{12}a_{22} \\ -a_{21}a_{11} + a_{11}a_{21} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{bmatrix}$$

   Podemos percatarnos que los elementos de la diagonal principal son igual a la determinante de la matriz A y los otros dos elementos da igual a cero. Quedando:

$$\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

   Quedando demostrado que A^{-1} es la inversa de A.

4. Sea $P_1 = (1, 1, -\frac{1}{4})$ y $\overrightarrow{n_1} = [3, 3, 8]$ un punto conocido en π_1 y un vector normal a este plano, respectivamente. Así como $P_2 = (1, 1, \frac{11}{6})$ y $\overrightarrow{n_2} = [3, 3, -6]$ otro punto en π_2 y un vector normal a este plano. Determine todos los puntos de intersección entre los planos π_1 y π_2.

Teniendo en cuenta la forma normal de la ecuación del plano:

$$\overrightarrow{n}Q = \overrightarrow{n}P \tag{1}$$

Siendo $\overrightarrow{n}$ un vector normal al plano, Q y P un punto en el plano. Sustituyendo en (1) los puntos y vetores del problema, tenemos que:

Para π_1:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Para π_2:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{11}{6} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Podemos obtener a partir de (2) y (3) la forma general de la ecuación para π_1 y π_2:

$$3x + 3y + 8z = 4 \tag{4}$$
$$3x + 3y - 6z = -5 \tag{5}$$

Para determinar todos los puntos de intersección entre los planos debemos resolver este sistema de ecuaciones, usando la eliminación Gauss-Jordan con (4) y (5), obtenemos que:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 3 & -6 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -14 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = -\frac{R_2}{14}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 = R_1 - 8R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & -\frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = \frac{R_1}{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{8}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right) \tag{6}$$

Resolviendo la matriz obtenida en (6), tenemos como resultado que los puntos de intersección están conformados por:

$$x = x, \quad y = x + \frac{8}{21}, \quad z = \frac{9}{14}, \quad -\infty < x < \infty$$

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$, encuentre un vector no nulo $b = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tal que $Ab = 6b$.

Sustituyendo la matriz A y el vector b en la ecuación $Ab = 6b$ tenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Teniendo así el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 6x \\ 8x - 6y &= 6y \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos que:

$$y = \frac{2}{3}x \tag{1}$$

Por lo que, sustituyendo a (1) en el vector b, obtenemos el vector:

$$b = \begin{bmatrix} x \\ \frac{2}{3}x \end{bmatrix}, \quad para\ x \neq 0$$

Para $x = 1$ tenemos que:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Obteniendo asi un vector no nulo b.

6. Determine si la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ es invertible. Pista factorización LU.

Si A es una matriz singular (no invertible) entonces la forma escalonada por renglones de A debe tener al menos un renglón de ceros al igual que la forma triangular de A, lo que implica que la factorización LU no sería única. Por la definición de la factorización LU:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{bmatrix} \tag{1}$$

Desarrollando la multiplicacion de matrices en (1) obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 2a & 3a+u & 2a+v & 4a+w \\ 2b & 3b+cu & 2b+cv+x & 4b+cw+y \\ 2d & 3d+eu & 2d+ev+fx & 4d+ew+fy+z \end{bmatrix} \tag{2}$$

Resolvemos para encontrar las incógnitas resultando en:

$$\begin{array}{cccc} a = 2 & b = -\frac{3}{2} & c = \frac{5}{8} & d = -1 \\ e = \frac{7}{4} & f = \frac{20}{3} & u = 4 & v = -8 \\ w = -8 & x = 3 & y = 9 & z = -49 \end{array} \tag{3}$$

Sustituyendo a (3) en (1) obtenemos así la matriz L y U como:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{bmatrix}$$

Al existir una factorización LU única podemos concluir que la matriz A es invertible.

7. Muestre que si A es triangular, entonces el determinante de $A \neq 0$, si y solo si todos los elementos en la diagonal son diferentes de cero.

Definimos las matrices triangulares A y B como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ahora obtendremos las determinantes de dichas matrices:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$-0 \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} a_{nn}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} a_{nn}$$

Podemos observar que para el caso de $|A|$ los elementos de la fila 1 se vuelven cero al descomponerla por cofactores y sucederá lo mismo a la hora de calcular la determinante del cofactor A_{11}. Para el caso de $|B|$ podemos observar que para los cofactores distintos de A_{11} son igual a cero debido a que siempre contendrán su primera columna llena de ceros y sucede algo similar al caso de $|A|$ con el determinante del cofactor A_{11}. Con esto en mente podemos concluir que, para las matrices triangulares, su determinante se calcula como el producto de los elementos de su diagonal principal.