

Homework2

JY Fan

1. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $l \times n$ 矩阵, $c \in \mathbb{R}^n$, 证明下列两个系统恰有一个有解:

系统1 $Ax \leq 0, Bx = 0, c^T x > 0$, 对某些 $x \in \mathbb{R}^n$.

系统2 $A^T y + B^T z = c, y \geq 0$, 对某些 $y \in \mathbb{R}^m$ 和 $z \in \mathbb{R}^l$.

2. 证明 $Ax \leq 0, c^T x > 0$ 有解. 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. 证明下列不等式组无解:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 < 0, \\ 3x_1 - x_2 < 0, \\ 17x_1 + 11x_2 > 0. \end{cases}$$

4. 证明Gordan定理: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 则 $Ax < 0$ 有解的充要条件是不存在非零向量 $y \geq 0$ 使得 $A^T y = 0$.