Homework 5

JY Fan

1. 求解下列问题

(1) 用 PRP 算法: $\min\ (x_1-2)^2+2(x_2-1)^2$, 取初始点 $x^{(1)}=(1,3)^T$.

(2) 用 FR 算法: $\min\ 2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+3x_1-4x_2$, 取初始点 $x^{(1)}=(3,4)^T$.

2. 设有非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min\ & \frac{1}{2}x^TAx, \\ \text{s.t.}\ & x \geq b, \end{aligned}$$

其中 A 为 n 阶对称正定矩阵, 设 $\bar{x}$ 是问题的最优解. 证明 $\bar{x}$ 与 $\bar{x}-b$ 关于 A 共轭.

3. 用 BFGS 算法求解下列问题:

$$\min\ x_1^2+3x_2^2,$$

取初始点及初始矩阵为

$$x^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\quad H_1=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}.$$

4. 证明下述定理:

假设目标函数 f 是二阶连续可微的函数, 且海瑟矩阵在最优点 x^* 的一个邻域 $N_\delta(x^*)$ 内是李普希茨连续的, 即存在常数 $L>0$, 使得

$$\left\|\nabla^2 f(x)-\nabla^2 f(y)\right\| \leq L\left\|x-y\right\|,\ \forall x,y\in N_\delta(x^*).$$

如果函数 $f(x)$ 在点 x^* 处满足 $\nabla f(x^*)=0$, $\nabla^2 f(x^*)\succ 0$, 则对于经典牛顿法有如下结论:

(1) 如果初始点离 x^* 足够近, 则牛顿法产生的迭代点列 $\{x^k\}$ 收敛到 x^*;

(2) $\{x^k\}$ 收敛到 x^* 的速度是 Q-二次的;

(3) $\{\nabla f(x^k)\}$ Q-二次收敛到 0.