Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

26 января 2024 г.

Квазилинейные полезности

Квазилинейные полезности

Рассмотрим типичную квази-линейную полезность

$$U(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + z$$

И промаксимизируем ее с бюджетным ограничением

$$px + qy + z \leqslant W$$

где цена последнего товара нормирована к 1.

$$\mathcal{L} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + z - \lambda(px + qy + z - W)$$

Квазилинейные полезности

Рассмотрим сначала «внутренний» случай, он характеризуется тем что все потребления строго положительные.

Выпишем условия первого порядка.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \lambda p, \quad \frac{1}{2\sqrt{y}} = \lambda q, \quad \lambda = 1$$

Получается что $x^* = \frac{1}{(2p)^2}$, $y^* = \frac{1}{(2q)^2}$ а как насчет z?

Квазилинейные полезности

Квазилинейный товар ищется из бюджетного ограничения,

$$z^* = W - px^* - qy^* = W - \frac{1}{4p} - \frac{1}{4q}$$

и нам надо, чтобы это число было положительным:

$$W > \frac{1}{4p} + \frac{1}{4q},$$

тогда это действительно «внутренний» случай, в противном случае этот случай «краевой».

Квазилинейные полезности

Рассмотрим теперь «краевой» случай, он характеризуется тем что $z = 0$, как будто третьего товара не было.

Выпишем условия первого порядка.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \lambda p, \quad \frac{1}{2\sqrt{y}} = \lambda q$$

Получается что

$$x = \frac{1}{(2\lambda p)^2}, \quad y = \frac{1}{(2\lambda q)^2}$$

Подставим в бюджетное ограничение.

Квазилинейные полезности

Подставим в бюджетное ограничение.

$$px + qy = \frac{1}{4\lambda^2 p} + \frac{1}{4\lambda^2 q} = W$$

Получается что

$$\frac{1}{4\lambda^2} = \frac{W}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$$

Подставляя в формулу в прошлом слайде

$$x^* = \frac{1}{p^2}\frac{W}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}, \quad y^* = \frac{1}{q^2}\frac{W}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}, \quad z^* = 0.$$

Квазилинейные полезности

Негладкая полезность

$$U(x, y, z) = \min(x, y) + z$$

с бюджетом

$$px + qy + z \leqslant W$$

максимизируется так же как...

… так же как линейная

$$U(x, z) = x + z$$

с бюджетом

$$(p + q)x + z \leqslant W.$$

Суммы полезностей

Суммы полезностей

Пусть наша полезность это сумма двух классических

$$U(x, y, z, v) = \alpha \log x + \beta \log y + \min(z, v)$$

а цены будут p, q, r, w. Это вогнутая полезность.

Не очень хочется писать громадную систему УПП

Что же делать?

Суммы полезностей

Можно разбить бюджет на две части

$$W = W_1 + W_2$$

Первая часть пойдет на товары x, y а вторая на товары z, v.

Мы пока не знаем как, но в оптимуме какое то разбиение произойдет, так что тут нет потери общности.

Суммы полезностей

Тогда косвенная полезность от первой части будет

$$V_1 = (\alpha + \beta) \log W_1 - \alpha \log p - \beta \log q + const$$

а косвенная полезность от второй части будет

$$V_2 = W_2 / (q + w)$$

это мы вывели на прошлой лекции.

Осталось оптимально разбить бюджет на W_1 и $W - W_1$.

$$V_1 + V_2 = (\alpha + \beta)\log W_1 + const + (W - W_1)/(q + w) \max W_1$$

Это выпуклая задача, выпишем УПП

$$\frac{\alpha + \beta}{W_1} = \frac{1}{q + w}$$

и делаем вывод что $W_1^* = (\alpha + \beta)(q + w)$.

Далее координаты товаров выписываются с использованием W_1^*, в контрольной можно не подставлять.

Произведение полезностей

Произведение полезностей

Пусть наша полезность это произведение двух классических

$$U(x, y, z, v) = \sqrt{xy} * \min(z, v)$$

а цены будут p, q, r, w. Возьмем логарифм

$$\log U(x, y, z, v) = (\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y) + \log(\min(z, v))$$

Видно что $\log U$ это вогнутая полезность, значит сама U квазивогнутая. Далее решение мало чем отличается от суммы.

Удобство и красота решения упирается в известную нам форму косвенной полезности. Попробуем дорешать на доске.

Композиция полезностей

Композиция полезностей

Пусть наша полезность это произведение двух классических

$$U(x, y, z, v) = (x + y)^{1/3}(\min(z, v))^{2/3}$$

а цены будут p, q, r, w. Проверим вогнутость на доске.

Снова попробуем разбить бюджет на $W = W_1 + W_2$.

Композиция полезностей

Пусть наша полезность это произведение двух классических

$$U(x, y, z, v) = (x + y)^{1/3}(\min(z, v))^{2/3}$$

а цены будут p, q, r, w. Проверим вогнутость на доске.

Снова попробуем разбить бюджет на $W = W_1 + W_2$.

Композиция полезностей

Тогда

$$U(x, y, z, v) = (V_1(W_1))^{1/3}(V_2(W_2))^{2/3}$$

благо обе косвенные полезности линейные по бюджету!!!

$$\log U(x, y, z, v) = \frac{1}{3}\log W_1 + \frac{2}{3}\log(W - W_1) + const \to \max_{W_1}$$

следовательно $W_1 = W/3$ и $W_2 = 2W/3$.

Задача практически решена.

Композиция полезностей

Какие вообще косвенные полезности линейны по бюджету?

- линейная $x/a + y/b$
- леонтьев $\min(x/a, y/b)$
- $x^{\alpha} y^{\beta}$ при $\alpha + \beta = 1$
- CES в нужной степени $(ax^r + by^r)^{1/r}$

С такими косвенными полезностями можно легко придумать задачу для контрольной.

Свойства кривых доход-потребление

Нормальные товары

Нормальные товары

Сфокусируемся на наклонах кривых доход-потребление.

Definition 1

Нормальными товарами называются товары, кривые спроса которых монотонно возрастают по доходу, то есть:

$$\frac{\partial x^*}{\partial W} \geqslant 0.$$

Нормальные товары

Проверка нормальности при аккуратно выведенных кривых спроса - это механическое упражнение в дифференцировании.

Как правило, подразумевается глобальное свойство, но можно, в принципе, говорить о локальной нормальности, то есть, в окрестности какой то точки (p, q, I).

Инфериорные товары

Инфериорные товары

Большая часть товаров - нормальны, однако, есть исключения.

Definition 2

Товар, у которого нормальность нарушается:

$$\frac{\partial x^*}{\partial W} < 0,$$

называется инфериорным (при этих значениях параметров).

Инфериорные товары

Инфериорность всегда подразумевается локально, так как глобально инфериорных товаров не бывает.

Действительно, при уменьшении бюджета вы просто не можете постоянно увеличивать спрос, вам не позволит бюджетное ограничение.

Инфериорные товары

Интуитивно, инфериорность (от англ. *inferior*) означает что ваш товар x является худшим по отношению к какому-то другому товару y.

Например, хлеб и консервы считаются инфериорными по отношению к красному мясу и рыбе.

Когда бюджет растет, вы тратите большую часть дохода на дорогие мясо и рыбу, и меньшую на дешевые хлеб и консервы, а также потребляете их меньше в штуках.

Инфериорные товары

Любопытно, что чтобы сломать нормальность x, обязательно должен быть хотя бы один другой нормальный (в этой точке) товар y, по отношению к которому x будет инфериорным (в этой точке).

Lemma 3

Все товары не могут быть одновременно инфериорными.

Доказательство

Если бюджетное ограничение таково, что оптимум находится на бюджетной линии, то, дифференциируя $B(x, y) = 0$ по W, мы получаем:

$$p\frac{\partial x^*}{\partial W} + q\frac{\partial y^*}{\partial W} = 1.$$

Поскольку цены неотрицательные, то инфериорность всех товаров означала бы, что слева стоит отрицательное число, а справа единица, что есть противоречие.

Инфериорные товары

Определите какой из этих товаров инфериорный

- бургер и картошка фри vs риб ай стейк
- поездки в такси vs личный автомобиль
- телефон-андройд vs айфон
- окко, айви vs netflix, hbo

Еще раз повторю, что сам по себе товар не может быть инфериорным, нужен обязательно какой-то другой товар, на который будет перекладываться траты.

Свойства кривых (чужая) цена-потребление

Субституты и комплементы

Субституты

Считается, что все товары в той или иной степени замещаемы, некоторые больше некоторые меньше.

Некоторые пары товаров особенно выделяются в этом плане, например: пепси и кола, лыжи и сноуборд, картошка фри и картошка по-деревенски...

Если цена одного такого товара в паре сильно вырастет, то спрос на второй товар скорее всего вырастет, за счет покупателей, сбежавших от первого товара.

Такие товары называются субститутами.

Субституты

Definition 4

Субститутами (gross substitutes) называются пары товаров, кривые спроса которых монотонно возрастают по ценам друг друга, то есть

- x субститут к y, если $\frac{\partial x^*}{\partial q} \geqslant 0$,
- y субститут к x, если $\frac{\partial y^*}{\partial p} \geqslant 0$.

Поразительно, но отношение субститутабильности на парах товаров может быть не симметричным.

Заголовок в газетах

...Необычайная засуха в Калифорнии привела к дефициту воды и подорожанию свежих апельсинов и мандаринов на 18%... Производители соков (не только апельсиновых, но также яблочных и других) из импортных концентратов собрались на экстренное собрание для обсуждения мер предотвращения дефицита.

Почему они так сделали?

Комплементы

У некоторых пар товаров наблюдается прямо противоположное свойство, их обычно покупают вместе, например: кайак и весло, компьютер и монитор...

Если цена одного такого товара в паре сильно вырастет, то спрос на второй товар скорее всего упадет.

Такие товары называются комплементами.

Комплементы

Definition 5

Комплементами (gross complements) называются пары товаров, кривые спроса которых монотонно убывают по ценам друг друга, то есть

- x комплемент к y, если $\frac{\partial x^*}{\partial q} < 0$,
- y комплемент к x, если $\frac{\partial y^*}{\partial p} < 0$.

Это отношение также не является симметричным.

Заголовок в газетах

Чтобы увеличить долю на рынке, цены на основную линейку смартфонов Самсунг были уменьшены 25%.
Компания-производитель чехлов для смартфонов неожиданно оказалась в списке «единорогов».

Что произошло?

Мысли вслух

К сожалению, субституты/комплементы не является симметричным свойством, то есть x может быть субститутом к y, но y при этом может оказаться комплементом к x.

Это сигнализирует нам о том, что определение выбрано не совсем удачно. Мы к этому вернемся в лекции 4.

Свойства кривых (своя) цена-потребление

Товары Веблена и Гиффена

Товары Веблена и Геффена

Считается, что наклон кривой своя-цена-потребление, как правило отрицательный. Другими словами,

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} < 0, \quad \frac{\partial y^*}{\partial q} < 0,$$

то есть, спрос убывает по собственной цене.

Это называется просто законом спроса (law of demand), и постулируется практически как аксиома в большей части экономических приложений.

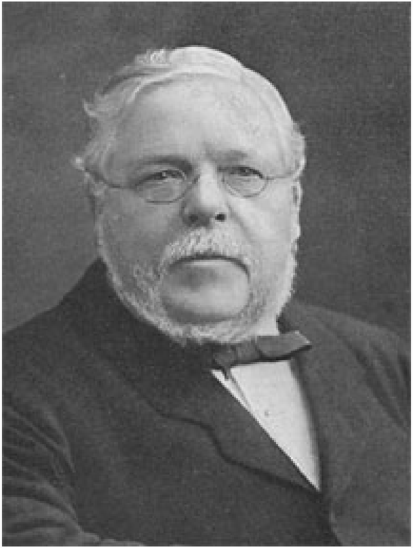
Однако, есть два исключения из этого правила, это товары Веблена и товары Гиффена.

Товары Веблена

Торстейн Веблен (Thorstein Bunde Veblen) норвежско -американский экономист начала 20 века. Был ярым критиком капитализма и развил идею «вычурного» потребления (англ. conspicious consumption). Грубо говоря, люди покупают «вычурные» товары чтобы выпендриться (англ. show off), чтобы получить статус и престиж. Такое поведение очень сложно описать на языке микро-I.

Товары Гиффена

Роберт Гиффен (Robert Giffen) шотландский статистик и экономист конца 19 века. Среди экономистов известен парадоксом Гиффена, заключавшися в том, что ирландцы покупали больше картошки, когда цена картошки выросла. В отличие от Веблена, картошка - не статусный, а, наоборот, инфериорный товар. Мы вернемся к этому в 4 лекции.



Конец