1 1

（1）构造拉格朗日函数与二次罚函数

$$L = x_1^2 + x_2^2 + \mu(1 - x_1 + s)$$
$$p = (1 - x_1 + s)^2$$

构造增广拉格朗日函数

$$L_\sigma = x_1^2 + x_2^2 + \mu(1 - x_1 + s) + \frac{\sigma}{2}(1 - x_1 + s)^2$$

求解关于s的子问题

$$s = \max\left\{-\frac{\mu}{\sigma} - 1 + x_1, 0\right\}$$

代回L_σ

$$L_\sigma = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \mu(1 - x_1) + \frac{\sigma}{2}(1 - x_1)^2, & x_1 \geq \frac{\mu}{\sigma} + 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - \frac{\mu^2}{2\sigma}, & x_1 < \frac{\mu}{\sigma} + 1 \end{cases}$$

对x_1, x_2求导

$$\frac{\partial L_\sigma}{\partial x_1} = \begin{cases} 2x_1 - \mu - \sigma(1 - x_1), & x_1 \geq \frac{\mu}{\sigma} + 1 \\ 2x_1, & x_1 < \frac{\mu}{\sigma} + 1 \end{cases}$$
$$\frac{\partial L_\sigma}{\partial x_2} = 2x_2$$

令$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$。如果$x_1 < \frac{\mu}{\sigma} + 1$，解得$x_1 = 0$，矛盾。如果$x_1 \geq \frac{\mu}{\sigma} + 1$，解得$x_1 = \frac{\mu + \sigma}{2 + \sigma}$。

令$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$，$x_2 = 0$。

根据μ的迭代公式

$$\mu^{(k+1)} = \max\left\{0, \mu^{(k)} - \sigma\left(x_1^{(k)} - 1\right)\right\}$$

由于x_1需要满足$x_1 \geq \frac{\mu}{\sigma} + 1$所以

$$\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} - \sigma\left(x_1^{(k)} - 1\right) = \frac{2\mu^{(k)} + 2\sigma}{2 + \sigma}$$

随着$k \to \infty$，μ收敛于2，与此同时，惩罚因子$\sigma \to \infty$，$x_1 = 1$。

于是$\bar{x} = (1, 0)^T$，$x_1^2 + x_2^2$最小值为1。

（2）构造拉格朗日函数与二次罚函数

$$L = x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + 1)^2 + \mu_1(-x_1) + \mu_2(1 - x_2)$$
$$p = (-x_1 + s_1)^2 + (1 - x_2 + s_2)^2$$

构造增广拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L_\sigma = x_1 + &\frac{1}{3}(x_2 + 1)^2 + \mu_1(-x_1 + s_1) + \mu_2(1 - x_2 + s_2) \\ &+ \frac{\sigma}{2}[(-x_1 + s_1)^2 + (1 - x_2 + s_2)^2] \end{aligned}$$

求解关于s_1, s_2的子问题

$$s_1 = \max\left\{-\frac{\mu_1}{\sigma} + x_1, 0\right\}$$
$$s_2 = \max\left\{-\frac{\mu_2}{\sigma} + x_2 - 1, 0\right\}$$

对x_1, x_2求导

$$\frac{\partial L_\sigma}{\partial x_1} = \begin{cases} 1, & x_1 \geq \frac{\mu_1}{\sigma} \\ 1 - \mu_1 + \sigma x_1, & x_1 < \frac{\mu_1}{\sigma} \end{cases}$$
$$\frac{\partial L_\sigma}{\partial x_2} = \begin{cases} \frac{2}{3}(x_2+1), & x_2 \geq \frac{\mu_2}{\sigma} + 1 \\ \frac{2}{3}(x_2+1) - \mu_2 - \sigma(1 - x_2), & x_2 < \frac{\mu_2}{\sigma} + 1 \end{cases}$$

令$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$。如果$x_1 \geq \frac{\mu_1}{\sigma}$，无解。如果$x_1 < \frac{\mu_1}{\sigma}$，解得$x_1 = \frac{\mu_1 - 1}{\sigma}$。

令$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$。如果$x_2 \geq \frac{\mu_2}{\sigma} + 1$，$x_2 = -1$，矛盾。如果$x_2 < \frac{\mu_2}{\sigma} + 1$，解得$x_2 = \frac{3\mu_2 + 3\sigma - 2}{2 + 3\sigma}$。

$$\mu_1^{(k+1)} = \max\left\{0, \mu_1^{(k)} - \sigma x_1^{(k)}\right\} = 1$$

$$\mu_2^{(k+1)} = \max\left\{0, \mu_2^{(k)} - \sigma\left(x_2^{(k)} - 1\right)\right\} = \frac{2\left(\mu_2^{(k)} + 2\sigma\right)}{2 + 3\sigma}$$

随着$k \to \infty$，μ_2收敛于$\frac{4}{3}$，与此同时，惩罚因子$\sigma \to \infty$，$x_2 = 1, x_1 = 0$。

于是$\bar{x} = (0,1)^T$，$x_1 + \frac{1}{3}(x_2+1)^2$最小值为$\frac{4}{3}$。

2 2

(1)可行方向集为

$$\{d | Ad = 0, I_2 d \geq 0, d \neq 0\}$$

其中$I_1 x > 0$是x处不起作用的约束，$I_2 x = 0$是x处生效的约束，I_2为对应的约束系数。

（2）可行方向集为

$$\{d | A_2 d \leq 0, Ed = 0, I_2 d \geq 0, d \neq 0\}$$

其中$A_1 d < 0$与$I_1 x > 0$是x处不起作用的约束，$A_2 x = 0$与$I_2 x = 0$是x处生效的约束，A_2、I_2为对应的约束系数。

（3）

$$\{d | A_2 d \geq 0, I_2 d \geq 0, d \neq 0\}$$

其中$A_1 d > 0$与$I_1 x > 0$是x处不起作用的约束，$A_2 x = 0$与$I_2 x = 0$是x处生效的约束，A_2、I_2为对应的约束系数。

3 3

记

$$f = x_1^2 + 4x_2^2 - 34x_1 - 32x_2$$

其梯度为

$$\nabla f = (2x_1 - 34, 8x_2 - 32)^T$$

取迭代初始点为$x^{(0)} = (0,0)^T$，此时有约束作用的系数矩阵为

$$A_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

约束右端为

$$b_2^{(0)} = (0,0)^T$$

选取最速下降方向

$$d^{(0)} = (0.34, 0.32)^T$$

由于$A_2^{(0)} d^{(0)} > 0$，该迭代方向不会破坏约束条件。取步长$t^{(0)} = 6$，$x^{(1)} = x^{(0)} + t^{(0)} d^{(0)} = (2.04, 1.92)^T$。

此时有约束作用的系数矩阵为

$$A_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}$$

约束右端为$b_2^{(1)} = -6$。

根据约束条件选取下降方向$d^{(1)} = (-0.5, 4)^T$，步长$t^{(1)} = 0.08$，$x^{(2)} = x^{(1)} + t^{(1)} d^{(1)} = (2,2)^T$。

此时有约束作用的系数矩阵为

$$A_2^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

约束右端为

$$b_2^{(0)} = (-6, -2)^T$$

解得下降方向$d^{(2)} = (0,0)^T$，所以$(2,2)$是K-T点。

由于原问题是一个凸规划，$(2,2)$是全局最优点，f最小值为-112。

4 4

$$L = c^T x + \lambda^T (Ax - b) + \mu^T (-x + s)$$

其中$s \geq 0$，λ, μ, s是和b相同维度的列向量。

二次罚函数为

$$p(x, s) = (Ax - b)^T (Ax - b) + (-x + s)^T (-x + s)$$

增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L_\sigma &= c^T x + \lambda^T (Ax - b) + \mu^T (-x + s) + \frac{\sigma}{2} p(x, s) \\ &= c^T x + \lambda^T (Ax - b) + \mu^T (-x + s) + \\ &\qquad \frac{\sigma}{2} \left[(Ax - b)^T (Ax - b) + (-x + s)^T (-x + s) \right] \end{aligned}$$

满足$s \geq 0$。