Introduction to Quantum Information Science
학습일지

김태원

최초 작성 : 2023년 8월 29일
최근 편집 : 2023년 8월 30일

차 례

제 1 장

양자역학

1.1 확률론 개요

파인만Richard Feynman에 따르면 이중슬릿double slit 실험으로 양자역학 전체를 요약할 수 있다. 광자photons를 두 개의 슬릿slit을 지닌 벽에 하나씩 쏜다고 하자. 그리고 두 개의 슬릿 모두 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 확률을 P, 1번 슬릿만 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 확률을 P_1, 2번 슬릿만 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 확률을 P_2라고 하자. 양자역학은 $P \neq P_1 + P_2$라는 실험적인 사실에 근거한다. 다시 말해 자연스러운 확률론이 자연의 현상을 설명하지 못하는 것이다.

고전 확률론이 자연을 충분하게 설명하지 못하는데도 자연스러워 보이는 것은 **결어긋남**decoherence 탓이다. 슈뢰딩거의 고양이가 생과 사의 중첩*superposition*으로 나타나지 않는 이유는 고양이가 제 환경과 끊임없이 상호작용하기 때문이다. 대상과 환경 간의 상호작용은 '고양이 계'의 정보를 누설한다. 다시 말해 양자 중첩은 입자 혹은 입자의 군이 제 환경과 고립*isolated*될 때 일어난다.

고전적인 확률론은 아래 같은 확률 개념에 기초한다.

$$P \in [0, 1]$$

그런데 이중슬릿 실험 등 똑똑한 물리학자들이 실험을 통해 관찰한 바, 자연은 확률 P가 아니라 어떤 파동함수를 따른다. 이처럼 기이한 자연을 포착하는 개념이 바로 **진폭**amplitude $\alpha \in \mathbb{C}$다. 양자역학에서 확률은 진폭을 사용해 **보른 규칙**Born Rule으로 정의된다. 보른 규칙은 보른Max Born이 1926년 양자계의 파동함수를 아우르는 미분방정식인 슈뢰딩거 방정식의 해를 해석할 수 있는 유일한 방법으로 제시한 공리다.

$$P = |\alpha|^2 = \mathrm{Real}(\alpha)^2 + \mathrm{Imaginary}(\alpha)^2 \tag{1.1}$$

진폭으로 이중슬릿 실험의 결과를 다시 확인할 수 있다. 두 개의 슬릿 모두 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 진폭을 α, 1번 슬릿만 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 진폭을 α_1, 2번 슬릿만 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 진폭을 α_2라고 하자. 기본적으로는 아래가 성립할 것이다.

$$\begin{aligned}
&\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \\
\Rightarrow\ & P = |\alpha|^2 \qquad\qquad [\text{보른 규칙}] \\
&= |\alpha_1 + \alpha_2|^2 \\
&= \mathrm{Re}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \mathrm{Im}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \\
&= (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \\
&= (a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2) + (b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2) \\
&= (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + 2(a_1a_2 + b_1b_2) \\
&= \mathrm{Re}(\alpha_1)^2 + \mathrm{Im}(\alpha_1)^2 + \mathrm{Re}(\alpha_2)^2 + \mathrm{Im}(\alpha_2)^2 + \overline{\alpha_1}\alpha_2 + \alpha_1\overline{\alpha_2} \\
&= |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \overline{\alpha_1}\alpha_2 + \alpha_1\overline{\alpha_2}
\end{aligned}$$

이때 진폭 $\alpha \in \mathbb{C}$이기에 음수일 수 있다. 예를 들어 아래가 성립한다.

$$\alpha_1 := \frac{1}{2}, \alpha_2 := -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha_1|^2 = \frac{1}{4}, |\alpha_2|^2 = \frac{1}{4} \\ |\alpha = \alpha_1 + \alpha_2|^2 = 0 \end{cases}$$

이처럼 두 상태의 진폭이 서로 소거할 수도 있다. **간섭**interference이라는 현상이다. 간섭은 기본적인 선형대수학으로 설명될 수 있다. 우선 2-노름norm $\alpha^2 + \beta^2 = 1$을 충족하는 벡터 (α, β)가 아래와 같은 원을 형성한다는 사실에 주목한다. 2-노름을 유클리드

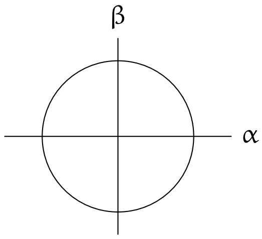

그림 1.1: 유클리드 노름

노름Euclidean norm이라고 부르기도 한다. 임의의 α, β에 대해 위와 같은 원이 형성되기에 유클리드 노름 단위 벡터를 다른 유클리드 노름 단위 벡터로 사상하는maps to 행렬이 존재하겠다. 이를 **유니타리 행렬**unitary matrix이라고 부른다. 또한 여기서 '유클리드 노

름 단위 벡터'가 바로 **큐비트**qubit다. 물리학자들은 디락Paul Dirac이 도입한 브라-켓bra-ket 표기법으로 큐비트를 나타낸다.

$$\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

α는 $|0\rangle$이라는 결과에 대한 진폭이고 β는 $|1\rangle$이라는 결과에 대한 진폭이다. 행렬을 45°, 즉 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전하는 아래 같은 유니타리 행렬이 있다고 하자.

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$|0\rangle$를 위 유니타리 행렬로 변환한다.

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \tag{1.2}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$을 다시 위 유니타리 행렬로 변환한다.

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} = |1\rangle$$

즉 무작위 상태 $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$에 위 유니타리 행렬과 같은 무작위 연산을 적용하면 $|1\rangle$이라는 결과가 결정론적deterministic으로 나온다. 여기 무작위 연산을 다시 적용하여 나타난 무작위 상태 $-\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$에 무작위 연산을 또다시 적용하면 $|0\rangle$이라는 결과가 결정론적으로 나온다. 이것이 앞서 언급한 **간섭** 개념의 선형대수학적 바탕이다.

$|0\rangle$이라는 결과를 결정론적으로 도출하는 **경로**_path_가 두 개 있고, 한 경로는 음의 진폭 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$를 지니고 다른 경로는 양의 진폭 $\frac{1}{\sqrt{2}}$을 지녀 두 경로가 **파괴적 간섭**destructive interference 관계에 놓인다. $|1\rangle$이라는 결과를 결정론적으로 도출하는 경로는 모두 양의 진폭 $\frac{1}{\sqrt{2}}$을 지녀 두 경로가 **구성적 간섭**constructive interference 관계에 놓인다.

브라-켓 표기를 더 살필 필요가 있겠다. 아래 같은 켓 $|\psi\rangle$에 대해

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$$

브라bra $\langle\psi|$는 아래와 같다.

$$\langle\psi| = \overline{\alpha}\langle 0| + \overline{\beta}\langle 1| = \begin{pmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\beta}\end{pmatrix}$$

이에 노름 $\|\psi\|^2$가 자연스럽게 정의될 수 있다.

$$\|\psi\|^2 = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

내적 $\langle\psi|\phi\rangle$는 아래 성질을 만족한다.

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\phi\rangle &= \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & \overline{\beta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \\
&= \overline{\alpha_1}\alpha_2 + \overline{\beta_1}\beta_2 \\
&= \overline{\alpha_1 \overline{\alpha_2}} + \overline{\beta_1 \overline{\beta_2}} \\
&= \overline{\begin{pmatrix} \overline{\alpha_2} & \overline{\beta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \overline{\beta_2} \end{pmatrix}} \\
&= \overline{\langle\phi|\psi\rangle}
\end{aligned}$$

이제 그림 1.1에서 그린 유클리드 노름의 원을 아래처럼 다시 나타낼 수 있다. 여기서

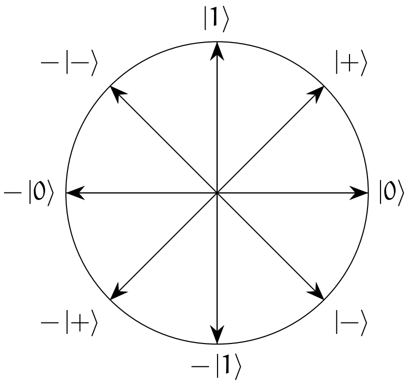

그림 1.2: 직교 행렬

$\{|+\rangle, |-\rangle\}$는 아다마르 기저*Hadamard basis*라고 부르는데 앞서 예로 든 45° 회전 유니타리 변환 과정 1.2에서 나타난 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$를 $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$로, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$를 $|-\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$로 나타낸 것이다. 그림 1.2에서 확인할 수 있는 사실은 $\frac{\pi}{4}$ 회전과 반사만으로 여덟 가지 상태를 오갈 수 있다는 것이다. 이는 **직교행렬**ortoogonal matrix이 지니는 성질이다. 이외에도 대

표적인 유니타리 행렬로는 아래 같은 것들이 있다.

$$\text{항등변환} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{NOT게이트} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{상대위상조정} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{2차원 회전} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

또한 그림 1.2상의 원은 유클리드 노름이 보존하기에 임의의 유니타리 행렬 U와 그 복소전치행렬 $U^\dagger$ 간에는 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &= (|\psi\rangle)^\dagger\,|\psi\rangle \\ &= (U\,|\psi\rangle)^\dagger U\,|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle \\ \Leftrightarrow &\forall\,|\psi\rangle\,, U^\dagger U = I \end{aligned}$$

이 원은 N차원상의 노름 보존 선형 변환이 모두 $N+1$ 차원에서 연속적인 동작으로 구현될 수 있다는 사실과, 모든 선형변환마다 같은 차원에서 제곱근을 갖게 하려면 복소수가 도입되어야 한다는 의미를 예시하기도 한다. 비슷한 맥락에서 말하자면, 유니타리 변환은 결국 선형변환이기에 $U(c\,|0\rangle) = cU\,|0\rangle$이 임의의 상수 c에 대해 성립할 수 있는데, c가 어떤 θ에 대해 오일러 공식 $e^{i\theta}+1 = \cos\theta + i\sin\theta$[1]를 만족하면 **전역위상**global phase이라고 한다.

요점은 $|\psi\rangle$와 $e^{i\theta}$가 물리적으로 구분될 수 없기에, 전역위상이 관찰불가능하다는 것이다. 전역위상이 관찰될 수 있다는 말은 큐비트와 같은 양자계에 스칼라를 곱해서 우주 전체를 스칼라에 비례해 살짝 옮길 수 있다는 소리다. 이에 반해 관찰가능한 것이 바로 **상대위상**relative phase이다. 이를테면 $|+\rangle$와 $|-\rangle$라는 두 상태 간의 상대위상차이가 관측될 수 있는 근거를 마련하는 것은 $|-\rangle$에서 $|+\rangle$에 이르는 일련의 유니타리 연산들이 존재한다는 사실이다.

[1] 오일러 공식은 슈뢰딩거 방정식을 비롯해 양자역학에서 중요한 파동-삼각함수를 지수함수로 변환할 수 있도록 하는, 복소평면에서 일정한 속도로 원운동하는 물체의 위치 방정식이다.