

# Микроэкономика-I

---

Павел Андреянов, PhD

11 января 2024 г.

# Программа курса

---

- Теория Потребителя
  - Модель: товары  $x, y \rightarrow$  полезность  $U(x, y)$
  - Максимизация полезности
  - Предпочтения, спрос, эластичность...
  - CV, EV
- Теория Производителя
  - Модель: ресурсы  $x, y \rightarrow$  производство  $F(x, y)$
  - Максимизация прибыли (минимизация издержек)
  - Технологии, предложение, эластичность...
- Частичное равновесие
  - налоги, потолки, DWL

Лектор: Павел Андреянов ([pandreyanov@gmail.com](mailto:pandreyanov@gmail.com)/[hse.ru](http://hse.ru))

Семинаристы: Даша

Учебники:

- Вэриан (V) и Ехил Рени (JR), есть русские версии
- Бусыгин, Желободько, Цыплаков (BZC) том I,II
- Мас Колел (MC)

Задачник – Левина, Покатович

Прочие ресурсы:

- телеграм: `channel_micro_2023`, `forum_micro_2023`
- офис аурз: TBD
- консультации и тестовые контрольные
- `pandreyanov.github.io/pashas_micro_one_lectures`



# Предисловие

---

Экономика это не физика, и не ветвь прикладной математики, а школа философской мысли, в которой некоторые рассуждения могут делаться при помощи математики.

Но на сегодняшний день традиция такова, что мы думаем об экономике именно в терминах жестких математических моделей.



Модели пишутся на языке мат. анализа, что позволяет этим моделям пересекать временные, языковые и культурные границы.

Но само по себе использование мат. анализа не делает эти модели «правильными» и, в конечном счете, оценка качества модели субъективна.

В экономике вообще нет «правильных» моделей.

Существует большое количество разнообразных моделей и у каждой есть свои достоинства и ограничения.

В этом курсе мы научим вас быть последовательными в рамках отдельно взятых моделей, а также немного разбираться в их многообразии.

# План

---

# План на первую половину лекции

## Модели поведения потребителя.

Мы поговорим подробно о первых двух моделях (полезность и предпочтения) и, вскользь о третьей модели (выбор). Большой упор будет сделан на понятия непрерывности и выпуклости.  
(скорее всего тут время закончится)

Затем, мы попробуем отождествить некоторые из этих моделей между собой. В частности, будет обсуждена относительно простая прямая связь между полезностью и предпочтениями.

Вершиной этого блока будет обратная связь между предпочтениями и полезностью, так называемая, **Теорема Дебре**. После нее надо сделать перерыв.

Что такое модель?

---

# Что такое модель?

Модель - это упрощенная версия реальности, из которой специально убраны детали, иногда очень важные, для того чтобы изолировать и анализировать какой то один аспект этой (сложной) реальности.

Сила модели идет не от ее детализации и сложности, а, наоборот, от ее простоты. Хорошая модель - это (максимально) простая модель, объясняющая феномен.

Этот методологический принцип называется бритвой Оккама, хотя он был известен со времен Аристотеля.

# Что такое модель?

К примеру, мы желаем изучить рынок жилья для студентов.

Есть жилье поближе и подальше. Чем ближе тем лучше для студента, но также дороже. Также есть общественный транспорт, метро, велосипед...

Как студент принимает решение о выборе жилья?

# Что такое модель?

Другой пример, я прихожу в супермаркет.

Я могу купить мясо, рыбу, несколько овощей и фруктов. У меня есть определенный бюджет, но я могу из него выйти за счет кредитки.

Как я принимаю решение что купить и в каком количестве?



# Что такое модель?

В этом курсе мы чаще всего будем делать предположение о **конкурентном рынке** - это когда товары и ресурсы покупаются по стабильным (и **экзогенным**, от греч. -генēs рожденный и ехō- снаружи) рыночным ценам.

В более общем смысле, агент не может повлиять своими действиями на состояние рынка, потому что он слишком мал по отношению к рынку.

Это конечно же неверно, но мы будем его предполагать, если не сказано иначе.

# Три модели потребителя

---

Три конкурирующих модели поведения потребителя:

- полезность (классика)
- предпочтения (нео)
- выбор

Различия между ними скорее философские, но мы все равно преподаем их как часть традиционного курса микроэкономики.

# Полезность

---

В модели полезности (классика) у каждого агента в голове зашита функция полезности, которая переводит любой **портфель** или **корзину** потребительских товаров (или совсем абстрактно **альтернатива**) в вещественное число с мистической единицей измерения **утили**.



Например, у меня на выбор есть

- 3 куба, 1 круг = 8 утилей
- 12 конусов = 60 утилей
- 1 конус, 4 круга = 3 утиля

Агенты сравнивают утили и принимают экономические решения, дабы их максимизировать. В данном случае мы выберем 2ой вариант на 60 утилей.

Это самая старая модель, поэтому мы будем называть ее классической.

Полезность определена с точностью до монотонного преобразования. Это серьезная проблема, это значит, что модель невозможно толком **откалибровать** или **оценить**.



Действительно, все нижеперечисленные полезности неразличимы с точки зрения наблюдателя.

- $x^2y^3$
- $2 \log x + 3 \log y$
- $2 \log x + 3 \log y + 1$
- $5(2 \log x + 3 \log y) + 1$

Если модель нельзя оценить по данным, это однозначно «плохая» модель. Экономисты всегда-всегда пытаются от этого избавиться.

Как правило, в классической модели все координаты  $x, y$  неотрицательные, потому что непонятно, что значит потребить  $-1$  яблок. Это иногда пишется явно, а иногда умалчивается для экономии чернил.

Всегда подразумеваем что  $x, y \geq 0$ , если не сказано обратное. Но только для потребителя, потому что производитель может потребить  $-10$  яблок, чтобы произвести яблочный сок.

Полезность можно также задать табличкой

1 яблоко	+	1 груша	=	3 утиля
2 яблока	+	1 груша	=	4 утиля
1 яблоко	+	2 груши	=	5 утилей

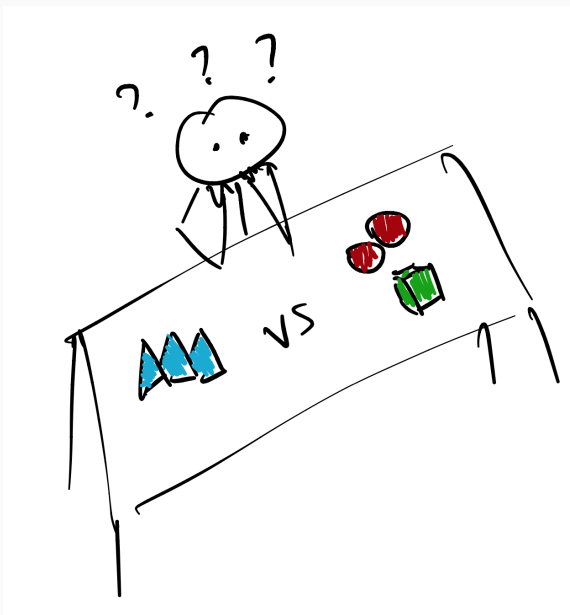
Потренируемся в монотонном преобразовании утилей?

# Предпочтения

---

В модели предпочтений от агентов требуется, казалось бы, меньше. Они должны в моменте сравнить два портфеля и назвать лучший. Другими словами, они должны озвучить предпочтения.

Мы будем называть эту модель **неоклассической**.



Этот минимализм обманчив. Чтобы оставаться экономическими агентами, они должны помнить все свои выборы, и не менять их на протяжении эксперимента.

Это матрица  $n \times n$ , где  $n$  - это число возможных портфелей. Это очень много надо агенту запомнить.

Зато, здесь отсутствует проблема представления поведения потребителя двумя разными моделями, поэтому экономисты эту модель тоже очень любят.

Для простоты пусть есть всего три альтернативы  $a, b, c$ , тогда я могу зафиксировать выбор таким образом:

$\succsim$	$a$	$b$	$c$
$a$	1	0	1
$b$	1	1	0
$c$	1	0	1

Значок  $\succsim$  означает предпочтение.

Запомним эту таблицу



Для данной таблицы

$$\succsim (a, b) = 0, \quad \succsim (b, a) = 1$$

что означает «строгое» предпочтение  $b$  над  $a$ .

Я буду использовать вот такой значок  $b \succ a$  для «строгого» и вот такой значок  $b \succsim a$  для «нестрогого» предпочтения, что означает

$$\succsim (a, b) = 0 \text{ или } 1, \quad \succsim (b, a) = 1$$

... вообще я могу писать просто скобки, без  $\succsim$ .

Получается довольно элегантный язык предпочтений.

Ставим в табличку  $(x, y) = 1$  если агент проявил нестрогое предпочтение  $x$  над  $y$ , например, добровольно поменял в эксперименте  $y$  на  $x$ .

- $(a, b) = 1$  и  $(b, a) = 0$  это  $a \succ b$
- $(a, b) = 0$  и  $(b, a) = 1$  это  $b \succ a$
- $(a, b) = 1$  и  $(b, a) = 1$  это  $b \sim a$

Ставим в табличку  $(x, y) = 0$  если (тут нужно проявить фантазию) агент отказался менять  $y$  на  $x$  плюс «эпсилон».

Потренируемся у доски переводить полезности в предпочтения...

Пусть множество альтернатив это числа -2, -1, 0, 1; Заполните матрицу предпочтений для следующих функций полезности, как если бы вы проводили эксперимент над человеком с истинной классической полезностью над целыми числами

- полезность  $x$
- полезность  $x^2$
- полезность  $|x|$
- полезность  $x^3$

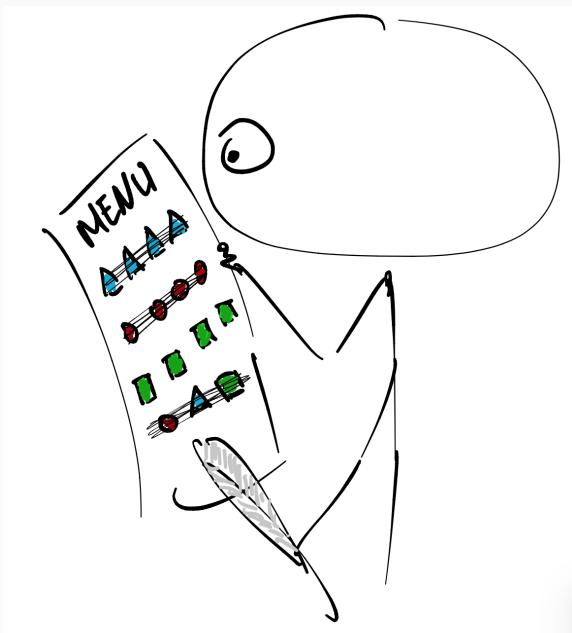
# Выбор

---

В модели выбора от агентов требуется принимать решения, максимально приближенные к реальности. Вам предлагают меню (**menu**) из:  $(a, b, c)$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, c)$ ,  $(b, c)$ ,  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(c)$ .

И вы просто вычеркиваете то, что вам точно не нравится. Все что вы не вычеркнули - это и есть ваш выбор (**choice**).

Эта модель требует от экономического агента знать не свою функцию полезности, и даже не  $n^2$  готовых ответов, как в предпочтениях, а целых  $2^n$  готовых ответов.



Потренируемся у доски переводить полезности в выбор...

Пусть меню это наборы (портфели) чисел  $(-2,1,2)$ ,  $(-1,1)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1)$ ; Запишите выбор, как если бы вы проводили эксперимент над человеком с истинной классической полезностью над портфелями чисел  $\{x_i\}$ .

- полезность  $\sum_i x_i$
- полезность  $\sum_i x_i^2$
- полезность  $|x_0|$

На самом деле, есть строгие определения того как спускать полезность в предпочтения и предпочтения в выбор (именно такая иерархия) однако я хотел чтобы вы сами догадались, вместо того чтобы запоминать их.

Они очень естественные и интуитивные.



Какая из моделей лучшая?

---

## Какая из моделей лучшая?

Можно долго спорить, какая из этих моделей более или менее реалистичная. Правильный ответ - они все нереалистичные.

- агент должен знать ответы на все вопросы
- ответ не может меняться во времени

Реализм вообще не является добродетелью модели. Вся суть модели в том, чтобы подняться на другой уровень абстракции.

**Потренируемся в  
моделировании**

---

Какую модель вы бы выбрали для описания следующих жизненных задач? и почему

- купить продуктов в магазине
- выбора университета
- голосования в думу
- одежду отдать в приют или оставить себе

Предположим, что вы выбрали утилитарную (классическую) модель.

Далее, вам нужно ответить на следующие вопросы

- сколько вообще товаров
- какие доступны альтернативы
- что мы знаем про полезность/предпочтения/выбор

# Классическая модель

---

# Классическая модель

Модель полезности обладает высоким уровнем абстракции

- начнем с одного агента
- товары разделены на  $n$  категорий
- портфель/корзина/альтернатива это точка в  $\mathbb{R}_+^n$
- категории, а также координаты обозначаются  $x, y, z, \dots$
- соответствующие цены обозначаются  $p, q, r, \dots$
- полезность обозначается  $U(x, y, z, \dots)$
- множество доступных альтернатив  $X \subset \mathbb{R}_+^n$

Плюсик в  $\mathbb{R}_+^n$  означает неотрицательные значения потребления, мы иногда называем это множество **первый/положительный ортант Евклидова пространства**.

Таким образом, мы можем сформулировать модель потребителя как абстрактную оптимизационную задачу, скажем, для трех товаров:

$$U(x, y, z, \dots) \rightarrow \max_{(x, y, z, \dots) \in X}$$

Формально **классическая (утилитарная) модель** это пара: множество альтернатив  $X \subset \mathbb{R}_+^n$  и полезность  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Никаких дополнительных аксиом не требуется.

Множество альтернатив будет, как правило, зависеть от цен  $p, q, r, \dots$  и бюджета  $W$  (от слова **wage**).

$$X = \{x, y, z, \dots \in \mathbb{R}_+^n : px + qy + rz + \dots \leq W\}$$



## Пример 1

У Пети есть 100 рублей. Он может купить яблоки ( $x$ ) по цене 20 рублей за штуку либо груши ( $y$ ) по цене 50 рублей за штуку. Петя получает полезность 2 за каждое яблоко и 3 за каждую грушу, но не получает никакой полезности за оставшиеся деньги.

Попробуем записать это формально:

- $X = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_+^2 : 20x + 50y \leq 100\}$
- $U(x, y) = 2x + 3y$

Здесь  $\mathbb{Z}_+^2$  это **решетка из целых значений**, потому что нельзя покупать нецелые яблоки и груши.

## Пример 2

У Кати есть 24 часа в сутки, из которых она должна как минимум 8 часов поспать ( $x$ ), а дальше она учится и занимается. Однако, на каждый час учебы ( $y$ ) нужен один час отдыха ( $z$ ), и наоборот, иначе время проходит зря.

Попробуем записать это формально:

- $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : x + y + z \leq 24\}$
- $U(x, y, z) = \mathbb{I}(x \geq 8) \cdot \min(y, z)$

Здесь  $\mathbb{I}(x \geq 8)$  это **индикатор-функция**, принимающее значение 1 когда выражение в скобках выполнено, иначе 0.

## Свойства полезности в $\mathbb{R}^n$

---

Мы начнем с двух эквивалентных определений непрерывности.

## Definition 1

Полезность  $U$  **непрерывна** в  $X$ , если для любого  $x \in X$  множества  $L_+(x)$  и  $L_-(x)$  замкнуты, где

$$L_+(x) = \{y \in X : U(y) \geq U(x)\}$$

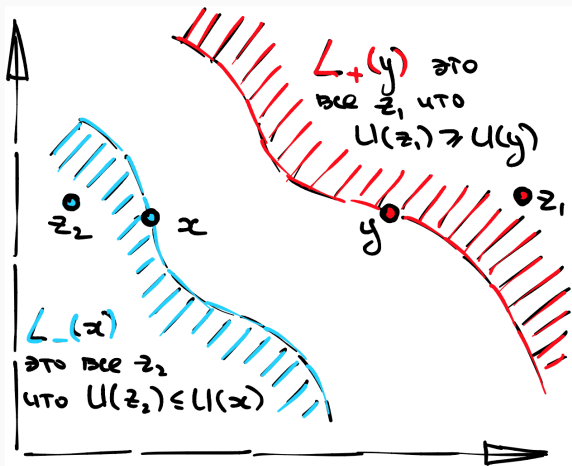
$$L_-(x) = \{y \in X : U(y) \leq U(x)\}$$

Описанные выше множества  $L_+(x)$  (или  $L_-(x)$ ) - это подмножества допустимых альтернатив, которые не хуже (или не лучше), чем сам  $x \in X$ .

Их часто называют **Лебеговыми множествами** относительно точки  $x$ ,  $L_+(x)$  - верхним а  $L_-(x)$  - нижним.

# Непрерывность

рисунок в  $\mathbb{R}^n$



Эквивалентное (но только в Евклидовых пространствах) определение непрерывности можно дать на более знакомом вам с курса мат. анализа языке эпсилон-дельта.

## Definition 2

Полезность  $U$  **непрерывна** в  $X$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такой что для любых  $x, y \in X$ :

$$\|x - y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|U(x) - U(y)\| < \varepsilon.$$

Но оно практически бесполезно для экономистов.

Следующее важное определение - это вогнутость.

## Definition 3

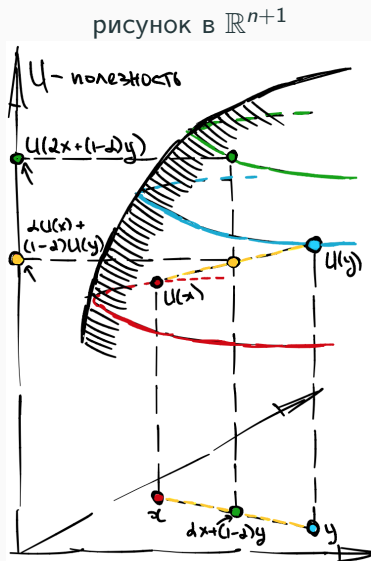
Полезность  $U$  **вогнута**, если для любых  $x, y \in X$ :

$$\forall \alpha \in (0, 1) : U(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y)$$

Многие полезности уже вогнуты сами по себе, например:  $ax + by$ ,  $\min(x, y)$ ,  $\sqrt{xy}$ ,  $x + \log y$ , но некоторые такими не являются, например  $\max(x, y)$ ,  $x^2y^2$ .

# Вогнутость

Пусть пространство товаров  $\mathbb{R}_+^2$ , для простоты. Тогда график функции это такая поверхность. Можно сказать, что **вогнутая функция это когда подграфик выпуклый**, либо, **график вогнутой функции выглядит как колпак**. Еще одно правило - это **график вогнутой функции находится под касательной плоскостью**.





В этом курсе я буду чаще всего пользоваться 2-мерным (1-мерным) пространством товаров, но когда мне надо будет посмотреть на функцию от этих товаров, будет получаться график в соответственно 3-мерном (2-мерном) пространстве.

Постарайтесь не путать ситуацию когда вы смотрите только на область определения функции ( $\mathbb{R}^n$ ) где живут верхние и нижние Лебеговы множества, с ситуацией когда вы смотрите на область определения с приклеенной к ней осью утилей ( $\mathbb{R}^{n+1}$ ) где живут график и подграфик функции полезности.