

# Микроэкономика-I

---

Павел Андреянов, PhD

14 февраля 2024 г.

Напомним себе

---

# Напомним себе

	КД-1	КД-2	Леонтьев	Линейная
$U$	$\alpha \log x + \beta \log y$	$x^\alpha y^\beta$	$\min(x/a, y/b)$	$x/a + y/b$
$m_x$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{W}{p}$	...	$\frac{ap}{ap+bq} \frac{W}{p}$	$\frac{W}{p}$ или 0
$V$	$(\alpha + \beta) \log W - \alpha \log p - \dots$	$\frac{W^{\alpha+\beta}}{p^\alpha q^\beta} \cdot K_1$	$\frac{W}{ap+bq}$	$\frac{W}{\min(ap, bq)}$
$E$	$(\frac{p^\alpha q^\beta}{K_1} \log \bar{U})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$	$(\frac{p^\alpha q^\beta}{K_1} \bar{U})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$	$(ap + bq) \cdot \bar{U}$	$\min(ap, bq) \cdot \bar{U}$
$h_x$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} p^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} \cdot K_2$	...	$a \cdot \bar{U}$	$a \cdot \bar{U}$ или 0

Зачем нам это знание?

# Сценарий 1

---

## Сценарий 1.

У вас есть данные расходам на еду ( $p_x$ ) и все. Доля варьируется от агента к агенту но условно на агента она меняется не сильно.

На что это похоже?

## Сценарий 1.

У вас есть данные о доле расходов на еду ( $p_x/W$ ) и все. Доля варьируются от агента к агенту но условно на агента она меняются не сильно.

Это похоже на кобб дугласа, где

$$U = \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y$$

## Сценарий 1.

У вас есть данные о доле расходов на еду ( $p_x/W$ ) и все. Доля варьируются от агента к агенту но условно на агента она меняются не сильно.

Это похоже на кобб дугласа, где

$$p m_x / W = \alpha$$

## Сценарий 1.

У вас есть данные о доле расходов на еду ( $p_x/W$ ) и все. Доля варьируется от агента к агенту но условно на агента она меняется не сильно.

Тогда  $\alpha$  это коэффициент регрессии доли расходов на константу, возможно с какими то характеристиками агента

Это называется «калибровка»



## Сценарий 2

---

## Сценарий 2.

У вас есть данные суммарным расходам ( $E$ ) и по ценам на еду ( $p$ ) и транспорт ( $q$ ), и больше ничего.

А как тут откалибровать кобб дугласа?

## Сценарий 2.

У вас есть данные суммарным расходам ( $E$ ) и по ценам на еду ( $p$ ) и транспорт ( $q$ ), и больше ничего.

Пусть  $U = \alpha \log x + \beta \log y + (1 - \alpha - \beta) \log z$

## Сценарий 2.

У вас есть данные суммарным расходам ( $E$ ) и по ценам на еду ( $p$ ) и транспорт ( $q$ ), и больше ничего.

Тогда  $\log E = \alpha \log p + \beta \log q + \text{const}$

## Сценарий 2.

У вас есть данные суммарным расходам ( $E$ ) и по ценам на еду ( $p$ ) и транспорт ( $q$ ), и больше ничего.

Это похоже на регрессию логарифма расходов на логарифмы всех доступных цен

## Сценарий 3

---

## Сценарий 3.

У вас есть данные по отношению расходов на еду к расходам на транспорт ( $p_x/q_y$ ) и отношению цен на еду и транспорт( $p/q$ ).

Что можно тут придумать?

## Сценарий 3.

У вас есть данные по отношению расходов на еду к расходам на транспорт ( $px/ry$ ) и отношению цен на еду и транспорт( $p/q$ ).

Если у вас в голове кобб дуглас, то только регрессия  $px/ry$  на константу даст вам коэффициент  $\alpha/(1 - \alpha)$ .



## Сценарий 3.

У вас есть данные по отношению расходов на еду к расходам на транспорт ( $p_x/q_y$ ) и отношению цен на еду и транспорт ( $p/q$ ).

Если у вас в голове леонтьев, то только регрессия  $p_x/q_y$  на  $p/q$  даст вам коэффициент  $a/b$ .

Хорошее знание законов поведения спроса позволяет подогнать удобную полезность под данные. Правда, многое зависит от того, хиксианский спрос или маршаллианский.

Ответить на этот вопрос не так просто, но можно поспекулировать

- госслужащие это минимизация расходов
- частный сектор это максимизация полезности

# Налогои

---

Исторически сложилось так, что государство финансирует свою деятельность, а также производство общественных благ за счет налогообложения. Есть три вида налогов:

- **подходный фиксированный**, или паушальный (от нем. "Pauschale"), налог
- **подходный пропорциональный** налог
- **товарный** налог

В разные периоды времени разные налоги пользовались популярностью.

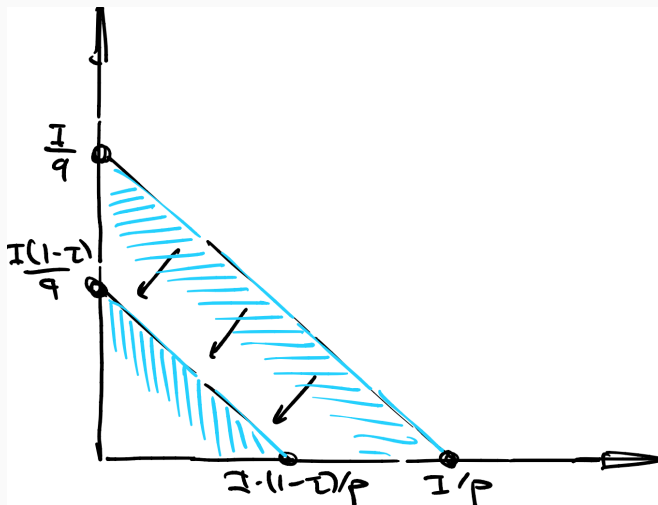
Простота паушального налога в том, что его можно ввести практически моментально, и его имплементация сводится к знанию своих подданных в лицо. Однако вы не можете установить паушальный налог больше, чем, грубо говоря, минимальный прожиточный минимум.

То есть, чтобы собрать большую сумму паушальным налогом, вам придется освободить какую-то часть населения от этих налогов. Как только вы начинаете дискриминировать, то есть говорить кому платить, а кому не платить налог, он становится в какой-то степени пропорциональным.

Обычный пропорциональный налог означает, что каждый агент платит пропорционально своему доходу. К примеру, когда король Ричард Львиное Сердце попал в плен, английской короне пришлось платить выкуп за счет временного пропорционального налогообложения размером 25%.

Таким образом, удалось в короткие сроки собрать огромную по тем временам сумму, примерно составляющую трехгодовой объем английской казны.

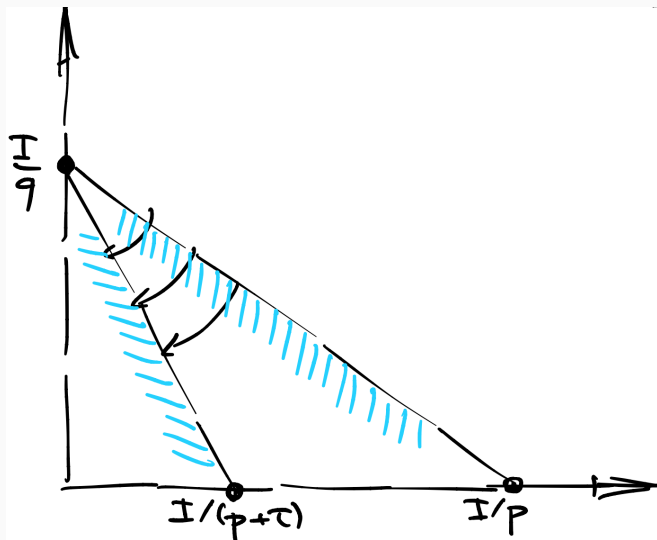
# Подходные налоги



Товарный налог хорошо адаптируется под быстро меняющуюся экономику. Например, если какой-то город начинает экономически расти, растут требования к окружающей его инфраструктуре: дороги, дома для рабочих, школы и университеты и так далее. Но также растут продажи товаров и услуг и, соответственно, растут налоговые сборы, покрывающие инвестиции в инфраструктуру.



# Товарный налог



Задача налогообложения может быть сформулирована как либо максимизация чистых налоговых сборов, либо максимизация косвенной полезности при фиксированных налоговых сборах.

На выбор есть подоходный и товарный налог.

# Налоги в Коббе-Дугласе

---

Рассмотрим полезность Кобба-Дугласа

$$U(x, y) = \alpha \log x + \beta \log y$$

и введем налог размера  $\tau$ . Наш анализ оптимального налогообложения будет сильно зависеть от того, с какой легкостью мы выписываем косвенную полезность.

Если налог подоходный (доля  $\tau$ ), то налоговые сборы будут равны  $T = \tau W$  а косвенная полезность:

$$V(p, q, W|\tau) = (\alpha + \beta) \log(W(1 - \tau)) - \alpha \log(p) - \beta \log(q) + C$$

Максимизация чистых налоговых сборов тут не представляет сложности - надо просто выставить  $\tau = 1$ , то есть отобрать все деньги.

Максимизация косвенной полезности при фиксированных налоговых сборах тоже тривиальна:  $\tau = T/W$ .

Пусть товарные налоги равны  $\tau_x, \tau_y$  соответственно, тогда косвенная полезность равна:

$$V(p, q, W | \tau_x, \tau_y) = (\alpha + \beta) \log W - \alpha \log(p + \tau_x) - \beta \log(q + \tau_y) + C$$

а налоговые сборы:

$$T = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{W}{p + \tau_x} \tau_x + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{W}{q + \tau_y} \tau_y$$

Максимизация чистых налоговых сборов – это задача безусловной оптимизации:

$$T = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} W \frac{\tau_x}{p + \tau_x} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} W \frac{\tau_y}{q + \tau_y}$$

У этой задачи смешное решение: необходимо назначить бесконечно большой налог на оба товара, тогда удастся собрать, в пределе, точно  $W$ .

Это не очень реалистично.

Максимизация косвенной полезности при фиксированных налоговых сборах – это задача условной оптимизации.

Она уже более интересная:

$$V = \text{const} + \alpha \log\left(\frac{1}{p + \tau_x}\right) + \beta \log\left(\frac{1}{q + \tau_y}\right) \rightarrow \max_{\tau}$$

При ограничении

$$\alpha \frac{\tau_x}{p + \tau_x} + \beta \frac{\tau_y}{q + \tau_y} \geq (\alpha + \beta) \frac{T}{W}$$

или

$$\alpha \frac{p}{p + \tau_x} + \beta \frac{q}{q + \tau_y} \leq (\alpha + \beta) \left(1 - \frac{T}{W}\right)$$

Является ли эта задача выпуклой? (неочевидный ответ)



$$\mathcal{L} = -\alpha \log(p + \tau_x) - \beta \log(q + \tau_y) - \lambda \left( \alpha \frac{p}{p + \tau_x} + \beta \frac{q}{q + \tau_y} \right)$$

Условия первого порядка по  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ :

$$-\frac{\alpha}{p + \tau_x} + \lambda \frac{\alpha p}{(p + \tau_x)^2} = 0, \quad -\frac{\beta}{q + \tau_y} + \lambda \frac{\beta q}{(q + \tau_y)^2} = 0$$

Другими словами,

$$\frac{p + \tau_x}{p} = \lambda = \frac{q + \tau_y}{q}$$

То есть кажется, что оптимальные налоги должны быть выставлены пропорционально ценам (это же НДС!!!).

Складывается впечатление, что оптимальные налоги в Кобб-Дугласе пропорциональны ценам в Кобб-Дугласе, то есть, это подходящий налог или НДС.

Мы только что доказали, хоть и в малой общности, оптимальность единого НДС.

## Lemma 1 (Оптимальность НДС)

*Оптимальный налог в Кобб-Дугласе это единый НДС.*

# Правило Рамсея

---

# Фрэнк Рамсей

Фрэнк Рамсей (Frank Plumpton Ramsey) британский математик и экономист начала 20 века. Своей целью он ставил минимизировать ненужные потери общества при потреблении путём введения дифференцированной ставки налогообложения на различные товары.



## Правило Рамсея

Это в точности максимизация косвенной полезности при зафиксированных налоговых сборах (для простоты предположим что спрос зависит только от собственной цены):

$$\mathcal{L} = V(p + \tau_x, q + \tau_y) - \lambda(\tau_x m_x(p + \tau_x) + \tau_y m_y(q + \tau_y) - T)$$

Выпишем условия первого порядка (по  $\tau_x, \tau_y$ ):

$$\frac{dV}{d\tau_x} = \frac{\partial V}{\partial p} = \lambda[\tau_x \frac{\partial m_x}{\partial p} + m_x], \quad \frac{dV}{d\tau_y} = \frac{\partial V}{\partial q} = \lambda[\tau_y \frac{\partial m_y}{\partial q} + m_y]$$

Вспомним тождество Роя:

$$-\frac{\partial V}{\partial W} m_x = \frac{\partial V}{\partial p}, \quad -\frac{\partial V}{\partial W} m_y = \frac{\partial V}{\partial q}$$

несколько хитрых операций с дробями и получим

$$\frac{m_x}{m_y} = \frac{\tau_x \frac{\partial m_x}{\partial p} + m_x}{\tau_y \frac{\partial m_y}{\partial q} + m_y} \Leftrightarrow \frac{m_x \frac{\partial m_y}{\partial q}}{m_y \frac{\partial m_x}{\partial p}} = \frac{\tau_x}{\tau_y}$$

Мы только что доказали (немножко игнорируя вопросы выпуклости) один из самых нетривиальных фактов в теории оптимального налогообложения, называемое **Правилом Рамсея**.

## Lemma 2

*Оптимальные налоговые ставки (в процентах) обратно пропорциональны эластичностям (маршаллианского) спроса:*

$$\frac{\tau_x/p}{\tau_y/q} = \frac{-1/\varepsilon_{x,p}}{-1/\varepsilon_{y,q}},$$

другими словами, менее эластичные товары должны облагаться более сильным налогом, чем более эластичные.

Асамшн о том что спрос зависит только от своей цены легко установить в квазилинейных полезностях вида  $\sum_{i=1}^n U_i(x_i) + x_0$ .



# Чистые субституты и комплементы

---

## Чистые субституты и complements

Напомню, что первое определение субституты и complements опиралось на перекрестные производные (маршаллианских) спросов по ценам.

Несмотря на кажущуюся простоту и интуитивность этого определения, ничего не сдерживало нас от построения таких примеров, где товар  $x$  был бы субституту к  $y$ , при этом  $y$  был compleментом к  $x$ .

Сейчас мы дадим альтернативное определение субституты и complements. Для экспозиции предположим два товара  $x, y$  с ценами  $p, q$ .

## Definition 3

**Чистыми субститутами** называются пары товаров:

$$\frac{\partial h_x}{\partial q} > 0, \quad \frac{\partial h_y}{\partial p} > 0.$$

**Чистыми complements** называются пары товаров:

$$\frac{\partial h_x}{\partial q} < 0, \quad \frac{\partial h_y}{\partial p} < 0.$$

На самом деле, равенство можно было бы отнести к чистым complements из за полезности леонтьева.

На первый взгляд, не совсем понятно, чем помогает замена Маршалианского спроса на Хиксианский в определении.

Однако, поскольку Хиксианский спрос – это градиент функции расходов, градиент Хиксианского спроса – это Гессиан функции расходов.

А Гессиан, он же матрица Гесса – симметричная матрица.

### Lemma 4

*Пусть  $h$  - весь вектор Хиксианского спроса, тогда*

$$\nabla \vec{h} = \nabla^2 E \quad \Rightarrow \quad \nabla \vec{h} = (\nabla \vec{h})^T.$$

Другими словами, перекрестные производные Хиксианского спроса по ценам - симметричны и нет больше никакого противоречия. Чистая субститутабельность и комплементарность – это свойство пары товаров, неважно как эта пара упорядочена.

Попробуем ответить на вопрос (на доске) являются ли товары попарно чистыми субститутами в моделях Кобб-Дугласа, Леонтьева и линейной полезности.