

Complexidade de Algoritmos

Paulino Ng

2020-02-26

Ementa

- ▶ Complexidade e desempenho.
- ▶ Análise da complexidade.
- ▶ Medidas de Complexidade.
- ▶ Comparação entre algoritmos recursivos e iterativos.
- ▶ Complexidade em algoritmos de busca e ordenação.
- ▶ Classes de problemas P, NP, NP-completo e NP- difícil.
- ▶ Estratégias para projetar algoritmos.
- ▶ Métodos de redução de problemas.

Bibliografia

Básica

[ZIVIANI] Nivio ZIVIANI, Projeto de Algoritmos: com implementações em Java e C++, São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[CLRS] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest & Clifford Stein, Algoritmos: Teoria e Prática, 3ª Ed., Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.

Apoio

[HMU] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani & Jeffrey D. Ullman, Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation, 2nd Ed., Boston: Addison-Wesley, 2001.

[DPV] Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou & Umesh Vazirani, Algoritmos, São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

[CORMEN] Thomas H. Cormen, Desmitificando Algoritmos, Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

Complexidade de um programa simples

- ▶ Nesta e nas próximas transparências, vamos usar o C no exemplo
- ▶ Seja o programa simples abaixo [HMU]:

```
void main()  
{  
    printf("hello, world\n");  
}
```

- ▶ O que ele faz?

Modificado: Último teorema de Fermat: $x^n + y^n = z^n$

```
int exp(int i, n) {
    int ans, j;  ans = 1;
    for (j=1; j<=n; j++) ans *= i;
    return(ans);
}

void main() {
    int n, total = 3, x, y, z;
    scanf("%d", &n);
    while (1) {
        for (x = 1; x <= total - 2; x++)
            for (y = 1; y <= total - x - 1; y++) {
                z = total - x - y;
                if (exp(x,n) + exp(y,n) == exp(z,n))
                    printf("hello, world\n");
            }
        total++;
    }
}
```

Questão

O programa modificado vai imprimir “hello, world” como seus 12 primeiros caracteres?

Resposta

- ▶ Para $n = 2$, ele vai imprimir diversas vezes `hello, world`
- ▶ Para $n > 2$, o programa entra em loop infinito sem imprimir nada
 - ▶ Os matemáticos levaram mais de 300 anos para concluir que o teorema de Fermat, $x^n + y^n = z^n$, para x, y, z, n naturais só tem solução para $n = 2$ estava certo.

Execução no NetBeans com cygwin32

```
17 int exp(int i, int n) {  
18     int ans = 1, j;  
19     for (j=1; j<=n; j++) ans *= i;  
20     return ans;  
21 }  
22 int main(int argc, char** argv) {  
23     int n, total = 3, x, y, z;  
24     scanf("%d", &n);  
25     while (1) {  
26         for (x = 1; x <= total - 2; x++)  
27             for (y = 1; y <= total - x - 1; y++) {  
28                 z = total - x - y;  
29                 if (exp(x, n) + exp(y, n) == exp(z, n))  
30                     printf("hello, world\n");  
31             }  
32         total++;  
33     }  
34     return (EXIT_SUCCESS);  
35 }
```

main

Output x

hellox (Build, Run) x hellox (Run) x

2
hello, world
hello, world

O que são algoritmos? [CLRS]

- ▶ Um **algoritmo** é um procedimento computacional bem definido que recebe um valor, ou um conjunto de valores, como **entrada** e produz algum valor, ou um conjunto de valores, como **saída**. Um algoritmo é uma sequência de passos computacionais que transformam a entrada na saída.

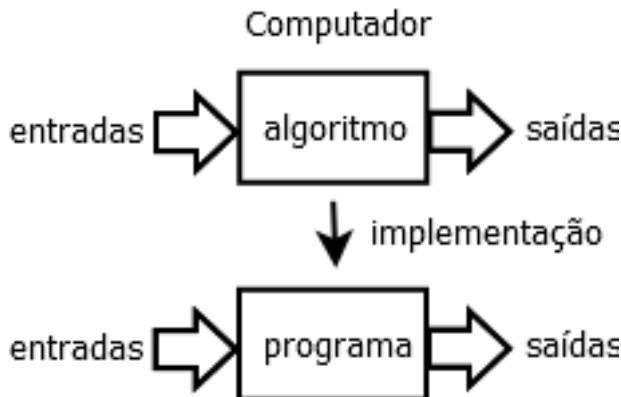


Figure 2: Conceito informal de algoritmo

Problema a ser resolvido

- ▶ Algoritmos servem para resolver *problemas computacionais*. Os problemas precisam ser *bem* definidos.
- ▶ Exemplo: Problema da ordenação de uma sequência de números
Entrada: Uma sequência de n números $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.
Saída: Uma permutação (reordenação) $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\}$ da sequência de entrada tal que $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Apresentação dos Algoritmos

- ▶ Os algoritmos nesta disciplina serão apresentados em alguma linguagem de programação ou em pseudo-código
- ▶ Exemplo em linguagem, Java:

```
public static int max(int v[], int n) {  
    int max = v[0];  
    for (int i = 1; i < n; i++) if (max < v[i]) max = v[i];  
    return max;  
}
```

Pseudo-código (em português)

```
funcao fib1(n)
  se n == 0 retorna 0
  se n == 1 retorna 1
  retorna fib1(n - 1) + fib1(n - 2)
```

Regras para o pseudo-código

- ▶ Vamos seguir as regras para pseudo-código do livro “Algoritmos” [CLRS]
 - ▶ as variáveis não são declaradas, nem obrigatoriamente inicializadas, elas são locais aos algoritmos/procedimentos. Não são usadas variáveis globais
 - ▶ indentação (tabulação) para indicar bloco
 - ▶ as malhas de repetição (loops) usam `while`, `for` e `repeat` semelhante ao Pascal. O `for` é uma malha de repetição controlada por um contador cujo valor final, o de saída, pode ser usado depois da malha. Ele usa `to` se o contador incrementa e `downto` se o contador decrementa, além disso o passo é declarado, opcionalmente, com `by`.
 - ▶ comentários são introduzidos com `//`
 - ▶ atribuições múltiplas são válidas: `a = b = c = sin(3.14159/4)`
 - ▶ elementos dos *arrays* são acessados por colchetes, `A[1]`. Dois pontos são usados para indicar os índices de um *sub-array*, `A[2..5]`

- ▶ os parâmetros são sempre passados por valor. Isto é, os argumentos não são modificados por atribuições feitas dentro do algoritmo. Mas se um objeto é passado e um método muda o objeto, o objeto original (o argumento) é modificado (como no Java). Um *array* é um objeto, o conteúdo do *array* pode ser modificado, mas o *array* não pode ser trocado por outro.
- ▶ o `return` pode retornar nenhum valor, um valor ou vários valores (como no Python)
- ▶ os operadores lógicos `and` e `or` são preguiçosos, isto é, assim que o resultado da operação é conhecido, os outros operandos não são calculados.
- ▶ a palavra-chave `error` é usada para indicar erro no cálculo do procedimento, ela deve ser tratada por chamador do procedimento.

Análise de Algoritmos

- ▶ Knuth diz que na área de análise de algoritmos, existem 2 tipos de problemas bem distintos:
 1. Análise de um algoritmo particular
 2. Análise de uma classe de algoritmos
- ▶ [CLRS] diz que precisamos de um modelo do computador que pretendemos usar. Modelos possíveis:
 - ▶ Máquina de Turing: teórico, muito complexo para algoritmos mais complexos
 - ▶ Máquina MIX: programação quase *assembly*
 - ▶ Máquina de Acesso Aleatório (RAM): modelo não muito preciso quanto ao conjunto de instruções, apenas define que as instruções são executadas uma depois da outra, isto é, não existem operações concorrentes. A RAM contém as instruções típicas de um computador: aritméticas, movimentação de dados, controle de fluxo (condicionais, desvios, chamadas de rotinas, retornos). Cada instrução leva um tempo constante para executar. Os tipos de dados são inteiros e ponto flutuante.

Análise de um algoritmo simples

Seja o algoritmo simples para encontrar o maior elemento de um vetor [ZIVIANI]

```
public static int max(int v[], int n) {  
    int max = v[0];  
    for (int i = 1; i < n; i++) if (max < v[i]) max = v[i];  
    return max;  
}
```

- ▶ Este algoritmo precisa fazer $n - 1$ comparações para determinar o maior elemento do vetor
 - ▶ Não estamos considerando as instruções do for, é óbvio que elas são necessárias.
 - ▶ Ziviani demonstra que esta classe de problemas precisa de $n - 1$ comparações para determinar o maior elemento de uma sequência de valores.

Diferentes possibilidades

```
public static int[] maxMin1(int v[], int n) {  
    int max = v[0], min = v[0];  
    for (int i = 1; i < n; i++) {  
        if (v[i] > max) max = v[i];  
        else if (v[i] < min) min = v[i];  
    }  
    int[] maxMin = new int[2];  
    maxMin[0] = max; maxMin[1] = min;  
    return maxMin;  
}
```

Esta implementação do procedimento para achar o maior e o menor elemento de um vetor tem *complexidade*:

melhor caso: $f(n) = n - 1$ (vetor em ordem crescente)

pior caso: $f(n) = 2(n - 1)$ (vetor em ordem decrescente)

caso médio: $f(n) = (3n - 3)/2$ (vetor não pré-ordenado)

Insert sort com análise mais detalhada [CLRS]

INSERTION-SORT(<i>A</i>)	<i>cost</i>	<i>times</i>
1 for <i>j</i> = 2 to <i>A.length</i>	c_1	n
2 $key = A[j]$	c_2	$n - 1$
3 // Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1 \dots j - 1]$.	0	$n - 1$
4 $i = j - 1$	c_4	$n - 1$
5 while $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^n t_j$
6 $A[i + 1] = A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
7 $i = i - 1$	c_7	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
8 $A[i + 1] = key$	c_8	$n - 1$

Figure 3: Análise do insert_sort

$$T(n) = c_1 n + c_2(n - 1) + c_4(n - 1) + c_5 \sum_{j=2}^n t_j + c_6 \sum_{j=2}^n (t_j - 1) + c_7 \sum_{j=2}^n (t_j - 1) + c_8(n - 1)$$

Exercício

Proponha um algoritmo para calcular o valor de um polinômio.

Entradas: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, x$

Saída: valor de $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

- ▶ Analise a complexidade do seu algoritmo
- ▶ Se seu algoritmo não usava a técnica de Tataglia para calcular o valor do polinômio, veja quantas operações são necessárias para calcular o polinômio com o método de Tataglia:

$$a_0 + x \cdot (a_1 + x \cdot (a_2 + x \cdot (\dots x \cdot (a_{n-1} + x \cdot a_n))))$$