



北京交通大学

图像处理与机器学习

Digital Image Processing and Machine Learning

主讲人：黄琳琳

电子信息工程学院



第二章 图像增强

◆ 频域增强

- 二维离散傅里叶变换定义
- 二维离散傅里叶变换性质
- 图像滤波器



二维离散傅里叶变换

➤ 离散傅里叶变换主要性质

- 平移特性
- 旋转特性
- 尺度特性
- 卷积特性
- 相关特性
- 分离特性



二维离散傅里叶变换

► 平移特性

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

$$f(x, y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N})} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

$$u_0 = \frac{M}{2}, v_0 = \frac{N}{2} \quad e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{(x+y)}$$

$$f(x, y)(-1)^{(x+y)} \Leftrightarrow F(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2})$$



二维离散傅里叶变换

➤ 旋转特性

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad u = \gamma \cos \phi, v = \gamma \sin \phi$$

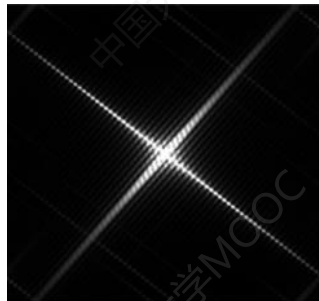
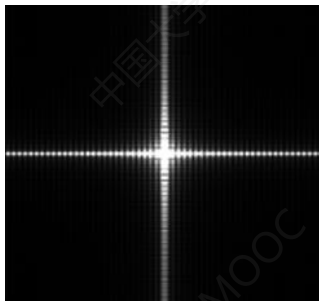
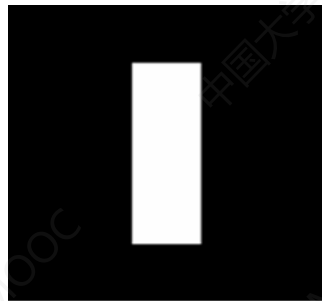
$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\gamma, \phi + \theta_0)$$

在空间域图像**旋转** θ_0 ， 频谱同样**旋转** θ_0



二维离散傅里叶变换

➤ 旋转特性 $f(r, \theta + \theta_0) = F(\gamma, \phi + \theta_0)$





二维离散傅里叶变换

➤ 尺度变换 (缩放)

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v)$$

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F(u/a, v/b)$$



二维离散傅里叶变换

➤ 卷积性质

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

$$h(x, y) \Leftrightarrow H(u, v)$$

$$f(x, y) \otimes h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \times H(u, v)$$

$$f(x, y) \times h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \otimes H(u, v)$$

✓ 空间域卷积对应频域乘积

✓ 空间域乘积对应频域卷积



二维离散傅里叶变换

➤ 相关性质

函数 $f(x,y)$ 和函数 $h(x,y)$ 的相关性，定义：

$$f(x,y) \circ h(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m,n) h(x+m, y+n) \quad f^* \text{ 是 } f \text{ 复共轭} \quad f \text{ 是实函数, 则 } f^* = f$$

$$f(x,y) \circ h(x,y) \Leftrightarrow F^*(u,v) H(u,v)$$

$$f^*(x,y) h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) \circ H(u,v)$$



二维离散傅里叶变换

➤ 相关性质 $f(x, y) \circ h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v)H(u, v)$

图像相关性运算可用于感兴趣区域匹配



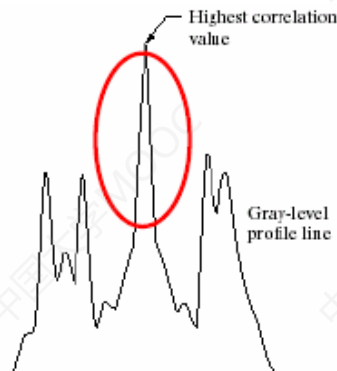
$f(x, y)$



$h(x, y)$



计算相关性



匹配位置



二维离散傅里叶变换

➤ 分离性质

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

$$F(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} \left[\frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \right]$$

一维DFT

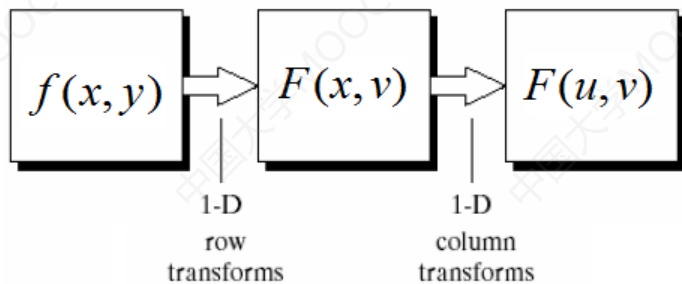
$$F(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} F(x, v)$$

一维DFT

二维DFT可以通过一维DFT实现



二维离散傅里叶变换



- ✓ 先计算每一行的一维DFT
- ✓ 再计算每一列的一维DFT

快速傅里叶变换，FFT



谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事和同行的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！