Homework 4

JY Fan

1. 用最速下降法求解问题:

$$\min\ x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - 3x_2.$$

取初始点 $x^{(1)} = (1,1)^T$, 迭代两次.

2. 设函数

$$f(x) = \frac{1}{2}x^TAx + b^Tx + c,$$

其中 A 为对称正定矩阵. 又设 $x^{(1)}(\neq \bar{x})$ 可表示为

$$x^{(1)} = \bar{x} + \sum_{i=1}^{m} \mu_i p^{(i)},$$

其中 $m > 1$, 对所有 i, $\mu_i \neq 0$, $p^{(i)}$ 是 A 的属于不同特征值 λ_i 的特征向量, $\bar{x}$ 是 $f(x)$ 的极小点. 证明从 $x^{(1)}$ 出发用最速下降法不可能一步迭代终止.

3. 设 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^TAx - b^Tx$, A 为对称正定矩阵, 任取初始点 $x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$. 证明最速下降法产生的序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于唯一的极小点 $\bar{x}$, 并且对每一个 k, 成立

$$E(x^{(k+1)}) \leq \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 E(x^{(k)}), \tag{1}$$

其中 $E(x) = \dfrac{1}{2}(x-\bar{x})^TA(x-\bar{x})$, M 和 m 分别是矩阵 A 的最大和最小特征值.
提示: 利用 Kantorovich 不等式, 即对任意非零向量 x, 有

$$\frac{(x^Tx)^2}{(x^TAx)(x^TA^{-1}x)} \geq \frac{4mM}{(m+M)^2}.$$

先证明不等式 (1), 再证明收敛性.

4. 设 A 为 n 阶实对称正定矩阵, 证明 A 的 n 个相互正交的特征向量 $p^{(1)}, p^{(2)}, ..., p^{(n)}$ 关于 A 共轭.

5. 用 HS 算法求解问题:

$$\min\ \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2,$$

取初始点 $x^{(1)} = (4,4)^T$.

6. 设 A 为 n 阶实对称正定矩阵, 非零向量 $p^{(1)}, p^{(2)}, ..., p^{(n)}$ 关于矩阵 A 共轭. 证明:

(1) $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{{p^{(i)}}^T A x}{{p^{(i)}}^T A p^{(i)}} p^{(i)},\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$

(2) $A^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)} {p^{(i)}}^T}{{p^{(i)}}^T A p^{(i)}}.$