# Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

13 января 2024 г.

# Свойства полезности в $\mathbb{R}^n$

# Свойства полезности в $\mathbb{R}^n$

Напомним, на чем мы остановились

**Definition 1**

Полезность $U$ непрерывна, если ее $L_+$, $L_-$ - замкнутые.

**Definition 2**

Полезность $U$ вогнута, если ее подграфик - выпуклый.

Забегая вперед, сегодня будет еще одно определение, но я помещу его тут, потому что они хорошо смотрятся вместе.

**Definition 3**

Полезность $U$ квази вогнута, если ее $L_+$ - выпуклые.

# Вогнутость

Вернемся к вогнутости.

К сожалению, не все могут быстро в уме нарисовать график или подграфик функции от двух переменных, а тем более от трех переменных, и сказать выглядит он как колпак или нет.

Например, $\sqrt{xy}$ или $x^2y^2$.

В таких случаях мы применяем критерий Сильвестра (его покажу на следующем слайде) для подтверждения или отрицания вогнутости функции.

# Критерий Сильвестра

# Критерий Сильвестра

Джеймс Джозеф Сильвестер (James Joseph Sylvester) английский и американский математик второй половины 19 века, профессор Университета Джон Хопкинс и позже Оксфорда. Изобрел матрицы, дискриминанты, и, собственно, критерий имени самого себя. Этот критерий заключается в проверке отрицательной определенности матрицы Гесса.

# Критерий Сильвестра

Матрица Гесса $\nabla^2 U$, она же «матрица вторых производных» является симметричной а значит диагонализуемой.

Предположим, что в некотором базисе

$$\nabla^2 U \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

# Критерий Сильвестра

Пусть собственные значения $\lambda_i$ все ненулевые.

Есть два важных случая

- все знаки строго отрицательные - это строго вогнутая функция, такая как $-x^2 - y^2 - z^2$
- все знаки строго положительные - это строго выпуклая функция, такая как $x^2 + y^2 + z^2$

Любой другой вариант ненулевых знаков собственных значений это тоже не вогнутая функция.

# Критерий Сильвестра - I

В диагональном случае, угловые миноры (которых 3 штуки для $n = 3$) строго вогнутой функции характеризуются

- $\det M_{1,1} = \lambda_1 < 0$
- $\det M_{1,2} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$
- $\det M_{1,2,3} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$

Проверка чередования знаков угловых миноров называется Критерием Сильвестра знаковой определенности матрицы. Более того, он работает в любом базисе.

## Критерий Сильвестра - I

А что если некоторые собственные значения равны нулю

Есть два важных случая

- все знаки отрицательные или нулевые - это просто вогнутая функция
- все знаки положительные или нулевые - это просто выпуклая функция

Функция может быть (нестрого) выпуклой и вогнутой одновременно, например, линейная.

# Критерий Сильвестра - II

В диагональном случае, главные миноры (которых 7 штук для $n = 3$) нестрого вогнутой функции характеризуются

- $\det M_{1,1} = \lambda_1 \leqslant 0$
- $\det M_{2,2} = \lambda_2 \leqslant 0$
- $\det M_{3,3} = \lambda_3 \leqslant 0$
- $\det M_{1,2} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \geqslant 0$
- $\det M_{2,3} = \lambda_2 \cdot \lambda_3 \geqslant 0$
- $\det M_{1,3} = \lambda_1 \cdot \lambda_3 \geqslant 0$
- $\det M_{1,2,3} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \leqslant 0$

Проверка чередования знаков главных миноров называется Критерием Сильвестра знаковой полу-определенности матрицы и работает в любом базисе.

# Критерий Сильвестра - подытожим

Второй критерий:

$$F \text{ стр. вогнутая } \Leftrightarrow v\nabla^2 Fv < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{угловые миноры знакочередуются и } \neq 0$$

Второй критерий:

$$F \text{ вогнутая } \Leftrightarrow v\nabla^2 Fv \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \text{главные миноры знакочередуются}$$

Второй критерий известен меньше, потому что главных миноров очень очень много и их проверка не всегда является практичной.

Но для $n = 3$ можно сделать, главных миноров 7.

# А если он не работает?

# А если он не работает?

Если не удается применить критерий, есть другие приемы.

- линейные функции - вогнуты
- сумма вогнутых функций - вогнута
- минимум (любого числа) вогнутых функций - вогнут
- монотонно возрастающее преобразование вогнутой функции - вогнуто, если это преобразование само вогнуто.

Например, такими преобразованиями являются $\sqrt{x}, \log(x)$ но не являются $\exp(x), x^2$.

# А если он не работает?

Потренируемся в проверке вогнутости

- $xy$
- $x^{1/3}y^{2/3}$
- $x + 2y + 3z$
- $xy + \min(x, y)$
- $\min(xy, z + x)$
- $\sqrt{x^{1/3}y^{2/3} + z}$

Приведите пример не вогнутой фунцкии?

# Проблемы с вогнутостью

# Вогнутость

К сожалению, с вогнутостью есть проблема.

Три полезности

- $x^2y^2$
- $\sqrt{xy}$
- $\log x + \log y$

задают одни и те же предпочтения.

Однако, 2 из них вогнутые а одна - вовсе нет.

Попробуйте определить какие?

# Вогнутость

Проблема в том, что монотонные преобразования легко ломают вогнутость, если они сами при этом не являются вогнутыми, достаточно накрутить несколько экспонент.

Поэтому экономисты придумали свою собственную почти-вогнутость, или квази вогнутость (quasi- от лат. почти).

# Квази вогнутость

# Квази вогнутость

Проверка квази-вогнутости опирается на форму верхних Лебеговых множеств (вместо формы подграфика)...

**Definition 4**

Полезность $U$ вогнута, если ее подграфик - выпуклый.

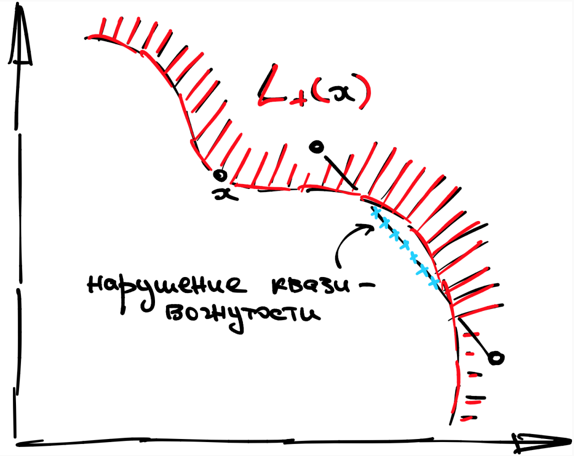
**Definition 5**

Полезность $U$ квази вогнута, если все ее $L_+(x)$ - выпуклы.

...а следовательно инвариантна к монотонно возрастающим преобразованиям.

# Квазивогнутость

рисунок в $\mathbb{R}^n$



# Квази вогнутость

Любопытный факт

Поскольку $L_+$ является как бы тенью (проекцией на $\mathbb{R}^n$) верхнего отреза подграфика (живущего в $\mathbb{R}^{n+1}$), то...

...из вогнутости автоматически следует квази вогнутость.

# Квази вогнутость

Есть также эквивалентное определение квази вогнутости

**Definition 6**

Полезность $U$ квази вогнута в $X$, если для любых $x, y \in X$:

$$\forall \alpha \in (0,1) : U(\alpha x + (1-\alpha)y)) \geqslant \min(U(x), U(y))$$

в стиле примерно такого же определения вогнутости

**Definition 7**

Полезность $U$ вогнута, если для любых $x, y \in X$:

$$\forall \alpha \in (0,1) : U(\alpha x + (1-\alpha)y)) \geqslant \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y)$$

# Квази вогнутость

Любители алгебры могут убедиться, что из вогнутости действительно следует квази вогнутость (но не наоборот).

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
(1):&\quad U(\alpha x+(1-\alpha)y)) \geqslant \alpha U(x)+(1-\alpha)U(y)\\
(2):&\quad \alpha U(x)+(1-\alpha)U(y) \geqslant \min(U(x),U(y))\\
(1),(2)\quad \Rightarrow&\quad U(\alpha x+(1-\alpha)y)) \geqslant \min(U(x),U(y))
\end{aligned}$$

# Зачем эта приставка квази-?

# Зачем эта приставка квази-?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно сначала понять зачем нам нужна была вогнутость?

Короткий ответ - для единственности решения оптимизационных задач с бюджетными (в общем случае выпуклыми) ограничениями.

Однако, квази вогнутость так же приводит к единственности решений, при этом являясь менее требовательным к полезности - общую идею нарисую на доске.

# Зачем эта приставка квази-?

А если результат тот же - зачем платить больше?

Действительно, если квази вогнутость однозначно слабее чем вогнутость, экономисту проще поверить в то что первая может быть выполнена в реальности.

При этом, повторюсь, как вогнутость так и квази вогнутость приводят к единственности решений в выпуклых задачах (строгое определение выпуклой задачи дам чуть позже).

# Зачем эта приставка квази-?

На самом деле, структура которую вогнутость налагает на полезность говорит не только о единственности решений, но также об отношении агента к риску, он его не любит. Это для нас сейчас - совершенно лишнее знание.

Квази вогнутость это та часть вогнутости, которая отвечает за единственность решений.

Но кроме принципа Оккама есть и другие соображения в пользу квази вогнутости.

# Неоднозначность полезности

Напомню, что для любого строго монотонного преобразования $\varphi$, две полезности - $U(x)$ и $\varphi(U(x))$ - производят идентичное поведение у потребителей.

Все ниже перечисленные полезности эквивалентны с точки зрения поведения потребителей

$$x^2 y^3,$$
$$2 \log x + 3 \log y,$$
$$2 \log x + 3 \log y + 1,$$
$$2(2 \log x + 3 \log y) + 1.$$

# Неоднозначность вогнутости

Напомню. что вогнутость (часто) ломается при монотонных преобразованиях полезности.

В отличие от нее, квази вогнутость сохраняется при монотонных преобразованиях полезности.

Когда какое то свойство инвариантно к спецификации (или трансформации) полезности, экономисты такое очень любят.

# Неоднозначность вогнутости

Итак, супер важный факт:

**Lemma 8**

*Если $U(x)$ вогнута или квази вогнута, то $\varphi(U(x))$ квази вогнута для любой строго монотонно возраст-ей функции $\varphi$.*

Конечно, может так случиться, что $\varphi(U(x))$ все таки вогнута, это ничему не противоречит поскольку из вогнутости следует и квази вогнутость. Функция может быть вогнутой и квази вогнутой одновременно.

# Неоднозначность вогнутости

Чтобы придумать алгебраичное доказательство, достаточно знать следующие свойства строго монотонно возрастающих функций $\varphi$:

$$
\begin{aligned}
U(x) \leqslant U(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(U(x)) \leqslant \varphi(U(y)) \\
U(x) \geqslant U(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(U(x)) \geqslant \varphi(U(y)) \\
\min(\varphi(U(x)), \varphi(U(y))) &= \varphi(\min(U(x), U(y)))
\end{aligned}
$$

# Какие функции квази вогнуты?

# Какие функции квази вогнуты?

Приведу несколько примеров

- линейные
- вогнутые
- монотонно возрастающие преобразования вогнутых
- монотонные в $\mathbb{R}^1$
- однопиковые в $\mathbb{R}^1$

Продвинутое упражнение: приведите (нарисуйте) две функции (поверхности) в $\mathbb{R}^2$: монотонную и однопиковую; которые не являются квазивогнутыми.

# Предпочтения

# Предпочтения

Модель предпочтений более абстрактна чем полезность

- снова один агент
- товары разделены на $n$ категорий
- портфель (потр. корзина) это точка в $\mathbb{R}_+^n$
- категории, а также координаты обозначаются $x, y, z...$
- множество доступных альтернатив $X \subset \mathbb{R}_+^n$

Однако вместо полезности $U : X \to \mathbb{R}$ у агента в голове зашито бинарное отношение $\succcurlyeq: X^2 \to \{0, 1\}$.

# Предпочтения

Напомню как визуализировать бинарное отношение на множестве альтернатив малой размерности, например 3.

| $\succcurlyeq$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 1 | 0 |
| $y$ | 0 | 1 | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | 0 |

$x \succcurlyeq y$ означает что $(x, y) \mapsto 1$.

$x \preccurlyeq y$ означает что $(y, x) \mapsto 1$.

Формально, бинарное отношение – это любое расположение ноликов и единичек внутри матрицы.

# Предпочтения

Напомню, что для простоты вводятся дополнительные обозначения:

$x \sim y$ означает что $x \succcurlyeq y$ и $x \preccurlyeq y$.

$x \succ y$ означает что $x \succcurlyeq y$ но не $x \sim y$.

$x \prec y$ означает что $x \preccurlyeq y$ но не $x \sim y$.

Получаются пять интуитивных отношений сильного, слабого предпочтений и безразличия.

Однако какие попало матрицы писать не стоит.

# Предпочтения

Поскольку у бинарного отношения есть экономическая интерпретация, это накладывает на него определенные ограничения, называемые аксиомами рациональности.

**Definition 9**

Предпочтения $\succcurlyeq$ рациональны, если

- для любых $x, y \in X$, либо $x \succ y$ либо $y \succ x$ либо $y \sim x$.
- для любой $x \in X$, всегда верно что $x \sim x$
- для любых $x, y, z \in X$:

$$x \succcurlyeq y, y \succcurlyeq z \quad \Rightarrow \quad x \succcurlyeq z$$

Последнее свойство - самое важное и называется транзитивностью.

# Предпочтения

Рациональность накладывают структуру на то, как может заполняться матрица.

| $\succsim$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $*$ | $*$ | $*$ |
| $y$ | 0 | $*$ | 1 |
| $z$ | 0 | 1 | $*$ |

Попробуйте дозаполнить следующую матрицу так, чтобы предпочтения были рациональными.

# Свойства предпочтений

# Предпочтения

Переопределив естественным образом Лебеговы множества $L_+(x)$ и $L_-(x)$ в терминах предпочтений, мы автоматически получаем аналоги свойств предпочтений. Заодно, можно сразу дать определения монотонности и локальной ненасыщаемости для полезности и предпочтений.

| предпочтения | полезности | определение |
|---|---|---|
| непрерывны | непрерывны | $L_+, L_-$ замкнуты |
| выпуклы | квази вогнуты | $L_+$ выпуклы |
| - | вогнуты | подграфик выпуклый |
| монотонны | монотонны | $L_+(x) + v \subset L_+(x),\ \forall v \in \mathbb{R}^n_+$ |
| лок. ненас. | лок. ненас. | $\forall x, \varepsilon\ \exists y : \lvert x - y \rvert < \varepsilon, y \in L_{++}(x)$ |

Тут, к сожалению, есть врожденный баг терминологии.

# Предпочтения

Парадокс в том, что вогнутые (concave) полезности - квазивогнутые, однако, ассоциированы с выпуклыми предпочтениями. А выпуклые (convex) полезности, например $\max(x, y)$, с выпуклыми предпочтениями как раз никак не связаны и даже противоречат им.

# Предпочтения

Это происходит из того, что выпуклость - очень древнее слово в физике и те кто придумали выпуклые предпочтения (они были скорее всего физико-математиками) не задумались о том, что это приведет к конфликту в будущем.

Дело в том, что в физике все минимизируется (например, энергия), поэтому функции там выпуклые, а в экономике, наоборот, полезность максимизируется поэтому она вогнутая.

# Прямая связь

# Прямая связь

Предположим, что у вас уже есть откалиброванная полезность. Как вывести из нее модель предпочтений?

**Definition 10**

Будем говорить, что $U$ представляет $\succcurlyeq$, если

$$U(x) \geqslant U(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \succcurlyeq y.$$

Должно быть понятно, что если предпочтения представлены $U$, то они будут обязательно рациональны, поскольку аксиомы рациональности копируются со свойств вещественных чисел.

Также, любое свойство предпочтений, будь то непрерывность, монотонность или квази вогнутость, копируются на полезность которая его представляет.

# Обратная связь

# Обратная связь

Предположим, что у вас уже есть откалиброванные рациональные предпочтения в $X \subset \mathbb{R}^n$. Можно ли восстановить по ним хотя бы одну непротиворечивую полезность?

Оказывается, что в простых случаях, действительно, можно.

**Lemma 11**

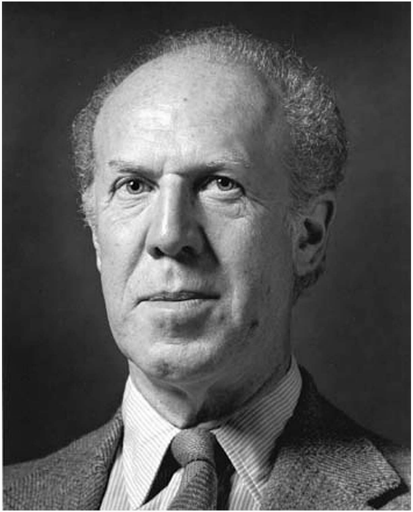
*Если $X$ конечно, то для любых рациональных предпочтений $\succcurlyeq$ существует полезность $U$, представляющая $\succcurlyeq$.*

Это легко доказать алгоритмически. Доказательство также легко переносится на случай счетного $X$.

В случае когда пространство альтернатив достаточно мощное, нам понадобится непрерывность предпочтений.

# Обратная связь

Жерар Дебрё (Gérard Debreu) французский экономист и математик, профессор экономики университета Беркли, лауреат нобелевской премии 1983 года по экономике. Работал над представлениями предпочтений потребителя при помощи вещественнозначных функций и существованием равновесий в конкурентных рынках.



# Обратная связь

**Theorem 12 (Дебрё)**

*Если верно * то для любых рациональных и непрерывных предпочтений $\succcurlyeq$ существует непрерывная полезность $U$, представляющая $\succcurlyeq$.*

Звездочка * это паравоз из условий, который меняется в зависимости от стиля доказательства. Есть несколько вариантов доказательства, из которых я вкратце расскажу два.

Сразу замечу, что отдельно проверять непрерывность $U$ не надо, так как она автоматически наследуется от $\succcurlyeq$.

# Обратная связь

Первый вариант паровоза *: $X$ это выпуклое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$, а еще $\succcurlyeq$ строго монотонный.

- Шаг 1. Ищем экстремумы $\succcurlyeq$ и соединяем их хордой $Y$.
- Шаг 2. Элементарно строим полезность на $Y$.
- Шаг 3. Продолжаем полезность с $Y$ на весь $X$.

Последний, самый сложный, шаг звучит примерно так.

Для любой точки $x$ вне $Y$ строим $L_{++}(x)$ который содержит верхний и $L_{--}(x)$ который содержит нижний конец хорды. Они не пересекаются, значит есть точка $y$ на хорде такая что $x \sim y$, следовательно, можно присвоить значение $U(x) := U(y)$.

# Обратная связь

Второй вариант паровоза *: $X$ сепарабельно и связно.

- Шаг 1. Берем счетное, всюду плотное подмножество $Y$. В частности, если $X \subset \mathbb{R}^n$, можно взять, $Y := \mathbb{Q} \cap X$.
- Шаг 2. Элементарно строим полезность на $Y$.
- Шаг 3. Продолжаем полезность с $Y$ на весь $X$.

Последний, самый сложный, шаг звучит примерно так.

Для любой точки $x$ вне $Y$ строим $L_{++}(x)$ и $L_{--}(x)$. Если есть точка $y \in Y$ такая что $x \sim y$, можно присвоить значение $U(x) := U(y)$. В противном случае, полагаем

$$U(x) := \frac{\sup_{y \in Y \cap L_{--}(x)} U(y) + \inf_{y \in Y \cap L_{++}(x)} U(y)}{2}.$$

# Выбор

# Выбор

Модель выбора максимально абстрактна

- снова один агент
- товары разделены на $n$ категорий
- портфель (потр. корзина) это точка в $\mathbb{R}^n_+$
- категории, а также координаты обозначаются $x, y, z$...
- множество доступных альтернатив $X \subset \mathbb{R}^n_+$

Вместо полезности $U : X \to \mathbb{R}$...

или бинарного предпочтения $\succcurlyeq : X^2 \to \{0, 1\}$...

у агента в голове зашито отображение выбора $C : 2^X \to 2^X$.

Что это значит?

# Выбор

Это значит, что агент отображает подмножества в подмножества. Так же как и с предпочтениями, есть несколько естественных технических ограничений:

- $C(Z) \neq \emptyset$
- $C(Z) \subset Z$

Для любого непустого меню $Z \subset X$.

Есть еще третья, самая важная аксиома.

# Выбор

Рассмотрим любые два портфеля $x, y \in X$ и два меню $Z, Z' \subset X$, таких что $x, y$ содержатся в обоих меню.

**Definition 13**

Слабая аксиома выявленных предпочтений (WARP):

Если в первом меню $y$ был выбран (в присутствие $x$) то невозможно чтобы во втором меню $x$ был выбран (в присутствие $y$) но сам $y$ выбран не был.

Интуитивно, выбирая $x$ но не $y$ во втором меню вы, по сути, озвучиваете что-то вроде строгого предпочтения $x$ над $y$.

Тогда, в первом меню было бы странно выбрать $y$ в присутствие лучшего $x$.

**Definition 14**

Будем говорить, что $C$ выявляет (reveals) $\succsim$, если

$$x \succsim y \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ выбран в присутствие } y$$

Отсюда моментально следует, что $x \succ y$ тогда и только тогда, когда $x$ выбран в присутствие $y$ но сам $y$ выбран не был в том же меню, как в условии WARP.

Предполагая нарушение следствия WARP, во втором меню $y$ был выбран в присутствие $x$, что значит $y \succsim x$, но это противоречит $x \succ y$.

# Выбор

Таким образом, WARP является необходимым условием для рациональности выявленных предпочтений (revealed preference).

Более того, из рациональности выявленных предпочтений также следует (а значит является необходимым условием) так называемая сильная аксиома выявленных предпочтений, которая рассматривает последовательность из $n+1$ меню.

**Definition 15**

Сильная аксиома выявленных предпочтений (SARP):

Если $x_i$ был выбран в присутствии $x_{i-1}$, для $i = 1, ..., n$, то невозможно, чтобы в последнем меню $x_0$ был выбран (в присутствие $x_n$) но сам $x_n$ выбран не был.

По сути, WARP это полнота, а SARP это еще и транзитивность выявленных предпочтений. Легко видеть, что из SARP следует WARP, то есть, сильная аксиома «сильнее» чем слабая.

# Выбор

Обращаю внимание, что для условий/аксиом «сильнее» это «хуже», потому что меньше надежды на то что оно выполнено.

Мы всегда говорим «сильное условие» с сожалением.

Для теорем все наоборот, «сильнее» это «лучше».

Более «сильная» теорема/доказательство это та у которой более «слабые» условия при тех же выводах, либо более «сильные» выводы при тех же условиях.

Мы говорим «сильное доказательство» с гордостью.

# Выбор

Есть еще третья, обобщенная аксиома выявленных предпочтений (GARP), которая сильнее чем SARP и WARP.

Они все звучат очень похоже и у них похожие условия, так что легко ошибиться. Мне кажется, в некоторых учебниках даже я видел неправильные определения.

Будьте аккуратны.

# Заключение

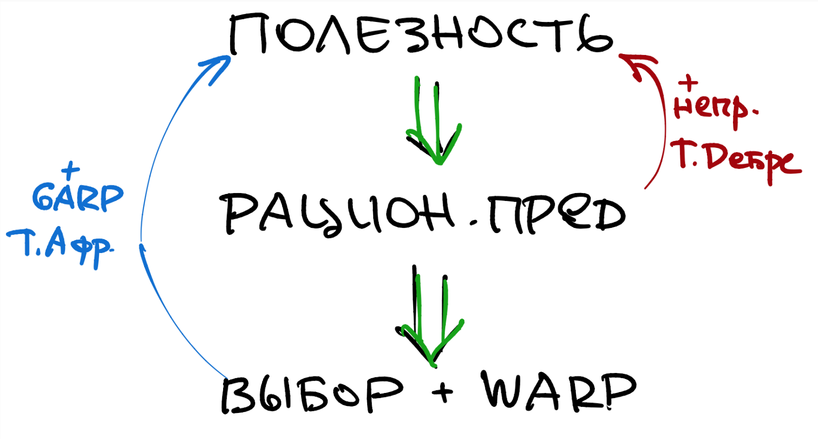
# Заключение

Мы продемонстрировали, что из любой полезности можно вывести рациональные предпочтения, а из рациональных предпочтений выбор со слабой и сильной аксиомами.

С другой стороны, из любых непрерывных и рациональных предпочтений можно вывести непрерывную полезность - это Теорема Дебре.

Аналог обратной связи для выбора называется Теорема Африата, для которой нужен таки GARP. Это очень продвинутый материал, анализ которого не входит в мой курс.

# Заключение



# Заключение

Какой из всего этого можно сделать вывод?

Все три модели, в каком то смысле эквивалентны. Поэтому можно смело использовать ту, которая вам кажется удобнее.

Чаще всего (99% случаев) это полезность, но иногда это и предпочтения, например в анализе алгоритма Гейла-Шепли, при помощи которого вас распределили по факультетам.

С другой стороны, аксиомы выбора недавно «вылезли» в новейших комбинаторных аукционах, поэтому от теории выбора тоже есть некоторый толк.