Complexidade de Algoritmos

Paulino Ng

2020-03-20

Plano da aula

Esta aula apresenta as funções típicas de complexidade de algoritmos. Para tanto começamos com uma rápida revisão matemática.

1. Revisão Matemática: Séries
2. Conjuntos
3. Funções

Revisão matemática: Séries

Somatória de séries finitas. Seja a sequência: $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$:

- Série aritmética:
  $$a_i = a_0 + i.d \longrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{1}{2}n(a_0 + a_{n-1}) = \frac{1}{2}(2a_0 + (n-1)d)$$
  - Exemplos:
    - $1 + 1 + \ldots + 1 = n$
    - $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$
    - $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$
- Série geométrica: $a_i = a_0 r^i \longrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{a_0(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_0 - r a_{n-1}}{1-r}$
  - $a_0 + a_0.r + a_0.r^2 + \ldots = \frac{a}{1-r} \quad \text{para} - 1 \leq r \leq 1$
  - Exemplos:
    - $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^7} = \frac{1(1-\frac{1}{2^8})}{1-\frac{1}{2}} = 1,9921875$
    - $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$

Séries importantes

- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1} = \frac{\pi}{4}$
- $e^n = 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n^i}{i!}$
- $a^n = e^{n \ln a} = 1 + n \ln a + \frac{(n \ln a)^2}{2!} + \frac{(n \ln a)^3}{3!} + \ldots$

Conjuntos

- Um **conjunto** é uma coleção de objetos distinguíveis que são chamados de **membros**, ou **elementos** do conjunto.
- Se x é um objeto membro de um conjunto S, podemos escrever: $x \in S$.
- Se x não é um objeto membro de um conjunto S, podemos escrever: $x \notin S$.
- Dois conjuntos são iguais se ambos têm os mesmos elementos: $\{1, 2, 3, 1\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 2, 3\}$
- Algumas notações de conjuntos:
  - $\emptyset$: **conjunto vazio**, conjunto sem nenhum membro
  - $\mathbb{Z}$: conjunto dos **números inteiros**, $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
  - $\mathbb{N}$: conjunto dos **números naturais**, $\{0, 1, 2, \dots\}$[1]
  - $\mathbb{R}$: conjunto dos **números reais**.
  - $\mathbb{C}$: conjunto dos **números complexos**.

[1] Autores mais antigos não consideram 0 como parte dos naturais.

Relações entre Conjuntos

- Se todos os elementos de um conjunto A também fazem parte de um conjunto B, A é dito ser um **subconjunto** de B. Denotado por: $A \subseteq B$ ou $B \supseteq A$.
- Se além de A ser um subconjunto de B, $A \neq B$, A é um **subconjunto próprio** de B: $A \subset B$ (A está contido em B), ou $B \supset A$ (B contem A).
  - Propriedades:
    1. $A \subset B \text{ e } B \subset C \Rightarrow A \subset C$
    2. $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto A: $\emptyset \subseteq A$
  - $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Operações com Conjuntos

- **Intersecção**: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$
- **União**: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Diferença**: $A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Propriedades

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$

Mais Propriedades

- Comutativa
  - $A \cap B = B \cap A$
  - $A \cup B = B \cup A$
- Associativa
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
- Distributiva
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Absorção
  - $A \cap (A \cup B) = A$
  - $A \cup (A \cap B) = A$
- Leis de De Morgan
  - $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
  - $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

Complemento e Partições

- Seja um conjunto que contem todos os outros (ou pelo menos os de interesse), U, chamado de **conjunto universo**, o **complemento de um conjunto** é definido como: $\overline{A} = U - A = \{x | x \in U \text{ e } x \notin A\}$.
  - $\overline{\overline{A}} = A$; $\quad A \cap \overline{A} = \emptyset$; $\quad A \cup \overline{A} = U$
  - Leis de De Morgan: $\overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$; $\quad \overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$
  - Exemplo: Se $\mathbb{N}$ é o conjunto universo e $A = \{x | x \text{ é } par\}$, então $B = \{x | x \text{ é } impar\}$ é o complemento de A
- Dois conjuntos A e B são **disjuntos** se $A \cap B = \emptyset$.
- Uma coleção $\mathcal{S} = S_i$ de conjuntos não vazios forma uma partição de S se:
  - os conjuntos são disjuntos dois-a-dois, isto é, $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ e $i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset$ e
  - a união deles é S, isto é, $S = \bigcup_{S_i \in \mathcal{S}} S_i$.
    - Exemplo: Seja $A = \{a, b, c, d\}$, uma partição de A é $P = \{\{a\}, \{b, d\}, \{c\}\}$

Cardinalidade

- O número de elementos de um conjunto é a **cardinalidade** dele, denotada por: $|S|$.
  - Exemplo: $|\{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}| = 3$
  - Exemplo: $|\emptyset| = 0$
  - Exemplo: $|\mathbb{N}| = \infty$
- Georg Cantor foi um dos primeiros matemáticos a "contar" conjuntos infinitos, o conjunto dos naturais, $\mathbb{N}$, tem cardinalidade $\aleph_0$ (alef-0), a mesma dos inteiros(!?). $\mathbb{R}$ têm cardinalidade $\aleph_1$ (alef-1). Quando um conjunto infinito pode ter todos os seus elementos mapeados um-a-um em $\mathbb{N}$, o conjunto é contável. $\mathbb{R}$ é incontável.
- Propriedades
  - Para A e B finitos: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |A \cup B| \leq |A| + |B|$
  - $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$
  - $|A \cup B| = |A| + |B| \Leftrightarrow A \text{ e } B \text{ são disjuntos.}$

Produto Cartesiano (JOIN em SQL)

- O **produto cartesiano** do conjunto A com o conjunto B é o conjunto formado pelos pares ordenados de cada elemento do conjunto A com cada elemento do conjunto B:
  $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ e } b \in B\}$
  - Exemplo:
    $\{a, b\} \times \{a, b, c\} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}$
  - $|A \times B| = |A|.|B|$
  - Espaço bidimensional, plano: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
  - Espaço tridimensional, 3-D: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Funções

- A seguir vamos listar algumas funções que aparecem na análise de complexidade de algoritmos:
  - $f(n) = c$, onde c é uma constante.
  - $f(n) = n$, função identidade; função linear: $f(n) = an + b$, onde a e b são constantes.
  - $f(n) = n^2$, função quadrado; função quadrática: $f(n) = a_2\, n^2 + a_1\, n + a_0$, onde a_2, a_1 e a_0 são constantes.
  - $f(n) = a_m\, n^m + a_{m-1}\, n^{m-1} + \ldots + a_1\, n + a_0$, função polinomial.
  - $f(n) = \sqrt{n}$, função raiz quadrada.
  - $f(n) = \log n$, função logarítmica na base 10; $\log_e n = \ln n$, logaritmo natural; $\log_2 n = \lg n$, logaritmo na base 2.
  - $f(n) = a^n = \underbrace{a.a.\ldots.a}_{n}$, função exponencial.
  - $f(n) = n! = 1.2.\ldots.n = \prod_{i=1}^{n} i$, função fatorial
- Exercício: plote o gráfico destas funções para $n \in [1, 10]$

Análise das Funções

- Estas funções crescem de maneiras diferentes. Na análise de algoritmos, estas funções aparecem como funções de complexidade do algoritmo.
- Uma função de complexidade, em geral, é uma aproximação do comportamento de gastos de um, ou mais, recurso computacional (normalmente o tempo).
- O maior interesse neste tipo de análise é para o que acontece quando o n (tamanho da entrada) aumenta.
- Estamos preocupados em saber se conseguiremos resolver um problema de grande tamanho com o algoritmo.
- De maneira geral, a nossa análise não se preocupa com problemas pequenos. Observe que o melhor algoritmo para problemas grandes pode não ser o melhor algoritmo para pequenos problemas. Mas, na solução de um problema grande, podem aparecer pequenos problemas que devem ser resolvidos muitas vezes e em alguns casos pode ser melhor usar o algoritmo *menos bom* para grandes problemas.
- As funções listadas estão em ordem de aumento para grandes