Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

2 февраля 2024 г.

Теорема об огибающей

Теорема об огибающей

Определим огибающую $V(p)$ как результат оптимизации функции f по какому-то статическому множеству :

$$V(p) := \max_{x \in X} f(x, p),$$

Theorem 1 (Об огибающей)

Функция $V(p)$ дифференциируема (почти всюду) и

$$\frac{\partial V(p)}{\partial p} = \frac{\partial f(x, p)}{\partial p}\Big|_{x = x^*(p)}.$$

... то есть, наклон огибающей (в пространстве параметров) равен наклону опорной функции в точке касания.

Теорема об огибающей

Рассмотрим простой пример:

Опорная функция

$$f(x|a,b) = -(x-a)^2 - b$$

Максимизируем ее

$$x^* = a, \quad f^* = -b$$

Дифференциируем истинный ответ:

$$\partial f^*/\partial a = 0, \ \partial f^*/\partial b = -1$$

Дифференциируем (казалось бы, зачем?) опорную функцию:

$$\partial f/\partial a = -2(x^* - a), \ \partial f/\partial b = -1$$

Минимизация расходов

Минимизация расходов

Для простоты пусть будут два товара x, y с ценами p, q.

Классическая задача максимизации полезности:

$$\text{P1:} \quad U(x, y) \to \max_{x,y \geqslant 0}, \quad \text{s.t.} \quad px + qy \leqslant W.$$

Дуальная (к ней) задача минимизации расходов:

$$\text{P2:} \quad px + qy \to \min_{x,y \geqslant 0}, \quad \text{s.t.} \quad U(x, y) \geqslant \bar{U}.$$

Минимизация расходов

Решение задачи (P1) максимизации полезности это так называемые маршаллианские спросы $m_x(p, q, W)$, $m_y(p, q, W)$ и косвенная полезность $V(p, q, W)$.

Решение задачи (P2) минимизации расходов это так называемые хиксианские спросы $h_x(p, q, \bar{U})$, $h_y(p, q, \bar{U})$ и функция расходов $E(p, q, \bar{U})$.

Минимизация расходов

Сравним лагранжианы

$$\mathcal{L}^1 = U(x, y) - \lambda(px + qy - W)$$
$$\mathcal{L}^2 = (px + qy - W) - \gamma(\bar{U} - U(x, y))$$

Сравним фоки (упп)

$$\text{P1:} \quad U'_x = \lambda p, \quad U'_y = \lambda q, \quad px + qy = W$$
$$\text{P2:} \quad p = \gamma U'_x, \quad q = \gamma U'_y, \quad U(x, y) = \bar{U}$$

Решения совпадают, если третьи уравнения эквивалентны.

Закон Вальраса

Закон Вальраса

Theorem 2 (Закон Вальраса)

Если полезность локально ненасыщаема в $\mathbb{R}^n_+$, то любое из решений задачи максимизации полезности всегда лежит на бюджетном ограничении.

Это утверждение доказывается от противного.

Дуальность

Дуальность

Мы подошли к очень важному наблюдению.

Theorem 3 (Дуальность)

Если полезность (квази-)вогнутая и локально ненасыщаемая, то любое решение (как функция от цен) задачи минимизации расходов воспроизводится как одно из решений максимизации полезности и наоборот.

Причем, все это при одних и тех же ценах. Это чуть более сильное утверждение чем просто закон Вальраса.

Это значит, что задача максимизации полезности и задача минимизации расходов по большому счету эквивалентны в определенном геометрическом смысле.

Более того, для того чтобы понять при каком уровне полезности $\bar{U}$ решение задачи минимизации расходов совпадет с решением задачи максимизации полезности при бюджете W, надо положить

$$\bar{U} := V(p, q, W),$$

и тогда вы потратите в точности W.

То есть, для любых цен верно что

$$\bar{U} = V(p, q, E(p, q, \bar{U})), \quad W = E(p, q, V(p, q, W)).$$

и верно что

$$h = m(p, q, E(p, q, \bar{U})), \quad m = h(p, q, V(p, q, W)$$

Тождество Роя

Тождество Роя

Воспользуемся дуальностью:

$$U = V(p, q, E(p, q, U)).$$

Убедитесь, что это действительно корректная запись.

Что можно сделать с этим тождеством?

- продифференцировать по p
- продифференцировать по q

ведь оно выполнено при всех p, q.

Тождество Роя

Заметим, что цены входят справа дважды:

$$\bar{U} = V(p, q, E(p, q, \bar{U})).$$

По правилам дифференцирования, полный дифференциал функции V по p равен:

$$\frac{dV}{dp} = \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial W} \cdot \frac{\partial E}{\partial p} = 0$$

Все это при заданном $\bar{U}$ и меняющихся ценах.

Тождество Роя

Поскольку $\frac{\partial E}{\partial p} = h$,

$$\frac{dV}{dp} = \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial W} \cdot h_x = 0$$

Аналогично для второй цены

$$\frac{dV}{dq} = \frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial W} \cdot h_y = 0$$

Вспоминая что $m = h$ получаем:

Theorem 4 (Тождество Роя)

Если $\vec{m}$ - весь вектор спросов, а $\vec{p}$ - весь вектор цен то

$$\vec{m} = -\frac{\nabla_{\vec{p}} V}{\partial V / \partial W}$$

Как не запутаться?

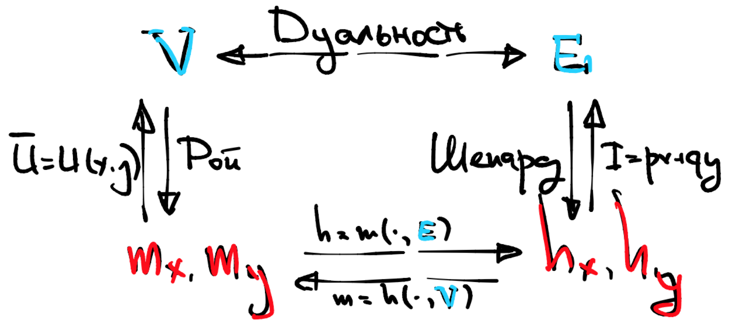
Как не запутаться?

Подводя итог, у нас было две задачи: максимизации полезности и минимизации расходов. Каждая задача произвела три обьекта:

- оптимальные $m_x(p, q, W), m_y(p, q, W)$ и косвенная полезность $V(p, q, W)$ в первой задаче
- оптимальные $h_x(p, q, \bar{U}), h_y(p, q, \bar{U})$ и функция расходов $E(p, q, \bar{U})$ во второй задаче

Можно изобразить «схему перемещений» между объектами

Как не запутаться?



Примеры на доске