Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

9 января 2024 г.

Программа курса

Программа модуля

- Теория Потребителя
  - Модель: товары $x, y \to$ полезность $U(x, y)$
  - Максимизация полезности
  - Предпочтения, спрос, эластичность...
  - CV, EV
- Теория Производителя
  - Модель: ресурсы $x, y \to$ производство $F(x, y)$
  - Максимизация прибыли (минимизация издержек)
  - Технологии, предложение, эластичность...
- Частичное равновесие
  - налоги, потолки, DWL

Сквозная идиома: конкурентный рынок для x, y, то есть товары и ресурсы покупаются по стабильным (и экзогенным, от греч. -genēs рожденный и exō- снаружи) рыночным ценам p, q.

Наша задача: научить вас формулировать базовые микро-экономические задачи на языке моделей, решать их и интерпретировать результаты.

Люди и материалы

Лектор: Павел Андреянов (pandreyanov@gmail.com/hse.ru)

Семинаристы: Даша, Яна

Учебники:

- Вэриан (V) и Ехил Рени (JR), есть русские версии
- Бусыгин, Желободько, Цыплаков (BZC) том I,II
- Мас Колел (MC)

Люди и материалы

Прочие ресурсы:

- телеграм: channel_micro_2023, forum_micro_2023
- офис аурз: TBD
- консультации и тестовые контрольные
- pandreyanov.github.io/pashas_micro_one_lectures

Люди и материалы

SCAN ME

План на первую половину лекции (2 часа)

Модели поведения потребителя.

Мы поговорим подробно о первых двух моделях (полезность и предпочтения) и, вскользь о третьей модели (выбор). Большой упор будет сделан на понятия непрерывности и выпуклости.

Затем, мы попробуем отождествить некоторые из этих моделей между собой. В частности, будет обсуждена относительно простая прямая связь между полезностью и предпочтениями.

Вершиной этого блока будет обратная связь между предпочтениями и полезностью, так называемая, Теорема Дебре. После нее надо сделать перерыв.

Три модели потребителя

Три модели потребителя

Три конкурирующих модели поведения потребителя:

- полезность (классика)
- предпочтения (нео классика)
- выбор

Различия между ними скорее философские.

Полезность

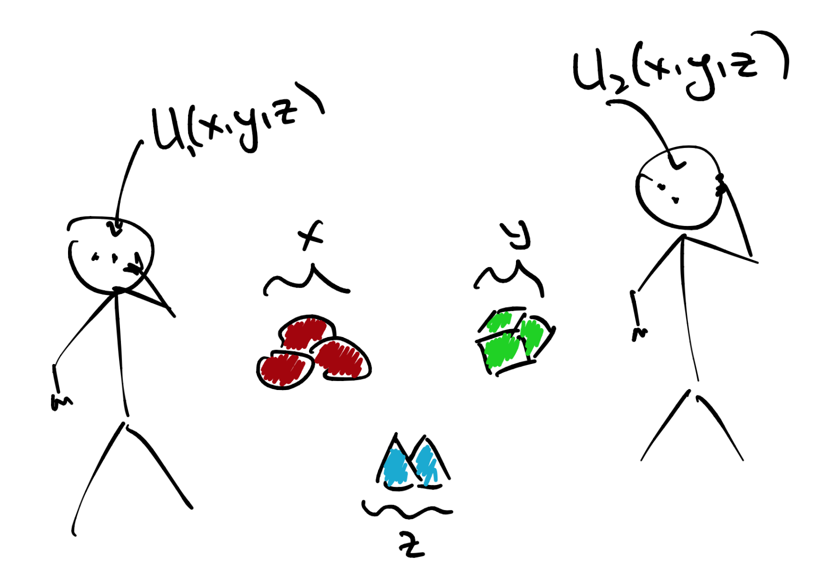
Полезность

В модели полезности (классика) у каждого агента в голове зашита функция полезности, которая переводит любой портфель потребительских товаров в вещественное число с мистической единицей измерения «утили».

- 3 куба, 1 круг = 8 утилей
- 12 конусов = 60 утилей
- 1 конус, 4 круга = 3 утиля

Агенты сравнивают утили и принимают экономические решения, дабы их максимизировать. Это самая старая модель, поэтому мы будем называть ее классической.

Полезность



Полезность

Полезность определена с точностью до монотонного преобразования. Это серьезная проблема, это значит, что модель невозможно толком откалибровать.

Действительно, все нижеперечисленные полезности неразличимы с точки зрения эконометриста.

- $x^2 y^3$
- $2 \log x + 3 \log y$
- $2 \log x + 3 \log y + 1$
- $5(2 \log x + 3 \log y) + 1$

Необходимо либо мыслить в терминах классов эквивалентности полезностей, либо придумывать что-то новое.

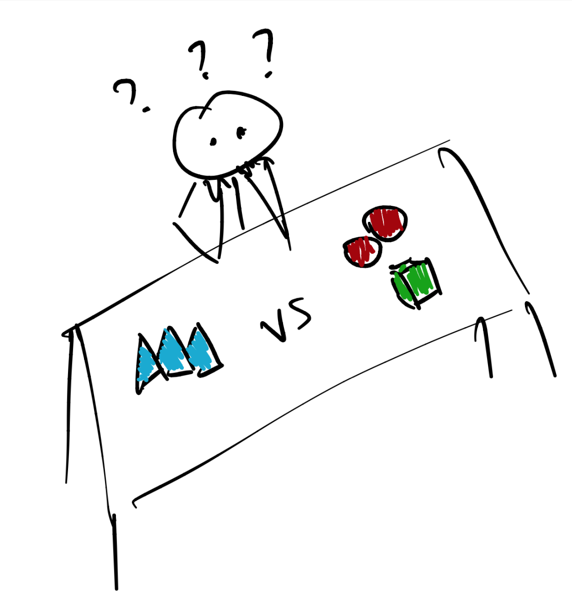
Предпочтения

Предпочтения

В модели предпочтений от агентов требуется, казалось бы, меньше. Они должны в моменте сравнить два портфеля и назвать лучший. Другими словами, они должны озвучить предпочтения.

Мы будем называть эту модель неоклассической.

Предпочтения



Предпочтения

Однако этот минимализм обманчив. Чтобы оставаться экономическими агентами, они должны помнить все свои выборы, это матрица $n \times n$, где n - это число возможных портфелей. Например, если альтернативы три a, b, c:

$\succcurlyeq$	a	b	c
a	1	0	1
b	1	1	0
c	1	0	1

Значок $\succcurlyeq$ означает предпочтение.

Так уж это проще чем функция? Непонятно. Однако, здесь уже отсутствует проблема представления поведения потребителя двумя разными моделями.

Выбор

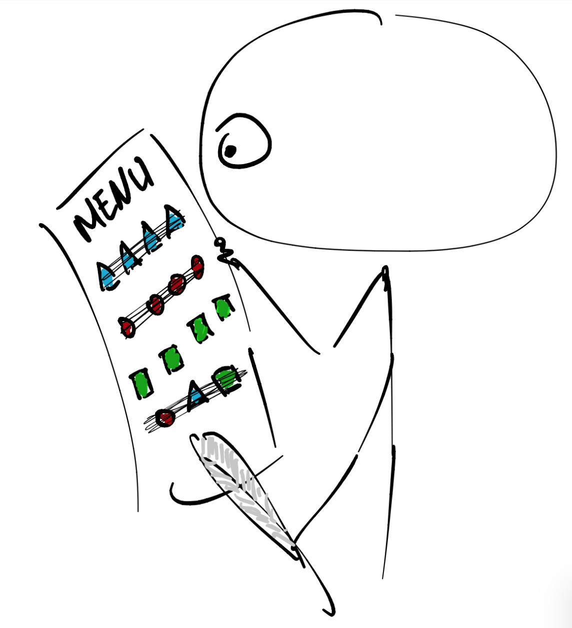
Выбор

В модели выбора от агентов требуется принимать решения, максимально приближенные к реальности. Вам предлагают меню из: (a, b, c), (a, b), (a, c), (b, c), (a), (b), (c).

И вы просто вычеркиваете то, что вам точно не нравится. Все что вы не вычеркнули - это и есть ваш выбор (choice).

Эта модель требует от экономического агента знать не свою функцию полезности, и даже не n^2 готовых ответов, как в предпочтениях, а целых 2^n готовых ответов.

Выбор



Выбор

Можно долго спорить, какая из этих моделей более или менее реалистичная. Правильный ответ - они все нереалистичные.

- агент должен знать ответы на все вопросы
- ответ не может меняться во времени

Более того, реализм вообще не является добродетелью. Вся суть модели в том, чтобы подняться на другой уровень абстракции и рассуждения, отличающийся от жизненного.

Потренируемся в моделировании

Потренируемся в моделировании

Какую модель вы бы выбрали для описания следующих жизненных задач? и почему

- купить продуктов в магазине
- выбора университета
- выбора мужа/жены/партнера
- голосования в думу
- одежду отдать в приют или оставить себе

Купить продуктов в магазине - I

Задачу похода в магазин можно сформулировать так:

- У вас есть максимальный бюджет, например 700 рублей
- Вам надо купить несколько предметов обязательно: зубная паста, хлеб, молоко. Вы потратите 350 рублей.
- На оставшиеся 250 рублей вы можете купить еще один батончик, чтобы побаловать себя: твикс, баунти или марс.

Чтобы описать поведения потребителя в такой постановке, достаточно знать ваши предпочтения на множестве из трех батончиков.

Купить продуктов в магазине - II

Задачу похода в магазин можно сформулировать по другому:

- Родители дали вам 2000 рублей сводить одногруппников на день рождения в макдональдс
- Вы имеете право потратить все
- Вы хотите купить картошки, бургеров и колы чтобы всем досталось всего по чуть чуть.

Чтобы описать поведения потребителя в такой постановке, необходимо знать полезность $U(x, y, z)$ от потребления x единиц картошки, y единиц бургеров и z единиц колы, а также действующие цены.

Классическая модель

Классическая модель

Модель полезности обладает высоким уровнем абстракции

- начнем с одного агента
- товары разделены на n категорий
- портфель (потр. корзина) это точка в $\mathbb{R}^n_+$
- категории, а также координаты обозначаются x, y, z...
- соответствующие цены обозначаются p, q, y...
- полезность обозначается $U(x, y, z, \dots)$
- множество доступных альтернатив $X \subset \mathbb{R}^n_+$

Множество альтернатив будет, как правило, зависеть от цен и бюджета. Плюсик в $\mathbb{R}^n_+$ означает неотрицательные значения потребления, мы иногда называем это множество первый/положительный ортант Евклидового пространства.

Полезность

Таким образом, мы может сформулировать модель потребителя как абстрактную оптимизационную задачу, скажем, для трех товаров:

$$U(x, y, z, \dots) \to \max_{(x,y,z,\dots)\in X}$$

Формально классическая (утилитарная) модель это пара: множество альтернатив $X \subset \mathbb{R}^n_+$ и полезность $U : X \to \mathbb{R}$.

Никаких дополнительных аксиом не требуется.

Пример 1

У Пети есть 100 рублей. Он может купить яблоки (x) по цене 20 рублей за штуку либо груши (y) по цене 50 рублей за штуку. Петя получает полезность 2 за каждое яблоко и 3 за каждую грушу, но не получает никакой полезности за оставшиеся деньги.

Попробуем записать это формально:

- $X = \{(x, y) \in \mathbb{N}_+^2 : 20x + 50y \leqslant 100\}$
- $U(x, y) = 2x + 3y$

Здесь $\mathbb{N}_+^2$ это решетка из целых значений, потому что нельзя покупать нецелые яблоки и груши.

Пример 2

У Кати есть 24 часа в сутки, из которых она должна как минимум 8 часов поспать (x), а дальше она учится и занимается. Однако, на каждый час учебы (y) нужен один час отдыха (z), и наоборот, иначе время проходит зря.

Попробуем записать это формально:

- $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ : x + y + z \leqslant 24\}$
- $U(x, y, z) = \mathbb{I}(x \geqslant 8) \cdot \min(x, y)$

Здесь $\mathbb{I}(x \geqslant 8)$ это индикатор-функция, принимающее значение 1 когда выражение в скобках выполнено, иначе 0.

Свойства полезности

Непрерывность

Мы начнем с двух эквивалентных определений непрерывности.

Definition 1

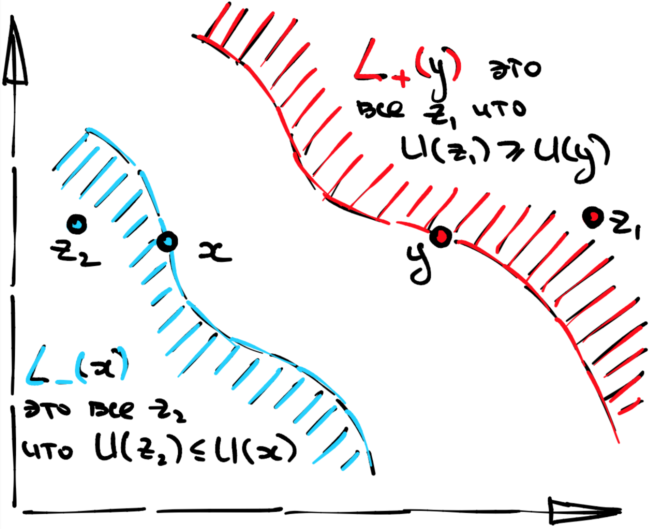
Полезность U непрерывна в X, если для любого $x \in X$ множества $L_+(x)$ и $L_-(x)$ замкнуты, где

$$L_+(x) = \{y \in X : U(y) \geqslant U(x)\}$$
$$L_-(x) = \{y \in X : U(y) \leqslant U(x)\}$$

Описанные выше множества $L_+(x)$ (или $L_-(x)$) - это подмножества допустимых альтернатив, которые не хуже (или не лучше), чем сам $x \in X$.

Их часто называют Лебеговыми множествами относительно точки x, $L_+(x)$ - верхним а $L_-(x)$ - нижним.

Непрерывность



Эквивалентное (но только в Евклидовых пространствах) определение непрерывности можно дать на более знакомом вам с курса мат. анализа языке эпсилон-дельта.

Definition 2

Полезность U непрерывна в X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такой что для любых $x, y \in X$:

$$||x - y|| < \delta \quad \Rightarrow \quad ||U(x) - U(y)|| < \varepsilon.$$

Но оно практически бесполезно.

Вогнутость

Следующее важное определение - это вогнутость.

Definition 3

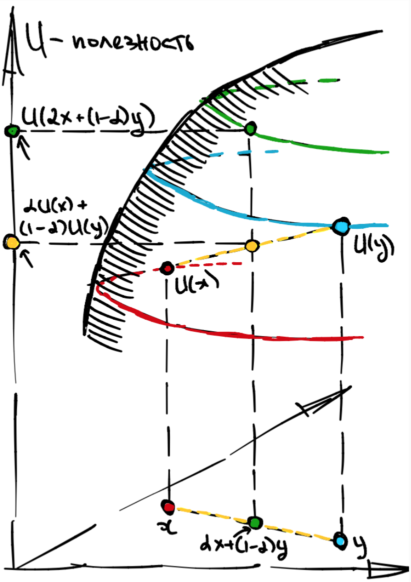
Полезность U вогнута, если для любых $x, y \in X$:

$$\forall \alpha \in (0,1) : U(\alpha x + (1-\alpha)y)) \geqslant \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y)$$

Многие полезности уже вогнуты сами по себе, например: $ax + by, \min(x, y), \sqrt{xy}, x + \log y$, но некоторые такими не являются, например $\max(x, y)$, x^2y^2.

Вогнутость

Пусть пространство товаров $\mathbb{R}^2_+$, для простоты. Тогда график функции это такая поверхность. Можно сказать, что вогнутая функция это когда подграфик выпуклый, либо, график вогнутой функции выглядит как колпак. Еще одно правило - это график вогнутой функции находится под касательной плоскостью.



Вогнутость

В этом курсе я буду чаще всего пользоваться 2-мерным (1-мерным) пространством товаров, но когда мне надо будет посмотреть на функцию от этих товаров, будет получаться график в соответственно 3-мерном (2-мерном) пространстве.

Постарайтесь не путать ситуацию когда вы смотрите только на область определения функции ($\mathbb{R}^n$) где живут верхние и нижние Лебеговы множества, с ситуацией когда вы смотрите на область определения с приклеенной к ней осью значений ($\mathbb{R}^{n+1}$) где живут график и подграфик функции.

Вогнутость

К сожалению, не все могут быстро в уме нарисовать график функции от двух переменных, а тем более от трех переменных, и сказать выглядит он как колпак или нет.

В таких случаях мы применяем критерий Сильвестра (какого покажу на следующем слайде) для установления выпуклости/вогнутости дважды дифференциируемой функции.

Если же функция вовсе не дифференциируема, как, например, $\min(x, y)$, нужно проявить смекалку: минимум вогнутых функций вогнут, поскольку подграфик минимума это пересечение соответствующих подграфиков, а пересечение двух выпуклых множеств выпукло. В данном случае первая вогнутая функция это $f(x, y) = x$, а вторая это $g(x, y) = y$.

Вообще, линейные функции всегда вогнутые, запомните.

Критерий Сильвестра

Джеймс Джозеф Сильвестер (James Joseph Sylvester) английский и американский математик второй половины 19 века, профессор Университета Джон Хопкинс и позже Оксфорда. Изобрел матрицы, дискриминанты, и, собственно, критерий имени самого себя. Этот критерий заключается в проверке отрицательной определенности матрицы Гесса.

Вогнутость

Однако, с вогнутостью есть проблема. Три полезности

- x^2y^2
- $\sqrt{xy}$
- $\log x + \log y$

задают одни и те же предпочтения однако 2 из них вогнутые а одна - вовсе нет.

Попробуйте определить какие?

Поэтому экономисты придумали свою собственную почти-вогнутость, или квази-вогнутость (quasi- от лат. почти). Она, в отличие от истинной вогнутости, полностью оторвана от свойств графика функции.

Квази вогнутость

Definition 4

Полезность U квазивогнута в X, если $\forall x \in X$ верхнее Лебегово множество $L_+(x)$ выпукло.

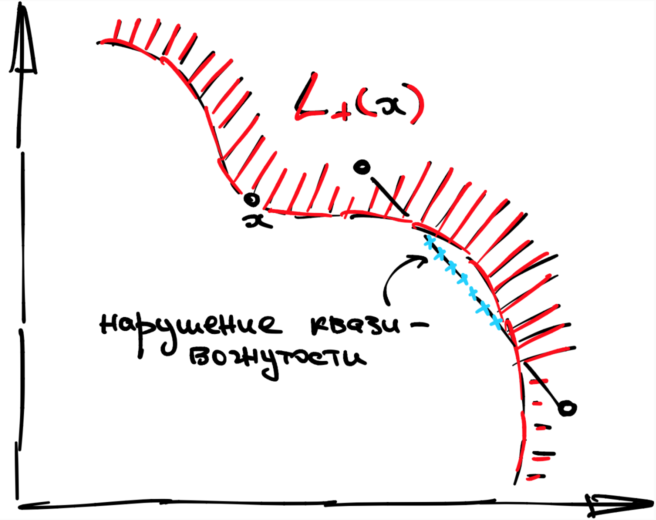
И совершенно эквивалентное ему

Definition 5

Полезность U квазивогнута в X, если для любых $x, y \in X$ их линейная комбинация не хуже, чем худшая из двух:

$$\forall \alpha \in (0,1) : U(\alpha x + (1-\alpha)y)) \geqslant \min(U(x), U(y))$$

Квазивогнутость



Вогнутость против квазивогнутости

Lemma 6

Из вогнутости следует квазивогнутость, но не наоборот.

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
(1): &\quad U(\alpha x + (1-\alpha)y)) \geqslant \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y) \\
(2): &\quad \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y) \geqslant \min(U(x), U(y)) \\
(1),(2) \quad \Rightarrow &\quad U(\alpha x + (1-\alpha)y)) \geqslant \min(U(x), U(y))
\end{aligned}
$$

P.S. Иногда я буду делать приставку «строго», это значит, что либо соответствующее множество строго выпукло, либо соответствующее неравенство строгое, смотрите на контекст.

Критика классической модели

Неоднозначность полезности

Для любого строго монотонного преобразования φ, две полезности - $U(x)$ и $\varphi(U(x))$ - производят идентичное поведение у потребителей.

Довольно легко генерировать примеры идентичных функций, используя такие монотонные преобразования, как $\varphi(z) = z + c, cz, \log z$.

$$\begin{aligned}
&x^2y^3,\\
&2\log x + 3\log y,\\
&2\log x + 3\log y + 1,\\
&2(2\log x + 3\log y) + 1.
\end{aligned}$$

Все выше перечисленные полезности эквивалентны.

Неоднозначность вогнутости

Вогнутость легко ломается при монотонных преобразованиях

Lemma 7

Если $U(x)$ вогнута, то $\varphi(U(x))$ квазивогнута для любого строго монотонного преобразования φ.

Чтобы придумать доказательство, достаточно знать следующие свойства монотонных преобразований:

$$\begin{aligned}
U(x) \leqslant U(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(U(x)) \leqslant \varphi(U(y)) \\
U(x) \geqslant U(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(U(x)) \geqslant \varphi(U(y)) \\
\min(\varphi(U(x)), \varphi(U(y))) &= \varphi(\min(U(x), U(y)))
\end{aligned}$$

Попробуйте теперь написать доказательство самостоятельно.

Неоднозначность вогнутости

В отличие от вогнутости, квазивогнутость сохраняется при монотонных преобразованиях.

Это верно хотя бы потому, что определение вообще никак не опирается на форму графика полезности, а только на форму его Лебеговых множеств. А строго монотонные преобразования оставляют Лебеговы множества на месте.

Lemma 8

Если $U(x)$ квазивогнута, то $\varphi(U(x))$ тоже квазивогнута для любого строго монотонного преобразования φ.

Это делает ее гораздо более удобной, чем просто вогнутость.

Предпочтения

Предпочтения

Модель предпочтений еще более абстрактна

- снова один агент
- товары разделены на n категорий
- портфель (потр. корзина) это точка в $\mathbb{R}^n_+$
- категории, а также координаты обозначаются $x, y, z \ldots$
- множество доступных альтернатив $X \subset \mathbb{R}^n_+$

Однако вместо полезности $U : X \to \mathbb{R}$ у агента в голове зашито бинарное предпочтение $\succcurlyeq : X^2 \to \{0, 1\}$. Что это значит?

Предпочтения

Проще всего визуализировать бинарное отношение на множестве альтернатив малой размерности, например 3.

$\succcurlyeq$	x	y	z
x	1	1	0
y	0	1	1
z	0	1	0

$x \succcurlyeq y$ означает что $(x, y) \mapsto 1$.

$x \preccurlyeq y$ означает что $(y, x) \mapsto 1$.

Формально, бинарное отношение – это любое расположение ноликов и единичек внутри матрицы.

Предпочтения

Для простоты вводятся дополнительные обозначения:

$x \sim y$ означает что $x \succcurlyeq y$ и $x \preccurlyeq y$.

$x \succ y$ означает что $x \succcurlyeq y$ но не $x \sim y$.

$x \prec y$ означает что $x \preccurlyeq y$ но не $x \sim y$.

Получаются пять интуитивных отношений сильного, слабого предпочтений и безразличия.

Однако какие попало матрицы писать не стоит.

Поскольку у бинарного отношения есть экономическая интерпретация, это накладывает на него определенные ограничения, называемые аксиомами рациональности.

Definition 9

Предпочтения $\succcurlyeq$ рациональны, если

- для любых $x, y \in X$, хотя бы $x \succcurlyeq y$ либо $y \succcurlyeq x$.
- для любой $x \in X$, всегда верно что $x \sim x$
- для любых $x, y, z \in X$:

$$x \succcurlyeq y, y \succcurlyeq z \quad \Rightarrow \quad x \succcurlyeq z$$

Последнее свойство - самое важное и называется транзитивностью.

Предпочтения

Рациональность накладывают структуру на то, как может заполняться матрица.

$\succsim$	x	y	z
x	$*$	$*$	$*$
y	0	$*$	1
z	0	1	$*$

Попробуйте дозаполнить следующую матрицу так, чтобы предпочтения были рациональными.

Свойства предпочтений

Предпочтения

Переопределив Лебеговы множества $L_+(x)$ и $L_-(x)$ в терминах предпочтений, мы получаем непрерывность предпочтений.

Definition 10

Предпочтения $\succcurlyeq$ непрерывны в X, если для любого $x \in X$ множества $L_+(x)$ и $L_-(x)$ замкнуты, где

$$L_+(x) = \{y \in X : y \succcurlyeq x\}, \quad L_-(x) = \{y \in X : y \preccurlyeq x\}$$

И совершенно аналогично мы переносим квазивогнутость в мир предпочтений...

Предпочтения

... однако, вопреки логике, аналог термина квазиВОГНутости полезности в мире предпочтений называется ВЫПУклостью.

Definition 11

Предпочтения $\succcurlyeq$ выпуклы в X, если $\forall x \in X$ множество $L_+(x)$ выпукло, то есть, оно содержит все свои хорды.

Парадокс в том, что вогнутые полезности - квазивогнутые, однако, ассоциированы с выпуклыми предпочтениями.

А выпуклые полезности (которые еще надо отыскать) с выпуклыми предпочтениями вообще никак не связаны и даже скорее противоположны им.

Прямая связь

Прямая связь

Предположим, что у вас уже есть откалиброванная полезность. Как вывести из нее модель предпочтений?

Definition 12

Будем говорить, что U представляет $\succcurlyeq$, если

$$U(x) \geqslant U(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \succcurlyeq y.$$

Это определение должно быть понятно на интуитивном уровне.

Также должно быть понятно, что если предпочтения представлены U, то они будут обязательно рациональны, поскольку это просто свойства вещественных чисел.

Обратная связь

Обратная связь

Предположим, что у вас уже есть откалиброванные рациональные предпочтения. Можно ли восстановить по ним хотя бы одну непротиворечивую полезность?

Оказывается, что в простых случаях, действительно, можно.

Lemma 13

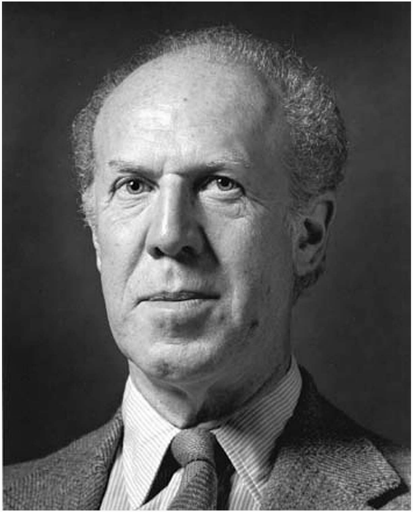
Если X конечно, то для любых рациональных предпочтений $\succcurlyeq$ существует полезность U, представляющая $\succcurlyeq$.

Это легко доказать алгоритмически.

В случае когда пространство альтернатив достаточно мощное, нам понадобится непрерывность предпочтений, и еще кое что.

Обратная связь

Жерар Дебрё (Gérard Debreu) французский экономист и математик, профессор экономики университета Беркли, лауреат нобелевской премии 1983 года по экономике. Работал над представлениями предпочтений потребителя при помощи вещественнозначных функций и существованием равновесий в конкурентных рынках.



Обратная связь

Theorem 14 (Дебрё)

Если $X \subset \mathbb{R}^n$ «хорошее», то для любых рациональных и непрерывных предпочтений $\succcurlyeq$ существует непрерывная полезность U, представляющая $\succcurlyeq$.

«Хорошесть» - скучные технические условия связности и сепарабельности, так математики любят оформлять свои теоремы. По-настоящему важной здесь является именно непрерывность предпочтений.

Однако не стоит забывать, что, если предпосылки теоремы не выполнены, это еще не значит, что полезности нет. К примеру, дискретные пространства вовсе не связны.

Выбор

Выбор

Модель выбора максимально абстрактна

- снова один агент
- товары разделены на n категорий
- портфель (потр. корзина) это точка в $\mathbb{R}^n_+$
- категории, а также координаты обозначаются $x, y, z\ldots$
- множество доступных альтернатив $X \subset \mathbb{R}^n_+$

Вместо полезности $U : X \to \mathbb{R}\ldots$

или бинарного предпочтения $\succcurlyeq: X^2 \to \{0, 1\}\ldots$

у агента в голове зашито отображение выбора $C : 2^X \to 2^X$.

Что это значит?

Выбор

Это значит, что агент отображает подмножества в подмножества. Так же как и с предпочтениями, есть несколько естественных технических ограничений:

- $C(Z) \neq \emptyset$
- $C(Z) \subset Z$

Для любого непустого меню $Z \subset X$.

Есть еще третья, самая важная аксиома.

Выбор

Рассмотрим любые два портфеля $x, y \in X$ и два меню $Z, Z' \subset X$, таких что x, y содержатся в обоих меню.

Definition 15

Слабой аксиомой выбора (WARP) называется следующее.

Если в первом меню Z: x_2 был выбран в присутствии x_1, то втором меню Z' невозможно чтобы: x_1 был выбран в присутствии x_2, но сам x_2 при этом выбран не был.

Читая это определение задом наперед, можно интуитивно понять, что оставляя x_1 но исключая x_2 внутри меню Z' вы, по сути, озвучиваете строгое предпочтение $x_1 \succ x_2$. И в других меню вам запрещается вести себя в противоречии с этим предпочтением.

Выбор

Если будет время, я выведу слабую аксиому выбора из рациональности предпочтений, когда агент строит свой выбор оптимизируя предпочтения по конечному числу элементов.

Это будет аналог прямой связи между предпочтениями и выбором.

Перед тем как уйти на перерыв

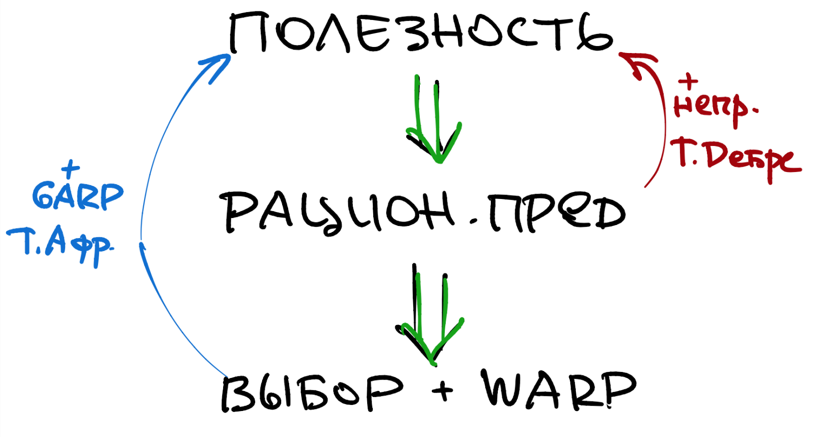
Заключение

Мы продемонстрировали, что из любой полезности можно вывести рациональные предпочтения, а из рациональных предпочтений выбор со слабой аксиомой.

С другой стороны, из любых непрерывных и рациональных предпочтений можно вывести непрерывную полезность - это Теорема Дебре.

Аналог обратной связи для выбора я рассказывать не буду, это называется Теорема Африата, это очень продвинутый материал, и там понадобится усиленная аксиома выбора (GARP) которая не входит в мой курс.

Заключение



Заключение

Какой из всего этого можно сделать вывод?

Все три модели, в каком то смысле эквивалентны. Поэтому можно смело использовать ту, которая вам кажется удобнее.

Чаще всего (99% случаев) это полезность, но иногда это и предпочтения, например в анализе алгоритма Гейла-Шепли, при помощи которого вас распределили по факультетам.

С другой стороны, аксиомы выбора недавно «вылезли» в новейших комбинаторных аукционах, поэтому от теории выбора тоже есть некоторый толк.

Конец первой части лекции

План на вторую часть лекции (1 час)

Далее мы сфокусируемся только на полезностях и как оптимизировать их при различных ограничениях.

- Начала оптимизации
- Условия первого и второго порядка
- Выпуклость задачи
- Краевые и внутренние решения
- Линии уровня и геом. анализ

Начала оптимизации

Начала оптимизации

Любая оптимизационная задача – это две вещи:

- функция U которую мы максимизируем
- область определения X по которым мы максимизируем

Ключевыми факторами тут являются непрерывность и (квази-) вогнутость целевой функции, а также компактность и выпуклость области определения.

Существование

Существование

Существование решения, как правило, мы можем легко гарантировать при помощи следующей теоремы

Theorem 16 (Вейерштрасса)

Непрерывная функция на (непустом) компакте гарантированно достигает своего минимума и максимума.

Что такое непрерывность вы уже знаете, а компакт в $\mathbb{R}^n$ - это просто ограниченное и замкнутое множество.

В контексте одномерной оптимизации, отрезок $[a, b]$ - это компакт, а $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $[a, \infty)$,(a, ∞) - нет.

В экономике вам будут попадаться, в основном компакты, поэтому вопрос о существовании как правило стоит не остро.

Дифференциальный анализ

Дифференциальный анализ

Предположим, что функция на компакте не только непрерывна но еще и дифференциируема сколько угодно раз, такая задача называется гладкой. Тогда оптимум может быть

- либо на границе X
- либо во внутренней точке X

В последнем случае обязательно выполнены условия первого порядка (УПП), это один из самых фундаментальных результатов дифференциального анализа.

УПП

Например, если функция $U(x, y, z)$ от трех переменных, и вы убедили себя, что решение надо искать внутри, то

$$\text{УПП (FOC)}: \quad \nabla U = 0$$

должны выполняться в оптимальной точке (x^*, y^*, z^*).

Значок ∇ означает взятие градиента функции

$$\nabla U = \begin{pmatrix} \partial U / \partial x \\ \partial U / \partial y \\ \partial U / \partial z \end{pmatrix}$$

в соответствующей точке.

УПП на границе

Например, если функция $U(x, y, z)$, и вы убедили себя, что решение надо искать на границе $F(x, y, z) = 0$, то

$$\text{УПП (FOC)}: \quad \nabla \mathcal{L} = 0,$$

где $\mathcal{L}(x, y, z|\lambda) = U(x, y, z) - \lambda F(x, y, z)$ это Лагранжиан.

Значок ∇ означает взятие градиента Лагранжиана по всем переменным включая множители Лагранжа

$$\nabla \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \partial \mathcal{L} / \partial x \\ \partial \mathcal{L} / \partial y \\ \partial \mathcal{L} / \partial z \\ \partial \mathcal{L} / \partial \lambda \end{pmatrix}$$

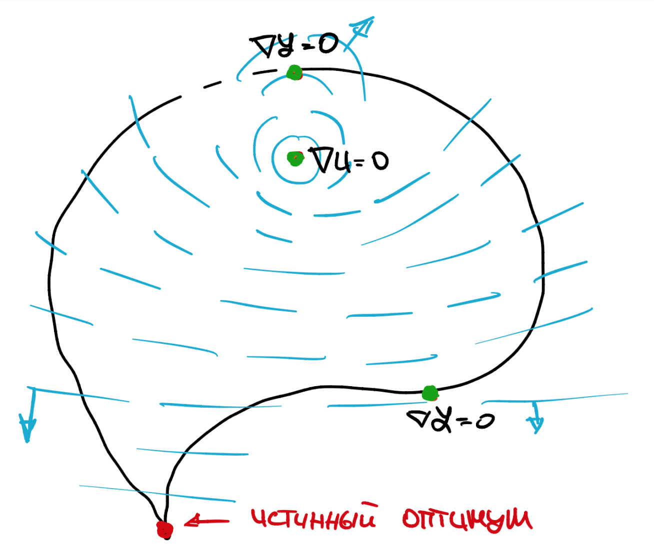
в соответствующей точке.

Критические точки

Как правило, количество точек, в которых выполнены УПП, с Лагранжианом или без, конечно. Оптимум может также находиться на каком-то изломе или иной аномалии границы области определения.

Все такие точки называются критическими, их мало, и оптимум гарантированно лежит в одном из них.

Критические точки



Ручной перебор

Если у вас по любой причине остался один кандидат, то он и является оптимумом, поскольку существование нам гарантирует Теорема Вейерштрасса.

Если же кандидатов несколько, то надо сравнивать значения функции руками и выбирать все точки с наибольшим значением.

Тупой перебор Критические точки может привести к неожиданно быстрому решению задачи.

Пример 1

Промаксимизируем функцию $f(x) = (x-1)^2$ на отрезке $[0, 3]$.

- Задача гладкая на компакте
- Решим УПП, получим первую критическую точку $x = 1$
- Две других критические точки это $x = 0$ и $x = 3$
- Сравним значения:

$$f(0) = 1, \ f(1) = 0, \ f(3) = 4.$$

Получается, что в этой задаче один единственный оптимум в точке $x = 3$, причем до условий второго порядка у нас даже руки не дошли.

УВП

Число внутренних точек, прошедших УПП, можно дополнительно сузить за счет условий второго порядка.

$$\text{УВП (SOC)}: \quad \nabla^2 U \ ?\ 0$$

Если Гессиан во внутренней точке отрицательно полу-определен $\nabla^2 U \leqslant 0$ (собственные значения $\leqslant 0$), то это локальный максимум и этот кандидат проходит отбор.

Если Гессиан положительно определен $\nabla^2 U > 0$ (собственные значения > 0), то это строгий локальный минимум и этот кандидат точно не проходит отбор.

Есть еще третий случай, когда собственные значения Гессиана имеют противоположные знаки, это седло и оно тоже не проходит отбор.

Выпуклость

Выпуклость

К счастью, в экономике зачастую удается показать, что поверх непрерывности функция полезности

- либо вогнутая
- либо она монотонное преобразование вогнутой
- либо она квазивогнутая

Если, вдобавок, область определения - выпуклое множество, то условия второго порядка можно не проверять. Такие задачи называются выпуклыми.

Пример 2

Промаксимизируем функцию $f(x) = -(x-1)^2$ на отрезке $[0, 3]$.

- Задача гладкая и выпуклая на компакте
- Решим УПП, получим первую критическую точку $x = 1$
- Убедимся что он находится внутри области

Все, этот экстремум и есть решение.

Пример 3

Промаксимизируем функцию $f(x) = -(x+1)^2$ на отрезке $[0, 3]$.

- Задача гладкая и выпуклая на компакте
- Решим УПП, получим первую критическую точку $x = -1$
- Однако он не попадает в область, то есть, его нет
- Две других критических точки это $x = 0$ и $x = 3$
- Сравним значения:

$$f(0) = 1, \; f(3) = -16.$$

Получается, что в этой задаче один единственный оптимум в точке $x = 0$.

Выпуклость

Очень важно уметь, глядя на задачу, определять выпуклая она или нет, чтобы не тратить время на анализ второго порядка.

Общий алгоритм решения гладких и выпуклых задач на компакте очень простой:

- ищем первую критическую точку, как будто решение внутреннее
- если не попало в область определения - ищем на границе
- не забываем про изломы и иные аномалии области определения, потому что они, формально, являются кандидатами на решение

В выпуклых задачах условия второго порядка выполнены автоматически, их проверка - пустая трата времени.

Геометрический анализ

Линии уровня

Наконец, линии уровня - это очень удобный инструмент для быстрого отлова и классификации кандидатов на решение оптимизационной задачи...

Definition 17

Линией уровня полезности U, проходящей через точку x называется множество всех точек $y \in X$ таких, что $U(y) = U(x)$.

... особенно в двумерном случае.

Кривые безразличия

Definition 18

Кривой безразличия предпочтений $\succcurlyeq$, проходящей через точку x называется множество всех точек $y \in X$ таких, что $x \sim y$. Другими словами, это пересечение $L_+(x)$ и $L_-(x)$.

Совершенно ясно, что в контексте представлений предпочтений полезностями, кривая безразличия и линия уровня - это одно и то же.

Локальная ненасыщаемость

Локальная ненасыщаемость

Definition 19

Предпочтения $\succcurlyeq$ локально ненасыщаемы в X, если для любой точки $x \in X$ найдется сколь угодно близкая к ней точка $x' \in X$, такая что $x' \succ x$.

Definition 20

Полезность U локально ненасыщаема в X, если для любой точки $x \in X$ найдется сколь угодно близкая к ней точка $x' \in X$, такая что $U(x') > U(x)$.

Почти все полезности, которые будут вам встречаться, локально ненасыщаемы. Интуитивно это означает что кривые безразличия - тонкие линии. Если кривая безразличия толстая - это явное нарушение локальной ненасыщаемости.

Примеры полезностей

Линейная полезность

Рассмотрим полезность вида: $U(x, y) = ax + by$. Тогда линия уровня ищется следующим образом:

$$c = ax + by$$
$$c - ax = by$$
$$y = \frac{c - ax}{b}$$

Линия уровня - это прямая вида $y = \alpha x + \beta$.

Эта полезность гладкая, вогнутая и локально ненасыщаемая.

Гиперболическая полезность

Рассмотрим полезность вида: $U(x, y) = a \log x + \log y$. Тогда линия уровня ищется следующим образом:

$$c = a \log x + \log y$$
$$e^c = x^a y$$
$$y = \frac{e^c}{x^a}$$

Линия уровня - это гипербола вида $y = x^{\alpha}\beta$.

Эта полезность гладкая, вогнутая и локально ненасыщаемая.

Полезность минимум

Рассмотрим полезность вида: $U(x, y) = \min(ax, by)$. Тогда линия уровня ищется следующим образом:

$$c = \min(ax, by)$$
$$\frac{c}{b} = \min(\frac{a}{b}x, y), \quad \frac{c}{a} = \min(x, \frac{b}{a}y)$$
$$y = \frac{c}{b}\mathbb{I}(ax > c), \quad x = \frac{c}{a}\mathbb{I}(by > c)$$

Линия уровня - это конкатенация горизонтальной и вертикальной линий, соединенных вдоль $ax = by$.

Эта полезность НЕгладкая, но непрерывная, вогнутая и локально ненасыщаемая.

Метод пристального взгляда

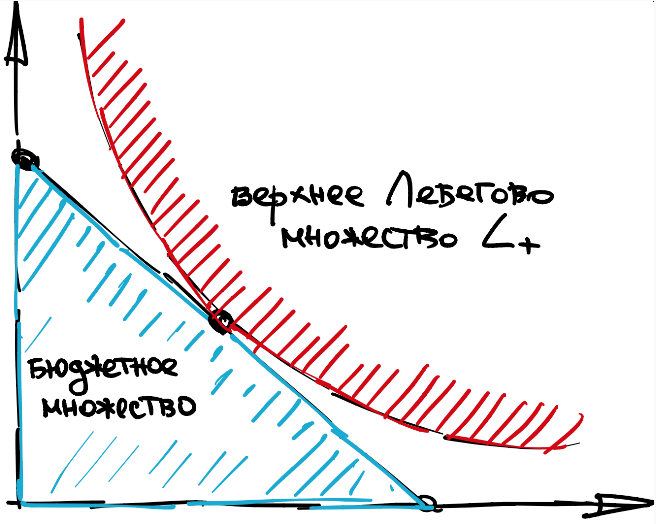
Метод пристального взгляда

Очень часто, в задачах есть выпуклое ограничение типа неравенства, например, бюджетное ограничение. А полезность вогнутая или квазивогнутая.

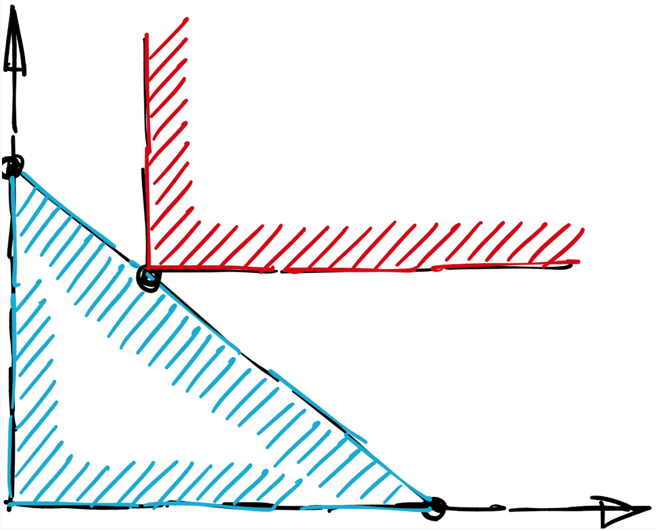
В таком случае, оптимум можно охарактеризовать как точку касания выпуклой области определения с одним из выпуклых верхних Лебеговых множеств. Однако, метод пристального взгляда работает только для локально ненасыщаемых предпочтений.

В маломерных задачах, эта точка ищется визуально, а точные ее координаты либо угадываются из симметрии, либо из каких то других соображений.

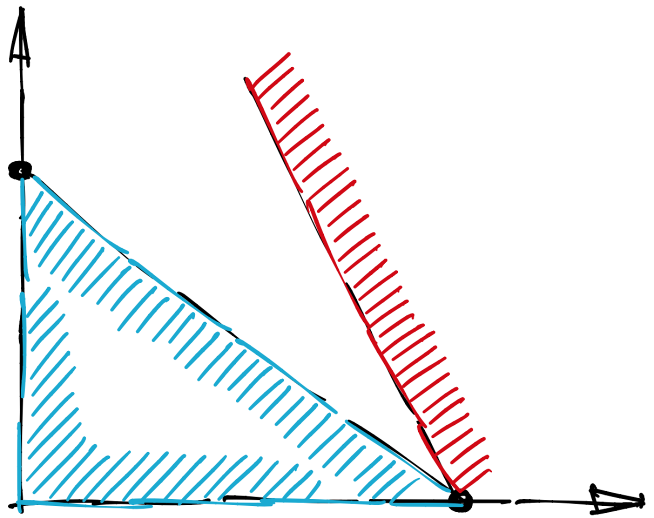
Метод пристального взгляда



Метод пристального взгляда



Метод пристального взгляда



Конец второй части лекции