

# Микроэкономика-I

---

Павел Андреянов, PhD

13 января 2024 г.

## Свойства полезности в $\mathbb{R}^n$

---

Напомним, на чем мы остановились

## Definition 1

Полезность  $U$  **непрерывна**, если ее  $L_+$ ,  $L_-$  - замкнутые.

## Definition 2

Полезность  $U$  **вогнута**, если ее подграфик - выпуклый.

Забегая вперед, сегодня будет еще одно определение, но я помещу его тут, потому что они хорошо смотрятся вместе.

## Definition 3

Полезность  $U$  **квази вогнута**, если ее  $L_+$  - выпуклые.

Вернемся к **вогнутости**.

К сожалению, не все могут быстро в уме нарисовать график или подграфик функции от двух переменных, а тем более от трех переменных, и сказать выглядит он как колпак или нет.

Например,  $\sqrt{xy}$  или  $x^2y^2$ .

В таких случаях мы применяем **критерий Сильвестра** (его покажу на следующем слайде) для подтверждения или отрицания вогнутости функции.

# Критерий Сильвестра

---

# Критерий Сильвестра

Джеймс Джозеф Сильвестер

(James Joseph Sylvester)

английский и американский математик второй половины 19 века, профессор Университета Джон Хопкинс и позже Оксфорда. Изобрел матрицы, дискриминанты, и, собственно, критерий имени самого себя. Этот критерий заключается в проверке отрицательной определенности матрицы Гесса.



# Критерий Сильвестра

Матрица Гесса  $\nabla^2 U$ , она же «матрица вторых производных» является симметричной а значит диагонализуемой.

Предположим, что в некотором базисе

$$\nabla^2 U \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

# Критерий Сильвестра

Пусть собственные значения  $\lambda_i$  все ненулевые.

Есть два важных случая

- все знаки строго отрицательные - это **строго вогнутая** функция, такая как  $-x^2 - y^2 - z^2$
- все знаки строго положительные - это **строго выпуклая** функция, такая как  $x^2 + y^2 + z^2$

Любой другой вариант ненулевых знаков собственных значений это тоже не вогнутая функция.



# Критерий Сильвестра - I

В диагональном случае, угловые миноры (которых 3 штуки для  $n = 3$ ) строго вогнутой функции характеризуются

- $\det M_{1,1} = \lambda_1 < 0$
- $\det M_{1,2} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$
- $\det M_{1,2,3} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$

Проверка чередования знаков угловых миноров называется **Критерием Сильвестра знаковой определенности матрицы**. Более того, он работает в любом базисе.

А что если некоторые собственные значения равны нулю

Есть два важных случая

- все знаки отрицательные или нулевые - это просто **вогнутая** функция
- все знаки положительные или нулевые - это просто **выпуклая** функция

Функция может быть (нестрого) выпуклой и вогнутой одновременно, например, линейная.

## Критерий Сильвестра - II

В диагональном случае, главные миноры (которых 7 штук для  $n = 3$ ) нестрого вогнутой функции характеризуются

- $\det M_{1,1} = \lambda_1 \leq 0$
- $\det M_{2,2} = \lambda_2 \leq 0$
- $\det M_{3,3} = \lambda_3 \leq 0$
- $\det M_{1,2} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 0$
- $\det M_{2,3} = \lambda_2 \cdot \lambda_3 \geq 0$
- $\det M_{1,3} = \lambda_1 \cdot \lambda_3 \geq 0$
- $\det M_{1,2,3} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \leq 0$

Проверка чередования знаков главных миноров называется

Критерием Сильвестра знаковой полу-определенности матрицы и работает в любом базисе.

# Критерий Сильвестра - подытожим

Первый критерий:

$$F \text{ стр. вогнутая} \Leftrightarrow v \nabla^2 F v < 0$$
$$\Leftrightarrow \text{угловые миноры знакопереваются и} \neq 0$$

Второй критерий:

$$F \text{ вогнутая} \Leftrightarrow v \nabla^2 F v \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \text{главные миноры знакопереваются}$$

Второй критерий известен меньше, потому что главных миноров очень очень много и их проверка не всегда является практичной.

Но для  $n = 3$  можно сделать, главных миноров 7.

А если он не работает?

---

## А если он не работает?

Если не удастся применить критерий, есть другие приемы.

- линейные функции - вогнуты
- сумма вогнутых функций - вогнута
- минимум (любого числа) вогнутых функций - вогнут
- монотонно возрастающее преобразование вогнутой функции - вогнуто, если это преобразование само вогнуто.

Например, такими преобразованиями являются  $\sqrt{x}$ ,  $\log(x)$  но не являются  $\exp(x)$ ,  $x^2$ .

## А если он не работает?

Потренируемся в проверке вогнутости

- $xy$
- $x^{1/3}y^{2/3}$
- $x + 2y + 3z$
- $xy + \min(x, y)$
- $\min(xy, z + x)$
- $\sqrt{x^{1/3}y^{2/3} + z}$

Приведите пример не вогнутой функции?

# Проблемы с вогнутостью

---



К сожалению, с вогнутостью есть проблема.

Три полезности

- $x^2y^2$
- $\sqrt{xy}$
- $\log x + \log y$

задают одни и те же предпочтения.

Однако, 2 из них вогнутые а одна - вовсе нет.

Попробуйте определить какие?

Проблема в том, что монотонные преобразования легко ломают вогнутость, если они сами при этом не являются вогнутыми, достаточно накрутить несколько экспонент.

Поэтому экономисты придумали свою собственную почти-вогнутость, или **квази вогнутость** (quasi- от лат. почти).

# Квази вогнутость

---

Проверка квази-вогнутости опирается на форму верхних Лебеговых множеств (вместо формы подграфика)...

## Definition 4

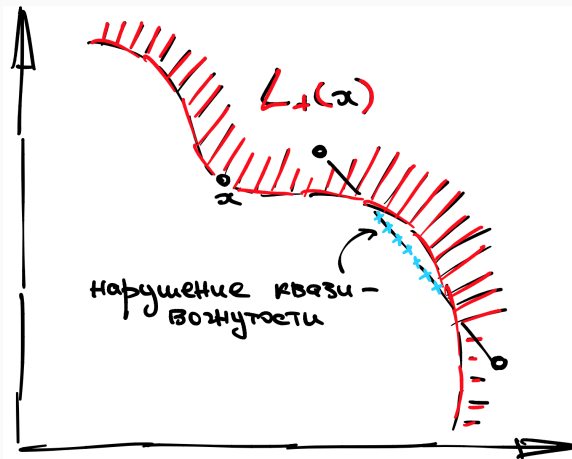
Полезность  $U$  **вогнута**, если ее подграфик - выпуклый.

## Definition 5

Полезность  $U$  **квази вогнута**, если все ее  $L_+(x)$  - выпуклы.

...а следовательно инвариантна к монотонно возрастающим преобразованиям.

рисунок в  $\mathbb{R}^n$



Любопытный факт

Поскольку  $L_+$  является как бы тенью (проекцией на  $\mathbb{R}^n$ ) верхнего отрезка подграфика (живущего в  $\mathbb{R}^{n+1}$ ), то...

...из вогнутости автоматически следует квази вогнутость.

Есть также эквивалентное определение квази вогнутости

## Definition 6

Полезность  $U$  **квази вогнута** в  $X$ , если для любых  $x, y \in X$ :

$$\forall \alpha \in (0, 1) : U(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \min(U(x), U(y))$$

в стиле примерно такого же определения вогнутости

## Definition 7

Полезность  $U$  **вогнута**, если для любых  $x, y \in X$ :

$$\forall \alpha \in (0, 1) : U(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y)$$

Любители алгебры могут убедиться, что **из вогнутости действительно следует квази вогнутость** (но не наоборот).

**Доказательство.**

$$(1) : U(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y)$$

$$(2) : \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y) \geq \min(U(x), U(y))$$

$$(1), (2) \Rightarrow U(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \min(U(x), U(y))$$



Зачем эта приставка квази-?

---

# Зачем эта приставка квази-?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно сначала понять **зачем нам нужна была вогнутость?**

Короткий ответ - **для единственности решения оптимизационных** задач с бюджетными (в общем случае выпуклыми) ограничениями.

Однако, **квази вогнутость** так же приводит к единственности решений, при этом являясь менее требовательным к полезности - **общую идею нарисую на доске.**

## Зачем эта приставка квази-?

А если результат тот же - зачем платить больше?

Действительно, если квази вогнутость однозначно слабее чем вогнутость, экономисту проще поверить в то что первая может быть выполнена в реальности.

При этом, повторюсь, **как вогнутость так и квази вогнутость приводят к единственности решений в выпуклых задачах** (строгое определение выпуклой задачи дам чуть позже).

## Зачем эта приставка квази-?

На самом деле, структура которую вогнутость налагает на полезность говорит не только о единственности решений, но также об отношении агента к риску, он его не любит. Это для нас сейчас - совершенно лишнее знание.

Квази вогнутость это та часть вогнутости, которая отвечает за единственность решений.

Но кроме принципа Оккама **есть и другие соображения в пользу квази вогнутости.**

# Неоднозначность полезности

Напомню, что для любого строго монотонного преобразования  $\varphi$ , две полезности -  $U(x)$  и  $\varphi(U(x))$  - производят идентичное поведение у потребителей.

Все ниже перечисленные полезности эквивалентны с точки зрения поведения потребителей

$$x^2 y^3,$$

$$2 \log x + 3 \log y,$$

$$2 \log x + 3 \log y + 1,$$

$$2(2 \log x + 3 \log y) + 1.$$

# Неоднозначность вогнутости

Напомню, что **вогнутость** (часто) **ломается при монотонных преобразованиях** полезности.

В отличие от нее, **квази вогнутость сохраняется при монотонных преобразованиях** полезности.

Когда какое то свойство инвариантно к спецификации (или трансформации) полезности, экономисты такое очень любят.

# Неоднозначность вогнутости

Итак, супер важный факт:

## Lemma 8

*Если  $U(x)$  вогнута или квази вогнута, то  $\varphi(U(x))$  квази вогнута для любой строго монотонно возраст-ей функции  $\varphi$ .*

Конечно, может так случиться, что  $\varphi(U(x))$  все таки вогнута, это ничему не противоречит поскольку из вогнутости следует и квази вогнутость. Функция может быть вогнутой и квази вогнутой одновременно.

# Неоднозначность вогнутости

Чтобы придумать алгебраичное доказательство, достаточно знать следующие свойства строго монотонно возрастающих функций  $\varphi$ :

$$U(x) \leq U(y) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(U(x)) \leq \varphi(U(y))$$

$$U(x) \geq U(y) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(U(x)) \geq \varphi(U(y))$$

$$\min(\varphi(U(x)), \varphi(U(y))) = \varphi(\min(U(x), U(y)))$$



Какие функции квази вогнуты?

---

# Какие функции квази вогнуты?

Приведу несколько примеров

- линейные
- вогнутые
- монотонно возрастающие преобразования вогнутых
- монотонные в  $\mathbb{R}^1$
- однопиковые в  $\mathbb{R}^1$

Продвинутое упражнение: приведите (нарисуйте) две функции (поверхности) в  $\mathbb{R}^2$ : монотонную и однопиковую; которые не являются квазивогнутыми.

# Предпочтения

---

Модель предпочтений более абстрактна чем полезность

- снова один агент
- товары разделены на  $n$  категорий
- портфель (потр. корзина) это точка в  $\mathbb{R}_+^n$
- категории, а также координаты обозначаются  $x, y, z, \dots$
- множество доступных альтернатив  $X \subset \mathbb{R}_+^n$

Однако вместо полезности  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$  у агента в голове зашито бинарное отношение  $\succsim : X^2 \rightarrow \{0, 1\}$ .

Напомню как визуализировать бинарное отношение на множестве альтернатив малой размерности, например 3.

$\succsim$	$x$	$y$	$z$
$x$	1	1	0
$y$	0	1	1
$z$	0	1	0

$x \succsim y$  означает что  $(x, y) \mapsto 1$ .

$x \precsim y$  означает что  $(y, x) \mapsto 1$ .

Формально, бинарное отношение – это любое расположение ноликов и единичек внутри матрицы.

Напомню, что для простоты вводятся дополнительные обозначения:

$x \sim y$  означает что  $x \succcurlyeq y$  и  $x \preccurlyeq y$ .

$x \succ y$  означает что  $x \succcurlyeq y$  но не  $x \sim y$ .

$x \prec y$  означает что  $x \preccurlyeq y$  но не  $x \sim y$ .

Получаются пять интуитивных отношений сильного, слабого предпочтений и безразличия.

Однако какие попало матрицы писать не стоит.

# Предпочтения

Поскольку у бинарного отношения есть экономическая интерпретация, это накладывает на него определенные ограничения, называемые **аксиомами рациональности**.

## Definition 9

Предпочтения  $\succsim$  **рациональны**, если

- для любых  $x, y \in X$ , либо  $x \succ y$  либо  $y \succ x$  либо  $y \sim x$ .
- для любой  $x \in X$ , всегда верно что  $x \sim x$
- для любых  $x, y, z \in X$ :

$$x \succsim y, y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$$

Последнее свойство - самое важное и называется **транзитивностью**.

Рациональность накладывают структуру на то, как может заполняться матрица.

$\succsim$	$x$	$y$	$z$
$x$	*	*	*
$y$	0	*	1
$z$	0	1	*

Попробуйте дозаполнить следующую матрицу так, чтобы предпочтения были рациональными.



# Свойства предпочтений

---

# Предпочтения

Переопределив естественным образом Лебеговы множества  $L_+(x)$  и  $L_-(x)$  в терминах предпочтений, мы автоматически получаем аналоги свойств предпочтений. Заодно, можно сразу дать определения монотонности и локальной ненасыщаемости для полезности и предпочтений.

предпочтения	полезности	определение
непрерывны выпуклы - монотонны лок. ненас.	непрерывны квази вогнуты вогнуты монотонны лок. ненас.	$L_+, L_-$ замкнуты $L_+$ выпуклы подграфик выпуклый $L_+(x) + v \subset L_+(x), \forall v \in \mathbb{R}_+^n$ $\forall x, \varepsilon \exists y :  x - y  < \varepsilon, y \in L_{++}(x)$

Тут, к сожалению, есть врожденный баг терминологии.

Парадокс в том, что вогнутые (concave) полезности - квазивогнутые, однако, ассоциированы с выпуклыми предпочтениями. А выпуклые (convex) полезности, например  $\max(x, y)$ , с выпуклыми предпочтениями как раз никак не связаны и даже противоречат им.

Это происходит из того, что выпуклость - очень древнее слово в физике и те кто придумали выпуклые предпочтения (они были скорее всего физико-математиками) не задумались о том, что это приведет к конфликту в будущем.

Дело в том, что в физике все минимизируется (например, энергия), поэтому функции там выпуклые, а в экономике, наоборот, полезность максимизируется поэтому она вогнутая.

## Прямая связь

---

Предположим, что у вас уже есть откалиброванная полезность. Как вывести из нее модель предпочтений?

### Definition 10

Будем говорить, что  $U$  **представляет**  $\succsim$ , если

$$U(x) \geq U(y) \Leftrightarrow x \succsim y.$$

Должно быть понятно, что если предпочтения представлены  $U$ , то они будут обязательно рациональны, поскольку аксиомы рациональности копируются со свойств вещественных чисел.

Также, любое свойство предпочтений, будь то непрерывность, монотонность или квази вогнутость, копируются на полезность которая его представляет.

# Обратная связь

---

Предположим, что у вас уже есть откалиброванные рациональные предпочтения в  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Можно ли восстановить по ним хотя бы одну непротиворечивую полезность?

Оказывается, что в простых случаях, действительно, можно.

## Lemma 11

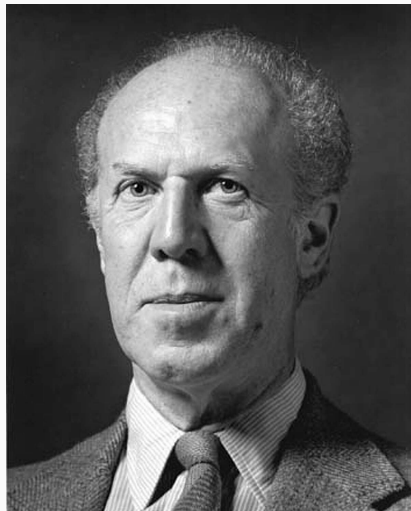
*Если  $X$  конечно, то для любых рациональных предпочтений  $\succsim$  существует полезность  $U$ , представляющая  $\succsim$ .*

Это легко доказать алгоритмически. Доказательство также легко переносится на случай счетного  $X$ .

В случае когда пространство альтернатив достаточно мощное, нам понадобится непрерывность предпочтений.



Жерар Дебрё (Gérard Debreu)  
французский экономист и  
математик, профессор  
экономики университета  
Беркли, лауреат нобелевской  
премии 1983 года по  
экономике. Работал над  
представлениями предпочтений  
потребителя при помощи  
вещественнозначных функций и  
существованием равновесий в  
конкурентных рынках.



## Theorem 12 (Дебрё)

Если верно  $*$  то для любых *рациональных и непрерывных предпочтений*  $\succsim$  существует *непрерывная полезность*  $U$ , представляющая  $\succsim$ .

Звездочка  $*$  это паравоз из условий, который меняется в зависимости от стиля доказательства. Есть несколько вариантов доказательства, из которых я вкратце расскажу два.

Сразу замечу, что отдельно проверять непрерывность  $U$  не надо, так как она автоматически наследуется от  $\succsim$ .

Первый вариант паровоза \*:  $X$  это выпуклое замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , а еще  $\succsim$  строго монотонный.

- Шаг 1. Ищем экстремумы  $\succsim$  и соединяем их хордой  $Y$ .
- Шаг 2. Элементарно строим полезность на  $Y$ .
- Шаг 3. Продолжаем полезность с  $Y$  на весь  $X$ .

Последний, самый сложный, шаг звучит примерно так.

Для любой точки  $x$  вне  $Y$  строим  $L_{++}(x)$  который содержит верхний и  $L_{--}(x)$  который содержит нижний конец хорды. Они не пересекаются, значит есть точка  $y$  на хорде такая что  $x \sim y$ , следовательно, можно присвоить значение  $U(x) := U(y)$ .

Второй вариант паровоза \*:  $X$  сепарабельно и связно.

- Шаг 1. Берем счетное, всюду плотное подмножество  $Y$ . В частности, если  $X \subset \mathbb{R}^n$ , можно взять,  $Y := \mathbb{Q} \cap X$ .
- Шаг 2. Элементарно строим полезность на  $Y$ .
- Шаг 3. Продолжаем полезность с  $Y$  на весь  $X$ .

Последний, самый сложный, шаг звучит примерно так.

Для любой точки  $x$  вне  $Y$  строим  $L_{++}(x)$  и  $L_{--}(x)$ . Если есть точка  $y \in Y$  такая что  $x \sim y$ , можно присвоить значение  $U(x) := U(y)$ . В противном случае, полагаем

$$U(x) := \frac{\sup_{y \in Y \cap L_{--}(x)} U(y) + \inf_{y \in Y \cap L_{++}(x)} U(y)}{2}.$$

# Выбор

---

Модель выбора максимально абстрактна

- снова один агент
- товары разделены на  $n$  категорий
- портфель (потр. корзина) это точка в  $\mathbb{R}_+^n$
- категории, а также координаты обозначаются  $x, y, z \dots$
- множество доступных альтернатив  $X \subset \mathbb{R}_+^n$

Вместо полезности  $U : X \rightarrow \mathbb{R} \dots$

или бинарного предпочтения  $\succsim : X^2 \rightarrow \{0, 1\} \dots$

у агента в голове зашито **отображение выбора**  $C : 2^X \rightarrow 2^X$ .

Что это значит?

Это значит, что агент отображает подмножества в подмножества. Так же как и с предпочтениями, есть несколько естественных технических ограничений:

- $C(Z) \neq \emptyset$
- $C(Z) \subset Z$

Для любого непустого меню  $Z \subset X$ .

Есть еще третья, самая важная аксиома.

Рассмотрим любые два портфеля  $x, y \in X$  и два меню  $Z, Z' \subset X$ , таких что  $x, y$  содержатся в обоих меню.

## Definition 13

Слабая аксиома выявленных предпочтений (WARP):

Если в первом меню  $y$  был выбран (в присутствие  $x$ ) то невозможно чтобы во втором меню  $x$  был выбран (в присутствие  $y$ ) но сам  $y$  выбран не был.

Интуитивно, выбирая  $x$  но не  $y$  во втором меню вы, по сути, озвучиваете что-то вроде строгого предпочтения  $x$  над  $y$ .

Тогда, в первом меню было бы странно выбрать  $y$  в присутствие лучшего  $x$ .



## Definition 14

Будем говорить, что  $C$  **выявляет** (reveals)  $\succsim$ , если

$$x \succsim y \iff x \text{ выбран в присутствие } y$$

Отсюда моментально следует, что  $x \succ y$  тогда и только тогда, когда  $x$  выбран в присутствие  $y$  но сам  $y$  выбран не был в том же меню, как в условии WARP.

Предполагая нарушение следствия WARP, во втором меню  $y$  был выбран в присутствие  $x$ , что значит  $y \succsim x$ , но это противоречит  $x \succ y$ .

Таким образом, WARP является необходимым условием для рациональности выявленных предпочтений (**revealed preference**).

Более того, из рациональности выявленных предпочтений также следует (а значит является необходимым условием) так называемая сильная аксиома выявленных предпочтений, которая рассматривает последовательность из  $n + 1$  меню.

## Definition 15

Сильная аксиома выявленных предпочтений (SARP):

Если  $x_i$  был выбран в присутствии  $x_{i-1}$ , для  $i = 1, \dots, n$ , то невозможно, чтобы в последнем меню  $x_0$  был выбран (в присутствии  $x_n$ ) но сам  $x_n$  выбран не был.

По сути, WARP это полнота, а SARP это еще и транзитивность выявленных предпочтений. Легко видеть, что из SARP следует WARP, то есть, сильная аксиома «сильнее» чем слабая.

Обращаю внимание, что для условий/аксиом «сильнее» это «хуже», потому что меньше надежды на то что оно выполнено.

Мы всегда говорим «сильное условие» с сожалением.

Для теорем все наоборот, «сильнее» это «лучше».

Более «сильная» теорема/доказательство это та у которой более «слабые» условия при тех же выводах, либо более «сильные» выводы при тех же условиях.

Мы говорим «сильное доказательство» с гордостью.

Есть еще третья, обобщенная аксиома выявленных предпочтений (GARP), которая сильнее чем SARP и WARP.

Они все звучат очень похоже и у них похожие условия, так что легко ошибиться. Мне кажется, в некоторых учебниках даже я видел неправильные определения.

Будьте аккуратны.

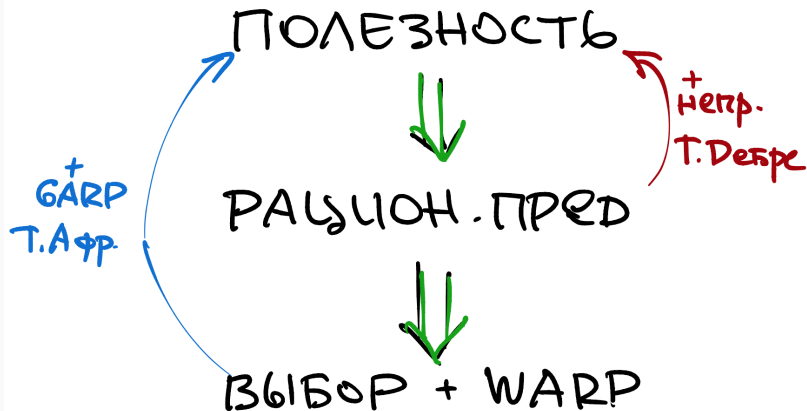
## Заключение

---

Мы продемонстрировали, что из любой полезности можно вывести рациональные предпочтения, а из рациональных предпочтений выбор со слабой и сильной аксиомами.

С другой стороны, из любых непрерывных и рациональных предпочтений можно вывести непрерывную полезность - это Теорема Дебре.

Аналог обратной связи для выбора называется **Теорема Африата**, для которой нужен такти GARP. Это очень продвинутый материал, анализ которого не входит в мой курс.





Какой из всего этого можно сделать вывод?

Все три модели, в каком то смысле эквивалентны. Поэтому можно смело использовать ту, которая вам кажется удобнее.

Чаще всего (99% случаев) это полезность, но иногда это и предпочтения, например в анализе алгоритма Гейла-Шепли, при помощи которого вас распределили по факультетам.

С другой стороны, аксиомы выбора недавно «вылезли» в новейших комбинаторных аукционах, поэтому от теории выбора тоже есть некоторый толк.