1. 对x_1, x_2求偏导

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -\frac{{x_1}^2+2\,x_2\,x_1-3}{\left({x_1}^2+x_1\,x_2+{x_2}^2+3\right)^2}$$
$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -\frac{{x_2}^2+2\,x_1\,x_2-3}{\left({x_1}^2+x_1\,x_2+{x_2}^2+3\right)^2}$$

令$\nabla f = 0$，有$x_1 = x_2 = \pm 1$。

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} -\frac{2\left(-{x_1}^3-3\,{x_1}^2\,x_2+9\,x_1+{x_2}^3+6\,x_2\right)}{\left({x_1}^2+x_1\,x_2+{x_2}^2+3\right)^3} & -\frac{6\left(-{x_1}^2\,x_2-x_1\,{x_2}^2+2\,x_1+2\,x_2\right)}{\left({x_1}^2+x_1\,x_2+{x_2}^2+3\right)^3} \\ -\frac{6\left(-{x_1}^2\,x_2-x_1\,{x_2}^2+2\,x_1+2\,x_2\right)}{\left({x_1}^2+x_1\,x_2+{x_2}^2+3\right)^3} & -\frac{2\left({x_1}^3-3\,x_1\,{x_2}^2+6\,x_1-{x_2}^3+9\,x_2\right)}{\left({x_1}^2+x_1\,x_2+{x_2}^2+3\right)^3} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f\Big|_{x_1=x_2=1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad \nabla^2 f\Big|_{x_1=x_2=-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

于是，$x_1 = x_2 = -1$是一个极小值点

2.

（1）

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

f的Hessian矩阵特征值为0,4，$\nabla^2 f$是半正定的，所以f是凸函数。

（2）

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x_1+x_2}+2 & \mathrm{e}^{x_1+x_2}+2 \\ \mathrm{e}^{x_1+x_2}+2 & \mathrm{e}^{x_1+x_2}+2 \end{pmatrix}$$

f的Hessian矩阵特征值为0,2$\mathrm{e}^{x_1+x_2}+4$，$\nabla^2 f$是半正定的，所以f是凸函数。

（3）

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

f的Hessian矩阵的主子式值为4,6,8,-44，$\nabla^2 f$不是半正定的，所以f不是凸函数。

3.

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 8\,x_2-24\,{x_1}^2 & 8\,x_1 \\ 8\,x_1 & -4 \end{pmatrix}$$

对于部分x_1, x_2，$\nabla^2 f$不是半正定的。可以找到点$(-1,0)$与$(1,0)$，有$f(-1,0) = f(1,0) = 8$而$f(0,0) = 10$，显然f不是S上的凸函数。

4.

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{x})^T\nabla^2 f(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2)$$

由于$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = A$正定，

$$f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T(\mathbf{y}-\mathbf{x})$$

令$\mathbf{z}=\alpha\mathbf{x}+(1-\alpha)\mathbf{y}$，

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^T(\mathbf{x}-\mathbf{z}) \\
f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^T(\mathbf{y}-\mathbf{z})
\end{aligned}
$$

所以

$$
\alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{z}) + \alpha \nabla f(\mathbf{z})^T(\mathbf{x}-\mathbf{z}) + (1-\alpha) f(\mathbf{z})^T(\mathbf{y}-\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})
$$

根据严格凸函数的定义，f是严格凸函数。