1 1

（1）

$$f(x)=x_1^2+x_2^2+2x_2+5$$

$$\nabla f(x)=(2x_1,2x_2+2)^T$$

在$x^{(1)}=(2,0)^T$处，生效的约束为$x_2\geq 0$，于是

$$M=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P=I-M^T(MM^T)^{-1}M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\nabla f\left(x^{(1)}\right)=(4,2)^T$，$d^{(1)}=-P\nabla f\left(x^{(1)}\right)=[-4,0]^T$，步长

$$t_{\max}^{(1)}=\min\left\{-\frac{(-1,2)\cdot(2,0)^T}{(-1,2)\cdot(-4,0)^T},-\frac{(1,0)\cdot(2,0)^T}{(1,0)\cdot(-4,0)^T}\right\}=0.5$$

由线搜索知$t^{(1)}=0.5$，于是$x^{(2)}=x^{(1)}+t^{(1)}d^{(1)}=(0,0)^T$。

此时全部约束生效，于是

$$M=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

此约束下不存在可行的下降方向。

可以验证，$x_1=0,x_2=0$就是此约束优化问题的全局最优解，$f_{\min}=5$。

（2）

$$f(x)=x_1^2+x_1x_2+2x_2^2-6x_1-2x_2-12x_3$$

$$\nabla f(x)=(2x_1+x_2-6,4x_2+x_1-2,-12)^T$$

在$x^{(1)}=(1,0,1)^T$处，生效的不等式约束为$x_2\geq 0$，于是

$$M=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$P=I-M^T(MM^T)^{-1}M=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & -0.5\\ 0 & 0 & 0\\ -0.5 & 0 & 0.5\end{bmatrix}$$

$\nabla f\left(x^{(1)}\right)=(-4,-1,-12)^T$，$d^{(1)}=-P\nabla f\left(x^{(1)}\right)=[-4,0,4]^T$

$$t_{\max}^{(1)}=\min\left\{-\frac{(1,-2,0)\cdot(1,0,1)^T+3}{(1,-2,0)\cdot(-4,0,4)^T},-\frac{(1,0,0)\cdot(1,0,1)^T}{(1,0,0)\cdot(-4,0,4)^T}\right\}=\frac{1}{4}$$

由线搜索确定步长为$t^{(1)}=\frac{1}{4}$，$x^{(2)}=x^{(1)}+t^{(1)}d^{(1)}=(0,0,2)^T$。

此时生效的不等式约束为$x_1\geq 0,x_2\geq 0$，于是

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$P=I-M^T(MM^T)^{-1}M=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\nabla f\left(x^{(2)}\right)=(-6,-2,-12)^T$,

$$w^{(2)}=(MM^T)^{-1}M\nabla f\left(x^{(2)}\right)=(6,10,-12)^T$$

也就是说$u^{(k)}\geq 0$，$x^{(2)}$是K-T点。

由于原问题属于凸规划，故$x_1=0,x_2=0,x_3=2$是本题的最优解，$f_{\min}=-24$。

2 2

（1）P将∇f投影到A_1的零空间上，$P\nabla f(\hat{x})=0$表明目标函数f在$\hat{x}$的梯度与A_1的零空间正交，故投影结果是零向量。也就是说不存在一个满足现有约束的下降方向，即不存在可行下降方向。

（2）P将∇f投影到A_1的零空间上，$P\nabla f(\hat{x})=\nabla f(\hat{x})$表明目标函数$f$在$\hat{x}$的梯度在$A_1$零空间的投影就是其本身，说明$\nabla f(\hat{x})$已经在$A_1$的零空间内。也就是说，目标函数在$\hat{x}$处的最速下降方向不会破坏现有约束。

（3）P将∇f投影到A_1的零空间上，$P\nabla f(\hat{x})\neq\nabla f(\hat{x})$表明目标函数$f$在$\hat{x}$处的梯度在$A_1$零空间的投影不是零向量。也就是说，我们可以找到目标函数的一个下降方向，这个下降方向不会破坏现有约束，该下降方向为
$d=-P\nabla f(\hat{x})$。

3 3

$\hat{x}$是K-T点的充分条件是存在$w_i\geq 0$与$v_j\in\mathbb{R}$使得

$$\nabla f(\hat{x})-\sum_{i\in I}w_i\nabla g_i(\hat{x})-\sum_{j=1}^{l}v_j\nabla h_j(\hat{x})=0$$

令$v_j=p_j-q_j$，于是K-T点的充分条件可以改写为，存在$w_i\geq 0,p_j\geq 0,q_j\geq 0$使得

$$\nabla f(\hat{x})=\sum_{i\in I}w_i\nabla g_i(\hat{x})+\sum_{j=1}^{l}p_j\nabla h_j(\hat{x})+\sum_{j=1}^{l}q_j\left(-\nabla h_j(\hat{x})\right)$$

记$A_1=[\nabla g_i(\hat{x})]_{i\in I}$,$B=[\nabla h_1(\hat{x}),\nabla h_2(\hat{x}),\cdots,\nabla h_l(\hat{x})]$,$y=\left[w^T,p^T,q^T\right]^T$，K-T条件可以写为

$$-\nabla f(\hat{x})=[-A_1,-B,B]y$$

其中$y\geq 0$。

由Farkas定理，上式中y有解的充要条件是$[-A_1,-B,B]^Td\leq 0,-\nabla f(\hat{x})^Td>0$对$d$无解。也就是

$$\begin{gathered}-\nabla f(\hat{x})^Td>0\\-A_1^Td\leq 0\\-B^Td\leq 0\\B^Td\leq 0\end{gathered}$$

无解。带入A_1,B，那么

$$\begin{gathered}\nabla f(\hat{x})^Td<0\\\nabla g_i(\hat{x})^Td\geq 0,i\in I\\\nabla h_j(\hat{x})^Td=0,j=1,2,\cdots,l\end{gathered}$$

无解。所以该目标函数$\nabla f(\hat{x})^Td$的最优值为0。