

Homework 10

JY Fan

1. 证明下列函数的邻近算子

(1) 二次函数 ($A \succeq 0$):

$$h(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c, \text{ prox}_{th}(x) = (I + tA)^{-1}(x - tb).$$

(2) 负自然对数的和:

$$h(x) = -\sum_{i=1}^n \log x_i, \text{ prox}_{th}(x)_i = \frac{x_i + \sqrt{x_i^2 + 4t}}{2}, i = 1, \dots, n.$$

(3) l_2 范数

$$h(x) = \|x\|_2, \text{ prox}_{th}(x) = \begin{cases} (1 - \frac{t}{\|x\|_2})x, & \text{if } \|x\|_2 \geq t, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(4) l_1 范数

$$h(x) = \|x\|_1, \text{ prox}_{th}(x) = \text{sign}(x)\max\{|x| - t, 0\}.$$

2. 证明:

(1) 变量的常数倍放缩以及平移 ($\lambda \neq 0$):

$$h(x) = g(\lambda x + a), \text{ prox}_h(x) = \frac{1}{\lambda}(\text{prox}_{\lambda^2 g}(\lambda x + a) - a).$$

(2) 函数 (及变量) 的常数倍放缩 ($\lambda > 0$):

$$h(x) = \lambda g\left(\frac{x}{\lambda}\right), \text{ prox}_h(x) = \lambda \text{prox}_{\lambda^{-1}g}\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

(3) 加上线性函数:

$$h(x) = g(x) + a^T x, \quad \text{prox}_h(x) = \text{prox}_g(x - a).$$

3. 计算下面点到集合上的投影:

(1) 仿射集: $C = \{x \mid Ax = b\}$, 其中 $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\text{rank}(A) = p$,

$$P_C(x) = x + A^T(AA^T)^{-1}(b - Ax).$$

(2) 1-范数球: $C = \{x \mid \|x\|_1 \leq 1\}$,

$$P_C(x)_k = \begin{cases} x_k - \lambda, & \text{if } x_k > \lambda, \\ 0, & \text{if } -\lambda \leq x_k \leq \lambda, \\ x_k + \lambda, & \text{if } x_k < -\lambda. \end{cases}$$

其中, 如果 $\|x\|_1 \leq 1$, 则 $\lambda = 0$; 否则 λ 为下述方程的解

$$\sum_{k=1}^n \max\{|x_k| - \lambda, 0\} = 1.$$