Quantum Algorithms (Childs) 학습일지

김태원

2023년 9월 19일

제 1 장

선형대수

1.1 스펙트럼 이론

스펙트럼spectral 이론은 선형 연산자의 구조를 파악하기 위한 개념이다. 벡터공간 V에 대해 아래와 같은 선형변환이 존재하여 자기 자신과 곱할 수도 있고 제곱이나 다항식을 취할 수도 있다고 하자.

$$A : V \to V$$

스펙트럼 이론은 연산자를 작은 부분으로 나눠 각 부분을 따로 분석하자는 발상이다. 아래와 같은 식이 있다고 하자.

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

여기서 $A : V \to V$는 선형변환이고 x_n은 시간 n상의 계가 지니는 상태다. 초기 상태 x_0이 주어질 때 시간 n상의 상태 x_n을 알고자 한다거나 x_n의 장기간 행태를 분석하고자 할 수 있다. 물론 $x_n = A^n x_0$이다. 하지만 n이 조금만 커져도 $A^n x_0$을 계산하기 어렵다. 이에 대한 도구가 바로 **고윳값***eigenvalues*과 **고유벡터**다. 스칼라 λ가 존재하여 아래를 만족한다고 하자.

$$Ax_0 = \lambda x_0$$

그렇다면 아래가 성립하며 λ는 스칼라이기에 계산이 어렵지 않다.

$$A^n x_0 = \lambda^n x_0$$

정의 1.1. 스칼라 λ는 0이 아닌 벡터 $v \in V$가 존재하여 아래를 만족하는 경우

$$Av = \lambda v$$

연산자 $A : V \to V$의 **고윳값**이라고 하며 v는 A의 **고유벡터**라고 한다.

λ가 고윳값이라는 사실을 안다면 고유벡터를 어렵지 않게 찾을 수 있다. 그냥 아래

를 풀면 된다.

$$
\begin{aligned}
&Ax = \lambda x \\
\Leftrightarrow\ &(A - \lambda I)x = 0
\end{aligned}
$$

정의 1.2. A의 스펙트럼 $\sigma(A)$는 A의 모든 고윳값의 집합이다.

제 2 장

기초

2.1 양자 데이터

큐비트는 복소벡터공간상의 ℓ_2-정규화 벡터로 나타낼 수 있는 상태다. 이를테면 n 큐비트의 상태는 아래처럼 적는다.

$$|\psi\rangle = \sum_{x\in\{0,1\}^n} a_x |x\rangle$$

이때 ℓ_2-정규화 벡터란 $a_x \in \mathbb{C}$가 아래를 만족한다는 뜻이다.

$$\sum_x |a_x|^2 = 1$$

상태 $|x\rangle$의 기저를 계산기저*computational basis*라고 부른다고 한다. 군 G에 대해 $g \in G$에 대응하는 기저 상태를 $|g\rangle$라고 나타내고, 군에 대한 임의의 중첩은 아래처럼 나타낸다.

$$|\phi\rangle = \sum_{g\in G} b_g |g\rangle$$

양자컴퓨터가 상태 $|\psi\rangle$와 $|\phi\rangle$를 저장할 때 총 상태는 이들 두 상태의 텐서곱으로 아래처럼 나타낼 수 있다.

2.2 양자 회로

양자 상태에 대해 가할 수 있는 연산은 정규화된 상태에서 정규화된 상태로 사상하는 것이 있다. 이를 유니타리 연산자 U라고 부르고 U는 아래를 만족한다.

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I$$

2.3 보편 게이트 집합

원리상 n 큐비트에 대한 유니타리 연산은 모두 하나 혹은 두 개의 큐비트로 구성된 게이트만으로 구현할 수 있다. 따라서 이들 하나 혹은 두 개의 큐비트로 구성된 게이트의 집합은 보편적이라고 한다.

회로는 유니타리 연산에 적절하게 근사해야 한다. 게이트 $U_1, U_2, \ldots, U_t$로 구성된 회로는 아래를 만족하는 경우 U에 정밀도 ϵ으로 근사한다.

$$\|U - U_t \cdots U_2 U_1\| \leq \epsilon$$

여기서 $\| \cdot \|$은 노름 가운데 하나로 $\|U - V\|$가 작을 때 U를 V와 구분하기 어려워야 한다는 조건을 지닌다. 이런 노름 가운데 하나로 스펙트럼spectral 노름을 꼽을 수 있다.

$$\|A\| := \max_{|\phi\rangle} \frac{\|A\,|\psi\rangle\,\|}{\|\,|\psi\rangle\,\|}$$

여기서 $\|\,|\psi\rangle\,\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$는 $|\psi\rangle$의 2-노름을 나타낸다. 스펙트럼 노름은 A의 최대 특잇값singular value으로 볼 수 있다. 벡터를 최대한 늘릴 수 있는 행렬로 생각하면 된다.