Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

7 февраля 2024 г.

Напомним себе

Напомним себе

	КД-1	КД-2	Леонтьев	Линейная
U	$\alpha \log x + \beta \log y$	$x^\alpha y^\beta$	$\min(x/a, y/b)$	$x/a + y/b$
m_x	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{W}{p}$	...	$\frac{ap}{ap+bq} \frac{W}{p}$	$\frac{W}{p}$ или 0
V	$(\alpha+\beta) \log W -$ $-\alpha \log p - \ldots$	$\frac{W^{\alpha+\beta}}{p^\alpha q^\beta} \cdot K_1$	$\frac{W}{ap+bq}$	$\frac{W}{\min(ap,bq)}$
E	$(\frac{p^\alpha q^\beta}{K_1} log \bar{U})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$	$(\frac{p^\alpha q^\beta}{K_1} \bar{U})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$	$(ap+bq) \cdot \bar{U}$	$\min(ap, bq) \cdot \bar{U}$
h_x	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} p^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} \cdot K_2$	...	$a \cdot \bar{U}$	$a \cdot \bar{U}$ или 0

Зачем нам это знание?

Сценарий 1

Сценарий 1.

У вас есть данные расходам на еду (px) и все. Доля варьируются от агента к агенту но условно на агента она меняются не сильно.

На что это похоже?

Сценарий 1.

У вас есть данные о доле расходов на еду (px/W) и все. Доля варьируются от агента к агенту но условно на агента она меняются не сильно.

Это похоже на кобб дугласа, где

$$U = \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y$$

Сценарий 1.

У вас есть данные о доле расходов на еду (px/W) и все. Доля варьируются от агента к агенту но условно на агента она меняются не сильно.

Это похоже на кобб дугласа, где

$$pm_x/W = \alpha$$

Сценарий 1.

У вас есть данные о доле расходов на еду (px/W) и все. Доля варьируются от агента к агенту но условно на агента она меняются не сильно.

Тогда α это коэффициент регрессии доли расходов на константу, возможно с какими то характеристиками агента

Это называется «калибровка»

Сценарий 2

Сценарий 2.

У вас есть данные суммарным расходам (E) и по ценам на еду (p) и транспорт (q), и больше ничего.

А как тут откалибровать кобб дугласа?

Сценарий 2.

У вас есть данные суммарным расходам (E) и по ценам на еду (p) и транспорт (q), и больше ничего.

Пусть $U = \alpha \log x + \beta \log y + (1 - \alpha - \beta) \log z$

Сценарий 2.

У вас есть данные суммарным расходам (E) и по ценам на еду (p) и транспорт (q), и больше ничего.

Тогда $\log E = \alpha \log p + \beta \log q + const$

Сценарий 2.

У вас есть данные суммарным расходам (E) и по ценам на еду (p) и транспорт (q), и больше ничего.

Это похоже на регрессию логарифма расходов на логарифмы всех доступных цен

Сценарий 3

Сценарий 3.

У вас есть данные по отношению расходов на еду к расходам на транспорт (px/qy) и отношению цен на еду и транспорт(p/q).

Что можно тут придумать?

Сценарий 3.

У вас есть данные по отношению расходов на еду к расходам на транспорт (px/qy) и отношению цен на еду и транспорт(p/q).

Если у вас в голове кобб дуглас, то только регрессия px/qy на константу даст вам коэффициент $\alpha/(1-\alpha)$.

Сценарий 3.

У вас есть данные по отношению расходов на еду к расходам на транспорт (px/qy) и отношению цен на еду и транспорт (p/q).

Если у вас в голове леонтьев, то только регрессия px/qy на p/q даст вам коэффициент a/b.

Сценарий 3.

Хорошее знание законов поведения спроса позволяет подогнать удобную полезность под данные. Правда, многое зависит от того, хиксианский спрос или маршаллианский.

Ответить на этот вопрос не так просто, но можно поспекулировать

- госслужащие это минимизация расходов
- частный сектор это максимизация полезности

Налоги

Налоги

Исторически сложилось так, что государство финансирует свою деятельность, а также производство общественных благ за счет налогообложения. Есть три вида налогов:

- подоходный фиксированный, или паушальный (от нем. "Pauschale"), налог
- подоходный пропорциональный налог
- товарный налог

В разные периоды времени разные налоги пользовались популярностью.

Паушальный налог

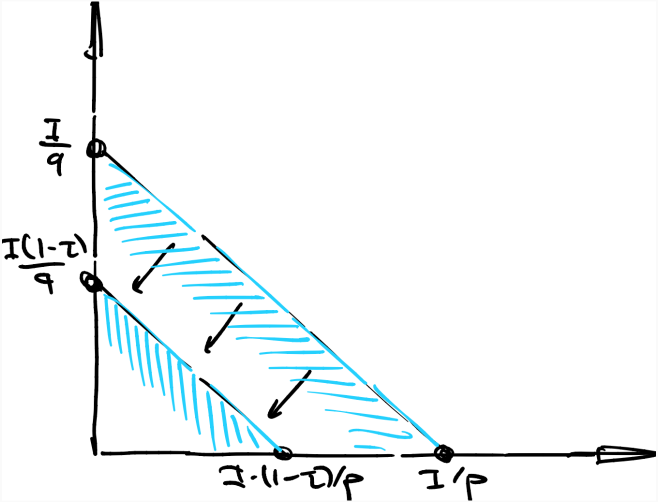
Простота паушального налога в том, что его можно ввести практически моментально, и его имплементация сводится к знанию своих подданных в лицо. Однако вы не можете установить паушальный налог больше, чем, грубо говоря, минимальный прожиточный минимум.

То есть, чтобы собрать большую сумму паушальным налогом, вам придется освободить какую-то часть населения от этих налогов. Как только вы начинаете дискриминировать, то есть говорить кому платить, а кому не платить налог, он становится в какой-то степени пропорциональным.

Пропорциональный налог

Обычный пропорциональный налог означает, что каждый агент платит пропорционально своему доходу. К примеру, когда король Ричард Львиное Сердце попал в плен, английской короне пришлось платить выкуп за счет временного пропорционального налогообложения размером 25%.

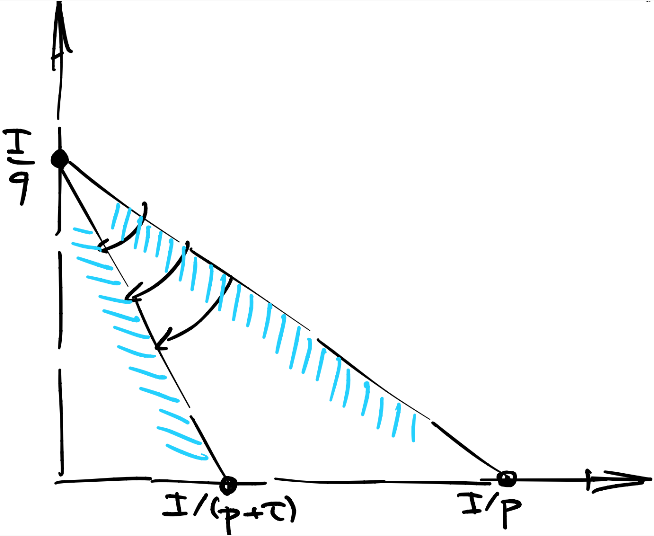
Таким образом, удалось в короткие сроки собрать огромную по тем временам сумму, примерно составляющую трехгодовой объем английской казны.


I/q
I(1-τ)/q
I·(1-τ)/p
I/p

Товарный налог

Товарный налог хорошо адаптируется под быстро меняющуюся экономику. Например, если какой-то город начинает экономически расти, растут требования к окружающей его инфраструктуре: дороги, дома для рабочих, школы и университеты и так далее. Но также растут продажи товаров и услуг и, соответственно, растут налоговые сборы, покрывающие инвестиции в инфраструктуру.

Товарный налог



Налоги

Задача налогообложения может быть сформулирована как либо максимизация чистых налоговых сборов, либо максимизация косвенной полезности при фиксированных налоговых сборах.

На выбор есть подоходный и товарный налог.

Налоги в Коббе-Дугласе

Кобб-Дуглас

Рассмотрим полезность Кобба-Дугласа

$$U(x, y) = \alpha \log x + \beta \log y$$

и введем налог размера τ. Наш анализ оптимального налогообложения будет сильно зависеть от того, с какой легкостью мы выписываем косвенную полезность.

Кобб-Дуглас

Если налог подоходный (доля τ), то налоговые сборы будут равны $T = \tau W$ а косвенная полезность:

$$V(p, q, W|\tau) = (\alpha + \beta)\log(W(1-\tau)) - \alpha\log(p) - \beta\log(q) + C$$

Максимизация чистых налоговых своров тут не представляет сложности - надо просто выставить $\tau = 1$, то есть отобрать все деньги.

Максимизация косвенной полезности при фиксированных налоговых сборах тоже тривиальна: $\tau = T/W$.

Кобб-Дуглас

Пусть товарные налоги равны τ_x, τ_y соответственно, тогда косвенная полезность равна:

$$V(p, q, W|\tau_x, \tau_y) = (\alpha+\beta)\log W - \alpha\log(p+\tau_x) - \beta\log(q+\tau_y) + C$$

а налоговые сборы:

$$T = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{W}{p+\tau_x}\tau_x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{W}{q+\tau_y}\tau_y$$

Кобб-Дуглас

Максимизация чистых налоговых сборов – это задача безусловной оптимизации:

$$T = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} W \frac{\tau_x}{p+\tau_x} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} W \frac{\tau_y}{q+\tau_y}$$

У этой задачи смешное решение: необходимо назначить бесконечно большой налог на оба товара, тогда удастся собрать, в пределе, точно W.

Это не очень реалистично.

Кобб-Дуглас

Максимизация косвенной полезности при фиксированных налоговых сборах – это задача условной оптимизации.

Она уже более интересная:

$$V = const + \alpha \log(\frac{1}{p+\tau_x}) + \beta \log(\frac{1}{q+\tau_y}) \to \max_{\tau}$$

При ограничении

$$\alpha \frac{\tau_x}{p+\tau_x} + \beta \frac{\tau_y}{q+\tau_y} \geqslant (\alpha+\beta)\frac{T}{W}$$

или

$$\alpha \frac{p}{p+\tau_x} + \beta \frac{q}{q+\tau_y} \leqslant (\alpha+\beta)(1-\frac{T}{W})$$

Является ли эта задача выпуклой? (неочевидный ответ)

Кобб Дуглас

$$\mathcal{L} = -\alpha \log(p + \tau_x) - \beta \log(q + \tau_y) - \lambda(\alpha \frac{p}{p + \tau_x} + \beta \frac{q}{q + \tau_y})$$

Условия первого порядка по τ_x, τ_y:

$$-\frac{\alpha}{p + \tau_x} + \lambda \frac{\alpha p}{(p + \tau_x)^2} = 0, \quad -\frac{\beta}{q + \tau_y} + \lambda \frac{\beta q}{(q + \tau_y)^2} = 0$$

Другими словами,

$$\frac{p + \tau_x}{p} = \lambda = \frac{q + \tau_y}{q}$$

То есть кажется, что оптимальные налоги должны быть выставлены пропорционально ценам (это же НДС!!!).

Кобб Дуглас

Складывается впечатление, что оптимальные налоги в Кобб-Дугласе пропорциональны ценам в Кобб-Дугласе, то есть, это подоходный налог или НДС.

Кобб Дуглас

Мы только что доказали, хоть и в малой общности, оптимальность единого НДС.

Lemma 1 (Оптимальность НДС)

Оптимальный налог в Кобб-Дугласе это единый НДС.

Правило Рамсея

Фрэнк Рамсей

Фрэнк Рамсей (Frank Plumpton Ramsey) британский математик и экономист начала 20 века. Своей целью он ставил минимизировать ненужные потери общества при потреблении путём введения дифференцированной ставки налогообложения на различные товары.

Правило Рамсея

Это в точности максимизация косвенной полезности при зафиксированных налоговых сборах (для простоты предположим что спрос зависит только от собственной цены):

$$\mathcal{L} = V(p + \tau_x, q + \tau_y)$$
$$-\lambda(\tau_x m_x(p + \tau_x) + \tau_y m_y(q + \tau_y) - T)$$

Выпишем условия первого порядка (по τ_x, τ_y):

$$\frac{dV}{d\tau_x} = \frac{\partial V}{\partial p} = \lambda[\tau_x \frac{\partial m_x}{\partial p} + m_x], \quad \frac{dV}{d\tau_y} = \frac{\partial V}{\partial q} = \lambda[\tau_y \frac{\partial m_y}{\partial q} + m_y]$$

Вспомним тождество Роя:

$$-\frac{\partial V}{\partial W} m_x = \frac{\partial V}{\partial p}, \quad -\frac{\partial V}{\partial W} m_y = \frac{\partial V}{\partial q}$$

Правило Рамсея

несколько хитрых операций с дробями и получим

$$\frac{m_x}{m_y} = \frac{\tau_x \frac{\partial m_x}{\partial p} + m_x}{\tau_y \frac{\partial m_y}{\partial q} + m_y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_x \frac{\partial m_y}{\partial q}}{m_y \frac{\partial m_x}{\partial p}} = \frac{\tau_x}{\tau_y}$$

Мы только что доказали (немножко игнорируя вопросы выпуклости) один из самых нетривиальных фактов в теории оптимального налогообложения, называемое Правилом Рамсея.

Правило Рамсея

То же самое правило можно получить если минимизировать функцию расходов агента вместо максимизации его полезности:

$$\mathcal{L} = E(p + \tau_x, q + \tau_y) +$$
$$+\lambda(\tau_x h_x(p + \tau_x) + \tau_y h_y(q + \tau_y))$$

Выпишем условия первого порядка (по τ_x, τ_y) вспоминая по ходу Лемму Шепарда (i.e., Теорему об Огибающей):

$$\frac{dE}{d\tau_x} = \frac{\partial E}{\partial p} = h_x = \lambda[\tau_x \frac{\partial h_x}{\partial p} + h_x], \quad \frac{dE}{d\tau_y} = \frac{\partial E}{\partial q} = h_y = \lambda[\tau_y \frac{\partial h_y}{\partial q} + h_y]$$

Несложными преобразованиями получается очень похожая дробь, но с хиксианскими спросами вместо маршалианских.

Правило Рамсея

Lemma 2

Оптимальные налоговые ставки (в процентах) обратно пропорциональны эластичностям (маршаллианского в основной задаче и хиксианского в двойственной) спроса:

$$\frac{\tau_x/p}{\tau_y/q} = \frac{-1/\varepsilon_{x,p}}{-1/\varepsilon_{y,q}},$$

другими словами, менее эластичные товары должны облагаться более сильным налогом, чем более эластичные.

Чистые субституты и комплементы

Чистые субституты и комплементы

Напомню, что первое определение субститутов и комплементов опиралось на перекрестные производные (маршаллианских) спросов по ценам.

Несмотря на кажущуюся простоту и интуитивность этого определения, ничего не сдерживало нас от построения таких примеров, где товар был бы субститутом к y, при этом y был комплементом к x.

Сейчас мы дадим альтернативное определение субститутов и комплементов. Для экспозиции предположим два товара x, y с ценами p, q.

Чистые субституты и комплементы

Definition 3

Чистыми субститутами называются пары товаров:

$$\frac{\partial h_x}{\partial q} > 0, \quad \frac{\partial h_y}{\partial p} > 0.$$

Чистыми комплементами называются пары товаров:

$$\frac{\partial h_x}{\partial q} < 0, \quad \frac{\partial h_y}{\partial p} < 0.$$

На самом деле, равенство можно было бы отнести к чистым комплементам из за полезности леонтьева.

Чистые субституты и комплементы

На первый взгляд, не совсем понятно, чем помогает замена Маршалианского спроса на Хиксианский в определении.

Однако, поскольку Хиксианский спрос – это градиент функции расходов, градиент Хиксианского спроса – это Гессиан функции расходов.

А Гессиан, он же матрица Гесса - симметричная матрица.

Чистые субституты и комплементы

Lemma 4

Пусть h - весь вектор Хиксианского спроса, тогда

$$\nabla \vec{h} = \nabla^2 E \quad \Rightarrow \quad \nabla \vec{h} = (\nabla \vec{h})^T.$$

Другими словами, перекрестные производные Хиксианского спроса по ценам - симметричны и нет больше никакого противоречия. Чистая субститутабильность и комплементарность – это свойство пары товаров, неважно как эта пара упорядочена.

Попробуем ответить на вопрос (на доске) являются ли товары попарно чистыми субститутами в моделях Кобб-Дугласа, Леонтьева и линейной полезности.