1.

假设$A^Ty+B^Tz=c, y\geq 0$有解，于是$c^Tx=(y^TA+z^TB)x=y^TAx+z^TBx$。由于$y\geq 0, Bx=0, Ax\leq 0$，所以$c^Tx\leq 0$，与$c^Tx>0$矛盾。系统1无解。

假设系统2无解。定义集合$S=\{r\mid r=A^Ty+B^Tz, y\geq 0\}$，要使系统2无解，点$c=A^Ty+B^Tz$不在集合S内。由于$S$是凸集，根据凸集与点的分离定理，存在常数$\alpha$与非零的向量$p$，使得$p^Tc>\alpha$，且对$\forall r\in S$，$p^Tr\leq\alpha$。由于$0\in S$，有$\alpha\geq 0, c^Tp=p^Tc>0$。要让$c^Tp=(y^TA+z^TB)p=y^TAp+z^TBp>0$对所有的$y\geq 0, z\in R$成立，必然有$Ap\leq 0, Bq=0$，即$p$就是系统1的解。

2.

根据Farkas 定理，想要证明$Ax\leq 0, c^Tx>0$有解，只需要证明$A^Ty=c, y\geq 0$无解。由于$r(A^T)=2, r(A^T,c)=3$，$A^Ty=c$无解，所以$Ax\leq 0, c^Tx>0$有解。

3.

令

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\\ -17 & -11\end{bmatrix}$$

显然存在$y=[5,4,1]^T$使得$A^Ty=0, y\geq 0$。根据Gordan定理，$Ax<0$无解，即题目中的不等式组无解。

4.

为了证明Gordan定理，我们首先证明以下命题：

> 设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}, c\in\mathbb{R}^n$，下面两方程组有且仅有一组有解：
>
> - $Ax<0, c^Tx\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}^n$
> - $A^Ty=c, y\geq 0, \forall y\in\mathbb{R}^m$

假设方程组2有解。$c^Tx=y^TAx$，由于$Ax<0$且y非0，$c^Tx\leq 0$但不为0，与$c^Tx\geq 0$矛盾，故方程组1无解。

假设方程组2无解。定义集合$S=\{z\mid z=A^Ty, y\geq 0\}$，由于系统2无解，$c$不在集合$S$内。因为$S$是凸集，$p^Ty\geq\alpha$，且对$\forall x\in S$有$c^Tx<\alpha$。由于$p^Ty\geq\alpha$对任意非0向量$y\geq 0$成立，$\alpha\leq 0$。要让$y^TAp<\alpha\leq 0$对任意非0向量$y\geq 0$成立，必然有$Ap<0$。所以$p$就是方程组1的一个解。

故上述命题成立。令上述命题中$c=0$，我们便得到了Gordan定理。