Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

21 февраля 2024 г.

Повторение

Повторение

Что мы ожидаем от вас?

- максимизировать полезности при ограничениях
- находить косвенную полезность V и функцию расходов E
- различать маршалианский и хиксианский спрос
- находить эластичность в точке
- находить CV, EV

Повторение

Какие полезности бывают?

Обычные нелинейные

$$x^{1/3}y^{2/3} \to \max_{x,y\geqslant 0}, \quad px + qy \leqslant W$$

Квазилинейные

$$x^{1/3}y^{1/3} + z \to \max_{x,y,z\geqslant 0}, \quad px + qy + 1\cdot z \leqslant W$$

Квазилинейные и аддитивно сепарабельные

$$\log x + 2\log y + z \to \max_{x,y,z\geqslant 0}, \quad px + qy + 1\cdot z \leqslant W$$

Пример 1

Повторение

Рассмотрим такой случай

$$x^{1/3}y^{2/3} \to \max_{x,y \geqslant 0}, \quad px + qy \leqslant W$$

Первым делом прикидываем вогнутость или квазивогнутость

Вторым делом пишем лагранжиан

$$\mathcal{L} = x^{1/3}y^{2/3} - \lambda(px + qy - W)$$

Повторение

$$\mathcal{L} = x^{1/3}y^{2/3} - \lambda(px + qy - W)$$

Потом пишем условия первого порядка

$$\frac{1}{3}\frac{U}{x} = \lambda p, \quad \frac{2}{3}\frac{U}{y} = \lambda q$$

Отсюда легко получается что

$$\frac{1/x}{2/y} = p/q \quad \Rightarrow \quad qy = 2px$$

Повторение

Подставляя $qy = 2px$ в бюджетное ограничение, получаем

$$3px = W$$

или

$$x^* = \frac{W}{3p}, \quad y^* = \frac{2W}{3q}$$

И косвенная полезность равна

$$V(p, q, W) = W \cdot (\frac{1}{3p})^{1/3}(\frac{2}{3q})^{2/3}$$

Заметим что она линейна по W, поскольку степени с самого начала складывались в единичку.

Повторение

Пусть p выросла на 10 процентов, то есть $p \to 1.1p$

- найти CV
- найти EV
- какая из них меньше?

(ответ на последний вопрос есть в прошлой лекции)

Повторение

Чтобы найти CV надо решить нелинейное уравнение

$$(W + CV) \cdot (\frac{1}{3 \cdot 1.1p})^{1/3} (\frac{2}{3q})^{2/3} = W \cdot (\frac{1}{3p})^{1/3} (\frac{2}{3q})^{2/3}$$

$$\frac{W + CV}{W} = (1.1)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \frac{CV}{W} = (1.1)^{1/3} - 1 \approx 0.0323$$

Если очень грубо то CV это 3 процента от бюджета.

Те же три процента можно получить помножив приращение цены 0.1 на долю товара в расходах, которая равна 1/3

Повторение

Чтобы найти EV надо решить нелинейное уравнение

$$(W) \cdot (\frac{1}{3 \cdot 1.1p})^{1/3}(\frac{2}{3q})^{2/3} = (W - EV) \cdot (\frac{1}{3p})^{1/3}(\frac{2}{3q})^{2/3}$$

$$\frac{W}{W - EV} = (1.1)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \frac{EV}{W} = 1 - (1.1)^{-1/3} \approx 0.0313$$

Эквивалентная вариация меньше чем компенсирующая, но разница на порядок меньше чем сами эти вариации.

Повторение

Наконец, для энтузиастов есть возможность посчитать CV во втором приближении, по формуле из предыдущей лекции

$$CV \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} + \varepsilon \cdot \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{10})^2/2 = 0.0317$$

где $\varepsilon = -1$ как всегда в кобб дугласе.

Она попала аккуратно между настоящей CV и EV.

Пример 2

Повторение

Рассмотрим такой случай

$$x^{1/3}y^{1/3} + z \to \max_{x,y,z \geqslant 0}, \quad px + qy + z \leqslant W$$

Первым делом прикидываем вогнутость или квазивогнутость

Вторым делом пишем лагранжиан

$$\mathcal{L} = x^{1/3}y^{1/3} + z - \lambda(px + qy + z - W)$$

Повторение

хотя можно сделать и подстановку

$$x^{1/3}y^{1/3} + W - px - qy \to \max_{x,y}$$

Потом пишем условия первого порядка

$$\frac{1}{3}\frac{U}{x} = p, \quad \frac{1}{3}\frac{U}{y} = q$$

Отсюда легко получается, например, что

$$x = \frac{U}{3p} \quad y = \frac{U}{3q}$$

где $U = x^{1/3}y^{1/3}$.

Повторение

Подставляя $x = \frac{U}{3p}, y = \frac{U}{3q}$ в бюджетное ограничение

$$p\frac{U}{3p} + q\frac{U}{3q} + z = W$$

или попросту

$$\frac{2}{3}U + z = W \quad \Rightarrow \quad z = W - \frac{2}{3}U$$

напомню что полезность это $U + z$, откуда следует что косвенная полезность во внутренней точке равна собственно

$$V(p, q, W) = U + W - \frac{2}{3}U = U/3 + W$$

где $U = x^{1/3}y^{1/3}$ хитрым образом зависит от p, q

Повторение

Для того чтобы таки найти координаты оптимума во внутренней точке нужно решить систему

$$\frac{1}{3}\frac{x^{1/3}y^{1/3}}{x} = p, \quad \frac{1}{3}\frac{x^{1/3}y^{1/3}}{y} = q$$

ее можно решать в логарифмах

$$\log(1/3) - \frac{2}{3}\log x + \frac{1}{3}\log y = \log p \tag{1}$$

$$\log(1/3) + \frac{1}{3}\log x - \frac{2}{3}\log y = \log q \tag{2}$$

это линейная система, она точно решится. Заодно можно посчитать эластичность, очень удобно, она тут постоянная, но, кажется, равна не -1 как обычно а -2

Повторение

Внимание вопрос:

Предположим что товар x производится монополистом с маржинальными издержками равными $MC = 1$. Какую цену он назначит?

Пример 3

Повторение

Рассмотрим такой случай

$$\log x + 2\log y + z \to \max_{x,y,z \geqslant 0}, \quad px + qy + z \leqslant W$$

Заметим что это НЕ та же самая полезность что раньше

Вторым делом пишем лагранжиан

$$\mathcal{L} = \log x + 2\log y + z - \lambda(px + qy + z - W)$$

Повторение

$$\mathcal{L} = \log x + 2\log y + z - \lambda(px + qy + z - W)$$

Потом пишем условия первого порядка

$$1/x = \lambda p, \quad 2/y = \lambda q, \quad \lambda = 1$$

Отсюда легко получается что

$$x = \frac{1}{p} \quad y = \frac{2}{q}$$

Повторение

Подставляя $x = \frac{1}{p}, y = \frac{2}{q}$ в бюджетное ограничение

$$p\frac{1}{p} + q\frac{2}{q} + z = W$$

получаем

$$3 + z = W$$

Подставляя все это добро в полезность получаем

$$V(p, q, W) = \log(1/p) + 2\log(2/q) + W - 3$$

если это, конечно, внутренняя точка.

Повторение

Предположим что необходимо собрать небольшой налог размера 1. как бы нам это сделать?

- обложить x?
- обложить y?
- обложить x, y?

Считаем что z это деньги под подушкой, их налогом обложить не удастся.

Повторение

Если налог на x, а $x^* = 1/p$ то надо решить

$$\tau x^* = \frac{\tau}{p+\tau} = 1$$

это несложное уравнение решается

$$\tau = p/2$$

Повторение

Если налог на y, а $y^* = 2/q$ то надо решить

$$\tau y^* = \frac{2\tau}{q+\tau} = 1$$

это несложное уравнение решается

$$\tau = q$$

Повторение

Наконец, дифференциированый налог (τ_x, τ_y)

$$V(p, q, W) = \log(\frac{1}{p + \tau_x}) + 2\log(\frac{2}{q + \tau_y}) + W - 3 \to \max$$

при ограничении

$$\frac{\tau_x}{p + \tau_x} + \frac{2\tau_y}{q + \tau_y} = 1$$

решать такое сейчас не очень хочется...

Повторение

... но в лекции было сказано что если спросы зависят только от своих цен, то можно посчитать, по крайней мере, отношение налоговых ставок

$$\frac{\tau_x}{\tau_y} = \frac{1/\varepsilon_{x,p}}{1/\varepsilon_{y,p}}$$

надо надо отметить, что эластичности эти, вообще говоря, сами зависят он налоговых ставок. Однако, в этой задаче они обе постоянны и равны -1, следовательно, ставки должны равняться друг другу.

дорешаем у доски...

Пример 4

Повторение

Рассмотрим такой случай

$$\log x + 2\sqrt{y} + z \to \max_{x,y,z \geqslant 0}, \quad px + qy + z \leqslant W$$

Первым делом проверим вогнутость или квазивогнутость

Вторым делом пишем лагранжиан

$$\mathcal{L} = \log x + 2\sqrt{y} + z - \lambda(px + qy + z - W)$$

Повторение

$$\mathcal{L} = \log x + 2\sqrt{y} + z - \lambda(px + qy + z - W)$$

Потом пишем условия первого порядка

$$1/x = \lambda p, \quad 1/\sqrt{y} = \lambda q, \quad \lambda = 1$$

Отсюда легко получается что

$$x = \frac{1}{p} \quad y = \frac{1}{q^2}$$

Повторение

Подставляя $x = \frac{1}{p}, y = \frac{1}{q^2}$ в бюджетное ограничение

$$p\frac{1}{p} + q\frac{1}{q^2} + z = W$$

получаем

$$1 + 1/q + z = W$$

Подставляя все это добро в полезность получаем

$$V(p, q, W) = \log(1/p) + 2/q + W - 1 - 1/q$$

если это, конечно, внутренняя точка.

Повторение

Внимание вопрос:

В какой пропорции надо облагать налогом товары x, y?

Пример 5

Повторение

Предположим, что

$$V(p, q, W) = W/r - a\log p + b/q$$

и больше вы ничего не знаете

- вычислите хиксианский спрос
- вычислите маршалианский спрос

Повторение

Посчитаем функцию расходов

$$E(p, q, \bar{U}) = \bar{U} + a \log p - b/q$$

по теореме об огибающей

$$h_x = a/p, \quad h_y = b/q^2$$

и подставляя косвенную полезность (правда, подставлять некуда) мы получаем маршаллианский спрос

$$m_x = a/p, \quad m_y = b/q^2$$

они совпали, это значит что полезность, на самом деле, квазилинейная и есть третий товар z но мы никогда не изучаем его цену, она нормирована к единичке.

Пример 6

Повторение

Внимание вопрос:

Что хуже: 20% увеличение цены на товар доля которого в расходах равна 80% или 80% увеличение цены на товар доля которого равна 20%?

Пример 7

Повторение

Рассмотрим полезность

$$U(x, y, z) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 + \log z$$

Как ее лучше промаксимизировать при ценах $p, q, 1$?

Повторение

Разобьем бюджет на две части: $W = W_1 + W_2$

Первая часть тратится на товары x, y а остаток на z, тогда

$$V = W_1 \cdot K + \log W_2$$

где K это константа из читшита, зависящая от цен p, q

$$V = (W - W_2) \cdot K + \log W_2$$

потому что косвенная полезность у CES линейная.

Повторение

Итак,

$$V = (W - W_2) \cdot K + \log W_2 \to \max_{W_2}$$

максимизируем по W_2, получаем

$$W_2 = \frac{1}{K}, \quad W_1 = W - W_2$$

если это, конечно, внутреннее решение ($\frac{1}{K} < W$), и тогда

$$V = (W - \frac{1}{K}) \cdot K + \log \frac{1}{K} = W \cdot K - 1 - \log K$$

... и это все на сегодня!