Introduction to Quantum Information Science
학습일지

김태원

최초 작성 : 2023년 8월 29일
최근 편집 : 2023년 8월 30일

차 례

차 례 **2**

제 1 장 양자역학 **3**

제 1 장

양자역학

파인만Richard Feynman이 말하길 이중슬릿double slit 실험은 양자역학을 전부 요약한다.

광자photons를 두 개의 슬릿slit을 지닌 벽에 하나씩 쏜다고 하자. 두 개의 슬릿 모두 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 확률을 P, 1번 슬릿만 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 확률을 P_1, 2번 슬릿만 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 확률을 P_2라고 하자. 확률론에 따르면 당연히 $P = P_1 + P_2$다. 그런데 실험 결과에 따르면 $P \neq P_1 + P_2$다. 다시 말해 자연스러운 확률론은 자연의 현상을 설명하지 못한다.

고전적인 확률론이 자연을 충분하게 설명하지 못하는데도 자연스러워 보이는 이유는 **결어긋남**decoherence이라는 현상에서 비롯한다. 이를테면 상자를 열었을 때 슈뢰딩거의 고양이가 생과 사의 중첩*superposition*으로 나타나지 않는다. 고양이가 제 환경과 끊임없이 상호작용하기 때문이다. 고양이와 환경 간의 상호작용은 고양이 계system의 정보를 누설한다. 반면 양자 중첩은 입자나 입자들의 군이 환경과 고립*isolated*될 때 일어난다.

똑똑한 물리학자들이 이중슬릿 같은 실험을 통해 관찰한 바, 자연은 고전적인 확률 $P \in [0, 1]$이 아니라 어떤 파동함수를 따른다. 그리고 이런 파동함수를 포착하는 개념이 바로 **진폭amplitude** $\alpha \in \mathbb{C}$다. 양자역학에서 확률은 진폭을 사용해 **보른 규칙Born Rule**으로 정의된다. 보른 규칙은 보른Max Born이 양자계의 파동함수를 아우르는 슈뢰딩거 방정식의 해를 해석할 수 있는 유일한 방법으로 1926년에 제시한 공리다.

$$P = |\alpha|^2 = \text{Real}(\alpha)^2 + \text{Imaginary}(\alpha)^2 \tag{1.1}$$

진폭으로 이중슬릿 실험의 결과를 다시 확인하겠다. 두 슬릿 모두 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 진폭을 α, 1번 슬릿만 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 진폭을 α_1, 2번 슬릿만 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 진폭을 α_2라고 하자. 이때 등식

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$는 모순을 유도하는가? $\alpha_1 = a_1 + b_1 i, \alpha_2 = a_2 + b_2 i$에 대해

$$
\begin{aligned}
& \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \\
\Rightarrow\ & P = |\alpha|^2 \qquad\qquad [\text{보른 규칙}] \\
& \ = |\alpha_1 + \alpha_2|^2 \\
& \ = \mathrm{Re}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \mathrm{Im}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \\
& \ = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \\
& \ = (a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2) + (b_1^2 + 2b_1 b_2 + b_2^2) \\
& \ = (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) \\
& \ = \mathrm{Re}(\alpha_1)^2 + \mathrm{Im}(\alpha_1)^2 + \mathrm{Re}(\alpha_2)^2 + \mathrm{Im}(\alpha_2)^2 + \overline{\alpha_1}\alpha_2 + \alpha_1\overline{\alpha_2} \\
& \ = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \overline{\alpha_1}\alpha_2 + \alpha_1\overline{\alpha_2}
\end{aligned}
$$

이때 진폭이 복소수로 정의되기에 α가 음수일 수 있으므로 모순이 유도되지 않는다는 사실을 아래처럼 나타낼 수 있다.

$$
\alpha_1 := \frac{1}{2}, \alpha_2 := -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha_1|^2 = \frac{1}{4}, |\alpha_2|^2 = \frac{1}{4} \\ |\alpha = \alpha_1 + \alpha_2|^2 = 0 \end{cases}
$$

이처럼 두 상태의 진폭이 서로 소거할 수도 있다. **간섭**interference이라는 현상이다. 간섭은 간단한 선형대수학으로 설명될 수 있다. 우선 2-노름norm $\alpha^2 + \beta^2 = 1$을 충족하는 벡터 (α, β)가 아래와 같은 원을 형성한다는 사실에 주목한다. 2-노름을 유클리드 노

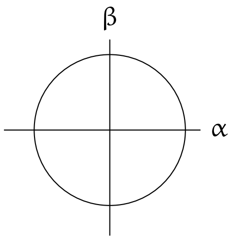

그림 1.1: 유클리드 노름

름Euclidean norm이라고 부르기도 한다. 임의의 α, β에 대해 위와 같은 원이 형성되기에 한 유클리드 노름 단위 벡터를 다른 유클리드 노름 단위 벡터로 사상하는maps to 행렬 혹은 변환이 존재할 수 있다. 이를 **유니타리 행렬**unitary matrix이라고 부른다. 또한 여기서 '유클리드 노름 단위 벡터'가 바로 **큐비트**qubit다.

물리학자들은 디락Paul Dirac이 도입한 브라-켓bra-ket 표기법으로 큐비트를 나타낸다.

아래 같은 켓$_{\text{ket}}$ $|\psi\rangle$에 대해

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

α는 $|0\rangle$이라는 결과에 대한 진폭이고 β는 $|1\rangle$이라는 결과에 대한 진폭이다. 브라$_{\text{bra}}$ $\langle\psi|$는 아래와 같다.

$$\langle\psi| = \overline{\alpha}\langle 0| + \overline{\beta}\langle 1| = \begin{pmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\beta}\end{pmatrix}$$

이에 노름 $\|\psi\|^2$가 자연스럽게 정의될 수 있다.

$$\|\psi\|^2 = \begin{pmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\beta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

내적 $\langle\psi|\phi\rangle$는 아래 성질을 만족한다.

$$\begin{aligned}\langle\psi|\phi\rangle &= \begin{pmatrix}\overline{\alpha_1} & \overline{\beta_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}\\ &= \overline{\alpha_1}\alpha_2 + \overline{\beta_1}\beta_2\\ &= \overline{\alpha_1\overline{\alpha_2}} + \overline{\beta_1\overline{\beta_2}}\\ &= \begin{pmatrix}\overline{\overline{\alpha_2}} & \overline{\overline{\beta_2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\alpha_1}\\ \overline{\beta_2}\end{pmatrix} = \overline{\langle\phi|\psi\rangle}\end{aligned}$$

이에 행렬을 45° 즉 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전하며 노름을 보존하는 아래 같은 유니타리 행렬이 있다.

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$|0\rangle$를 위 유니타리 행렬로 변환한다.

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \tag{1.2}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$을 다시 위 유니타리 행렬로 변환한다.

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |1\rangle$$

즉 무작위 상태 $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$에 위 유니타리 행렬과 같은 무작위 연산을 적용하면 $|1\rangle$이라는 결과가 결정론적deterministic으로 나온다. 여기 무작위 연산을 다시 적용하여 나타난 무작위 상태 $-\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$에 무작위 연산을 또다시 적용하면 $|0\rangle$이라는 결과가 결정론적으로 나온다. 이것이 앞서 언급한 **간섭** 개념의 선형대수학적 바탕이다.

위 유니타리 행렬에 대해 $|0\rangle$이라는 결과를 결정론적으로 도출하는 행렬은 $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$이다. 이를 **경로**path가 두 개 존재하여 한 경로는 음의 진폭 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$를 지니고 다른 경로는 양의 진폭 $\frac{1}{\sqrt{2}}$을 지닌다고 표현한다. 그리고 이 경우 두 경로는 **파괴적 간섭**destructive interference 관계에 놓인다. 반면 $|1\rangle$이라는 결과를 결정론적으로 도출하는 경로는 모두 양의 진폭 $\frac{1}{\sqrt{2}}$을 지녀 **구성적 간섭**constructive interference 관계다.

이제 그림 1.1상의 원을 다시 그린다. $\{|+\rangle, |-\rangle\}$는 아다마르 기저*Hadamard basis*라고 부

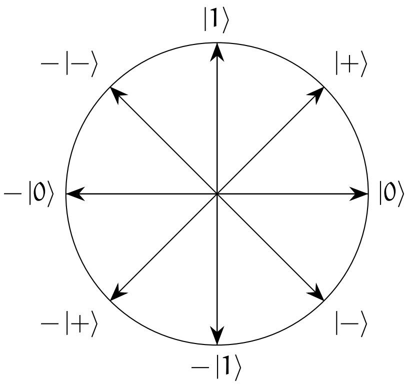

그림 1.2: 직교 행렬

르는데 앞서 예로 든 45° 회전 유니타리 변환 과정 1.2에서 이미 확인한 것들이다.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = |+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

아다마르 기저는 **아다마르 게이트**gate[1] $\mathrm{H} : \{|0\rangle, |1\rangle\} \to \{|+\rangle, |-\rangle\}$ 를 형성한다.

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = |+\rangle$$

[1]양자정보론에서는 작은 유니타리 변환을 게이트라고 부른다.

그림 1.2에서 확인할 수 있는 사실은 $\frac{\pi}{4}$ 회전과 반사만으로 여덟 가지 상태를 나타낼 수 있다는 것이다. 이는 **직교행렬**ortoogonal matrix이 지니는 성질이다.

대표적인 유니타리 행렬로는 아래 같은 것들이 있다.

항등변환	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	NOT게이트	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
상대위상조정	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	2차원 회전	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

또한 그림 1.2상의 원은 유클리드 노름을 보존한다. 따라서 임의의 유니타리 행렬 U의 복소전치행렬 $U^\dagger$를 U로 변환하면 항등행렬 I가 나온다.

$$\langle\psi|\psi\rangle = (|\psi\rangle)^\dagger |\psi\rangle = (U|\psi\rangle)^\dagger U|\psi\rangle = \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle \iff \forall |\psi\rangle, U^\dagger U = I$$

유니타리 변환은 결국 선형변환이다. 그래서 $U(c|0\rangle) = cU|0\rangle$이 임의의 상수 c에 대해 성립할 수 있다. 여기서 c가 어떤 θ에 대해 오일러 공식 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$[2]를 만족하면 **전역위상**global phase이라고 한다. 요점은 $|\psi\rangle$와 $e^{i\theta}|\psi\rangle$가 물리적으로 구분될 수 없으므로 전역위상이 관찰불가능하다는 것이다. 전역위상이 관찰가능하다는 말은 큐비트와 같은 양자계에 어떤 스칼라를 곱해서 우주 전체를 살짝 옮길 수 있다는 소리와 같다.

이에 반해 관찰 가능한 것은 바로 **상대위상**relative phase이다. 이를테면 $|+\rangle$와 $|-\rangle$라는 두 상태 간에는 상대위상차이가 관측될 수 있다. $|-\rangle$에서 $|+\rangle$에 이르는 일련의 유니타리 연산들이 존재하기 때문이다.

관찰 혹은 측정measurment과 가능한 유니타리 연산들에는 차이가 존재하는 셈이다. 유니타리 변환이 (그 복소전치행렬로 인해) 가역invertible이고 결정론적이며 (복소수 행렬이기에 모든 a에 대해 $\sqrt{a}$를 내놓을 수 있어서) 연속적인 반면, 정작 측정은 비가역irreversible이고 확률론적이고 비연속적이다.

이처럼 판이한 유니타리 변환과 측정이 소통할 수 있는 매개는 바로 유클리드 노름이다. 유니타리 변환은 유클리드 노름을 보존하고 측정은 유클리드 노름으로 결정되는 확률을 제공한다. 그리고 이러한 연속과 비연속, 결정론과 확률론의 상호작용을 극단적으로 소진하는 사고실험이 바로 튜링의 역설 혹은 **양자 제논 효과**다.

$|0\rangle$이나 $|1\rangle$로 설정된 큐비트가 있다고 하겠다. 이 큐비트에 아무런 유니타리 변환을 사용하지 않으면서 상태를 바꿀 수 있을까? 아주 작은 ϵ에 대해 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$에서 ϵ만큼 회

[2] 오일러 공식은 슈뢰딩거 방정식을 비롯해 양자역학에서 중요한 파동-삼각함수를 지수함수로 변환할 수 있도록 하는, 복소평면에서 일정한 속도로 원운동하는 물체의 위치 방정식이다.

전한 기저는 아래처럼 측정할 수 있다.

$$\begin{aligned} &|0\rangle \mapsto |v\rangle = \cos\epsilon\,|0\rangle + \sin\epsilon\,|1\rangle && |1\rangle \mapsto |w\rangle = -\sin\epsilon\,|0\rangle + \cos\epsilon\,|1\rangle \\ &\Rightarrow P(|v\rangle) = |\langle 0|v\rangle|^2 && P(|w\rangle) = |\langle 1|w\rangle|^2 \\ &\qquad = \left|\begin{pmatrix}1,0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\epsilon \\ \sin\epsilon\end{pmatrix}\right|^2 && \qquad = \left|\begin{pmatrix}0,1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin\epsilon \\ \cos\epsilon\end{pmatrix}\right| \\ &\qquad = |\cos\epsilon|^2 \approx \left(1-\frac{\epsilon^2}{2}\right)^2 && \qquad = |\cos\epsilon|^2 \approx \left(1-\frac{\epsilon^2}{2}\right)^2 \\ &\qquad = 1-\epsilon^2+\frac{\epsilon^4}{4} \approx 1-\epsilon^2 && \qquad = 1-\epsilon^2+\frac{\epsilon^4}{4} \approx 1-\epsilon^2 \end{aligned}$$

큐비트가 ϵ만큼 회전할 수 있는 확률은 ϵ이 감소할수록 증가[3]한다. 그러니 이 절차를 대략 $\frac{1}{\epsilon}$번 반복하며 매번 ϵ만큼 회전하면, $|0\rangle$을 아주 천천히 $|1\rangle$로 옮길 수 있을 것이다. 이 과정이 성공하지 않을 확률은 $1-(1-\epsilon^2) = \epsilon^2$에 $\frac{1}{\epsilon}$을 곱한 값 ϵ이라는 값이다. 그리고 ϵ은 앞서 언급한 것처럼 아주 작은 값이다. 따라서 유니타리 변환을 사용하지 않더라도 아주 높은 확률로 상태를 바꿀 수 있다.

그런데 이게 무슨 소리인가? 실생활에서 예를 들면, 홍길동이라는 사람이 $|$미혼$\rangle$이라는 상태에서 $|$기혼$\rangle$이라는 상태로 바뀔 수 있는 유니타리 변환 수준의 깔끔한 방법은 그냥 김철수와 서류상으로만 계약 결혼하는 것이다. 이 방법이 아니라면 어떻게 결혼할 확률을 높일 수 있을까? 적어도 홍길동이 김철수를 1년간 그냥 지켜보다가 어느 날 갑자기 프로포즈하는 쪽보다는 홍길동이 1년을 $\frac{1}{\epsilon}$ 정도로 아주 잘게 나눠 ϵ 만큼의 애정 표현을 반복하는 쪽이 확률적으로 나을 것이다.

다음 예는 **엘리추르-바이드만 폭탄**Elitzur-Vaidman Bomb이다. 양자 공항이 배경이다. 화물 하나에 폭탄이 존재하는 것 같은데, 폭탄이 있다면 화물을 여는 순간 폭발할 것이 분명하다. 폭탄이 폭발할 확률을 최소화할 수 있을까?

우선 $|0\rangle$을 초기 상태로 둔다. 화물 확인이라는 행동은 회전 R_ϵ으로 정의한다.

$$R_\epsilon = \begin{pmatrix}\cos\epsilon & -\sin\epsilon \\ \sin\epsilon & \cos\epsilon\end{pmatrix}$$

폭탄이 없다면, 그대로 $\cos\epsilon\,|0\rangle + \sin\epsilon\,|1\rangle$이다. 폭탄이 있다면, 폭탄은 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$을 기저로 측정된다. 다시 말해 회전-확인의 결과가 $|0\rangle$이라면 폭탄이 폭발하지 않은 것이다. 그리고 결과가 $|1\rangle$이라면 폭탄이 폭발한 것이다.

초기 상태 $|0\rangle$에 대해 화물을 한 번 확인-R_ϵ한 결과는 $\cos\epsilon\,|0\rangle + \sin\epsilon\,|1\rangle$이다. 폭탄이 존재할 때, 폭탄이 폭발할 확률 $P(1)$은 $\cos\theta\,|0\rangle + \sin\epsilon\,|1\rangle$이 $|1\rangle$로 관측될 확률과 같다.

[3]근사값의 유도에 관해서는 작은 각도 근사를 참고하라.

아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} P(1) &= |\langle b|1\rangle|^2 \\ &= \left| \begin{pmatrix} \cos\epsilon & \sin\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= |\sin\epsilon|^2 \approx \epsilon^2 \end{aligned}$$

따라서 이 과정을 대략 $\frac{\pi}{2\epsilon}$번[4] 반복하며 매번 R_ϵ을 적용하면, 존재하는 폭탄이 터지는 확률은 $\frac{\pi}{2\epsilon}\epsilon^2 = \frac{\pi}{2}\epsilon$에 불과하다. 따라서 양자 공항에서는 대단히 높은 확률로 폭탄이 폭발하지 않는다.

부록; 양자회로

그림 1.3은 $|1\rangle$로 초기 상태를 설정한 다음 두 아다마르 게이트를 적용하여 표준기저 $\{|0\rangle, \cdots, |N-1\rangle\}$상의 측정으로 종결하는 양자회로[5]다. 양자회로는 여러 큐비트에 대한 연산을 표기할 수도 있다. 그림 1.4는 이중 큐비트 게이트 U에 대해 첫 번째 큐비트로 아다마르 게이트를 적용한 다음 두 큐비트를 모두 측정하는 양자회로다.

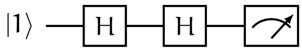

그림 1.3: 양자 회로 예제

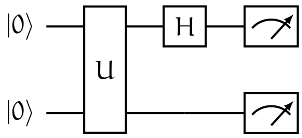

그림 1.4: 이중 양자 회로 예제

그림 1.5 좌측의 양자회로는 제어controlled 게이트를 사용한다. 첫 줄에 놓인 $\bullet - \oplus$는 제어 NOT 혹은 CNOT 게이트를 나타내고 이는 첫 비트 혹은 제어 큐비트가 $|1\rangle$이면 두 번째 큐비트를 반전flip한다. 그 다음 줄에 놓인 $\bullet - U$는 임의의 U에 대해 제어 U 게이트를 나타내며 제어 큐비트가 $|1\rangle$이면 U를 적용한다. 마지막 줄은 우측 도면과 같다.

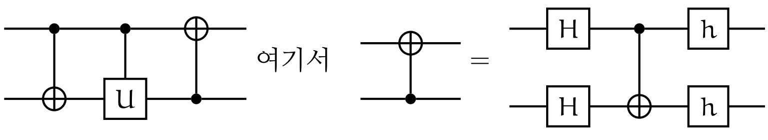

그림 1.5: 제어 양자 회로 예제

[4]여기서 $\frac{\pi}{2\epsilon}$은 90°보다 아주 약간 작은 각도로, 그림 1.2의 원에서 '$|1\rangle$' 직전에 해당한다.

[5]논리회로를 배울 때처럼 양자 게이트도 언젠간 다 외워야 한다. 위키피디아를 참고하라.