1 1

$$f(x_1,x_2)=|x_1|+2|x_2|$$

在$x=(1,0)$处，给定方向$g=(1,2)$

$$|y_1|+2|y_2|\geq 1+g^T\cdot(y_1-1,y_2)^T=y_1+2y_2$$

所以g是f在$(1,0)$处的一个次梯度。

$$\begin{aligned}f'(x;-g)&=\inf_{\alpha>0}\frac{f(x+\alpha y)-f(x)}{\alpha}\\&=\inf_{\alpha>0}\frac{|1-\alpha|+4|\alpha|-1}{\alpha}\\&=3\end{aligned}$$

所以$-g$不是f在$(1,0)$处的下降方向。

2 2

如果$\hat{x}\in\text{int}C$，$f(\hat{x})=0$，$\partial f(\hat{x})=\nabla f(\hat{x})=0$。

如果$\hat{x}\notin C$，取$\hat{y}$为$\hat{x}$在C上的投影，即$\hat{y}=\mathcal{P}_C(\hat{x})$，$f(\hat{x})=\|\hat{x}-\hat{y}\|_2=\|\hat{x}-\mathcal{P}_C(\hat{x})\|_2$

$$\begin{aligned}f^2(x)&=(x-\mathcal{P}_C(x))^T(x-\mathcal{P}_C(x))\\f(x)\nabla f(x)&=x-\mathcal{P}_C(x)\\\partial f(\hat{x})=\nabla f(x)&=\frac{x-\mathcal{P}_C(x)}{\|x-\mathcal{P}_C(x)\|_2}\end{aligned}$$

如果$\hat{x}\in\partial C$，$f(\hat{x})=0$，对于次梯度g需要满足

$$f(y)\geq f(\hat{x})+g^T(y-\hat{x}),\forall y$$

如果$y\in C$，有$g^T(y-\hat{x})\leq 0$。如果$y\notin C$，有$\|\hat{x}-y\|_2\geq g^T(y-\hat{x})$，即$\|g\|_2\leq 1$。当$g$为零向量时，满足以上条件，也就是说零向量是$\hat{x}\in\partial C$时的一个次梯度。$f$在此处的次微分为$\{g|\|g\|_2\leq 1,g^T(y-\hat{x})\leq 0,\forall y\in C\}$。

综上所述，f在$\hat{x}$处的次梯度为:

$$\begin{cases}0 & ,f(\hat{x})=0\\\frac{\hat{x}-\mathcal{P}_C(\hat{x})}{\|\hat{x}-\mathcal{P}_C(\hat{x})\|_2} & ,f(\hat{x})>0\end{cases}$$

f在$\hat{x}$处的次微分为

$$\partial f=\begin{cases}\{0\} & ,f(\hat{x})=0,\hat{x}\in\text{int}C\\\left\{g\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\|g\|_2\leq 1,g^T(y-\hat{x})\leq 0,\forall y\in C\right\} & ,f(\hat{x})=0,\hat{x}\notin\text{int}C\\\left\{\frac{\hat{x}-\mathcal{P}_C(\hat{x})}{\|\hat{x}-\mathcal{P}_C(\hat{x})\|_2}\right\} & ,f(\hat{x})>0\end{cases}$$