Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

9 февраля 2024 г.

Налоги и компенсации

Мы освоили технику оптимального налогообложения. Это очень удобно, но иногда все равно приходится идти на попятную и точечно корректировать доход отдельным людям, возможно, из социально незащищенных слоев населения.

Поставим задачу вычисления денежной компенсации, которая сбалансирует экзогенное повышение цен, связанное с налогами или санкциями.

Наивная компенсация

Наивная компенсация

Сфокусируемся на одном товаре пока.

Предположим, что полезность агентов была изначально на уровне $\bar{U}_0$ и произошло смещение цен $p \to p + \Delta p$. Как правило, нас интересует именно повышение цен. Пусть потребление товара при цене p было на уровне $x = x_0$.

Например, из за санкций повысились цены на оригинальные кофейные картриджи nespresso, на запчасти автомобилей...

Полезность агентов, конечно же, упала на новый уровень $\bar{U}_1$.

Наивная компенсация

Итак, цены, потребление и полезность изменились

$$p, x_0, \bar{U}_0 \to p + \Delta p, x_1, \bar{U}_1$$

Если у вас совсем мало времени, то можно предложить наивную компенсацию агенту в размере

$$\Delta W_{naive} = \Delta p \cdot x_0$$

то есть, в точности разницу в расходах из за санкций.

Вопрос: Значит, полезность агент останется такой же?

Наивная компенсация

На самом деле, нет, полезность агента вырастет. Убедимся

$$U = \log x + \log y, \quad W = 8$$

Пусть цены выросли от $(1, 1)$ до $(2, 1)$, тогда потребление изменилось от $(4, 4)$ до $(2, 4)$.

Наивная компенсация равна в точности

$$\Delta W_{naive} = (2 - 1) \cdot 4 = 4$$

Однако, при суммарном бюджете в $W = 12$ агент будет потреблять $(3, 6)$ а вовсе не $(4, 4)$.

Убедимся что полезность его вырастет:

$$\log 18 = \log 3 + \log 6 > 2 \log 4 = \log 16$$

Почему?

Наивная компенсация

Из за замещения потребления в результате смещения цен, наивная компенсация получилась слишком большой.

Как бы нам сделать эту компенсацию поменьше.

Компенсирующая вариация

Компенсирующая вариация

Определим компенсирующую вариацию как надбавку к доходу, которая вернет полезность на старый уровень $\bar{U}_0$, подразумевая что цены так и останутся на завышенном уровне.

Definition 1

Компенсирующая вариация определяется как изменение в расходах, ассоциированных со старым уровнем полезности

$$CV = \Delta W_{comp} := E(p + \Delta p, \bar{U}_0) - E(p, \bar{U}_0)$$

где U_0 это старое значение полезности $V(p, W)$.

Другими словами, государство как бы говорит: "извините, мы вам все возместим, мы вам компенсируем за повышение цен".

Компенсирующая вариация

Альтернативное определение компенсирующей вариации это решение нелинейного уравнения

$$V(p+\Delta p, W+\Delta W) = V(p, W)$$

Я утверждаю, что оба метода дают одинаковое ΔW_{comp}.

Убедимся на доске для кобб дугласа, для которого мы уже знаем все формулы

$$V(p, q, W) = (\alpha+\beta)\log W - \alpha \log p - \beta \log q + K$$

$$E(p, q, \bar{U}) = \exp[\frac{\bar{U} - K + \alpha \log p + \beta \log q}{\alpha+\beta}]$$

Компенсирующая вариация

Любопытно, что будет если разложить компенсирующуп вариацию в ряд Тэйлора в окрестности $\Delta p = 0$.

$$CV = E(p + \Delta p, \bar{U}_0) - E(p, \bar{U}_0) \approx \nabla E(p, \bar{U}_0) \cdot \Delta p$$

А чему равна ∇E?

Компенсирующая вариация

Правильно, ∇E равна спросу (хиксианскому) при старом уровне полезности, то есть, то что мы называли x_0.

$$CV \approx x_0 \cdot \Delta p$$

Получается, что ΔW_{naive} это просто линейный член в разложении в ряд ΔW_{comp} (он же CV).

Эквивалентная вариация

Эквивалентная вариация

Предположим, что опять смещение цен $p \to p'$ и что полезность агентов упала до уровня $\bar{U}_1$. Однако, в этот раз пусть это будет обратимое действие.

Например, в Думу было предложено равномерно увеличить налог НДС. Союз пенсионеров рассчитывает «дать взятку», чтобы заблокировать этот проект.

Чему равен максимальный размер такой «взятки»?

Эквивалентная вариация

Определим эквивалентную вариацию как уменьшение дохода, которая оставит полезность на новом измененном уровене $\bar{U}_1$, подразумевая что цены откатятся назад.

Definition 2

Эквивалентная вариация определяется как изменение в расходах, ассоциированных с новым уровнем полезности

$$EV = \Delta W_{equi} := E(p + \Delta p, \bar{U}_1) - E(p, \bar{U}_1)$$

где $\bar{U}_1 = V(p + \Delta p, W)$.

Другими словами, государство как бы говорит: "сколько ты готов заплатить чтобы вернуть назад, однако для тебя это эквивалентно тому что уже есть".

Эквивалентная вариация

Альтернативное определение эквивалентной вариации это решение нелинейного уравнения

$$V(p + \Delta p, W) = V(p, W - \Delta W)$$

Я утверждаю, что оба метода дают одинаковое ΔW_{equi}.

Убедимся на доске для кобб дугласа, для которого мы уже знаем все формулы

$$V(p, q, W) = (\alpha + \beta) \log W - \alpha \log p - \beta \log q + K$$

$$E(p, q, \bar{U}) = \exp[\frac{\bar{U} - K + \alpha \log p + \beta \log q}{\alpha + \beta}]$$

Какой способ лучше?

Медленный подсчет вариаций через E

К примеру, в Леонтьевской полезности $\min(x/a, y/b)$ функция расходов выписывается быстро, если вспомнить, что левый и правый аргумент функции минимума обязаны давать одно и то же значение в оптимуме:

$$h_x = a\bar{U}, \quad h_y = b\bar{U}, \quad E = (pa + qb)\bar{U}$$

Медленный подсчет вариаций через E

Далее, если цены перешли $(p, q) \to (p', q')$, то полезность перешла

$$\bar{U}_0 = \frac{W}{pa + qb} \quad \to \quad \bar{U}_1 = \frac{W}{p'a + q'b}$$

Получается, что

$$CV = (a\Delta p + b\Delta q)\frac{W}{pa + qb}$$
$$EV = (a\Delta p + b\Delta q)\frac{W}{p'a + q'b}.$$

Вот и все.

Быстрый подсчет вариаций через V

CV и EV – это решения нелинейных уравнений:

$$V(p, q, W) = \bar{U}_0 = V(p', q', W + CV)$$
$$V(p, q, W - EV) = \bar{U}_1 = V(p', q', W)$$

Преимущество этого подхода в том, что сами уровни полезности вам считать не надо, можно сэкономить на выкладках. К тому же, аддитивные и мультипликативные константы (не зависящие от цен) быстро сокращаются.

Быстрый подсчет вариаций через V

Компенсирующая вариация в КД:

$$(\alpha+\beta)\log W - \alpha\log p - \beta\log q =$$
$$= (\alpha+\beta)\log(W+CV) - \alpha\log p' - \beta\log q'$$

Получается

$$(\alpha+\beta)\log(\frac{W+CV}{W}) = \alpha\log(\frac{p'}{p}) + \beta\log(\frac{q'}{q})$$

Такое уже совсем просто решить.

Быстрый подсчет вариаций через V

Эквивалентная вариация в КД:

$$(\alpha+\beta)\log(W-EV)-\alpha\log p-\beta\log q =$$
$$=(\alpha+\beta)\log W-\alpha\log p'-\beta\log q'$$

Получается

$$-(\alpha+\beta)\log(\frac{I-EV}{I})=\alpha\log(\frac{p'}{p})+\beta\log(\frac{q'}{q})$$

Такое уже совсем просто решить.

Какая ΔW меньше?

Какая ΔW меньше?

Это сложный вопрос, но короткий ответ на него:

$$\Delta W_{equi} < \Delta W_{comp} < \Delta W_{naiv}$$

в тех ситуациях когда цены растут.

Легко видеть, например, что для косвенных полезностей линейных по доходу функции расхода линейны по уровню полезности. А значит, та вариация которая соответствует «худшей» полезности будет меньшей.

Что еще можно сделать?

Что еще можно сделать?

Если у вас времени чуть больше, но все же не настолько много чтобы откалибровать полезность целиком, можно разложить CV в ряд до второго члена.

$$CV \approx \nabla E \cdot \delta p + \nabla^2 E \cdot \frac{(\delta p)^2}{2} < CV$$

Она будет чуть меньше чем просто линейный кусок, потому что $\nabla^2 E$ отрицательно определена, потому что E вогнута как нижняя огибающая линейного (по ценам) семейства.

Что еще можно сделать?

В частности, если меняется только одна цена p у товара x то

$$CV \approx h_x \cdot \delta p + \frac{\partial h_x}{\partial p} \cdot \frac{(\delta p)^2}{2}$$

и можно вывести элегантную формулу

$$\frac{CV}{W} \approx \frac{p h_x}{W} \cdot (\delta p / p) + \frac{\partial h_x}{\partial p} \frac{p}{h_x} \frac{p h_x}{W} \cdot \frac{(\delta p / p)^2}{2}$$

позволяющую быстро в уме считать компенсирующие вариации, в процентах от дохода, зная одни лишь только доли расходов и эластичности хиксианские

Что еще можно сделать?

Вот эта формула

$$\frac{CV}{W} \approx s_x \cdot (\delta p/p) + s_x \cdot \varepsilon^h_{x,p} \cdot \frac{(\delta p/p)^2}{2}$$

Представим себе такую ситуацию...

Что еще можно сделать?

Сидит Мишустин на докладе и его спрашивает президент:
Господин Мишустин, сколько надо компенсировать нашим дорогим пенсионерам за 50% повышение цены на яйца и хлеб?

Покрываясь потом, Мишустин начинает считать в уме...

Что еще можно сделать?

Мишустин знает что доля расходов на такие продукты это примерно 25% (то есть, $\frac{1}{4}$) следовательно короткий ответ это доля на процентное изменение цены или $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ или 12.5 процентов.

Мишустин отвечает:

Двенадцать с половиной процентов, господин Президент!

Президент неодобрительно хмурит брови...

Что еще можно сделать?

Немножко подумав, Мишустин вспомнил хиксианскую эластичность спроса на еду (скажем, -1/2) он быстро корректирует свой ответ вниз на долю умножить на эластичность умножить на квадрат изменения цены пополам или $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^2/2 = \frac{1}{2^6}$ или примерно 1.6 процентов.

Мишустин отвечает:

Поправка, одиннадцать процентов, господин Президент!

Президент расслабляет брови и говорит:

Так то лучше, Мишустин.