

Introduction to Quantum Information Science
학습일지

김태원

최초 작성 : 2023년 8월 29일

최근 편집 : 2023년 8월 30일

차 례

차 례	2
제 1 장 양자역학	3

제 1 장

양자역학

파인만Richard Feynman이 말하길 이중슬릿double slit 실험은 양자역학을 전부 요약한다.

광자photons를 두 개의 슬릿slit을 지닌 벽에 하나씩 쏜다고 하자. 두 개의 슬릿 모두 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 확률을 P , 1번 슬릿만 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 확률을 P_1 , 2번 슬릿만 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 확률을 P_2 라고 하자. 확률론에 따르면 당연히 $P = P_1 + P_2$ 다. 그런데 실험 결과에 따르면 $P \neq P_1 + P_2$ 다. 다시 말해 자연스러운 확률론은 자연의 현상을 설명하지 못한다.

고전적인 확률론이 자연을 충분하게 설명하지 못하는데도 자연스러워 보이는 이유는 **결어긋남decoherence**이라는 현상에서 비롯한다. 이를테면 상자를 열었을 때 슈뢰딩거의 고양이와 생과 사의 중첩superposition으로 나타나지 않는다. 고양이가 제 환경과 끊임없이 상호작용하기 때문이다. 고양이와 환경 간의 상호작용은 고양이 계system의 정보를 누설한다. 반면 양자 중첩은 입자나 입자들의 군이 환경과 고립isolated될 때 일어난다.

똑똑한 물리학자들이 이중슬릿 같은 실험을 통해 관찰한 바, 자연은 고전적인 확률 $P \in [0, 1]$ 이 아니라 어떤 파동함수를 따른다. 그리고 이런 파동함수를 포착하는 개념이 바로 **진폭amplitude** $\alpha \in \mathbb{C}$ 다. 양자역학에서 확률은 진폭을 사용해 **보른 규칙Born Rule**으로 정의된다. 보른 규칙은 보른Max Born이 양자계의 파동함수를 아우르는 슈뢰딩거 방정식의 해를 해석할 수 있는 유일한 방법으로 1926년에 제시한 공리다.

$$P = |\alpha|^2 = \text{Real}(\alpha)^2 + \text{Imaginary}(\alpha)^2 \quad (1.1)$$

진폭으로 이중슬릿 실험의 결과를 다시 확인하겠다. 두 슬릿 모두 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 진폭을 α , 1번 슬릿만 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 진폭을 α_1 , 2번 슬릿만 개방될 때 광자가 특정 구간에 부딪히는 진폭을 α_2 라고 하자. 이때 등식

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ 는 모순을 유도하는가? $\alpha_1 = a_1 + b_1 i, \alpha_2 = a_2 + b_2 i$ 에 대해

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 \\
\Rightarrow P &= |\alpha|^2 \quad [\text{보른 규칙}] \\
&= |\alpha_1 + \alpha_2|^2 \\
&= \text{Re}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \text{Im}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \\
&= (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \\
&= (a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2) + (b_1^2 + 2b_1 b_2 + b_2^2) \\
&= (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) \\
&= \text{Re}(\alpha_1)^2 + \text{Im}(\alpha_1)^2 + \text{Re}(\alpha_2)^2 + \text{Im}(\alpha_2)^2 + \overline{\alpha_1} \alpha_2 + \alpha_1 \overline{\alpha_2} \\
&= |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \overline{\alpha_1} \alpha_2 + \alpha_1 \overline{\alpha_2}
\end{aligned}$$

이때 진폭이 복소수로 정의되기에 α 가 음수일 수 있으므로 모순이 유도되지 않는다는 사실을 아래처럼 나타낼 수 있다.

$$\alpha_1 := \frac{1}{2}, \alpha_2 := -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha_1|^2 = \frac{1}{4}, |\alpha_2|^2 = \frac{1}{4} \\ |\alpha = \alpha_1 + \alpha_2|^2 = 0 \end{cases}$$

이처럼 두 상태의 진폭이 서로 소거할 수도 있다. **간섭**interference이라는 현상이다. 간섭은 간단한 선형대수학으로 설명될 수 있다. 우선 2-노름 $_{\text{norm}}$ $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ 을 충족하는 벡터 (α, β) 가 아래와 같은 원을 형성한다는 사실에 주목한다. 2-노름을 유클리드 노

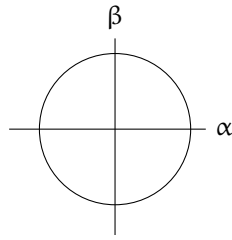


그림 1.1: 유클리드 노름

름Euclidean norm이라고 부르기도 한다. 임의의 α, β 에 대해 위와 같은 원이 형성되기에 한 유클리드 노름 단위 벡터를 다른 유클리드 노름 단위 벡터로 사상하는maps to 행렬 혹은 변환이 존재할 수 있다. 이를 **유니타리 행렬**unitary matrix이라고 부른다. 또한 여기서 ‘유클리드 노름 단위 벡터’가 바로 **큐비트**qubit다.

물리학자들은 디랙Paul Dirac이 도입한 브라-켓bra-ket 표기법으로 큐비트를 나타낸다.

켓_{ket} $|\psi\rangle$ 과 브라_{bra} $\langle\psi|$ 는 아래와 같다.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle\psi| = \bar{\alpha}\langle 0| + \bar{\beta}\langle 1| = (\bar{\alpha} \quad \bar{\beta})$$

이에 유클리드 노름 $\|\psi\|^2$ 가 자연스럽게 정의될 수 있다.

$$\|\psi\|^2 = (\bar{\alpha} \quad \bar{\beta}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

내적 $\langle\psi|\phi\rangle$ 는 아래 성질을 만족한다.

$$\begin{aligned} \langle\psi|\phi\rangle &= (\bar{\alpha}_1 \quad \bar{\beta}_1) \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \\ &= \bar{\alpha}_1\alpha_2 + \bar{\beta}_1\beta_2 \\ &= \overline{\alpha_1\alpha_2} + \overline{\beta_1\beta_2} \\ &= (\overline{\alpha_2} \quad \overline{\beta_2}) \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\beta}_1 \end{pmatrix} = \overline{\langle\phi|\psi\rangle} \end{aligned}$$

여기서 α 는 $|0\rangle$ 이라는 결과에 대한 진폭이고 β 는 $|1\rangle$ 이라는 결과에 대한 진폭이다. 따라서 상태 $|\psi\rangle$ 에서 상태 $|\phi\rangle$ 에 이르는 확률 $P(|\phi\rangle)$ 의 보른 규칙을 아래처럼 다시 쓸 수 있다.

$$P(|\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2$$

이에 행렬을 45° 즉 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 회전하며 노름을 보존하는 아래 같은 유니타리 행렬이 있다.

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$|0\rangle$ 를 위 유니타리 행렬로 변환한다.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ 을 다시 위 유니타리 행렬로 변환한다.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

즉 무작위 상태 $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ 에 위 유니타리 행렬과 같은 무작위 연산을 적용하면 $|1\rangle$ 이라는 결과가 결정론적(deterministic)으로 나온다. 여기 무작위 연산을 다시 적용하여 나타난 무작위 상태 $-\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ 에 무작위 연산을 또다시 적용하면 $|0\rangle$ 이라는 결과가 결정론적으로 나온다. 이것이 앞서 언급한 **간섭** 개념의 선형대수학적 바탕이다.

위 유니타리 행렬에 대해 $|0\rangle$ 이라는 결과를 결정론적으로 도출하는 행렬은 $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ 이다. 이를 **경로**path가 두 개 존재하여 한 경로는 음의 진폭 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 를 지니고 다른 경로는 양의 진폭 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 을 지닌다고 표현한다. 그리고 이 경우 두 경로는 **파괴적 간섭**destructive interference 관계에 놓인다. 반면 $|1\rangle$ 이라는 결과를 결정론적으로 도출하는 경로는 모두 양의 진폭 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 을 지녀 **구성적 간섭**constructive interference 관계다.

이제 그림 1.1상의 원을 다시 그린다. 여기서 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 는 아다마르 기저(Hadamard basis)

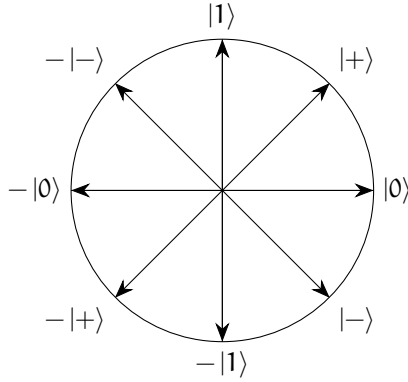


그림 1.2: 직교 행렬

라는 것인데 앞서 예로 든 45° 회전 유니타리 변환 과정 1.2에서 이미 확인한 적 있다.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = |+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

아다마르 기저는 **아다마르 게이트**¹ $H: \{|0\rangle, |1\rangle\} \rightarrow \{|+\rangle, |-\rangle\}$ 를 형성한다. 이를테면 $|0\rangle$ 에 H 를 적용한 결과는 아래와 같다.

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = |+\rangle$$

그림 1.2에서 확인할 수 있는 사실은 $\frac{\pi}{4}$ 회전과 반사만으로 여덟 가지 상태를 나타낼 수 있다는 것과 원의 방정식에 의해 유니타리 변환이 유클리드 노름을 보존한다는 것이다.

¹양자정보론에서는 작은 유니타리 변환을 게이트라고 부른다.

가령 임의의 유니타리 행렬 U 의 복소전치행렬 U^\dagger 를 U 로 변환하면 항등행렬 I 가 나온다.

$$\langle \psi | \psi \rangle = (|\psi\rangle)^\dagger |\psi\rangle = (U|\psi\rangle)^\dagger U|\psi\rangle = \langle \psi | U^\dagger U | \psi \rangle \iff \forall |\psi\rangle, U^\dagger U = I$$

유니타리 변환은 선형변환이기도 해서 $U(c|0\rangle) = cU|0\rangle$ 이 임의의 상수 c 에 대해 성립할 수 있다. 여기서 c 가 어떤 θ 에 대해 오일러 공식 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ²를 만족하면 **전역위상** **global phase**이라고 한다. 다만 $|\psi\rangle$ 와 $e^{i\theta}|\psi\rangle$ 가 물리적으로 구분될 수 없기에 전역위상은 관찰불가능하다. 전역위상이 관찰가능하다는 말은 큐비트와 같은 양자계에 어떤 스칼라를 곱해서 우주 전체를 살짝 옮길 수 있다는 소리와 같다. 이에 반해 관찰 가능한 것은 바로 **상대위상** **relative phase**이다. 가령 $|+\rangle$ 와 $|-\rangle$ 라는 두 상태 간에는 상대위상차이가 관측될 수 있는데, $|-\rangle$ 에서 $|+\rangle$ 에 이르는 일련의 유니타리 연산들이 존재하기 때문이다.

관찰 혹은 측정 **measurement**과 가능한 유니타리 연산들에는 차이가 존재하는 셈이다. 유니타리 변환이 (그 복소전치행렬로 인해) 가역 **invertible**이고 결정론적이며 (복소수 행렬이기에 모든 a 에 대해 \sqrt{a} 를 내놓을 수 있어서) 연속적인 반면, 측정은 비가역 **irreversible**이고 확률론적, 비연속적이다. 이처럼 판이한 유니타리 변환과 측정을 이어주는 것이 바로 유클리드 노름이다. 유니타리 변환은 유클리드 노름을 보존하고 측정은 유클리드 노름으로 결정되는 확률을 제공한다. 그리고 이에 따른 연속과 비연속, 결정론과 확률론의 상호작용을 극단적으로 소진하는 사고실험이 바로 튜링의 역설 혹은 **양자 제논 효과**다.

$|0\rangle$ 이나 $|1\rangle$ 로 설정된 큐비트가 있다고 하겠다. 이 큐비트에 유니타리 변환을 전혀 사용하지 않으면서 상태를 바꿀 수 있을까? 아주 작은 ϵ 에 대해 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 에서 ϵ 만큼 회전한 기저는 아래처럼 측정할 수 있다.

$$\begin{aligned} |0\rangle &\mapsto |v\rangle = \cos \epsilon |0\rangle + \sin \epsilon |1\rangle & |1\rangle &\mapsto |w\rangle = -\sin \epsilon |0\rangle + \cos \epsilon |1\rangle \\ \Rightarrow P(|v\rangle) &= |\langle 0|v\rangle|^2 & P(|w\rangle) &= |\langle 1|w\rangle|^2 \\ &= \left| \begin{pmatrix} 1, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \epsilon \\ \sin \epsilon \end{pmatrix} \right|^2 & &= \left| \begin{pmatrix} 0, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \epsilon \\ \cos \epsilon \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= |\cos \epsilon|^2 \approx \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2} \right)^2 & &= |\cos \epsilon|^2 \approx \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2} \right)^2 \\ &= 1 - \epsilon^2 + \frac{\epsilon^4}{4} \approx 1 - \epsilon^2 & &= 1 - \epsilon^2 + \frac{\epsilon^4}{4} \approx 1 - \epsilon^2 \end{aligned}$$

큐비트가 ϵ 만큼 회전할 수 있는 확률은 ϵ 이 감소할수록 증가³한다. 그러니 이 절차를 대

²오일러 공식은 슈뢰딩거 방정식을 비롯해 양자역학에서 중요한 파동-삼각함수를 지수함수로 변환할 수 있도록 하는, 복소평면에서 일정한 속도로 원운동하는 물체의 위치 방정식이다.

³근사값의 유도에 관해서는 **작은 각도 근사**를 참고하라.

약 $\frac{1}{\epsilon}$ 번 반복하며 매번 ϵ 만큼 회전하면, $|0\rangle$ 을 아주 천천히 $|1\rangle$ 로 옮길 수 있다. 이 과정이 성공하지 않을 확률은 $1 - (1 - \epsilon^2) = \epsilon^2$ 에 $\frac{1}{\epsilon}$ 을 곱한 ϵ 이다. 그리고 ϵ 은 가정에 의해 극미량이다. 따라서 유니타리 변환이 없어도 아주 높은 확률로 상태를 바꿀 수 있다.

그런데 이게 무슨 소리인가? 비유하자면, 홍길동의 $|미혼\rangle$ 상태를 $|기혼\rangle$ 상태로 바꾸는 유니타리 변환 수준의 깔끔한 방법은 당장 김철수와 서류상 혼인신고하는 것이다. 이 방법은 지금 어렵다고 할 때, 적어도 홍길동이 김철수를 1년간 그냥 지켜보다가 어느 날 갑자기 프로포즈하는 쪽보다는 홍길동이 1년을 $\frac{1}{\epsilon}$ 정도로 아주 잘게 나눠 ϵ 만큼의 애정 표현을 반복하는 쪽이 결혼 확률이 더 높을 것이다.

다음 예는 **엘리추르-바이드만 폭탄** Elitzur-Vaidman Bomb이다. 양자 공항이 배경이다. 화물 하나에 폭탄이 존재하는 것 같은데, 폭탄이 있다면 화물을 여는 순간 폭발할 것이 분명하다. 폭탄이 폭발할 확률을 최소화할 수 있을까?

우선 $|0\rangle$ 을 초기 상태로 둔다. 화물 확인이라는 행동은 회전 R_ϵ 으로 정의한다.

$$R_\epsilon = \begin{pmatrix} \cos \epsilon & -\sin \epsilon \\ \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix}$$

폭탄이 없다면, 그대로 $\cos \epsilon |0\rangle + \sin \epsilon |1\rangle$ 이다. 폭탄이 있다면, 폭탄은 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 을 기저로 측정된다. 다시 말해 회전-확인 결과 $|0\rangle$ 이라면 폭탄이 폭발하지 않은 것이다. 그리고 결과가 $|1\rangle$ 이라면 폭탄이 폭발한 것이다.

초기 상태 $|0\rangle$ 에 대해 화물을 한 번 확인- R_ϵ 한 결과는 $\cos \epsilon |0\rangle + \sin \epsilon |1\rangle$ 이다. 폭탄이 존재할 때, 폭탄이 폭발할 확률 $P(1)$ 은 $\cos \theta |0\rangle + \sin \epsilon |1\rangle$ 이 $|1\rangle$ 로 관측될 확률과 같다.

$$\begin{aligned} P(1) &= |\langle b|1\rangle|^2 \\ &= \left| \begin{pmatrix} \cos \epsilon & \sin \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= |\sin \epsilon|^2 \approx \epsilon^2 \end{aligned}$$

따라서 이 과정을 대략 $\frac{\pi}{2\epsilon}$ 번⁴ 반복하며 매번 R_ϵ 을 적용하면, 존재하는 폭탄이 터지는 확률은 $\frac{\pi}{2\epsilon} \epsilon^2 = \frac{\pi}{2} \epsilon$ 에 불과하다. 따라서 양자 공항에서는 대단히 높은 확률로 폭탄이 폭발하지 않는다.

⁴여기서 $\frac{\pi}{2\epsilon}$ 은 90° 보다 아주 약간 작은 각도로, 그림 1.2의 원에서 ‘11’ 직전에 해당한다.

부록; 양자회로

그림 1.3은 $|1\rangle$ 로 초기 상태를 설정한 다음 두 아다마르 게이트를 적용하여 표준기저 $\{|0\rangle, \dots, |N-1\rangle\}$ 상의 측정으로 종결하는 양자회로⁵다. 양자회로는 여러 큐비트에 대한 연산을 표기할 수도 있다. 그림 1.4는 이중 큐비트 게이트 U 에 대해 첫 번째 큐비트로 아다마르 게이트를 적용한 다음 두 큐비트를 모두 측정하는 양자회로다.

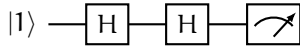


그림 1.3: 양자 회로 예제

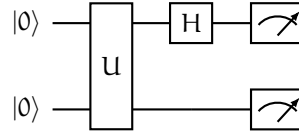


그림 1.4: 이중 양자 회로 예제

그림 1.5 좌측의 양자회로는 제어_{controlled} 게이트를 사용한다. 첫 줄에 놓인 $\bullet - \oplus$ 는 제어 NOT 혹은 CNOT 게이트를 나타내고 이는 첫 비트 혹은 제어 큐비트가 $|1\rangle$ 이면 두 번째 큐비트를 반전_{flip}한다. 그 다음 줄에 놓인 $\bullet - U$ 는 임의의 U 에 대해 제어 U 게이트를 나타내며 제어 큐비트가 $|1\rangle$ 이면 U 를 적용한다. 마지막 줄은 우측 도면과 같다.

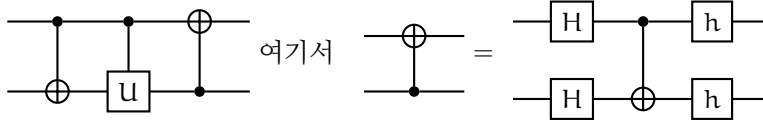


그림 1.5: 제어 양자 회로 예제

⁵논리회로를 배울 때처럼 양자 게이트도 언젠간 다 외워야 한다. [위키피디아](#)를 참고하라.