1 1

构造拉格朗日函数

$$L(x,w,v) = x_1^2 - x_2 - 3x_3 - w(-x_1 - x_2 - x_3) - v(x_1^2 + 2x_2 - x_3)$$

K-T条件为

$$\begin{aligned}
2x_1 + wx_1 - 2vx_1 &= 0 \\
-1 + w - 2v &= 0 \\
-3 + w + v &= 0 \\
-x_1 - x_2 - x_3 &\geq 0 \\
x_1^2 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\
w(-x_1 - x_2 - x_3) &= 0 \\
w &\geq 0
\end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned}
v &= \frac{2}{3} \\
w &= \frac{7}{3} \\
x_1 &= 0 \\
x_2 &= 0 \\
x_3 &= 0
\end{aligned}$$

由于$x_1^2 + 2x_2 - x_3$不是线性函数，不满足一阶充分性，考虑二阶充分条件。

L在$(0,0,0)$处的二阶导为

$$\nabla^2 L|_{0,0,0} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
G &= \{d \neq 0, (1,1,1)^T d = 0, (0,2,-1)^T d = 0\} \\
&= \left\{ d = (d_1,d_2,d_3)^T | d_1 \neq 0, d_2 = -\frac{d_1}{3}, d_3 = -\frac{2d_1}{3} \right\}
\end{aligned}$$

由于$d_1 \neq 0$，$\forall d \in G$

$$d^T \nabla^2 L d = \frac{2}{3} d_1^2 > 0$$

所以$\bar{x} = (0,0,0)$严格局部最优解，对应目标函数值为0。

2 2

构造为约束优化问题

$$\begin{aligned}
&\min x_1^2 + x_2^2 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 \geq 4 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 5
\end{aligned}$$

拉格朗日函数为

$$L = x_1^2 + x_2^2 - w_1(x_1 + x_2 - 4) - w_2(2x_1 + x_2 - 5)$$

K-T条件为

$$
\begin{aligned}
2x_1 - w_1 - 2w_2 &= 0 \\
2x_2 - w_1 - w_2 &= 0 \\
x_1 + x_2 - 4 &\geq 0 \\
w_1 &\geq 0 \\
w_1(x_1 + x_2 - 4) &= 0 \\
2x_1 + x_2 - 5 &\geq 0 \\
w_2 &\geq 0 \\
w_2(2x_1 + x_2 - 5) &= 0
\end{aligned}
$$

解得

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 \\
x_2 &= 2 \\
w_1 &= 4 \\
w_2 &= 0
\end{aligned}
$$

由于$x_1^2 + x_2^2$是凸函数且可微，$x_1 + x_2$与$2x_1 + x_2$是凹函数且可微，所以$(2, 2)$是全局最优解。

也就是说$(0, 0)$到集合的最短距离为$2\sqrt{2}$。

3 3

将原问题写为等价形式

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
\text{s.t.} \quad & Ax = 0 \\
& \gamma^2 - x^T x \geq 0
\end{aligned}
$$

其中$c^T x$为凸函数且可微，Ax是线性函数且可微，$\gamma^2 - x^T x$是凹函数且可微。

下面考虑K-T条件，构造拉格朗日函数

$$
L = c^T x - v^T A x - w(\gamma^2 - x^T x)
$$

其中$v \in \mathbb{R}^m$，$w \in \mathbb{R}$，K-T条件为

$$
\begin{aligned}
c - A^T v + 2wx &= 0 \\
Ax &= 0 \\
w &\geq 0 \\
\gamma^2 - x^T x &\geq 0 \\
w(\gamma^2 - x^T x) &= 0
\end{aligned}
$$

首先求解出v

$$
\begin{aligned}
c - A^T v + 2wx &= 0 \\
Ac - AA^T v + 2wAx &= 0 \\
AA^T v &= Ac \\
v &= (AA^T)^{-1} Ac
\end{aligned}
$$

考虑$w = 0$的情况，需要满足$c - A^T(AA^T)^{-1}Ac = 0$，并且有$c^T x = 0$，也就是说目标函数值恒等于0。假设x'是一个可行解，有$Ax' = 0$，那么也有$A(-x') = 0$，于是

$$
\min c^T x \leq \min\{c^T x', -c^T x'\} \leq 0
$$

其中等号仅当c与x'正交时成立。上式说明，除非所有可行的x均与c正交，否则目标函数一定可以取到小于0的值，0不是目标函数最优值；假如所有可行的x均与c正交，那么x的模长不影响目标函数值，令$\|x\|^2 = \gamma^2$依然可以获得最优解，这个时候对应$w > 0$。所以我们只需要在$w > 0$的情况下寻找最优解即可。

考虑$w > 0$可以写为

$$x = \frac{1}{2w}(A^T v - c) = \frac{1}{2w}[A^T(AA^T)^{-1}Ac - c]$$

由$x^T x = \gamma^2$知

$$x^T x = \frac{1}{4w^2}[A^T(A^T A)^{-1}Ac - c]^T[A^T(A^T A)^{-1}Ac - c] = \gamma^2$$
$$w^2 = \frac{1}{4\gamma^2}[A^T(A^T A)^{-1}Ac - c]^T[A^T(A^T A)^{-1}Ac - c]$$

由于$w > 0$，

$$w = \frac{1}{2\gamma}\sqrt{[A^T(A^T A)^{-1}Ac - c]^T[A^T(A^T A)^{-1}Ac - c]}$$
$$x = \gamma\frac{A^T(A^T A)^{-1}Ac - c}{\sqrt{[A^T(A^T A)^{-1}Ac - c]^T[A^T(A^T A)^{-1}Ac - c]}}$$

该解满足最优解的充分条件，于是$\bar{x} = \gamma\frac{A^T(A^T A)^{-1}Ac-c}{\sqrt{[A^T(A^T A)^{-1}Ac-c]^T[A^T(A^T A)^{-1}Ac-c]}}$，对应函数最小值为$\gamma\frac{c^T A^T(A^T A)^{-1}Ac-c^T c}{\sqrt{[A^T(A^T A)^{-1}Ac-c]^T[A^T(A^T A)^{-1}Ac-c]}}$。

4 4

将原问题改写为等价形式

$$\begin{aligned} \min \quad & -b^T x \\ s.t. \quad & -x^T x + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

只需要证明$\bar{x} = b/\|b\|$是上面问题的最优解即可。

$-b^T x$是凸函数且可微，$-x^T x + 1$是凹函数且可微。

拉格朗日函数为

$$L = -b^T x - w(-x^T x + 1)$$

当$\bar{x} = b/\|b\|$时，显然存在$w = 2\|b\|$，使得

$$\nabla L|_{\bar{x}} = -b + 2w\bar{x} = 0$$

即$\bar{x}$满足K-T条件，所以$\bar{x}$满足最优解的充分条件。

5 5

（1）定义对数惩罚函数

$$P_I(x, \sigma) = x - \sigma\ln(x-1)$$

$$\nabla_x P_I = 1 - \frac{\sigma}{x-1} = 0$$
$$x = 1 + \sigma$$

由于$\sigma \to 0$，所以最优解$\bar{x} = 1$，$\min x = 1$

（2）定义对数惩罚函数

$$P_I(x, \sigma) = (x+1)^2 - \sigma\ln x$$

$$\nabla P_I = 2(x+1) - \frac{\sigma}{x} = 0$$
$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+2\sigma}$$

由于$\sigma \to 0$，所以最优解$\bar{x} = 0$，$\min(x+1)^2 = 1$

6　6

（1）令$f(x) = x_1 x_2$

在$\bar{x}$处，$\nabla f = (x_2, x_1)^T = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})^T$，$\nabla g = (-2, 1)^T$

$$L = x_1 x_2 - w(-2x_1 + x_2 + 3)$$
$$\nabla L = (x_2 + 2w, x_1 - w)^T$$

所以存在$w = \frac{3}{4}$，使得$\nabla L = 0$，$\bar{x}$是K-T点。

$$\nabla^2 L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

令

$$\bar{G} = \{d| - 2d_1 + d_2 = 0, d \neq 0\} = \{d|d_2 = 2d_1, d_1 \neq 0\}$$

于是

$$d^T \nabla^2 L d = 4d_1^2 > 0$$

所以$\bar{x} = (\frac{3}{4}, -\frac{3}{2})$是严格局部最优解。显然，$\bar{x}$不是一个全局最优解，因为我们可以轻松找到$x' = (-2, 2)^T$，$f(x') < f(\bar{x})$。

（2）障碍函数为

$$G(x, r) = x_1 x_2 - r\ln(-2x_1 + x_2 + 3)$$

对障碍函数求导

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = x_2 + \frac{2r}{-2x_1 + x_2 + 3} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = x_1 - \frac{r}{-2x_1 + x_2 + 3} = 0$$

解为

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{9 - 16r}}{8}$$
$$x_2 = -\frac{3 + \sqrt{9 - 16r}}{4}$$

$r \to 0$时，有$x \to \bar{x} = (\frac{3}{4}, -\frac{3}{2})$。

7　7

（1）构造拉格朗日函数与二次罚函数

$$L = x_1^2 + x_2^2 + \mu(1 - x_1 + s)$$
$$p = (1 - x_1 + s)^2$$

构造增广拉格朗日函数

$$L_\sigma = x_1^2 + x_2^2 + \mu(1 - x_1 + s) + \frac{\sigma}{2}(1 - x_1 + s)^2$$

求解关于s的子问题

$$s = \max\left\{-\frac{\mu}{\sigma} - 1 + x_1, 0\right\}$$

代回L_σ

$$L_\sigma = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \mu(1 - x_1) + \frac{\sigma}{2}(1 - x_1)^2 \\ x_1^2 + x_2^2 - \frac{\mu^2}{2\sigma} \end{cases}$$

对x_1, x_2求导

$$\frac{\partial L_\sigma}{\partial x_1} = \begin{cases} 2x_1 - \mu - \sigma(1 - x_1), & x_1 \geq \frac{\mu}{\sigma} + 1 \\ 2x_1, & x_1 < \frac{\mu}{\sigma} + 1 \end{cases}$$
$$\frac{\partial L_\sigma}{\partial x_2} = 2x_2$$

令$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$。如果$x_1 < \frac{\mu}{\sigma} + 1$，解得$x_1 = 0$，矛盾。如果$x_1 \geq \frac{\mu}{\sigma} + 1$，解得$x_1 = \frac{\mu+\sigma}{2+\sigma}$。

令$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$，$x_2 = 0$。

根据μ的迭代公式

$$\mu^{(k+1)} = \max\left\{0, \mu^{(k)} - \sigma\left(x_1^{(k)} - 1\right)\right\}$$

由于x_1需要满足$x_1 \geq \frac{\mu}{\sigma} + 1$所以

$$\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} - \sigma\left(x_1^{(k)} - 1\right) = \frac{2\mu^{(k)} + 2\sigma}{2 + \sigma}$$

随着$k \to \infty$，μ收敛于2，与此同时，惩罚因子$\sigma \to \infty$，$x_1 = 1$。

于是$\bar{x} = (1, 0)^T$，$x_1^2 + x_2^2$最小值为1。

（2）构造拉格朗日函数与二次罚函数

$$L = x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + 1)^2 + \mu_1(-x_1) + \mu_2(1 - x_2)$$
$$p = (-x_1 + s_1)^2 + (1 - x_2 + s_2)^2$$

构造增广拉格朗日函数

$$L_\sigma = x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + 1)^2 + \mu_1(-x_1 + s_1) + \mu_2(1 - x_2 + s_2) + \frac{\sigma}{2}[(-x_1 + s_1)^2 + (1 - x_2 + s_2)^2]$$

求解关于s_1, s_2的子问题

$$s_1 = \max\left\{-\frac{\mu_1}{\sigma} + x_1, 0\right\}$$
$$s_2 = \max\left\{-\frac{\mu_2}{\sigma} + x_2 - 1, 0\right\}$$

对x_1, x_2求导

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_\sigma}{\partial x_1} &= \begin{cases} 1, & x_1 \geq \frac{\mu_1}{\sigma} \\ 1-\mu_1+\sigma x_1, & x_1 < \frac{\mu_1}{\sigma} \end{cases} \\
\frac{\partial L_\sigma}{\partial x_2} &= \begin{cases} \frac{2}{3}(x_2+1), & x_2 \geq \frac{\mu_2}{\sigma}+1 \\ \frac{2}{3}(x_2+1)-\mu_2-\sigma(1-x_2), & x_2 < \frac{\mu_2}{\sigma}+1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

令$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0$。如果$x_1 \geq \frac{\mu_1}{\sigma}$，无解。如果$x_1 < \frac{\mu_1}{\sigma}$，解得$x_1=\frac{\mu_1-1}{\sigma}$。

令$\frac{\partial L}{\partial x_2}=0$。如果$x_2 \geq \frac{\mu_2}{\sigma}+1$，$x_2=-1$，矛盾。如果$x_2 < \frac{\mu_2}{\sigma}+1$，解得$x_2=\frac{3\mu_2+3\sigma-2}{2+3\sigma}$。

$$
\mu_1^{(k+1)} = \max\left\{0, \mu_1^{(k)} - \sigma x_1^{(k)}\right\} = 1
$$

$$
\mu_2^{(k+1)} = \max\left\{0, \mu_2^{(k)} - \sigma\left(x_2^{(k)}-1\right)\right\} = \frac{2\left(\mu_2^{(k)}+2\sigma\right)}{2+3\sigma}
$$

随着$k \to \infty$，μ_2收敛于$\frac{4}{3}$，与此同时，惩罚因子$\sigma \to \infty$，$x_2=1, x_1=0$。

于是$\bar{x}=(0,1)^T$，$x_1+\frac{1}{3}(x_2+1)^2$最小值为$\frac{4}{3}$。