Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

30 января 2024 г.

План

План

В первой половине лекции мы ненадолго отклонимся от основного маршрута и поговорим об **эластичности** и даже немного о производстве. Понятие эластичности очень важно для всех, кто хочет заниматься реальными экономическими задачами.

Во второй половине лекции мы возвращаемся к анализу оптимизационных задач, узнаем несколько новых фактов о косвенной полезности, определяем новый вид спроса а также говорим о **Теореме об Огибающей** - одной из самых важных фундаментальных теорем в экономике.

Эластичность

Эластичность

Если вы зайдете на Википедию, то увидите, что эластичность – это *мера чувствительности спроса или предложения к изменению одного из параметров: цены или дохода*.

Но ведь у нас уже есть такие меры, это производные:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p}, \quad \frac{\partial x^*}{\partial q}, \quad \frac{\partial x^*}{\partial W},$$

где x – это спрос на интересующий нас товар, p – цена этого товара, q – цена другого товара, а I - бюджет.

Что с ними не так?

Эластичность

У определения производной есть два параметра.

Первый параметр – это единица измерения товара. Товары меряются в штуках, пачках, тоннах, литрах, килограммах, фунтах, унциях и так далее.

Второй параметр – это единица измерения цены. Цены меряются в долларах, рублях, фунтах, кронах, ...

Более того, доллары бывают разные: американские, австралийские, новозеландские.

Эластичность

Хуже того, даже американский доллар отличается от года к году, поэтому, формально говоря, это может быть доллар-2019, доллар-2020 или доллар-2021. Получается, что открывая статью по экономике, в которой изучается эффект чего либо на что либо, экономист должен конвертировать коэффициенты на год, страну, и, возможно, провинцию. А также на объем тары/упаковки, литраж или штуки соответствующего товара.

Это сделало бы любые исследования бесполезными.

Эластичность

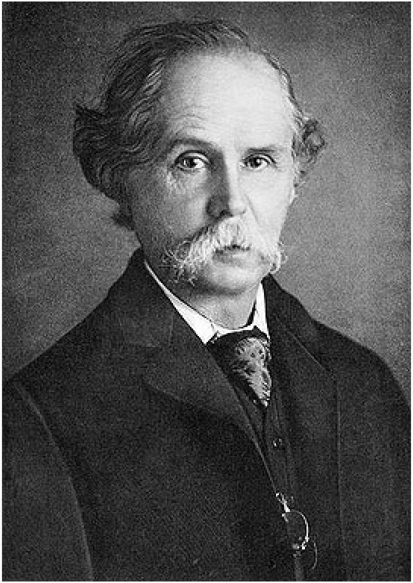
Поэтому экономисты придумали математический трюк для того, чтобы избавиться от единиц измерения раз и навсегда.

Этот трюк заключается в измерении всего в процентах, которые, как раз, не имеют единиц измерения.

Конкретно известно, кто этот трюк придумал.

Альфред Маршалл

Альфред Маршалл (Alfred Marshall) английский экономист второй половины 19 века. Главным вкладом Маршалла в экономическую науку является соединение воедино классической теории и маржинализма, теории рыночного ценообразования ($MU = MC$ или ножницы Маршалла). Он также ввёл в экономическую теорию категории эластичность спроса и потребительский излишек.



Эластичность

Definition 1

Эластичность $\varepsilon_{x,p}$ любой функции $x(p)$ по параметру p это

$$\varepsilon_{x,p} = \frac{\partial \log x}{\partial \log p} = \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{p}{x}$$

Например, в Коббе-Дугласе:

$$\log x = \log I - \log p + \ldots \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{x,p} = -1,\ \varepsilon_{x,I} = I$$

Казалось бы, причем тут проценты?

Эластичность

Предположим, что p, x как-то связаны (функционально) между собой. Рассмотрим отношение процентного изменения x к процентному изменению p:

$$\frac{100\delta x/x}{100\delta p/p} = \frac{\delta x/x}{\delta p/p}$$

где $\delta x, \delta x$ – это маленькие приращения. Заметим, что:

$$= \frac{\delta x/x}{\delta p/p} \approx \frac{\log(1+\delta x/x)}{\log(1+\delta p/p)} =$$

далее надо вынести x и p из под логарифмов:

$$= \frac{\log(x+\delta x) - \log x}{\log(p+\delta p) - \log p}$$

и то, что мы получаем, – это примерно приращение логарифма x относительно логарифма p.

Эластичность

Таким образом, мы получаем три эластичности:

$$\varepsilon_{x,p} = \frac{\partial \log x}{\partial \log p}, \quad \varepsilon_{x,q} = \frac{\partial \log x}{\partial \log q}, \quad \varepsilon_{x,I} = \frac{\partial \log x}{\partial \log I}.$$

Легко видеть, что у эластичности нет единиц измерения, так как они успешно сокращаются в правой части формулы.

$$\varepsilon_{x,p} = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x}, \quad \varepsilon_{x,q} = \frac{\partial x}{\partial q}\frac{q}{x}, \quad \varepsilon_{x,I} = \frac{\partial x}{\partial W}\frac{I}{x}.$$

Пользоваться можно любым из двух определений.

Эластичность в данных

Предположим что у вас есть два достаточно близких наблюдения цены: p_1, p_2, и два наблюдения спроса q_1, q_2, всю кривую спроса вы не можете видеть. Как посчитать эластичность?

- $\varepsilon_{p,q} = ((q_2 - q_1)/q_1)/((p_2 - p_1)/p_1)$
- $\varepsilon_{p,q} = ((q_2 - q_1)/q_2)/((p_2 - p_1)/p_2)$
- $\varepsilon_{p,q} = ((q_2 - q_1)/q_0)/((p_2 - p_1)/p_0)$

где $p_0 = (p_1 + p_2)/2$, $q_0 = (q_1 + q_2)/2$. Все они сходятся к теоретическому определению, в пределе. Последнее называется mid-point formula в английской литературе, это сделано для того, чтобы эластичность не зависела от направления $1 \to 2$ или $2 \to 1$.

Эластичности по доходу

Эластичности по доходу

Для всех товаров x, y, z в вашей модели вы можете определить эластичность по доходу:

$$\varepsilon_{x,I}, \quad \varepsilon_{y,I}, \quad \varepsilon_{z,I}$$

Внимание, знаки у эластичностей те же, что и у наклонов. Поэтому, у нормальных товаров эластичности дохода положительные. Действительно:

$$\varepsilon_{x,I} = \frac{\partial x}{\partial W}\frac{I}{x}.$$

Любопытным является то, что эластичности по доходу у всех товаров связаны простым линейным соотношением, правда, разным в каждой новой точке.

Эластичности по доходу

Lemma 2

Всегда выполнено следующее тождество:

$$\varepsilon_{x,I} \cdot s_x + \varepsilon_{y,I} \cdot s_y + \varepsilon_{z,I} \cdot s_z = 1$$

где s_x, s_y, s_z доли расходов на соответствующие товары.

Доказательство этого факта вытекает прямиком из бюджетного ограничения. Поскольку доли всегда неотрицательные, то это еще один раз показывает, что все товары не могут быть одновременно инфериорными.

Эластичности по цене

Эластичности по цене

У каждого товара есть собственная эластичность по цене и перекрестная эластичность с каждым из других товаров.

Эластичности по цене

Первым на сцену выступает, конечно же, собственная эластичность по цене:

$$\varepsilon_{x,p}, \quad \varepsilon_{y,q}, \quad \varepsilon_{z,r}.$$

Интуиция подсказывает нам, что, в принципе, собственная эластичность должна быть скорее отрицательная. Двукратное увеличение цены на товар должно, скорее всего, понизить спрос (не путать с кривой спроса) на этот товар.

Это действительно так, кроме тех случаев, когда товар Гиффена (об этом мы поговорим подробнее в лекции 4).

Эластичности по цене

Экономисты любят говорить о спросе в терминах эластичности потребления (по собственной цене) подразумевая то, насколько товар является не критическим для существования.

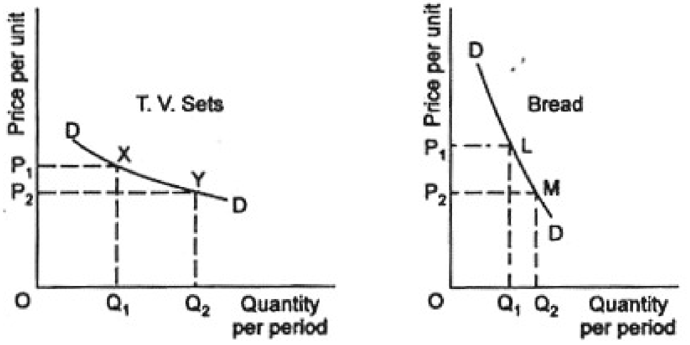


Fig. 5(a) : Elastic Demand   Fig. 5(b) : Inelastic demand

Эластичности по цене

Как правило, глядя на сам товар, сложно сказать, насколько эластичен спрос на него, потому что это зависит от контекста а также от наличия субститутов. Например,

- спрос на водный транспорт можно считать эластичным
- однако если вы живете на острове, то он неэластичен
- спрос на бензин (и энергию в целом) считается универсально неэластичным

Спрос на похоронные услуги максимально неэластичен.

Эластичности по цене

Посмотрим на собственную эластичность Кобба-Дугласа. Это очень удобная полезность для подсчета эластичности, так как мы уже привыкли везде тащить за собой логарифм.

$$\log x = \log I - \log p + \log(\alpha) - \log(\alpha + \beta + \gamma), \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{x,p} = -1.$$

Эластичность оказалась равна -1, то есть, она не зависит ни от цен, ни от бюджета. Это большое везение, вообще говоря эластичность не обязана быть постоянной.

Эластичности по цене

Чуть более интересным представляется анализ перекрестной эластичности, которых $n(n-1)$ штук для n товаров. Это очень большое число, поэтому мы редко будем работать с $n > 3$.

Пусть будет три товара: x, y, z, тогда есть шесть эластичностей:

$$\varepsilon_{x,q}, \varepsilon_{x,r}, \quad \varepsilon_{y,p}, \varepsilon_{y,r}, \quad \varepsilon_{z,p}, \varepsilon_{z,q}.$$

Они также называются эластичностями замещения.

В Коб-Дугласе они все равны нулю.

Эластичности по цене

Эти эластичности хранят информацию о, грубо говоря, тенденциях к замещению между нашими товарами. Поскольку цены и спросы неотрицательны, мы можем однозначно связать знак эластичности с природой замещения между любыми двумя товарами.

Если $\varepsilon_{x,q} > 0$ то x это скорее субститут по отношению к y.
Если $\varepsilon_{x,q} < 0$ то x это скорее комплемент по отношению к y.

Сложно сказать, что такое ноль, Кобб-Дуглас он "немножко субститут"и "немножко комплемент"одновременно, мы вернемся к этому в 4 лекции.

Приложения эластичности

Эластичности по цене

Вообще, можно мерять эластичность чего угодно.

Одним из самых популярных приложений эластичности является анализ поведения монополиста, производящего товар, эластичность потребления которого подразумевается известной.

В то время как классическая микроэкономическая теория осписывает поведение фирм-ценополучателей, на практике, каждая фирма обладает, пусть даже очень маленькой, но рыночной властью. То есть все фирмы способны манипулировать ценой за счет снижения объемов производства, просто у монополии это получается лучше всех.

Эластичности по цене

Эластичность позволяет сделать любую из двух вещей:

- если вы находитесь в позиции контролирующего органа, эластичность спроса позволит вам понять, пользуется ли монополист своей рыночной властью
- если вы находитесь в позиции истинного монополиста, эластичность спроса позволит вам установить цену, максимизирующую прибыль

Сейчас мы вкратце обсудим каждую из них.

Формула обратной эластичности

Формула обратной эластичности

Пусть спрос на товар x описывается обратной функцией спроса $P(x)$ с постоянной эластичностью δ, а переменные издержки монополиста линейны и равны $MC \cdot x$.

Заметим, что эластичность ε классической кривой спроса $x(P)$ равна обратной эластичности обратной кривой спроса $1/\delta$.

Тогда задача монополиста это:

$$(P(x) - MC)x \to \max_x$$

Формула обратной эластичности

Используя условия первого порядка,

$$P(x) - MC + P'(x)x = 0$$
$$(P(x) - MC)/P(x) = -P'(x)x/P(x) = -\delta$$

То есть, маржа/цена (то что слева) равна минус эластичности обратной функции спроса.

Формула обратной эластичности

А как это связано с (прямой) функцией спроса? Оказывается, что у обратных функций эластичность - тоже обратная. То есть

Lemma 3

Если у функции спроса эластичность по цене равна ε, то маржа (как доля от цены) монополиста (с постоянными издержками MC) в оптимуме должна равняться в точности обратной эластичности с минусом:

$$\frac{P - MC}{P} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

Конечно же, $p = MC$ – это поведение конкурентной фирмы, соответствует индексу Лернера равного в точности нулю.

Теорема об огибающей

Теорема об огибающей

Это чрезвычайно важная теорема. Рассмотрим семейство опорных функций $f(x, p)$, где x - переменная а p - параметр.

Определим огибающую $V(p)$ как результат оптимизации функции f по какому-то статическому множеству :

$$V(p) := \max_{x \in X} f(x, p),$$

Theorem 4 (Об огибающей)

Функция $V(p)$ дифференциируема (почти всюду) и

$$\frac{\partial V(p)}{\partial p} = \frac{\partial f(x, p)}{\partial p}\Big|_{x = x^*(p)}.$$

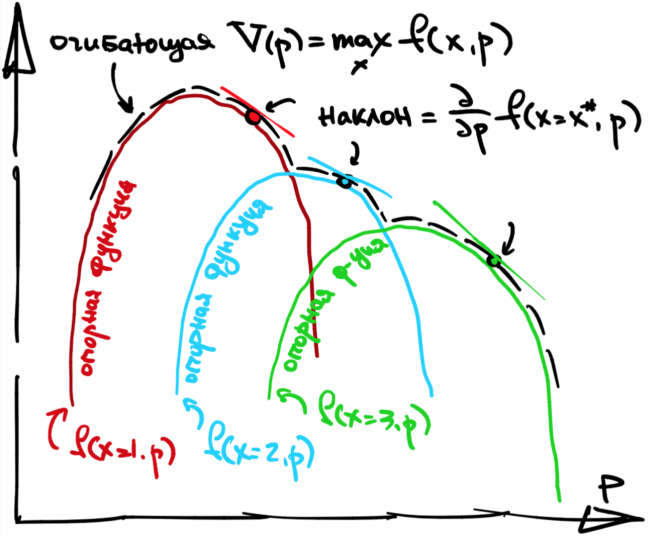
Теорема об огибающей

... то есть, наклон огибающей равен наклону опорной функции в точке касания.

Представьте себе, что вы сложили вместе крупные предметы разной формы (стол, компьютер, велосипед) и, чтобы они не пылились, накрыли все эластичной пленкой.

Пленка плотно прилегла к тем предметам, которые оказались, по разным причинам выше всех остальных. Можно сказать, что пленка - это (верхняя) огибающая вашего семейства опорных объектов, поскольку она лежит там, где находится самый высокий объект в каждой точке.

Теорема об огибающей



Теорема об огибающей

Запомните следующую мантру:

наклон огибающей равен наклону опорной функции в точке касания.

То есть, чтобы найти наклон огибающей в точке p нужно из всех опорных функций (они индексированы через x) выбрать ту, на которую в этой точке (точка – это значение параметра p) опирается огибающая, и взять ее наклон, опять же, в пространстве параметра p.

Теорема об огибающей

Чтобы не перепутать, какие роли x и p, помните, что огибающая - это функция от параметра, а не от оптимизационной переменной, которая индексирует опорные функции.

Соответственно, огибание происходит в пространстве параметра, а не в пространстве переменных, по которой вы оптимизировали.

Практическая польза

Теорема об огибающей

Может показаться, что дифференцирование опорной функции и подстановка – это лишняя трата времени, ведь можно просто решить задачу и продифференцировать V по параметру, в лоб.

Это правда, однако если у вас абстрактная функция, вы не можете просто так ее промаксимизировать. Поэтому эта теорема очень удобна при доказательствах, но не только.

Более того, теорему об огибающей можно применять сразу к Лагранжиану, как минимум, в выпуклом случае (в общем случае - не уверен).

Теорема об огибающей

Рассмотрим простой пример:

Опорная функция

$$f(x|a, b) = -(x-a)^2 - b$$

Максимизируем ее

$$x^* = a, \quad f^* = -b$$

Дифференциируем истинный ответ:

$$\partial f^*/\partial a = 0, \ \partial f^*/\partial b = -1$$

Дифференциируем (казалось бы, зачем?) опорную функцию:

$$\partial f/\partial a = -2(x^* - a), \ \partial f/\partial b = -1$$

Теорема об огибающей

Рассмотрим пример посложнее:

Опорная функция Кобб-Дуглас

$$f(x|a,b) = \alpha \log x + \beta \log y - \lambda(px + qy - W)$$

Вы хотите найти наклон косвенной полезности, но забыли формулу. Однако, вы помните формулу оптимальных координат. Дифференциируем опорную функцию:

$$\partial f/\partial\alpha = \log x^*,\ \partial f/\partial\beta = \log y^*,\ \partial f/\partial W = \lambda^*$$

Не забываем подставить оптимальные x^*, y^*, λ^*.

Теорема об огибающей

Вопрос на засыпку:

Если V косвенная полезность, то чему равна $\partial V/\partial W$?

Теорема об огибающей

Она равна множителю Лагранжа λ.

В частности, это может помочь вам быстро найти λ, если вас попросят в домашке вычислить его.

Минимизация расходов

Минимизация расходов

Сейчас мы перейдем к задаче, на первый взгляд, никак не связанной с максимизацией полезности. Если быть точными, мы будем минимизировать сумму расходов на все товары при минимально заданном таргетированном уровне полезности $\bar{U}$.

Для простоты пусть будут два товара x, y с ценами p, q.

$$\text{P2:} \quad px + qy \to \min_{x,y \geqslant 0}, \quad \text{s.t.} \quad U(x, y) \geqslant \bar{U}.$$

Сравните с классической задачей максимизации полезности

$$\text{P1:} \quad U(x, y) \to \max_{x,y \geqslant 0}, \quad \text{s.t.} \quad px + qy \leqslant W.$$

Минимизация расходов

Сравним лагранжианы

$$\mathcal{L}^1 = U(x, y) - \lambda(px + qy - W)$$
$$\mathcal{L}^2 = (px + qy - W) - \gamma(\bar{U} - U(x, y))$$

Сравним фоки (упп)

$$\text{P1:} \quad U'_x = \lambda p, \quad U'_y = \lambda q, \quad px + qy = W$$
$$\text{P2:} \quad p = \gamma U'_x, \quad q = \gamma U'_y, \quad U(x, y) = \bar{U}$$

Решения совпадают, если третьи уравнения эквивалентны.

Это свойство известно как Закон Вальраса.

Закон Вальраса

Закон Вальраса

Для начала приведем пример полезности, при которой Закон Вальраса не выполнен, это постоянная полезность $U(x, y) = 1$.

Действительно, с точки зрения полезности все бюджетное множество состоит из оптимумов. Однако лишь одна точка $(x, y) = (0, 0)$ по настоящему минимизирует издержки, при таргетированной полезности $\bar{U} = 0$.

Что тут произошло? Дело в том, что у полезности $U(x, y) = 1$ толстые линии уровня.

Чтобы Закон Вальраса заработал, необходимо исключить появление таких линий уровня, то есть, локальная ненасыщаемость в $\mathbb{R}^2_+$.

Закон Вальраса

Theorem 5 (Закон Вальраса)

Если полезность локально ненасыщаема в $\mathbb{R}^n_+$, то любое из решений задачи максимизации полезности всегда лежит на бюджетном ограничении.

Это утверждение доказывается от противного.

Пусть решение находится в бюджетном множестве, но не на бюджетной линии. Тогда существует точка в его окрестности, которая также содержится в бюджетном множестве (поскольку локальная ненасыщаемость именно в $\mathbb{R}^n_+$), но дает большую полезность. Противоречие.

Два спроса

Два спроса

Definition 6

Назовем Хиксианским спрос в задаче минимизации расходов, и Маршаллианским спрос в задаче максимизации полезности.

Для товаров x, y будем обозначать Хиксианские спросы как

$$h_x(p, q, \bar{U}), \quad h_y(p, q, \bar{U}),$$

а Маршаллианские спросы как

$$m_x(p, q, I), \quad m_y(p, q, I).$$

Но главное - это аргументы. Какие аргументы такой и спрос.

Два спроса

Тогда в для задачи максимизации полезности с параметрами (p, q, I) существует

$$\bar{U}_0 := V(m_x(p, q, I), m_y(p, q, I))$$

такой, что задача минимизации расходов с $(p, q, \bar{U}_0)$ эквивалентна ей.

Аналогично, для задачи миимизации расходов с (p, q, I) существует

$$I_0 := ph_x(p, q, \bar{U}) + qh_y(p, q, \bar{U})$$

такой, что задача максимизации полезности с (p, q, I_0) эквивалентна ей.

Дуальность

Дуальность

Мы подошли к очень важному наблюдению.

Theorem 7 (Дуальность)

Если полезность (квази-)вогнутая и локально ненасыщаемая, то любое решение (как функция от цен) задачи минимизации расходов воспроизводится как одно из решений максимизации полезности и наоборот.

Причем, все это при одних и тех же ценах. Это чуть более сильное утверждение чем просто закон Вальраса.

Это значит, что задача максимизации полезности и задача минимизации расходов по большому счету эквивалентны в определенном геометрическом смысле.

Есть только одна проблема - у Маршаллианского и Хиксианского спросов разный набор аргументов, поэтому они не могут совпадать номинально.

Для того, чтобы поправить ситуацию, нам понадобится еще одна новая функция.

Функция расходов

Функция расходов

Definition 8

Назовем **функцией расходов** значение целевой функции в оптимуме в задаче минимизации расходов:

$$E(p, q, \bar{U}) = ph_x(p, q, \bar{U}) + qh_y(p, q, \bar{U}).$$

Это совершенно аналогично тому, как мы ввели косвенную полезность $V(p, q, I)$ через значение целевой функции в оптимуме в задаче максимизации полезности.

Лемма Шепарда

Лемма Шепарда

Что произойдет, если мы применим Теорему об Огибающей к задаче минимизации расходов?

$$-E(p, q, \bar{U}) = -ph_x(p, q, \bar{U}) - qh_y(p, q, \bar{U})$$

Сперва легким движением руки заменяем минимум функции E на максимум функции $-E$, тогда:

$$\frac{\partial E}{\partial p} = -\frac{\partial(-E)}{\partial p} =?$$

Лемма Шепарда

Далее мы должны ответить на следующий вопрос:

Что есть опорная функция для $E(p, q, I)$?

Лемма Шепарда

Правильный ответ – это Лагранжиан

$$\mathcal{L} = px + qy - \lambda(\bar{U} - U(x, y))$$

это опорная функция.

Чему равен ее градиент по ценам?

А с точки зрения Теоремы об Огибающей?

Лемма Шепарда

Theorem 9 (Лемма Шепарда)

Если $\vec{h}$ - весь вектор спросов, а $\vec{p}$ - весь вектор цен то

$$\vec{h} = \nabla_{\vec{p}} E,$$

то есть Хиксианский спрос является градиентом (по ценам, но не бюджету) от функции расходов.

Тождество Роя

Тождество Роя

Воспользуемся дуальностью:

$$U = V(p, q, E(p, q, U)).$$

Убедитесь, что это действительно корректная запись.

Что можно сделать с этим тождеством?

- продифференцировать по p
- продифференцировать по q

Тождество Роя

Заметим, что цены входят справа дважды:

$$U = V(p, q, E(p, q, U)).$$

По правилам дифференцирования, полный дифференциал функции V по p равен:

$$\frac{dV}{dp} = \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial W} \cdot \frac{\partial E}{\partial p} = 0$$

Тождество Роя

Поскольку $\frac{\partial E}{\partial p} = x$,

$$\frac{dV}{dp} = \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial W} \cdot x_1 = 0$$

Аналогично для второй цены

$$\frac{dV}{dq} = \frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial W} \cdot x_2 = 0$$

Комбинируя это в векторной форме, мы получаем:

Theorem 10 (Тождество Роя)

Если $\vec{x}$ - весь вектор спросов, а $\vec{p}$ - весь вектор цен то

$$\vec{x} = -\frac{\nabla_{\vec{p}} V}{\partial V / \partial W}$$

Как не запутаться?

Как не запутаться?

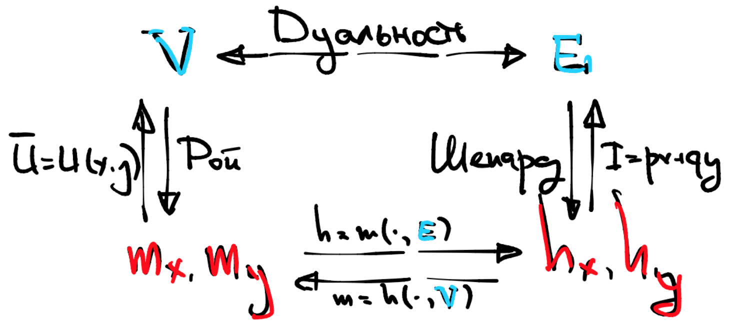
Подводя итог, у нас было две задачи: максимизации полезности и минимизации расходов. Каждая задача имела свой набор параметров: первая (p, q, I) а вторая $(p, q, \bar{U})$.

Каждая задача произвела три обьекта:

- оптимальные $m_x(p, q, I), m_y(p, q, I)$ и косвенная полезность $V(p, q, I)$ в первой задаче
- оптимальные $h_x(p, q, \bar{U}), h_y(p, q, \bar{U})$ и функция расходов $E(p, q, \bar{U})$ во второй задаче

Можно изобразить «схему перемещений» между объектами

Как не запутаться?



Решаем примеры до упора