Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

11 января 2024 г.

План на вторую часть лекции (1 час)

Далее мы сфокусируемся только на полезностях и как оптимизировать их при различных ограничениях.

- Начала оптимизации
- Условия первого и второго порядка
- Выпуклость задачи
- Краевые и внутренние решения
- Линии уровня и геом. анализ

Начала оптимизации

Начала оптимизации

Любая оптимизационная задача – это две вещи:

- функция U которую мы максимизируем
- область определения X по которым мы максимизируем

Ключевыми факторами тут являются непрерывность и (квази-) вогнутость целевой функции, а также компактность и выпуклость области определения.

Существование

Существование

Существование решения, как правило, мы можем легко гарантировать при помощи следующей теоремы

Theorem 1 (Вейерштрасса)

Непрерывная функция на (непустом) компакте гарантированно достигает своего минимума и максимума.

Что такое непрерывность вы уже знаете, а компакт в $\mathbb{R}^n$ - это просто ограниченное и замкнутое множество.

В контексте одномерной оптимизации, отрезок $[a, b]$ - это компакт, а $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $[a, \infty)$,(a, ∞) - нет.

В экономике вам будут попадаться, в основном компакты, поэтому вопрос о существовании как правило стоит не остро.

Дифференциальный анализ

Дифференциальный анализ

Предположим, что функция на компакте не только непрерывна но еще и дифференциируема сколько угодно раз, такая задача называется гладкой. Тогда оптимум может быть

- либо на границе X
- либо во внутренней точке X

В последнем случае обязательно выполнены условия первого порядка (УПП), это один из самых фундаментальных результатов дифференциального анализа.

УПП

Например, если функция $U(x, y, z)$ от трех переменных, и вы убедили себя, что решение надо искать внутри, то

$$\text{УПП (FOC)}: \quad \nabla U = 0$$

должны выполняться в оптимальной точке (x^*, y^*, z^*).

Значок ∇ означает взятие градиента функции

$$\nabla U = \begin{pmatrix} \partial U/\partial x \\ \partial U/\partial y \\ \partial U/\partial z \end{pmatrix}$$

в соответствующей точке.

УПП на границе

Например, если функция $U(x, y, z)$, и вы убедили себя, что решение надо искать на границе $F(x, y, z) = 0$, то

$$\text{УПП (FOC)}: \quad \nabla\mathcal{L} = 0,$$

где $\mathcal{L}(x, y, z|\lambda) = U(x, y, z) - \lambda F(x, y, z)$ это Лагранжиан.

Значок ∇ означает взятие градиента Лагранжиана по всем переменным включая множители Лагранжа

$$\nabla\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \partial\mathcal{L}/\partial x \\ \partial\mathcal{L}/\partial y \\ \partial\mathcal{L}/\partial z \\ \partial\mathcal{L}/\partial\lambda \end{pmatrix}$$

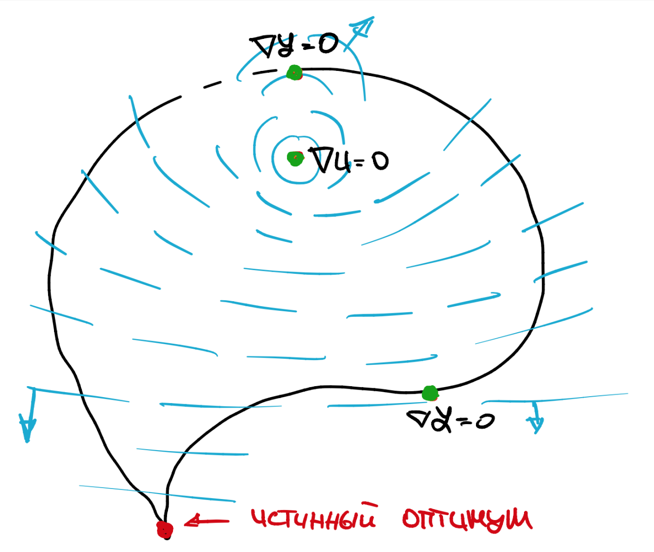
в соответствующей точке.

Критические точки

Как правило, количество точек, в которых выполнены УПП, с Лагранжианом или без, конечно. Оптимум может также находиться на каком-то изломе или иной аномалии границы области определения.

Все такие точки называются критическими, их мало, и оптимум гарантированно лежит в одном из них.

Критические точки



Ручной перебор

Если у вас по любой причине остался один кандидат, то он и является оптимумом, поскольку существование нам гарантирует Теорема Вейерштрасса.

Если же кандидатов несколько, то надо сравнивать значения функции руками и выбирать все точки с наибольшим значением.

Тупой перебор Критические точки может привести к неожиданно быстрому решению задачи.

Пример 1

Промаксимизируем функцию $f(x) = (x-1)^2$ на отрезке $[0, 3]$.

- Задача гладкая на компакте
- Решим УПП, получим первую критическую точку $x = 1$
- Две других критические точки это $x = 0$ и $x = 3$
- Сравним значения:

$$f(0) = 1,\ f(1) = 0,\ f(3) = 4.$$

Получается, что в этой задаче один единственный оптимум в точке $x = 3$, причем до условий второго порядка у нас даже руки не дошли.

УВП

Число внутренних точек, прошедших УПП, можно дополнительно сузить за счет условий второго порядка.

$$\text{УВП (SOC)}: \quad \nabla^2 U \text{ ? } 0$$

Если Гессиан во внутренней точке отрицательно полу-определен $\nabla^2 U \leqslant 0$ (собственные значения $\leqslant 0$), то это локальный максимум и этот кандидат проходит отбор.

Если Гессиан положительно определен $\nabla^2 U > 0$ (собственные значения > 0), то это строгий локальный минимум и этот кандидат точно не проходит отбор.

Есть еще третий случай, когда собственные значения Гессиана имеют противоположные знаки, это седло и оно тоже не проходит отбор.

Выпуклость

Выпуклость

К счастью, в экономике зачастую удается показать, что поверх непрерывности функция полезности

- либо вогнутая
- либо она монотонное преобразование вогнутой
- либо она квазивогнутая

Если, вдобавок, область определения - выпуклое множество, то условия второго порядка можно не проверять. Такие задачи называются выпуклыми.

Пример 2

Промаксимизируем функцию $f(x) = -(x-1)^2$ на отрезке $[0, 3]$.

- Задача гладкая и выпуклая на компакте
- Решим УПП, получим первую критическую точку $x = 1$
- Убедимся что он находится внутри области

Все, этот экстремум и есть решение.

Пример 3

Промаксимизируем функцию $f(x) = -(x+1)^2$ на отрезке $[0, 3]$.

- Задача гладкая и выпуклая на компакте
- Решим УПП, получим первую критическую точку $x = -1$
- Однако он не попадает в область, то есть, его нет
- Две других критических точки это $x = 0$ и $x = 3$
- Сравним значения:

$$f(0) = 1, \ f(3) = -16.$$

Получается, что в этой задаче один единственный оптимум в точке $x = 0$.

Выпуклость

Очень важно уметь, глядя на задачу, определять выпуклая она или нет, чтобы не тратить время на анализ второго порядка.

Общий алгоритм решения гладких и выпуклых задач на компакте очень простой:

- ищем первую критическую точку, как будто решение внутреннее
- если не попало в область определения - ищем на границе
- не забываем про изломы и иные аномалии области определения, потому что они, формально, являются кандидатами на решение

В выпуклых задачах условия второго порядка выполнены автоматически, их проверка - пустая трата времени.

Геометрический анализ

Линии уровня

Наконец, линии уровня - это очень удобный инструмент для быстрого отлова и классификации кандидатов на решение оптимизационной задачи...

Definition 2

Линией уровня полезности U, проходящей через точку x называется множество всех точек $y \in X$ таких, что $U(y) = U(x)$.

... особенно в двумерном случае.

Кривые безразличия

Definition 3

Кривой безразличия предпочтений $\succcurlyeq$, проходящей через точку x называется множество всех точек $y \in X$ таких, что $x \sim y$. Другими словами, это пересечение $L_+(x)$ и $L_-(x)$.

Совершенно ясно, что в контексте представлений предпочтений полезностями, кривая безразличия и линия уровня - это одно и то же.

Локальная ненасыщаемость

Локальная ненасыщаемость

Definition 4

Предпочтения $\succcurlyeq$ локально ненасыщаемы в X, если для любой точки $x \in X$ найдется сколь угодно близкая к ней точка $x' \in X$, такая что $x' \succ x$.

Definition 5

Полезность U локально ненасыщаема в X, если для любой точки $x \in X$ найдется сколь угодно близкая к ней точка $x' \in X$, такая что $U(x') > U(x)$.

Почти все полезности, которые будут вам встречаться, локально ненасыщаемы. Интуитивно это означает что кривые безразличия - тонкие линии. Если кривая безразличия толстая - это явное нарушение локальной ненасыщаемости.

Примеры полезностей

Линейная полезность

Рассмотрим полезность вида: $U(x, y) = ax + by$. Тогда линия уровня ищется следующим образом:

$$c = ax + by$$

$$c - ax = by$$

$$y = \frac{c - ax}{b}$$

Линия уровня - это прямая вида $y = \alpha x + \beta$.

Эта полезность гладкая, вогнутая и локально ненасыщаемая.

Гиперболическая полезность

Рассмотрим полезность вида: $U(x, y) = a \log x + \log y$. Тогда линия уровня ищется следующим образом:

$$c = a \log x + \log y$$
$$e^c = x^a y$$
$$y = \frac{e^c}{x^a}$$

Линия уровня - это гипербола вида $y = x^\alpha \beta$.

Эта полезность гладкая, вогнутая и локально ненасыщаемая.

Полезность минимум

Рассмотрим полезность вида: $U(x, y) = \min(ax, by)$. Тогда линия уровня ищется следующим образом:

$$c = \min(ax, by)$$

$$\frac{c}{b} = \min(\frac{a}{b}x, y), \quad \frac{c}{a} = \min(x, \frac{b}{a}y)$$

$$y = \frac{c}{b}\mathbb{I}(ax > c), \quad x = \frac{c}{a}\mathbb{I}(by > c)$$

Линия уровня - это конкатенация горизонтальной и вертикальной линий, соединенных вдоль $ax = by$.

Эта полезность НЕгладкая, но непрерывная, вогнутая и локально ненасыщаемая.

Метод пристального взгляда

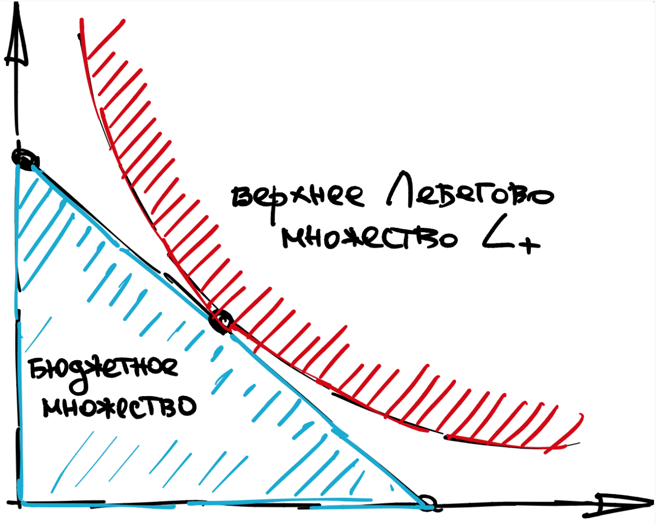
Метод пристального взгляда

Очень часто, в задачах есть выпуклое ограничение типа неравенства, например, бюджетное ограничение. А полезность вогнутая или квазивогнутая.

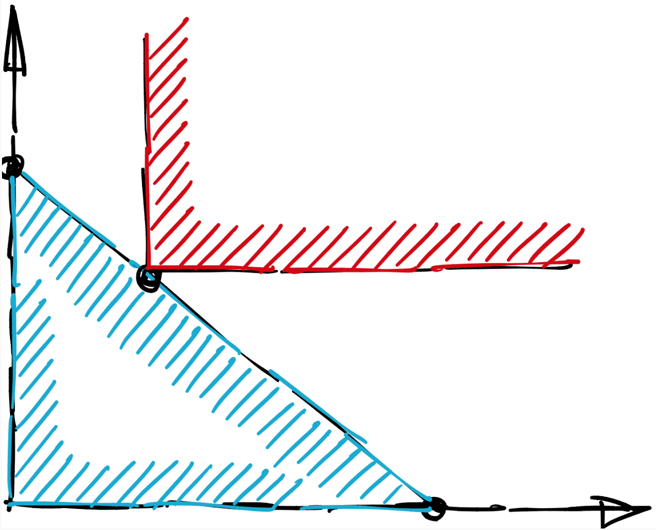
В таком случае, оптимум можно охарактеризовать как точку касания выпуклой области определения с одним из выпуклых верхних Лебеговых множеств. Однако, метод пристального взгляда работает только для локально ненасыщаемых предпочтений.

В маломерных задачах, эта точка ищется визуально, а точные ее координаты либо угадываются из симметрии, либо из каких то других соображений.

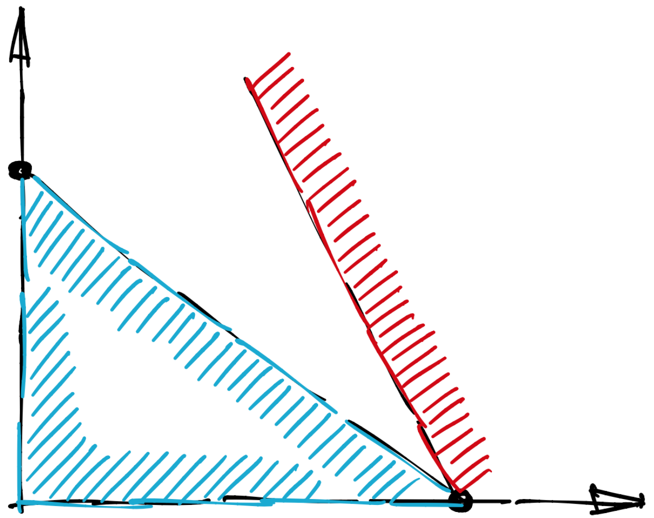
Метод пристального взгляда



Метод пристального взгляда



Метод пристального взгляда



Конец второй части лекции