

# 계산과학2

노현민-김태원 조

2023년 9월 28일

## 요 약

Ewin Tang의 2023년 Parc City Mathematics Institute 대학원생 대상 강의 *Quantum and quantum-inspired linear algebra*(<https://ewintang.com/pcmi/>)를 중심으로 블록인코딩, QSVT, 양자 시뮬레이션, 양자 선형대수의 개념을 익힌다.

---

## 차 례

차 례	2
제 0 장 기초 양자역학	3
0.1 에르미트 연산자 . . . . .	3
0.2 스핀과 파울리 행렬 . . . . .	3
제 1 장 블록-인코딩	5
1.1 블록-인코딩 . . . . .	6
제 2 장 양자 특잇값 변환	8
제 3 장 다항식에 의한 근사	9
제 4 장 양자 선형대수	10
제 5 장 양자적 영향상의 알고리즘	11

## 기초 양자역학

## 0.1 에르미트 연산자

양자역학에 따르면 우주는 복소 공간이다. 하지만 우리의 직관 혹은 실험 및 관측 결과는 실수여야 한다. 그래서 우리가 측정할 수 있는 대상인 관측량을 표현하는 수학적 도구는 이들 두 공간을 잘 이어줘야 한다. 그것이 바로 **에르미트 연산자**다. 선형 연산자  $M$ 은 다음 성질을 만족하는 경우 에르미트 연산자다.

$$M = M^\dagger$$

관측량은 관측량을 나타내는 연산자의 고윳값과 대응하는데, 요컨대 에르미트 연산자의 고윳값은 모두 실수다. 임의의 에르미트 연산자  $L$ 과 고윳값  $\lambda$ 와 고유벡터  $|\lambda\rangle$ 에 대해 아래가 성립한다.

$$\begin{aligned} L|\lambda\rangle &= \lambda|\lambda\rangle \\ \Rightarrow \langle\lambda|L^\dagger &= \langle\lambda|\lambda^* \\ \Rightarrow \langle\lambda|L &= \langle\lambda|\lambda^* \\ \Rightarrow \langle\lambda|L|\lambda\rangle &= \langle\lambda|\lambda|\lambda\rangle \text{ \& } \langle\lambda|L|\lambda\rangle = \langle\lambda|\lambda^*|\lambda\rangle \\ \Rightarrow \langle\lambda|\lambda|\lambda\rangle - \langle\lambda|\lambda^*|\lambda\rangle &= 0 \\ \Rightarrow \lambda = \lambda^* &\implies \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

또한 명확히 구분할 수 있는 결과를 표현하는 고유벡터는 서로 다른 고윳값을 가져야 한다. 다시 말해 상이한 대상에 대해 상이한 실험 결과가 보증되어야 한다.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 에 대해 아래가 성립한다.

$$\begin{aligned} L|\lambda_1\rangle &= \lambda_1|\lambda_1\rangle \text{ \& } L|\lambda_2\rangle = \lambda_2|\lambda_2\rangle \\ \Rightarrow \langle\lambda_1|L|\lambda_2\rangle &= \lambda_1\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle \text{ \& } \langle\lambda_1|L|\lambda_2\rangle = \lambda_2\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle \\ \Rightarrow 0 &= (\lambda_1 - \lambda_2)\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle \implies \langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0 \end{aligned}$$

즉 두 고유벡터는 직교한다.

## 0.2 스핀과 파울리 행렬

이를 비롯 에르미트 연산자는 양자역학적인 세계와 우리의 관측 및 실험을 적절하게 잇는 좋은 성질을 여럿 지닌다. 여기서 우리가 관측하고자 하는 주요 대상은 바로 전자<sup>electron</sup>의 운동이다. 전자의 운동을 설명하는 데는 일련의 변수가 필요하다. 위치 좌표와 별개로 전자는 **스핀**이라는 부가적인 변수 혹은 자유도를 지닌다.

스핀이란 완전히 양자역학적인 개념으로, 고전 역학 및 우리의 직관에 대응되는 개념을 찾기 어

럽다. 거칠게 스핀은  $x, y, z$  축에 따라 아래처럼 구성된다고 할 수도 있다.

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$$

위와 같은 스핀의 성분을 일종의 연산자로 보면, 고유벡터와 고유값이 존재할 것이다. 이를테면  $\sigma_z$ 는 아래와 같은 연산자다.

$$\begin{aligned}\sigma_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= +1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

여기서 고유값  $\pm 1$ 은  $(1, 0), (0, 1)$ 에 대한  $\sigma_z$ 의 관측 결과다. 그렇다면  $\sigma_z$ 는 어떻게 생겼을까?

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \sigma_{z11} & \sigma_{z12} \\ \sigma_{z21} & \sigma_{z22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \sigma_{z11} & \sigma_{z12} \\ \sigma_{z21} & \sigma_{z22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned} \Rightarrow \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

여기서  $(1, 0), (0, 1)$ 을  $|0\rangle, |1\rangle$ 로 표기하여 상태  $|A\rangle$ 를 일반화하면 아래와 같다.

$$|A\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$$

여기서  $\alpha_1, \alpha_2$ 는 이른바 진폭이며, 이를 제공한 것이 바로 확률이다. 따라서 임의의  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ 는 아래와 같은 보른 규칙을 만족해야 한다.

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = 1$$

그리하여  $|0\rangle, |1\rangle$ 의 일차결합으로 아래와 같은 벡터를 나타낼 수 있다.

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle, \quad |l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

$\sigma_x$ 가 고유값  $\pm 1$ 에 대해 위와 같은  $|r\rangle, |l\rangle$ 을 고유벡터로 지닌다고 하면,  $\sigma_x$ 는 아래와 같을 것이다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x11} & \sigma_{x12} \\ \sigma_{x21} & \sigma_{x22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_{x11} & \sigma_{x12} \\ \sigma_{x21} & \sigma_{x22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_2$ 를  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 가 아니라  $\pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ 로 일반화하면  $\sigma_y$ 를 얻을 수 있다. 이들 스핀 연산자를 모두 모은 것이 바로 **파울리 행렬**이다.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

또한 이때 스핀을 제 전자로부터 고립시켜 파울리 행렬로 구성한 것이 바로 **큐비트**다.

## 제 1 장

### 블록-인코딩

양자 계(quantum systems)의 시뮬레이션은 양자 컴퓨터 개발의 주요 동기 가운데 하나다. 이들 양자 계 시뮬레이션 가운데 가장 간결한 것이 이른바 **해밀토니언 시뮬레이션**이다.

**해밀토니언**은 자신의 환경과 상호작용하는 관측량 혹은 파울리 행렬들의 텐서곱  $E_a$ 에 그러한 상호작용의 강도를 결정하는  $\lambda_a$ 를 곱한 것의 총합  $H$ 로 볼 수 있다.

$$H = \sum_{a=1}^m \lambda_a E_a$$

그리고 해밀토니언 시뮬레이션은 아래와 같이 정의되는 문제다.

**문제 1.1.**  $\|U - e^{iHt}\| \leq \epsilon$ 이도록  $e^{-iHt}$ 에 가까운 유니터리  $U$ 를 구현하는 알고리즘을 찾아라.

우선 **유니터리**와  $e^{-iHt}$ 라는 표기가 무슨 뜻인지 알 필요가 있다. 시간  $t$ 에 상태  $|\psi\rangle$ 에 있는 닫힌 계가 있으며  $|\psi\rangle$ 가 특정한 시간  $t$ 에  $|\psi\rangle$ 였다는 사실을  $|\psi(t)\rangle$ 로 표기하자. 초기 상태  $|\psi(0)\rangle$ 에서 계의 시간이 전개되어  $|\psi(t)\rangle$ 에 이르렀다는 사실은 아래처럼 나타낸다.

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle$$

앞서 언급했듯 직교성으로 인해 2개의 다른 기저 벡터는 2개의 구분 가능한 상태를 나타낸다. 이처럼 구분 가능한 두 개의 상태를  $|\psi(0)\rangle, |\phi(0)\rangle$ 이라고 하자.

$$\langle\psi(0)|\phi(0)\rangle = 0$$

임의의 시간이 흐른 이후에도 이 둘은 구분될 것이다. 이런 성질을 만족하는 것이 유니터리  $U$ 다.

$$\langle\psi(t)|\phi(t)\rangle = 0 \Rightarrow \langle\psi(0)|U^\dagger(t)U(t)|\phi(0)\rangle = 0 \Rightarrow U^\dagger U = I$$

유니터리 변환은  $t = \epsilon = 0$ 인 경우 그냥  $I$ 다. 그런데  $\epsilon$ 이 극미량이면 아래처럼 쓸 수 있다.

$$U(\epsilon) = I - i\epsilon H, \quad U^\dagger(\epsilon) = I + i\epsilon H^\dagger$$

극소 시간  $t = \epsilon$ 으로 특정하여 시간 전개식을 다시 쓰면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} |\psi(\epsilon)\rangle &= |\psi(0)\rangle - i\epsilon H |\psi(0)\rangle \Rightarrow \frac{|\psi(\epsilon)\rangle - |\psi(0)\rangle}{\epsilon} = -iH |\psi(0)\rangle \\ &\Rightarrow i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \\ &\Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle \end{aligned}$$

정리하면, 해밀토니언 시뮬레이션은 문제는 말 그대로 해밀토니언을 시뮬레이션하는 문제다. 대표적인 해법은 **트로터 근사**다. 충분히 큰  $r$ 에 대해 아래가 성립한다.

$$e^{-iHt} \approx \left( e^{-iE_1 t/r} e^{-iE_2 t/r} \dots e^{-iE_m t/r} \right)^r$$

여기서  $m = \frac{1}{\epsilon}$ 이다. 따라서 이 근사를 구현하기 위해서는  $\frac{1}{\epsilon}$ 에 비례하는 게이트가 필요하다. 즉 게이트 복잡도가  $\text{poly}(1/\epsilon)$ 이다. 결코 최적해가 아니다. 이후 개선된 알고리즘들이 나타났으며 이들은 아래 프레임워크로 이어진다.

- (i) “블록-인코딩”이라는 유형의 양자 회로를 정의한다.
- (ii)  $\lambda_a, E_a$ 가 주어질 때  $H$ 의 효율적인 블록-인코딩을 구성할 수 있다는 사실을 보인다.
- (iii)  $H$ 의 블록-인코딩을 적게 사용하여  $e^{-iHt}$ 의 (근사의) 블록-인코딩을 취할 수 있다는 사실을 보인다.
- (iv) 이 블록-인코딩을 사용해 상태에 대한 근사에 적용한다.

## 1.1 블록-인코딩

**정의 1.1.**  $A \in \mathbb{C}^{r \times c}$ 가 주어질 때,  $U \in \mathbb{C}^{d \times d}$ 는  $U$ 가  $\mathcal{O}(Q)$  게이트로 구현가능하고 항등행렬의 첫  $r$  열과  $c$ 열인  $B_{L,1} \in \mathbb{C}^{d \times r}, B_{R,1} \in \mathbb{C}^{d \times c}$ 에 대해

$$B_{L,1}^\dagger U B_{R,1} = A \quad (1.1)$$

를 만족하면  $A$ 의  $Q$ -블록 인코딩이라고 부른다. 다시 말해 아래와 같다.

$$U = \begin{pmatrix} A & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

여기서  $\cdot$ 은  $U$ 의 임의의 원소를 나타낸다.

여기서  $d, r, c$ 를  $2^n$ 으로 고려하면 위 항들을 큐비트로 받아들일 수 있다.

$$(|0\rangle^{\otimes a_L} \otimes I) U (|0\rangle^{\otimes a_R} \otimes I) = A \quad (1.2)$$

즉 블록-인코딩은 유니타리 양자 회로의 일반화다.

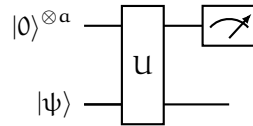


그림 1.1: 기본적인 블록-인코딩 회로.  $U$ 가 행렬  $A \in \mathbb{C}^{r \times r}$ 의 블록-인코딩이라면 첫 번째 와이어의 측정 결과가  $|0\rangle^{\otimes a}$ 인 경우 회로의 출력은  $A|\psi\rangle$ 다.

**따름정리 1.1.** 유니타리  $U$ 를  $Q$  게이트로 구현하는 양자 회로는  $U$ 의  $Q$ -블록 인코딩이다.

$|\psi\rangle \mapsto U|\psi\rangle$ 와 같은 사상을 위해 유니타리  $U$ 를 구현하는 회로에 대해,  $A$ 의 블록-인코딩 또한  $|\psi\rangle \mapsto A|\psi\rangle$ 와 같은 사상을 수행하기 위해 쓰일 수 있다. 물론 실패할 확률이 존재하지만, 이는 유니타리 회로가 제공하는 것보다 더 일반적인 유형의 선형대수학적 연산을 수행할 수 있도록 한다.

**따름정리 1.2.**  $A \in \mathbb{C}^{r \times c}$ 의  $Q$ -블록 인코딩  $U \in \mathbb{C}^{d \times d}$ 와 상태  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^c$ 가 주어질 때, 상태  $\frac{A|\psi\rangle}{\|A|\psi\rangle\|}$ 를  $\mathcal{O}(Q)$  게이트와  $\|A|\psi\rangle\|^2$ 의 확률로 생산하는 양자 회로가 존재한다.

*Proof.* 그림 1.1상의 회로를 보라. 우리는 상태  $|\psi\rangle$ 를 취해  $|0\rangle$ 으로 초기화된  $a_R$  큐비트를 더한다. 그런 다음, 블록-인코딩  $U$ 를 적용하고 첫  $a_L$  큐비트를 측정한다. 이들 모두 0이라는 결과를 지닌다면, 방정식 1.2에 의해 최종 상태는  $A|\psi\rangle$ 다. 이는 확률  $\|A|\psi\rangle\|^2$ 로 일어난다.  $\square$

## 제 2 장

---

### 양자 특잇값 변환



### 제 3 장

---

#### 다항식에 의한 근사

## 제 4 장

---

### 양자 선형대수

## 제 5 장

---

### 양자적 영향상의 알고리즘