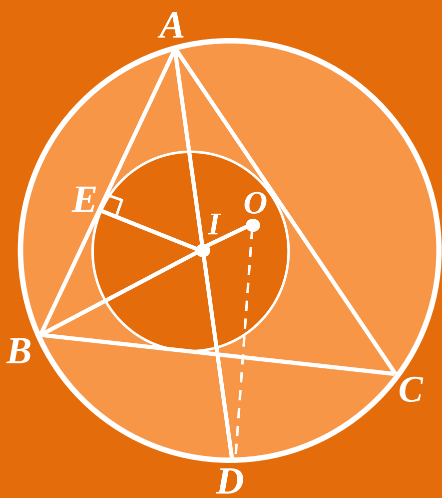
វិទ្យាល័យហ៊ុនសែនអង្គប្រីយ៍

លំហាត់គណិតវិទ្យា

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែ
និង ប្រឡងប្រជែងនានា

កម្រិតសិស្សវិទ្យាល័យ



ភាគ ២

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k}=\frac{u_1+u_{n+1}}{2}\cdot\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$$

រៀបរៀងដោយ:

អ៊ឹម ឈុនហោ និង អ៊ី គឹមឃឿន

ស្រាវជ្រាវ និង រៀបរៀង

លោក **អ៊ឹម ឈុនហោ** និង លោក **អ៊ី គឹមឃឿន**

គ្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក **អយ ស៊ីណា** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិ.ហាសអង្គរបុរី

លោក **ផៀម សុវណ្ណ** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិ.ជសអង្គរជ័យ

លោក **គិត កញ្ញា** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិ.ពួក(សៀមរាប)

លោក **ស៊ុក ស៊ីថា** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិ.កំពង់ស្ពឺ

គ្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

យុវសិស្ស **ស៊ីវ ណារីន** ជ័យលាភីសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសាស្ត្រខ្មែរ

យុវសិស្ស **ទ្រី គឹមលី** រៀននៅវិទ្យាល័យសុខអានក្តីទន្ទឹម

យុវសិស្ស **ឆុល ឌីម៉ង់** រៀននៅវិទ្យាល័យហ៊ុនសែនអង្គប្រីយ៍

យុវសិស្ស **ស៊ឹម ខិច្ចិភា** រៀននៅវិទ្យាល័យហ៊ុនសែនអង្គប្រីយ៍

យុវសិស្ស **ស៊ិន រិទ្ធី** រៀននៅវិទ្យាល័យហ៊ុនសែនអង្គប្រីយ៍

យុវសិស្ស **ទ្រី ហ្គិចហ្គួយ** រៀននៅវិទ្យាល័យអង្គព្រះស្តេច

វាយអត្ថបទ

លោក **អ៊ឹម ឈុនហោ**សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិ.ហាសអង្គប្រីយ៍

យុវសិស្ស **អ៊ី គឹមឃឿន** រៀននៅវិទ្យាល័យហ៊ុនសែនអង្គប្រីយ៍

រចនាក្រប

លោក **អ៊ឹម ឈុនហោ**សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិ.ហាសអង្គប្រីយ៍

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **លំហាត់គណិតវិទ្យា ភាគ ២** សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ យើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវ និងរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារ សម្រាប់ជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សា ជាពិសេសសម្រាប់សិស្សដែលមានបំណងចង់ប្រឡងសិស្សពូកែផ្នែកគណិតវិទ្យាកម្រិតមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ នាពេលដ៏ខ្លីខាងមុខ ។

សៀវភៅនេះផងដែរ យើងខ្ញុំបានដកស្រង់លំហាត់ចេញពីសៀវភៅបរទេសខ្លះ អ៊ិនធើណិតខ្លះនិងខ្លះទៀតជាលំហាត់ដែលធ្លាប់ចេញប្រលងសិស្សពូកែ ។

ទោះបីជាយើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀង ក៏ដូចជាអ្នកត្រួតពិនិត្យខិតខំពិនិត្យដោយយកចិត្តទុកដាក់យ៉ាងណា ក៏ដោយ កង្វះខាត និងកំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមាន ។

អាស្រ័យហេតុនេះយើងខ្ញុំរង់ចាំដោយរីករាយជានិច្ចនូវមតិរិះគន់ពីគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីស្ថាបនានិងកែលម្អសៀវភៅនេះឲ្យកាន់តែប្រសើរថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់យើងខ្ញុំសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពល្អនិងសម្រេចបានដូចអ្វីដែលប៉ងប្រាថ្នាទៅថ្ងៃមុខ ៕

តាកែវ ថ្ងៃទី ០៨ មីនា ២០១៥

អ្នករៀបរៀង

អ៊ឹម ឈុនហោ និង អ៊ី គឹមយឿន

ផ្នែកទី១ សង្ខេបរូបមន្តសំខាន់ៗ

❖រូបមន្តសំខាន់មួយចំនួន

១_ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ

①បើត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a,b,c និងកម្ពស់ h_a,h_b,h_b គេបាន:

ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

②បើត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a,b,c និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ កន្លះបរិមាត្រ

ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ **(រូបមន្តហេរុង)**

③គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a,b,c និង p កន្លះបរិមាត្រ ។

បើ r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនិង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណនោះ

ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $S=pr=\frac{abc}{4R}$ ។

២_ក្រឡាផ្ទៃចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

បើចតុកោណ $ABCD$ មានជ្រុង a,b,c,d ចារឹកក្នុងរង្វង់ និង p កន្លះបរិមាត្រនោះក្រឡាផ្ទៃចតុកោណកំណត់ដោយ:

$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ដែល $p=\frac{a+b+c+d}{2}$ ។

៣_ក្រឡាផ្ទៃចតុកោណប៉ោង

គេឲ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មានជ្រុង a,b,c,d និងកន្លះបរិមាត្រនោះក្រឡាផ្ទៃរបស់វាកំណត់ដោយ:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}$$ ។

៤_កន្សោម $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a,b,c និង p កន្លះបរិមាត្រគេបាន

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$ រូបមន្តលំនាំគ្នាចំពោះមុំ $\frac{B}{2}$ និង $\frac{C}{2}$ ។

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

៥_រូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ

បើត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a,b,c និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ កន្លះបរិមាត្រ

ហើយ r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណនោះគេបាន:

$$r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=(p-b)\tan\frac{B}{2}=(p-c)\tan\frac{C}{2}$$

$$r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{b\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$ ។

៦_រូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំមួយនៃត្រីកោណ

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a,b,c និង p កន្លះបរិមាត្រ ។

បើ r_a ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ A នៃត្រីកោណ ABC គេបាន:

$$r_a=p\tan\frac{A}{2}=\frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}}=\frac{p-b}{\tan\frac{C}{2}}$$ ។

រូបមន្តលំនាំគ្នាចំពោះ r_b,r_c និង ។

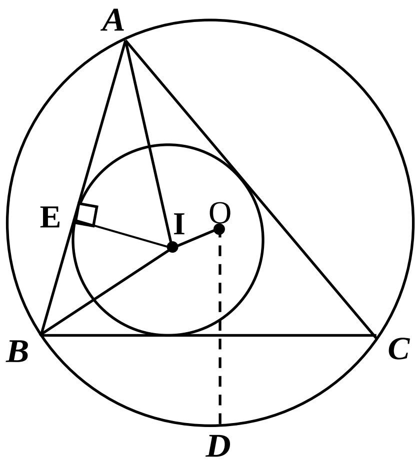
៧_ចម្ងាយពីផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណទៅកំពូលត្រីកោណ

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a,b,c ។ បើ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង នៃត្រីកោណនោះគេបាន:

$$IA=\sqrt{\frac{p-a}{p}\cdot bc}\qquad IB=\sqrt{\frac{p-b}{p}\cdot ac}\qquad IC=\sqrt{\frac{p-c}{p}\cdot ab}$$ ។

៨_ចម្ងាយពីផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងទៅផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ(រូបមន្តអឺលែ)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មាន I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ និង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។ បើ r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងក្រៅត្រីកោណនោះ គេបាន: $OI=\sqrt{R(R-2r)}$ ។



❖ទ្រឹស្តីបទមួយចំនួន

១_ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

បើ ABC ជាត្រីកោណមានជ្រុង a,b,c ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R

គេបាន: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ ។

២_ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

បើ ABC ជាត្រីកោណមួយមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$

គេបាន: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

៣_រូបមន្តចំណោលកែង

បើ ABC ជាត្រីកោណមួយមានជ្រុង $BC = a, AC = b, AB = c$

គេបាន: $a = b\cos C + c\cos B$

$$b = c\cos A + a\cos C$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

៤_ទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន

បើ ABC ជាត្រីកោណមួយមាន m_a, m_b, m_c ជាមេដ្យានត្រូវគ្នានឹង ជ្រុង a,b,c គេបាន: $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$

$$4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$$
$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

៥_ទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ

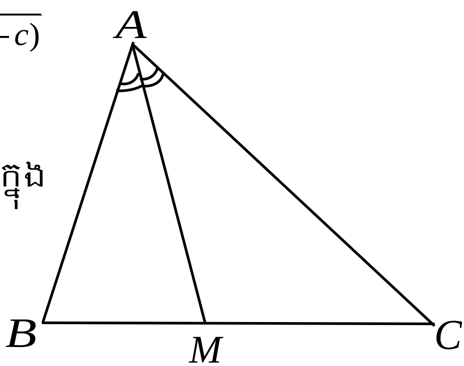
គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមានជ្រុង a,b,c និង l_a, l_b, l_c ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង A,B,C រៀងគ្នា នោះគេបាន:

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} = \frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$$
$$l_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2} = \frac{2}{a+c}\sqrt{pac(p-b)}$$
$$l_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2} = \frac{2}{a+b}\sqrt{pab(p-c)}$$

៦_ទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ

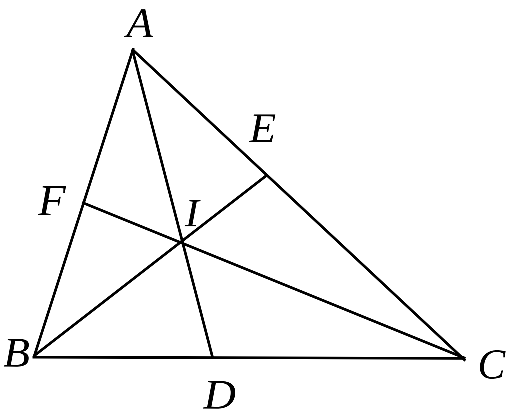
បើ AM ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A ក្នុង ត្រីកោណ ABC គេបាន:

$$\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}$$ ។



៧_ទ្រឹស្តីបទសេវ៉ា $(Ceva's\,theorem)$

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមានបន្ទាត់បី AD, BE, CF ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច I មួយលុះត្រាតែ $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$ ។

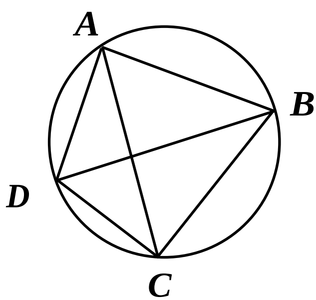


៨_ទ្រឹស្តីបទតូលេមី $(Ptolemy's\,theorem)$

បើ $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

និង AC, BD ជាអង្កត់ទ្រូង គេបាន:

$AC.BD = AB.CD + BC.AD$ ។



៩_វិសមភាពតូលេមី $(Ptolemy's\,inequality)$

បើ $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

និង AC, BD ជាអង្កត់ទ្រូង គេបាន:

$AB.CD + BC.AD \ge AC.BD$ ។

១០_ទ្រឹស្តីបទឡិបនិច $(Leibniz's\,theorem)$

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមានជ្រុង a, b, c ហើយ O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណគេបាន:

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$ ។

១១_ទ្រឹស្តីបទ $Stewart$ $(Stewart's\ theorem)$

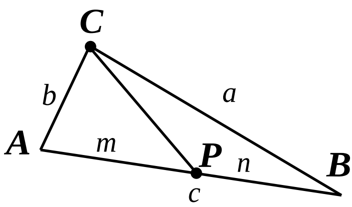
គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមានជ្រុង a,b,c ។

P ជាចំណុចមួយនៅលើ AB

ដែល $PA=m$, $PB=n$

និង $m+n=c$ ។ គេបាន:

$$ma^2+nb^2=(m+n)PC^2+mn^2+nm^2$$



១២_ទ្រឹស្តីបទ $Euler$ $(Euler's\ theorem)$

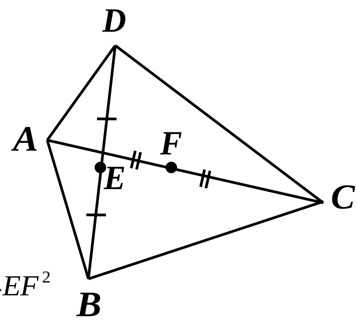
បើ $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹក

ក្នុងរង្វង់និង AC,BD ជាអង្កត់

ទ្រូង បើ E កណ្តាល BD និង F

កណ្តាល AC គេបាន:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2$$



❖រូបមន្តអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

១_ទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗ

- $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
- $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\tan\alpha.\cot\alpha=1$
- $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
- $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

២_រូបមន្តផលបូក និងផលដក

$\bullet \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$\bullet \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

$\bullet \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\bullet \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\bullet \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $\bullet \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{ta\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\bullet \cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$ $\bullet \cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\alpha-\cot\beta}$

៣_រូបមន្តមុំឌុប

$\bullet \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\bullet \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\bullet \tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $\bullet \cot 2\alpha=\dfrac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$ $,\ =1-2\sin^2\alpha$

៤_រូបមន្តកន្លះមុំ

$\bullet \sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-co\alpha}{2}$ $\bullet \sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$

$\bullet \cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$ $\bullet \tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

៥_កន្សោម $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ជាអនុគមន៍ $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}$

$\bullet \sin\alpha=\dfrac{2t}{1+t^2}$ $\bullet \cos\alpha=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\bullet \tan\alpha=\dfrac{2t}{1-t^2}$

៦_កន្សោមមុំ 3α , 4α និង 5α

$\bullet \sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=4\sin x\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$

$\bullet \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4\cos x\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$

$$\bullet \tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} = \tan x \tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

$$\bullet \cot 3\alpha = \frac{3\cot\alpha - \cot^3\alpha}{1-3\cot^2\alpha} = \cot x \cot\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cot\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

$$\bullet \sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha - 8\sin^3\alpha\cos\alpha$$

$$\bullet \cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

$$\bullet \tan 4\alpha = \frac{4\tan\alpha - 3\tan^3\alpha}{1-6\tan^2\alpha+\tan^4\alpha}$$

$$\bullet \sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha$$

$$\bullet \cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$$

$$\bullet \tan 5\alpha = \frac{\tan^5\alpha - 10\tan^3\alpha + 5\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha+5\tan^4\alpha}$$

៧_រូបមន្តបម្លែងពីផលគុណទៅផលបូក

$$\bullet \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\bullet \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\bullet \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\bullet \sin\beta\cos\alpha = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$

៨_រូបមន្តបម្លែងពីផលបូកទៅផលគុណ

$$\bullet \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\bullet \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\bullet \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\bullet \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$

$$\bullet \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

$$\bullet \cot p + \cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$$

$\bullet \sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$ $\bullet \cot p-\cot q=\frac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q}$

$\bullet \tan(a+b+c)=\frac{\tan a+\tan b+\tan c-\tan a\tan b\tan c}{1-\tan a\tan b-\tan b\tan c-\tan c\tan a}$

៩_សមីការត្រីកោណមាត្រ

- សមីការ $\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$
- សមីការ $\sin u(x)=\sin v(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u(x)=v(x)+2k\pi \\ u(x)=\pi-v(x)+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$
- សមីការ $\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=-\alpha+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$
- សមីការ $\cos u(x)=\cos v(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u(x)=v(x)+2k\pi \\ u(x)=-v(x)+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$
- សមីការ $\tan x=\tan\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$
- សមីការ $\tan u(x)=\tan v(x) \Leftrightarrow u(x)=v(x)+k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$
- សមីការ $\cot x=\cot\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$
- សមីការ $\cot u(x)=\cot v(x) \Leftrightarrow u(x)=v(x)+k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

លក្ខណៈពិសេស

$\bullet \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$ $\bullet \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\bullet \tan x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$ $\bullet \cot x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$

☞ និមិត្តសញ្ញាមួយចំនួន

$\sec x$ អានថាសេកុង ជាចម្រាសនៃអនុគមន៍ $\cos x : \sec x=\frac{1}{\cos x}$

$\csc x$ អានថាកូសេកុង ជាចម្រាសនៃអនុគមន៍ $\sin x : \csc x=\frac{1}{\sin x}$

$\arcsin x$ អានថាអាក់ស៊ីនុសជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $\sin x$

-បើ $y=\sin x \Rightarrow x=\arcsin y$ ។

$\arccos x$ អានថាអាក់កូស៊ីនុស ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $\cos x$

-បើ $y=\cos x \Rightarrow x=\arccos y$ ។

$\operatorname{arcsec} x$ អានថាអាក់សេកុង ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $\sec x$

$\operatorname{arccsc} x$ អានថាអាក់កូសេកុង ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $\operatorname{cosc} x$

$\arctan x$ អានថាអាក់តង់សង់ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $\tan x$

-បើ $y=\tan x \Rightarrow x=\arctan y$ ។

$\operatorname{arccot} x$ អានថាអាក់កូតង់សង់ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $\cot x$

-បើ $y=\cot x \Rightarrow x=\operatorname{arccot} y$ ។

$\sinh x$ ជាអនុគមន៍ស៊ីនុសអ៊ីពែបូលិក $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$\cosh x$ ជាអនុគមន៍កូស៊ីនុសអ៊ីពែបូលិក $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$\tanh x$ ជាអនុគមន៍តង់សង់អ៊ីពែបូលិក $\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$\coth x$ ជាអនុគមន៍កូតង់សង់អ៊ីពែបូលិក $\coth x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

❖ វិសមភាពអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រមួយចំនួន:

$1/\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ $2/\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}$

$3/\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$ $4/\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$

$5/\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{1}{8}$ $6/\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$7/\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ $8/\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\le\sqrt{3}$

ផ្នែកទី២ ប្រធានលំហាត់

លំហាត់ទី១

គេឲ្យស្វីតចំនួនពិត (x_n) និង (y_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}.\sin^2\alpha \\ y_n = y_{n-1} + 2x_{n-1}.\cos^2\alpha \end{cases} \quad \text{និង} \quad x_0 = 0, y_0 = \cos\alpha$$

បង្ហាញថា: $x_n y_n = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} C_{2n}^{2i-1}.\sin^{2i}(2\alpha)$ ។

លំហាត់ទី២

គេឲ្យស្វីតនព្វន្ត (u_k) ដែល $k = 1,2,3,...,n+1$ ។

ចូរបង្ហាញថា: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k} = \frac{u_1 + u_{n+1}}{2}\cdot\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិតពីរ (u_n) និង (v_n) ដែល $n = 0,1,2,...$

ផ្ទៀងផ្ទាត់: $$\begin{cases} u_0 = 0 \ , \ v_0 = \cos\alpha \\ u_n = u_{n-1} + 2v_{n-1}.\sin^2\alpha \ ; \ \forall\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z} \\ v_n = v_{n-1} + 2u_{n-1}.\cos^2\alpha \end{cases}$$

ចូររកតួទូទៅនៃស្វីត (u_n) និង (v_n) ។

លំហាត់ទី៤

គេមានស្វីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$u_1 = \dfrac{3}{4}$ និង $(2n+1)u_n = 2^n + 2nu_n \ ; \ n = 1,2,3,...$

ចូរបង្ហាញថា: $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{2k+1}$ ដែល $n=1,2,3,...$

លំហាត់ទី៥

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (x_n) និង (y_n) កំណត់ដោយ:

$$x_0=997,x_{n+1}=x_n\left(x_n^{2016}+1\right)+1020\ \ ;\ \ n=0,1,2,...$$

$$\mathrm{y}_0=21,y_{n+1}=y_n\left(y_n^3+1\right)-849\ \ ;\ \ n=0,1,2,...$$

ស្រាយថាគ្មានចំនួនគត់ធម្មជាតិណាជាធាតុរួមរបស់ស្វ៊ីតទាំងពីរ

លំហាត់ទី៦

គេឲ្យ $2n$ ចំនួនពិតដែល $a_1\ge a_2\ge ...\ge a_n$ និង $b_1\le b_2\le ...\le b_n$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)\ge n\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)$$

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យ $n\in\mathbb{N}^*$ ។ បង្ហាញថា: $\frac{1}{C_{2017}^1}+\frac{1}{C_{2018}^2}+\cdots+\frac{1}{C_{2017+n}^{n+1}}<\frac{1}{2015}$

លំហាត់ទី៨

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\sqrt{1001}\left[\left(\sqrt{1001}+1\right)^{2016}-\left(\sqrt{1001}-1\right)^{2016}\right]$

ចែកដាច់នឹង 11 ។

លំហាត់ទី៩

គេឲ្យ $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ជា n ចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $0\le x_j\le\frac{1}{2}$

ចំពោះ $1\le j\le n$ ។ ស្រាយថា: $\frac{\prod_{j=1}^{n}x_j}{\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^n}\le\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(1-x_j\right)}{\left(\sum_{j=1}^{n}\left(1-x_j\right)\right)^n}$ ។

លំហាត់ទី១០

ក-គណនា $S=C_{2014}^{0}+3C_{2014}^{1}+4C_{2014}^{2}+5C_{2014}^{3}+\cdots+2016C_{2014}^{2014}$

ខ-គណនា $S=C_{2015}^{0}+2C_{2015}^{1}+3C_{2015}^{2}+4C_{2015}^{3}+\cdots+2016C_{2015}^{2015}$

លំហាត់ទី១១

រកមេគុណនៃ x^4 ក្នុងការពន្លាតកន្សោម: $\left(1+2x+3x^2\right)^{10}$

លំហាត់ទី១២

រកតម្លៃនៃ $A=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j}\dfrac{12090\,j}{n^3}$

លំហាត់ទី១៣

គេតាង $\{x\}$ ជាផ្នែកទសភាគនៃចំនួនពិត x ។

គណនាតម្លៃលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\{(2+\sqrt{3})^n\right\}$ ។

លំហាត់ទី១៤

ស្រាយថា: $\left\lfloor \sqrt[3]{x}\right\rfloor=\left\lfloor \sqrt[3]{\lfloor x\rfloor}\right\rfloor$ គ្រប់ចំនួនពិត ។

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យប្លង់ (P) មានសមីការ $x-2y+z-2=0$ ចំណុច $M_n\in(P)$

ដែល $M_n\in\left(a_n\,,a_{n+1}\,,a_{n+2}\right)$ និង $a_1=2$, $a_2=4$ ។

រកកូអរដោនេនៃ M_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង $a_1,a_2,...,a_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

ខុសគ្នា ។ ស្រាយថា: $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{k^2}\geq\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$

លំហាត់ទី១៧

បើ x ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\lfloor nx\rfloor \ge \frac{\lfloor x\rfloor}{1}+\frac{\lfloor 2x\rfloor}{2}+\frac{\lfloor 3x\rfloor}{3}+\cdots+\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}$

ដែល $\lfloor x\rfloor$ ជាផ្នែកគត់នៃ x ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យ $\alpha_i\left(i=\overline{1,2015}\right)$ ដែល $\alpha_i \in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ ។

គណនាតម្លៃធំបំផុតនៃកន្សោម: $A=\left(\sum_{i=1}^{2015}\sin\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2015}\frac{1}{\sin\alpha_i}\right)$

លំហាត់ទី១៩

អនុគមន៍ $f(x,y)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម:

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x និង y ដែល:

$(i).\ f(0\,,\,y\,)=y+2014$

$(ii).f(x,0)=f\left(x-1,1\right)$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge 1$ ។

$(iii).\ f(x,\,y\,)=f\left(x-1\,,f\left(x\,,\,y-1\right)\right)$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge 1$ និង $y\ge 1$ ។

គណនា $f(1\,,n\,)$ និង $f(2\,,n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

សិស្សពូកែប្រចាំខេត្តកណ្តាល ឆ្នាំ ២០១៤

លំហាត់ទី២០

$ABCDE$ ជាបញ្ចកោណនិយ័តមួយចារឹកក្នុងរង្វង់ឯកតា។

បង្ហាញថា $AB\times AC=\sqrt{5}$ ។

សិស្សពូកែប្រចាំខេត្តកណ្តាល ឆ្នាំ ២០១៤

លំហាត់ទី២១

រកសំណល់នៃវិធីចែក $P(x)=x^{2015}+1$ ចែកនឹង x^2-2x+1 ។

សិស្សពូកែប្រចាំរាជធានីភ្នំពេញ ឆ្នាំ ២០១៤

លំហាត់ទី២២

រកអនុគមន៍ $f:IR\to IR$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$2014f\left(x-1\right)+2013f(1-x)=x\ ,\forall x\in IR$$

សិស្សពូកែប្រចាំរាជធានីភ្នំពេញ ឆ្នាំ ២០១៤

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_0=0$, $x_1=1$ និង $x_{n+2}=3x_{n+1}-2x_n$ ចំពោះ $n=0,1\ ,2\ ,3\ ,...$ ។ គេកំណត់ $y_n=x_n^2+2^{n+2}$

បង្ហាញថា y_n ជាការេនៃចំនួនគត់សេស ចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ *សិស្សពូកែប្រចាំរាជធានីភ្នំពេញ ឆ្នាំ ២០១៤*

លំហាត់ទី២៤

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានអរត្តូសង់ H ដែលកំណត់លើកម្ពស់ AA' បានផលធៀប $\dfrac{AH}{HA'}=k$ ដែល k ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា: $\tan B\tan C=k+1$, $\tan B+\tan C=k\tan A$

និង $cos\left(B-C\right)=\dfrac{k+2}{k}cosA$ ។

សិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស ឆ្នាំ ២០១៤

លំហាត់ទី២៥

ត្រីកោណ ABC មួយមានមុំទាំងបី $A\ ,B\ ,C$ និង បរិមាត្រ $2p$ ។

បង្ហាញថា: $BC=\dfrac{psin\left(A/2\right)}{\cos\left(B/2\right)\cos\left(C/2\right)}$, $AC=\dfrac{psin\left(B/2\right)}{\cos\left(A/2\right)\cos\left(C/2\right)}$

និង $AB=\dfrac{psin\left(C/2\right)}{\cos\left(A/2\right)\cos\left(B/2\right)}$

សិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស ឆ្នាំ ២០១៤

លំហាត់ទី២៦

ត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A ហើយ $BC=a$ ។ អង្កត់

ពុះក្នុងនៃមុំ B និង C មានរង្វាស់ x និង y ដែល $xy=m^2$ ។

១/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin(B/2)\sin(C/2)=\dfrac{m^2}{4a^2}$

២/ ចំណុច I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|BI|\cdot|CI|=\dfrac{1}{2}m^2$ ។

សិស្សពូកែប្រចាំខេត្តតាកែវ ឆ្នាំ ២០១៤

លំហាត់ទី២៧

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ និង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ហើយដែលរង្វង់នេះប៉ះជ្រុង BC , AC , AB រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច A' , B' , C' ។ តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC និង S' ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ $A'B'C'$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\dfrac{S'}{S}=2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ ។

សិស្សពូកែប្រចាំខេត្តតាកែវ ឆ្នាំ ២០១៤

លំហាត់ទី២៨

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A=\dfrac{(2014m)!}{(m!)^{2014}\times 2014!}$ ជាចំនួនគត់ចំពោះ $m=1,2,3,\ldots$ ។

សិស្សពូកែប្រចាំខេត្តតាកែវ ឆ្នាំ ២០១៤

លំហាត់ទី២៩

បង្ហាញថា $1+\sqrt{\dfrac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{3+1}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{4+1}{4}}+\ldots+\sqrt[2013]{\dfrac{2013+1}{2013}}<2014$

សិស្សពូកែប្រចាំខេត្តកំពង់ស្ពឺ ឆ្នាំ ២០១៤

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យចំណុច M មួយនៅក្នុងត្រីកោណសម័ង្ស ABC ។ ពី M គូសបន្ទាត់កែងនឹងជ្រុង BC , AC និង AB រៀងគ្នាត្រង់ A_1 , B_1

និង C_1 ។ រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់: $P=\dfrac{MA^2+MB^2+MC^2}{\left(MA_1+MB_1+MC_1\right)^2}$

លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យ $[x]$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុត មិនលើសពី x , $\{x\}=x-[x]$ ។
រកគ្រប់បណ្តាចំនួនពិត $x\neq 0$ ដើម្បីឲ្យបីចំនួន: $x,[x],\{x\}$
បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

លំហាត់ទី៣២

ឧបមាថា ត្រីកោណ T_1 មានក្រឡាផ្ទៃ P រង្វាស់ជ្រុង a,b,c ។
ត្រីកោណ T_2 មានក្រឡាផ្ទៃ Q រង្វាស់ជ្រុង i,j,k ។
បង្ហាញថា:

$$16PQ\le a^2\left(-i^2+j^2+k^2\right)+b^2\left(i^2-j^2+k^2\right)+c^2\left(i^2+j^2-k^2\right)$$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតពីរ (x_n) និង (y_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:
$x_{n+1}=x_n^3-3x_n$, $y_{n+1}=y_n^3-3y_n$ $(\forall n\ge 1)$ និង $x_1^2=y_1+2$ ។
បង្ហាញថា: $x_n^2=y_n+2$ ចំពោះ $n\ge 1$ ។

លំហាត់ទី៣៤

រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តូចបំផុត ដែល n មានសំណល់ 1 , 2 , 3
4 និង 5 ពេលចែកនឹង 2 , 3 , 4 , 5 និង 6 រៀងគ្នា ។

លំហាត់ទី៣៥

ចូររកសំណល់នៃការចែក $(1332)^{9876543}$ នឹង 121 ។

លំហាត់ទី៣៦

រកតម្លៃនៃ $A=\tan\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{2\times 2^2}+\cdots+\tan^{-1}\dfrac{1}{2\times 2016^2}\right)$

លំហាត់ទី៣៧

គេឲ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$\frac{\sqrt{6}}{xy}+\frac{\sqrt{2}}{yz}+\frac{\sqrt{3}}{zx}=6$ ។ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម:

$$P=\frac{\sqrt{6x^2+3}-\sqrt{3}}{x}+\frac{\sqrt{6y^2+2}-\sqrt{2}}{y}+\frac{\sqrt{6z^2+1}-1}{z}$$ ។

លំហាត់ទី៣៨

ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) ដែលប៉ះទៅនឹងស្វ៊ែមានសមីការ $(S):(x-5)^2+(y+1)^2+(z+13)^2=308$ ហើយជាមួយសមីការនៃបន្ទាត់: $\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+13}{2}$ និង $\begin{cases} x+7=3t \\ y+1=-2t \\ z=8 \end{cases}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនខុសគ្នា និង $\alpha,\beta,\varphi,\gamma$ ជាមុំបួនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់: $\frac{a}{\tan(\varphi+\alpha)}=\frac{b}{\tan(\varphi+\beta)}=\frac{c}{\tan(\varphi+\gamma)}$ ។ បង្ហាញថា:

$$\frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{b+c}{b-c}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{c+a}{c-a}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$$ ។

លំហាត់ទី៤០

ដោះស្រាយសមីការ:

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$$

លំហាត់ទី៤១

បង្ហាញថាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ដែលមាន n ខ្ទង់ $(n>2)$ ស្មើនឹង: $494\underbrace{999...9}_{n-3}55\underbrace{000...0}_{n-2}$ ។

លំហាត់ទី៤២

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី 3 ។ គេដឹងថា $P(x)+2$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^2$ ហើយ $P(x)-2$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^2$ ។ ចូរកំណត់ $P(x)$ ។

លំហាត់ទី៤៣

បើ x,y,z ជាបីចំនួនពិត ដែល $x,y,z \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \ \ , k\in\mathbb{Z}$

ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$\tan^2 x\tan^2 y+\tan^2 y\tan^2 z+\tan^2 z\tan^2 x+2\tan^2 x\tan^2 y\tan^2 z=1$$

បង្ហាញថា: $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=1$ ។

លំហាត់ទី៤៤

រកតម្លៃអប្បបរមា និងអតិបរមានៃអនុគមន៍: $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{(1+\cos x)^2}$

ចំពោះ $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A មេដ្យានគូសចេញពីកំពូល B និងកម្ពស់គូសចេញពីកំពូល C ប្រសព្វគ្នាត្រង់ I ។

បង្ហាញថា: $\cos A=\dfrac{\sin C}{\sin B+\sin C}$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មាន CM ជាមេដ្យាន $ACM=\alpha$, $BCM=\beta$

ក) បង្ហាញថា: $\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ខ)គណនាមុំ A,B,C

លំហាត់ទី៤៧

គេឲ្យសមីការ $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\ \left(a,b,c,d\in\mathbb{R};a>0\right)$

មានឫស x_1,x_2,x_3,x_4 និង $x_1^{2^{2015}}+x_2^{2^{2015}}+x_3^{2^{2015}}+x_4^{2^{2015}}=4$ ។

កំណត់តម្លៃ b,c,d ។

លំហាត់ទី៤៨

គេឲ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$\sqrt{xy}+\sqrt{x}z+\sqrt{yz}=1$ ។ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម:

$$A=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឲ្យ a_n,b_n ជាចំនួនពិតនិង $n\in\mathbb{N}^*$ ។ ចូរគណនា:

$$A=\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k+ib_k}{ia_k-b_k} \qquad B=\sum_{p=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{p}\frac{a_k+ib_k}{ia_k-b_k}\right)$$

លំហាត់ទី៥0

រកពហុធាដឺក្រេទី 5 នៃ $P(x)$ ដែល $P(x)+a$ ចែកដាច់នឹង $(x+a)^3$ ហើយ $P(x)-a$ ចែកដាច់នឹង $(x-a)^3$ ។

លំហាត់ទី៥១

គេឲ្យ $x^2+y^2=16\ ;\ u^2+v^2=25\ ;\ xu+vy\geq 20$

យក $A=x+v$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតនៃ A ។

លំហាត់ទី៥២

ដោះស្រាយសមីការ: $\sqrt[2015]{x^3+3x-3}+\sqrt[2015]{-x^3-3x+5}=2$

លំហាត់ទី៥៣

គេឲ្យបួនចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c,d ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d}\geq 3$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $abcd\leq\frac{1}{81}$

លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យចំនួនពិត a,b,c ដែល $a\geq 1,b\geq 1,c\geq 1$ ។ បង្ហាញថា:

$\sqrt{(a+1)(b-1)}+\sqrt{(b+1)(c-1)}+\sqrt{(c+1)(a-1)}<a+b+c$ ។

លំហាត់ទី៥៥

គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ហើយ $abc=1$ ។

ស្រាយថា: $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}$ ។

លំហាត់ទី៥៦

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$ ។

លំហាត់ទី៥៧

បើ n ជាចំនួនគត់សេសវិជ្ជមានមិនតូចជាង 3 ។ ស្រាយថា:

$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots-\frac{x^n}{n!}\right)<1 \quad , \quad x\neq 0$

លំហាត់ទី៥៨

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

លក្ខខណ្ឌ: $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ និង

$f(x+y)=f\left(x^{2015}\right)+f\left(y^{2015}\right), \forall x,y\in\mathbb{R}$ គណនា $f\left(\sqrt[3]{2015}\right)$

លំហាត់ទី៥៩

គេឲ្យចំនួនពិត $0<a<b<c$ និងអនុគមន៍ f ជាប់ និងមានដេរីវេ

លើចន្លោះ $[a,c]$ ដែល $f'(x)>0$ លើចន្លោះ $[a,c]$ ។

ចូរបង្ហាញថា: $(c-b)f(a)+(b-a)f(c)>(c-a)f(b)$ ។

លំហាត់ទី៦០

កំណត់អនុគមន៍ $f(x,y)$ ដែល:

$$\begin{cases} f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=x^2+y^2+z^2 \ ; \ \forall x,y,z\in\mathbb{R} & (1) \\ f\left(x^2+y-f(0,x),0\right)=x+f^2(y,0)-f\left(0,y^2-f(0,y)\right) & (2) \end{cases}$$

លំហាត់ទី៦១

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $x_0,x_1,x_2,...$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ $x_0=2015$ និងចំពោះ $n\geq 1$ ។ បង្ហាញថា: $x_n=(-1)^n(2015)\binom{2015}{n}$

ចំពោះគ្រប់ $n\in[1,2015]$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $\sum_{n=0}^{2015}2^n x_n$ ។

លំហាត់ទី៦២

បង្ហាញថា: $\left[\left(\sin\dfrac{2016}{2015}\right)^{\cos\frac{2016}{2015}}\right]^{\log_{2016}2017}>\left[\left(\cos\dfrac{2016}{2015}\right)^{\sin\frac{2016}{2015}}\right]^{\log_{2015}2016}$

លំហាត់ទី៦៣

គេឲ្យ $p>2$ ជាចំនួនបឋម និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា: p ជាតួចែកនៃ $1^{p^n}+2^{p^n}+3^{p^n}+\cdots+(p-1)^{p^n}$ ។

លំហាត់ទី៦៤

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់សេសធំជាង ឬស្មើនឹង 5 ។ ស្រាយថា:

$\binom{n}{1}-5\binom{n}{2}+5^2\binom{n}{3}+\cdots+5^{n-1}\binom{n}{n}$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

លំហាត់ទី៦៥

ចូរប្រៀបធៀបពីរចំនួនខាងក្រោម:

ក) $2015^{2016^{2015}}$ និង $2016^{2015^{2016}}$ ។

ខ) $A=\sqrt{2^{2^{2^{2^{2}}}}}$ និង $B=1+2^2+3^3+4^4+...+2014^{2014}$ ។

លំហាត់ទី៦៦

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

$$\sin x+cosx-\sin x\cos x=1-\ln\frac{3+\sin x+\cos x}{4+\sin x\cos x}$$

លំហាត់ទី៦៧

ដោះស្រាយសមីការ: $3^{2015x+3\cos x}-3^{2015x+4\cos^3 x}-3\cos 3x=0$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC សមបាតត្រង់ A ។ ដោយដឹងថា ជាអរតូសង់ H នៃត្រីកោណនៅលើរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ ។ គណនា $\cos A$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គណនាផលគុណ $P=\dfrac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)...\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)...\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}$

សិស្សពូកែប្រចាំខេត្តតាកែវ ឆ្នាំ ២០១២

លំហាត់ទី៧០

ចំពោះ $\forall x,y\in[-1,1]$ គេតាង $f(x,y)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$ ។

ក)ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $|f(x,y)|\le 1$ ។

ខ)រកតម្លៃ x និង y ដែលនាំឲ្យ $f(x,y)$ មានតម្លៃតូចបំផុត និងធំបំផុត ។ *សិស្សពូកែប្រចាំខេត្តតាកែវ ឆ្នាំ ២០១១*

លំហាត់ទី៧១

គេឲ្យ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយ ។

កំណត់យក $S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ ។

ស្រាយថា: $1+\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r}{k}S_k(n)=(n+1)^r$

លំហាត់ទី៧២

គេឲ្យ a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនិង h_a,h_b,h_c ប្រវែងកម្ពស់រៀងគ្នានៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយថា: $\frac{a^2}{h_b^2+h_c^2}+\frac{b^2}{h_a^2+h_c^2}+\frac{c^2}{h_a^2+h_b^2}\geq 2$ ។

លំហាត់ទី៧៣

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $A=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!n!}{(m+n+2)!}$

បើ $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ ។

លំហាត់ទី៧៤

គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c,d ដែល $a+b+c+d=4$

ស្រាយថា: $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\geq 2$ ។

លំហាត់ទី៧៥

គេឲ្យ a, b, c ជាប្រវែងជ្រុងនិង h_a,h_b,h_c ជាប្រវែងកម្ពស់រៀងគ្នា r ជាប្រវែងកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ស្រាយថា: $\frac{1}{h_a-2r}+\frac{1}{h_b-2r}+\frac{1}{h_c-2r}\geq\frac{3}{r}$ ។

លំហាត់ទី៧៦

គេឲ្យ a, b, c, l_a, l_b, l_c ជាប្រវែងជ្រុងនិងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃត្រីកោណមួយរៀងគ្នា ។ តាង p ជាកន្លះបរិមាត្រនិង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ។ ស្រាយថា: $\frac{l_a}{a}+\frac{l_b}{b}+\frac{l_c}{c}\leq\frac{p}{2r}$ ។

លំហាត់ទី៧៧

គេឲ្យ a, b, c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន។

កំណត់យក $m = \min\{a, b, c\}$,$M = \max\{a, b, c\}$ ។ ស្រាយថា:

$$1.\frac{|Mm-ab|}{(a+b)c} \le \frac{M-m}{2m}$$

$$2.\frac{|Mm-ab|}{(a+b)c}+\frac{|Mm-ab|}{(a+b)c}+\frac{|Mm-ab|}{(a+b)c} \le \frac{3(M-m)}{2m}$$

លំហាត់ទី៧៨

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម:

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin^2\frac{\pi}{4n}+\sin^2\frac{2\pi}{4n}+\sin^2\frac{3\pi}{4n}+\cdots+\sin^2\frac{n\pi}{4n}\right)$$

លំហាត់ទី៧៩

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម: $A = \int_{-1}^{\infty}\left(\frac{x^4}{1+x^6}\right)^2 dx$

លំហាត់ទី៨០

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2 = (-1)^n\binom{2n}{n}$$

លំហាត់ទី៨១

គេឲ្យ $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ ។ ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

គេបាន: $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{2a_2^2}+\frac{1}{3a_3^2}+\cdots+\frac{1}{na_n^2} < 2$ ។

លំហាត់ទី៨២

គេឲ្យ $a,b,c,x,y,z>0$ ។

ស្រាយថា: $\frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}+\frac{cz}{c+z}\leq\frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}$ ។

លំហាត់ទី៨៣

គេឲ្យ $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^+$ ។ ស្រាយថា: $\sum_{k=1}^{n}ka_k\leq\binom{n}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^k$ ។

លំហាត់ទី៨៤

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k និង p ជាចំនួនពិត

គេបាន: $\int_0^\infty\frac{\sin kx\cos^k x}{x^p}dx=\frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\int_0^\infty\frac{\sin 2rx}{x^p}dx$ ។

លំហាត់ទី៨៥

គណនាផលបូក: $S=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$ ។

លំហាត់ទី៨៦

គណនាផលបូក: $S=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

លំហាត់ទី៨៧

ដាក់ជាកត្តា: $(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3$ ។

លំហាត់ទី៨៨

បើ $x^2+y^2=1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$\left|16\left(x^2+y^2\right)+20\left(x^3+y^3\right)+5\left(x+y\right)\right|\leq\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៨៩

គេឲ្យ $0<x<1$, $0<y<1$ និង $xy+yz+xz=1$ ។

បង្ហាញថា: $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៩០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មាន AD ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A , BM ជាមេដ្យាន និង CH កម្ពស់ ។

បង្ហាញថា: $\frac{\sin B+\sin C}{\sqrt{\cos^2 B+\sin^2 C}}=\frac{\sin C}{\cos B}$ ។

លំហាត់ទី៩១

ត្រីកោណ ABC មានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច ។

បង្ហាញថា: $\frac{\tan^2 A}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\tan^2 B}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\tan^2 C}{\sin\frac{C}{2}}\geq 18$ ។

លំហាត់ទី៩២

ចំនួនមួយមានលេខ 4 ខ្ទង់ ហើយជាការេប្រាកដ ។ រកចំនួននោះដោយដឹងថា 2 លេខខាងដើមស្មើគ្នា ហើយ2 លេខខាងចុងស្មើគ្នា ។

លំហាត់ទី៩៣

a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិពីរ ហើយ A និង B ជាចំនួនពីរផ្ទៀងផ្ទាត់ $A=5a+4b$ និង $B=11a+9b$ ។

ស្រាយថា: $PGCD(a,b)=PGCD(A,B)$ ។

លំហាត់ទី៩៤

គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ គណនា $PGCD\left(a^n,b^n\right)$ ជាអនុគមន៍នៃ $PGCD(a,b)$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។ បើ a និង b បឋមរវាងគ្នា នោះ a^n និង b^n បឋមរវាងគ្នាដែរ ។

លំហាត់ទី៩៥

កំណត់សំណល់វិធីចែកនៃ $S=2^{\frac{1.2}{2}}+2^{\frac{2.3}{2}}+2^{\frac{3.4}{2}}+\cdots+2^{\frac{2014.2015}{2}}$

នឹង 7 ។ *សិស្សពូកែប្រចាំខេត្តកំពត ឆ្នាំ ២០១៤*

លំហាត់ទី៩៦

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ដែលមានរង្វាស់ជ្រុង $AB=13$, $BC=14$ $CA=15$ ។ P ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅខាងក្នុងត្រីកោណ ABC ដែលមាន $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$ និង $\tan PAB=\frac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា ។

រក $m+n$ ។ *សិស្សពូកែប្រចាំខេត្តកំពត ឆ្នាំ ២០១៤*

លំហាត់ទី៩៧

គេឲ្យឆកោណប៉ោង $ABCDEF$ មួយ ដែលមានជ្រុង $AB=BC$ $CD=DE$ និង $EF=FA$ ។ បង្ហាញថា: $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{3}{2}$ ។

សិស្សពូកែប្រចាំខេត្តកំពត ឆ្នាំ ២០១៤

លំហាត់ទី៩៨

n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល $2014!$ ចែកដាច់នឹង 5^n ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n\leq 501$ ។*សិស្សពូកែប្រចាំខេត្តកំពត ឆ្នាំ ២០១៤*

លំហាត់ទី៩៩

គេមានចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន: $x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$

ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ: $\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}x_k=96\\ \sum_{k=1}^{n}x_k^2=144\\ \sum_{k=1}^{n}x_k^3=216\end{cases}$

រកចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន: $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ។ *សិស្សពូកែកំពត ២០១៤*

លំហាត់ទី១០០

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\dfrac{2^{100}}{10\sqrt{2}} < C(100,50) < \dfrac{2^{100}}{10}$ ។

សិស្សពូកែប្រចាំខេត្តកំពត ឆ្នាំ ២០១៤

លំហាត់ទី១០១

គេឲ្យស្វ៊ីត *Fibonacci* កំណត់ដោយ: $f_0 = 1, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ ដែល $n \geq 1$ ។

ក)ចូររកតម្លៃ $f_2, f_3, ..., f_{10}$ ។

ខ)តាង $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ហើយ $X_n = \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។ បង្ហាញថា: $AX_n = X_{n+1}$ ចំពោះ $n \geq 1$ និងបង្ហាញថា $A^n X_1 = X_{n+1}$ ។

លំហាត់ទី១០២

គេឲ្យ $x > 0, y > 0, z > 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $x + y + z = 2016$ ។

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ $S = \dfrac{x^{30}}{x^{21}} + \dfrac{y^{30}}{y^{21}} + \dfrac{z^{30}}{z^{21}}$ ។

លំហាត់ទី១០៣

ក)កំណត់ពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ដែល $GCD(a,b) = 21$ និង $99a - 1665b = 0$ ។

ខ)គេឲ្យ $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ និង $S_1 = 1$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $S_n = \dfrac{1}{S_1^2} + \dfrac{1}{2S_2^2} + \dfrac{1}{3S_3^2} + \cdots + \dfrac{1}{nS_n^2} < 2$ ។

លំហាត់ទី១០៤

គេឲ្យចតុកោណ *ABCD* មានក្រឡាផ្ទៃស្មើ S ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O ។ តាង I ជាចំណុចប្រសព្វនៃអង្កត់ទ្រូង AC និង BD

ហើយចំណុច M , N , P និង Q ជាចំណុចឆ្លុះនៃ I ធៀបនឹងជ្រុង AB , BC , CD , DA រៀងគ្នា ។

រកតម្លៃអតិបរមានៃផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $MNPQ$ ។

លំហាត់ទី១០៥

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ។ m_a, m_b, m_c ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ ABC ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $m_a.m_b.m_c \le \frac{27}{8}R^3$ ។

លំហាត់ទី១០៦

ដោះស្រាយសមីការចំពោះអញ្ញាតិ x និង m,n,p ជាចំនួនវិជ្ជមាន

$$\frac{x^3+n^3}{(x+n)^3}+\frac{x^3+m^3}{(x+n)^3}+\frac{x^3+p^3}{(x+n)^3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{(x-m)(x-p)(x-n)}{(x+m)(x+p)(x+n)}=\frac{3}{2}$$ ។

លំហាត់ទី១០៧

គេឲ្យ a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយស្រាយថា:

$(a+b-c)^a(b+c-a)^b(a+c-b)^c \le a^a b^b c^c$ ។

លំហាត់ទី១០៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយស្រាយថា:

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$$

លំហាត់ទី១០៩

គេឲ្យ x,y,z ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$(x+y+z)^{x+y+z}.x^x.y^y.z^z \le (x+y)^{x+y}(y+z)^{y+z}(x+z)^{x+z}$

លំហាត់ទី១១០

គេឲ្យ a,b,c ប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយថា:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{2}} \geq \max\{a,b,c\}$$ ។

លំហាត់ទី១១១

គេឲ្យ $ABCDEFGHIJKL$ ជាពហុកោណនិយ័តដែលមានជ្រុង12 និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃពហុកោណនោះ។ ស្រាយថា:

$a.\ \frac{AB}{AF}+\frac{AF}{AB}=2$

$b.\ AB^2+AC^2+AD^2+AE^2+AF^2=12R^2$

លំហាត់ទី១១២

ស្រាយថាក្នុងត្រីកោណដែលមានមុំស្រួចមួយគេបាន:

$\sqrt{a^2b^2-4S^2}+\sqrt{a^2c^2-4S^2}=a^2$ ។

លំហាត់ទី១១៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយដែល: $\max\{A,B\}=C+30°$ ។

ស្រាយថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងកាលណា $\frac{R}{r}=\sqrt{3}+1$

ដែល R ជា r កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនិងក្នុងរៀងគ្នារបស់ត្រីកោណ។

លំហាត់ទី១១៤

គណនាផលបូក: $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}+1}$ ចំពោះ $a>1$ ។

លំហាត់ទី១១៥

គណនាផលបូក: $\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots$

ចំពោះ $x>1$ ។

លំហាត់ទី១១៦

គេឲ្យ a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនិង α,β,γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយរៀងគ្នា។ ស្រាយថា:

$$a\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+b\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+c\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\geq 2\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)$$ ។

លំហាត់ទី១១៧

គេឲ្យ m_a,m_b,m_c ជាប្រវែងមេដ្យាននិង a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយថា:

$$m_a m_b+m_b m_c+m_a m_c\leq\frac{5}{4}(ab+bc+ac)$$ ។

លំហាត់ទី១១៨

គេឲ្យ m_a,m_b,m_c ជាប្រវែងមេដ្យាននិង a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយថា:

$$am_a+bm_b+cm_c\leq\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)$$ ។

លំហាត់ទី១១៩

គេឲ្យ $ABCD$ ជាចតុកោណប៉ោងមួយ។ស្រាយថា:

$$\max\{AB+CD, AD+BC\}<AC+BD<AB+BC+CD+DA$$ ។

លំហាត់ទី១២០

គេតាង $[x]$ ជាចំនួនគត់រឺជ្ឈមានធំបំផុត មិនលើសពី x ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការខាងក្រោមគ្មានឫស:

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$$ ។

ផ្នែកទី៣ ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (x_n) និង (y_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}.\sin^2\alpha \\ y_n = y_{n-1} + 2x_{n-1}.\cos^2\alpha \end{cases}$$ និង $x_0 = 0$, $y_0 = \cos\alpha$

បង្ហាញថា: $x_n y_n = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} C_{2n}^{2i-1}.\sin^{2i}(2\alpha)$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $x_n y_n = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} C_{2n}^{2i-1}.\sin^{2i}(2\alpha)$

យើងមាន: $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}.\sin^2\alpha \quad (1) \quad (\times\cos\alpha) \\ y_n = y_{n-1} + 2x_{n-1}.\cos^2\alpha \quad (2) \quad (\times\sin\alpha) \end{cases}$

គេបាន: $\begin{cases} x_n\cos\alpha = x_{n-1}.\cos\alpha + y_{n-1}.\sin\alpha\sin 2\alpha \quad (3) \\ y_n.\sin\alpha = y_{n-1}.\sin\alpha + x_{n-1}.\cos\alpha\sin 2\alpha \quad (4) \end{cases}$

យក $(3)+(4)$ និង $(3)-(4)$ គេបាន:

$$\begin{cases} x_n.\cos\alpha + y_n.\sin\alpha = (x_{n-1}.\cos\alpha + y_{n-1}.\sin\alpha)(1+\sin 2\alpha) \\ x_n.\cos\alpha - y_n.\sin\alpha = (x_{n-1}.\cos\alpha - y_{n-1}.\sin\alpha)(1-\sin 2\alpha) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \prod_{i=1}^{n}(x_i.\cos\alpha + y_i.\sin\alpha) = \prod_{i=1}^{n}(x_{i-1}.\cos\alpha + y_{i-1}.\sin\alpha)(1+\sin 2\alpha) \\ \prod_{i=1}^{n}(x_i.\cos\alpha - y_i.\sin\alpha) = \prod_{i=1}^{n}(x_{i-1}.\cos\alpha - y_{i-1}.\sin\alpha)(1-\sin 2\alpha) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_n.\cos\alpha+y_n.\sin\alpha=(x_0.\cos\alpha+y_0.\sin\alpha)(1+\sin 2\alpha)^n \\ \qquad =\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha(1+\sin 2\alpha)^2 \\ x_n.\cos\alpha-y_n.\sin\alpha=(x_0.\cos\alpha-y_0.\sin\alpha)(1-\sin 2\alpha)^n \\ \qquad =-\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha(1-\sin 2\alpha)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (x_n.\cos\alpha+y_n.\sin\alpha)^2=\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha(1+\sin 2\alpha)^{2n} \\ (x_n.\cos\alpha-y_n.\sin\alpha)^2=\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha(1-\sin 2\alpha)^{2n} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (x_n.\cos\alpha)^2+2x_ny_n.\sin\alpha\cos\alpha+(y_n.\sin\alpha)^2 \\ =\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha(1+\sin 2\alpha)^{2n} \quad (5) \\ (x_n.\cos\alpha)^2-2x_ny_n.\sin\alpha\cos\alpha+(y_n.\sin\alpha)^2 \\ =\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha(1-\sin 2\alpha)^{2n} \quad (6) \end{cases}$$

យក $(5)-(6)$ គេបាន:

$$4x_ny_n.\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\left[(1+\sin 2\alpha)^{2n}-(1-\sin 2\alpha)^{2n}\right]$$

$$x_ny_n=\frac{1}{8}\cdot\sin 2\alpha\left[(1+\sin 2\alpha)^{2n}-(1-\sin 2\alpha)^{2n}\right] \quad (*)$$

យើងមាន:

$$(1+\sin 2\alpha)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1\sin 2\alpha+C_{2n}^2\sin^2 2\alpha+\cdots+C_{2n}^{2n}\sin^{2n} 2\alpha$$

$$(1-\sin 2\alpha)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1\sin 2\alpha+C_{2n}^2\sin^2 2\alpha\cdots+(-1)^{2n}C_{2n}^{2n}\sin^{2n} 2\alpha$$

គេបាន: $(1+\sin 2\alpha)^{2n}-(1-\sin 2\alpha)^{2n}$

$$=2C_{2n}^1\sin 2\alpha+2C_{2n}^3\sin^3 2\alpha+\cdots+2C_{2n}^{2n-1}\sin^{2n-1} 2\alpha$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}C_{2n}^{2i-1}(\sin 2\alpha)^{2i-1}$$

តាម (*) គេបាន: $x_n y_n=\frac{1}{8}.\sin 2\alpha.2\sum_{i=1}^{n}C_{2n}^{2i-1}(\sin 2\alpha)^{2i-1}$

$$x_n y_n=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}C_{2n}^{2i-1}(\sin 2\alpha)^{2i} \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $x_n y_n=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}C_{2n}^{2i-1}(\sin 2\alpha)^{2i}$ ។

លំហាត់ទី២

គេឲ្យស្ទីតនព្វន្ត (u_k) ដែល $k=1,2,3,...,n+1$ ។

ចូរបង្ហាញថា: $\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k}=\frac{u_1+u_{n+1}}{2}\cdot\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចូរបង្ហាញថា: $\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k}=\frac{u_1+u_{n+1}}{2}\cdot\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$:

យើងមានស្ទីតនព្វន្ត $(u_k): u_1, u_2, u_3, ..., u_n, u_{n+1}$

ចំពោះ $\forall k=0,1,2,3,...,n$ គេបាន:

$$u_1+u_{n+1}=u_{k+1}+u_{n-k+1} \quad (1)$$

យើងមាន: $\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k} \quad (2)$

ហើយ $\sum_{k=0}^{n}u_{k+1}=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+u_{n+1}$

$$\sum_{k=0}^{n}u_{n-k+1}=u_{n+1}+u_n+\cdots+u_3+u_2+u_1$$

តាម(2) គេបាន: $\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{n-k+1}}{C_n^{n-k}}$ (3) ព្រោះ $C_n^k=C_n^{n-k}$

យក (2)+(3) គេបាន: $2\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k}+\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{n-k+1}}{C_n^k}$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{u_{k+1}}{C_n^k}+\frac{u_{n-k+1}}{C_n^k}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{u_1+u_{n+1}}{C_n^k}\right)$$

$$=(u_1+u_{n+1})\sum_{k=o}^{n}\frac{1}{C_n^k}$$

គេបាន: $\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k}=\left(\frac{u_1+u_{n+1}}{2}\right)\sum_{k=o}^{n}\frac{1}{C_n^k}$

នោះត្រូវបង្ហាញថា: $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$ វាជាការស្រេច ។

តាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា:

បើ $n=1$ គេបាន: $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}=\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{C_1^k}=\frac{1}{C_1^0}+\frac{1}{C_1^1}=1+1=2$

ហើយ $\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}=\frac{2}{2^2}\left(\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}\right)=2$

គេបាន: $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=p$ គេបាន: $\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{C_p^k}=\frac{p+1}{2^{p+1}}\sum_{k=1}^{p+1}\frac{2^k}{k}$ (4)

បន្តស្រាយឲ្យវាពិតដល់ $n=p+1$ គឺ $\sum_{k=0}^{p+1}\frac{1}{C_{p+1}^k}=\frac{p+2}{2^{p+2}}\sum_{k=1}^{p+2}\frac{2^k}{k}$

យើងមាន: $\sum_{k=0}^{p+1}\frac{1}{C_{p+1}^k}=\frac{1}{C_{p+1}^0}+\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{C_{p+1}^{k+1}}$

$$C_{p+1}^{k+1}=\frac{(p+1)!}{(k+1)(p-k)!}=\frac{(p+1)p!}{(k+1)k!(p-k)!}=\frac{(p+1)}{k+1}C_p^k$$

យើងបាន: $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1}\frac{1}{C_{p+1}^k}=\frac{1}{C_{p+1}^0}+\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\frac{k+1}{C_p^k}$

$$=1+\frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sum_{k=0}^{p}\frac{k+1}{C_p^k}$$

$$=1+\frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{k+1}{C_p^k}+\frac{p-k+1}{C_p^{p-k}}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{p+1}\frac{1}{C_{p+1}^k}=1+\frac{p+2}{2(p+1)}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{C_p^k}\quad(5)$$

តាម (4) និង (5) យើងបាន: $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1}\frac{1}{C_{p+1}^k}=1+\frac{p+2}{2(p+1)}\cdot\frac{p+1}{2^{p+1}}\sum_{k=1}^{p+1}\frac{2^k}{k}$

$$=1+\frac{p+2}{2^{p+2}}\left(\sum_{k=1}^{p+2}\frac{2^k}{k}-\frac{2^{p+2}}{p+2}\right)$$

$$=\frac{p+2}{2^{p+2}}\left(\sum_{k=1}^{p+2}\frac{2^k}{k}\right)$$ ពិត ។

ដូចនេះ: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k}=\frac{u_1+u_{n+1}}{2}\cdot\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតពីរ (u_n) និង (v_n) ដែល $n=0,1,2,...$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$$\begin{cases} u_0=0\ ,\ v_0=\cos\alpha \\ u_n=u_{n-1}+2v_{n-1}.\sin^2\alpha\ \ ;\ \forall\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \\ v_n=v_{n-1}+2u_{n-1}.\cos^2\alpha \end{cases}$$

ចូររកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) ។

ដំណោះស្រាយ

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n):

យើងមាន: $u_n+\lambda v_n=\left(1+2\lambda\cos^2\alpha\right)u_{n-1}+\left(\lambda+2\sin^2\alpha\right)v_{n-1}\quad (*)$

កំណត់ λ ដើម្បីឲ្យ $\lambda+2\sin^2\alpha=\lambda\left(1+2\lambda\cos^2\alpha\right)\quad (1)$

តាម (1) យើងបាន: $\lambda+2\sin^2\alpha=\lambda+2\lambda^2\cos^2\alpha$

$$\lambda^2=\tan^2\alpha \text{ ឬ } \lambda=\pm\tan\alpha$$

តាមតម្លៃ λ ខាងលើនោះ (*) ទៅជា:

$$u_n+\lambda v_n=\left(1+2\lambda\cos^2\alpha\right).u_{n-1}+\lambda\left(1+2\lambda\cos^2\alpha\right)v_{n-1}$$

$$=\left(1+2\lambda\cos^2\alpha\right)\left(u_{n-1}+\lambda v_{n-1}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(u_k+\lambda v_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\lambda\cos^2\alpha\right)\left(u_{k-1}+\lambda v_{k-1}\right)$$

$$u_n+\lambda v_n=\left(1+2\lambda\cos^2\alpha\right)^n\left(u_0+\lambda v_0\right)\quad (2)$$

យក $\lambda=\tan\alpha$ និង $\lambda=-\tan\alpha$ ជំនួសក្នុងសមីការ (2) គេបាន:

$$\begin{cases}u_n+\tan\alpha.v_n=\left(1+2\tan\alpha.\cos^2\alpha\right)^n\left(u_0+\tan\alpha.v_0\right)\\ u_n-\tan\alpha.v_n=\left(1-2\tan\alpha.\cos^2\alpha\right)^n\left(u_0-\tan\alpha.v_0\right)\end{cases}$$

ដោយ $u_0=0$, $v_0=\cos\alpha$ គេបាន:

$$\begin{cases}u_n+\tan\alpha.v_n=\left(1+2\tan\alpha.\cos^2\alpha\right)^n.\sin\alpha\\ u_n-\tan\alpha.v_n=-\left(1-2\tan\alpha.\cos^2\alpha\right)^n.\sin\alpha\end{cases}$$

តាមដេទែមីណង់: $D=\begin{vmatrix}1 & \tan\alpha\\ 1 & -\tan\alpha\end{vmatrix}=-2\tan\alpha$

$$D_{u_n}=\begin{vmatrix}\left(1+2\tan\alpha.\cos^2\alpha\right)^n.\sin\alpha & \tan\alpha\\ -\left(1-2\tan\alpha.\cos^2\alpha\right)^n.\sin\alpha & -\tan\alpha\end{vmatrix}$$

$$= -\sin\alpha\tan\alpha\left[\left(1+2\tan\alpha.\cos^2\alpha\right)^n - \left(1-2\tan\alpha.\cos^2\alpha\right)^n\right]$$

$$D_{v_n} = \begin{vmatrix} 1 & \left(1+2\tan\alpha.\cos^2\alpha\right)^n.\sin\alpha \\ 1 & -\left(1-2\tan\alpha.\cos^2\alpha\right)^n.\sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$= -\sin\alpha\left[\left(1-2\tan\alpha.\cos^2\alpha\right)^n + \left(1+2\tan\alpha.\cos^2\alpha\right)^n\right]$$

ប្រពន្ធ័សមីការមានចម្លើយ:

$$u_n = \frac{D_{u_n}}{D} = \frac{1}{2}\sin\alpha\left[\left(1+\sin 2\alpha\right)^n - \left(1-\sin 2\alpha\right)^n\right]$$

$$v_n = \frac{D_{v_n}}{D} = \frac{1}{2}\cdot\cos\alpha\left[\left(1+\sin 2\alpha\right)^n + \left(1-\sin 2\alpha\right)^n\right]$$

ដូចនេះតួទូទៅនៃស្វ៊ីត:

$$u_n = \frac{1}{2}\sin\alpha\left[\left(1+\sin 2\alpha\right)^n - \left(1-\sin 2\alpha\right)^n\right]$$

$$v_n = \frac{1}{2}\cdot\cos\alpha\left[\left(1+\sin 2\alpha\right)^n + \left(1-\sin 2\alpha\right)^n\right]$$

លំហាត់ទី៤

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$u_1 = \frac{3}{4}$ និង $(2n+1)u_n = 2^n + 2nu_{n-1} \quad ; \quad n = 1,2,3,...$

ចូរបង្ហាញថា: $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{2k+1}$ ដែល $n = 1,2,3,...$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{2k+1}$ ដែល $n = 1,2,3,...$

តាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា:

បើ $n=1$ គេបាន: $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{2k+1}=\sum_{k=0}^{1}\frac{C_1^k}{2k+1}=C_1^0+\frac{C_1^1}{3}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}=u_1$ ពិត

ឧបមាថាពិតចំពោះ $n=p$ គឺ: $u_p=\sum_{k=0}^{p}\frac{C_p^k}{2k+1}$

បន្តស្រាយឲ្យពិតដល់: $n=p+1$

យើងមាន:

$$u_{p+1}=\frac{2^{p+1}}{2p+3}+\frac{2(p+1)}{2p+3}\cdot u_p=\frac{2^{p+1}}{2p+3}+\frac{2(p+1)}{2p+3}\cdot\sum_{k=0}^{p}\frac{C_p^k}{2k+1}\quad (*)$$

យើងមាន: $2^{p+1}=(1+1)^{p+1}=\sum_{k=0}^{p+1}C_{p+1}^k$

តែ $(p+1)C_p^k=(p+1)\cdot\frac{p!}{(p-k)!k!}=(p+1-k)\cdot\frac{(p+1)!}{(p+1-k)!k!}$

$$=(p+1-k)C_{p+1}^k$$

តាម (*) គេបាន: $(2p+3)u_{p+1}=2^{p+1}+2(p+1)\sum_{k=0}^{p}\frac{C_p^k}{2k+1}$

$$=\sum_{k=0}^{p+1}C_{p+1}^k+2\sum_{k=0}^{p}\frac{(p+1-k)C_{p+1}^k}{2k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{p+1}\left[1+\frac{2(p+1-k)}{2k+1}\right]C_{p+1}^k$$

$$=(2p+3)\sum_{k=0}^{p+1}\frac{C_{p+1}^k}{2k+1}$$

$$\Rightarrow u_{p+1}=\sum_{k=0}^{p+1}\frac{C_{p+1}^k}{2k+1}\quad \text{ពិត ។}$$

ដូចនេះ $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{2k+1}$ ចំពោះ $n=1,2,3,...$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (x_n) និង (y_n) កំណត់ដោយ:

$x_0 = 997, x_{n+1} = x_n\left(x_n^{2016}+1\right)+1020 \ \ ; \ \ n = 0,1,2,...$

$y_0 = 21, y_{n+1} = y_n\left(y_n^{3}+1\right)-849 \ \ ; \ \ n = 0,1,2,...$

ស្រាយថាគ្មានចំនួនគត់ធម្មជាតិណាជាធាតុរួមរបស់ស្វ៊ីតទាំងពីរ

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាគ្មានចំនួនគត់ធម្មជាតិណាជាធាតុរួមរបស់ស្វ៊ីតទាំងពីរ:

យើងមាន: $x_0 = 997, x_{n+1} = x_n\left(x_n^{2016}+1\right)+1020 \ \ ; \ \ n = 0,1,2,...$

$$y_0 = 21, y_{n+1} = y_n\left(y_n^{3}+1\right)-849 \ \ ; \ \ n = 0,1,2,...$$

នោះ (x_n) និង (y_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ ។

យើងមាន: $x_0 \equiv 997 \pmod{2017}$

$$x_{n+1} = x_n\left(x_n^{2016}+1\right)+1020$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x_n = x_n^{2017}+1020$$

បើ $n=0$ គេបាន: $x_1 - x_0 = x_0^{2017}+1020 = 997^{2017}+1020$

ដោយ $(997,2017)=1$ តាមទ្រឹស្តីបទ *Fermat* គេបាន:

$997^{2017} \equiv 997 \pmod{2017}$ នោះ $997^{2017}+1020 \equiv 0 \pmod{2017}$

$\Rightarrow x_1 \equiv x_0 \pmod{2017}$ ឬ $x_1 \equiv 997 \pmod{2017}$

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k-1$ គឺ: $x_k \equiv 997 \pmod{2017}$

យើងនឹងបន្តស្រាយឲ្យពិតដល់: $n=k: x_{k+1} \equiv 997 \pmod{2017}$

យើងមាន:

$$x_{k+1} - x_k = x_k^{2017}+1020 \equiv x_0^{2017}+1020 \equiv 997^{2017}+1020 \equiv 0 \pmod{2017}$$

យើងទាញបាន: $x_{k+1} \equiv x_k \equiv 997 \pmod{2017}$ ពិត

ដូចនេះ $x_k \equiv 997 \pmod{2017}$

យើងមាន: $y_0 \equiv 21 \pmod{2017}$

$y_{n+1} = y_n\left(y_n^3 + 1\right) - 849$

$y_{n+1} - y_n = y_n^4 - 849$

បើ $n = 0$ គេបាន: $y_1 - y_0 = y_0^4 - 849 = 21^4 - 849 = 96 \times 2017$

នាំឲ្យ $y_1 \equiv y_0 \equiv 21 \pmod{2017}$

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k - 1$ គឺ: $y_k \equiv 21 \pmod{2017}$

យើងនឹងបន្តស្រាយឲ្យពិតដល់: $n = k : y_{k+1} \equiv 21 \pmod{2017}$

យើងមាន: $y_{k+1} - y_k = y_k^4 - 849 \equiv 21^4 - 849 \equiv 0 \pmod{2017}$

យើងបាន: $y_{k+1} \equiv y_k \equiv 21 \pmod{2017}$ ពិត

ដូចនេះ $y_k \equiv 21 \pmod{2017}$

ដោយ $x_k \equiv 997 \pmod{2017}$ និង $y_k \equiv 21 \pmod{2017}$ មានន័យថា គ្មានចំនួនគត់ធម្មជាតិណាជាធាតុរួមរបស់ស្វ៊ីតទាំងពីរទេ ។

លំហាត់ទី៦

គេឲ្យ $2n$ ចំនួនពិតដែល $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ និង $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)\left(b_1 + b_2 + \cdots + b_n\right) \geq n\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)\left(b_1 + b_2 + \cdots + b_n\right) \geq n\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)$$

យើងមាន: $a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

$$b_1+b_2+\cdots+b_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

យើងនឹងស្រាយថា: $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\geq n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$

យើងមាន:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_kb_k-a_kb_i)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\sum_{i=1}^{n}(b_k-b_i)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(na_kb_k-a_k\sum_{i=1}^{n}b_i\right)$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\quad(*)$$

ម៉្យាងទៀត $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i-a_ib_k\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_ib_i-a_ib_k\right)$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\sum_{k=1}^{n}(b_i-b_k)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(na_ib_i-a_i\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$$

$$=n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\quad(**)$$

តាម (*) និង (**) គេបាន: $n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_kb_k-a_kb_i)\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i-a_ib_k)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_kb_k-a_kb_i+a_ib_i-a_ib_k\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_k(b_k-b_i)-a_i(b_k-b_i)\right)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_k-a_i)(b_k-b_i)\right)\right)$$

ដោយ $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$ និង $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$

នោះ $(a_k-a_i)(b_k-b_i)\le 0\ \ ;\ i,k=1,2,\cdots$

គេបាន: $\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_k-a_i)(b_k-b_i)\right)\right)\le 0$

នាំឲ្យ $n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\le 0$

$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\ge n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$ ពិត

ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យ $n\in\mathbb{N}^*$ ។ បង្ហាញថា: $\frac{1}{C_{2017}^{1}}+\frac{1}{C_{2018}^{2}}+\cdots+\frac{1}{C_{2017+n}^{n+1}}<\frac{1}{2015}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\frac{1}{C_{2017}^{1}}+\frac{1}{C_{2018}^{2}}+\cdots+\frac{1}{C_{2017+n}^{n+1}}<\frac{1}{2015}$

យើងមាន: $\frac{1}{C_{2017+k}^{k+1}}=\frac{(k+1)!2016!}{(2017+k)!}$

$$=\frac{2016!(k+1)!}{2015(2017+k)!}\left[2017+k-(k+2)\right]$$

$$=\frac{2016}{2015}\left[\frac{2015!(k+1)!}{(2016+k)!}-\frac{2015!(k+2)!}{(2017+k)!}\right]$$

$$=\frac{2016}{2015}\left(\frac{1}{C_{2016+k}^{k+1}}-\frac{1}{C_{2017+k}^{k+2}}\right)$$

យើងបាន: $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_{2017+k}^{k+1}}=\frac{2016}{2015}\left(\frac{1}{C_{2016}^{1}}-\frac{1}{C_{2017+n}^{n+2}}\right)<\frac{2016}{2015}\cdot\frac{1}{C_{2016}^{1}}=\frac{1}{2015}$

ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៨

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\sqrt{1001}\left[\left(\sqrt{1001}+1\right)^{2016}-\left(\sqrt{1001}-1\right)^{2016}\right]$

ចែកដាច់នឹង 11 ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\sqrt{1001}\left[\left(\sqrt{1001}+1\right)^{2016}-\left(\sqrt{1001}-1\right)^{2016}\right]$

ចែកដាច់នឹង 11:

យើងមាន:

$$\left(\sqrt{1001}+x\right)^{2016}=C_{2016}^{0}\sqrt{1001}^{2016}+C_{2016}^{1}\sqrt{1001}^{2015}x+\cdots+C_{2016}^{2016}x^{2016}$$

បើ $x=1$ គេបាន:

$$\left(\sqrt{1001}+1\right)^{2016}=C_{2016}^{0}\sqrt{1001}^{2016}+C_{2016}^{1}\sqrt{1001}^{2015}+\cdots+C_{2016}^{2016}$$

បើ $x=-1$ គេបាន:

$$\left(\sqrt{1001}-1\right)^{2016}=C_{2016}^{0}\sqrt{1001}^{2016}-C_{2016}^{1}\sqrt{1001}^{2015}+\cdots+C_{2016}^{2016}$$

នាំឲ្យ $\left(\sqrt{1001}+1\right)^{2016}-\left(\sqrt{1001}-1\right)^{2016}$

$$=2\sqrt{1001}\left(C_{2016}^{1}\sqrt{1001}^{2014}+C_{2016}^{3}\sqrt{1001}^{2012}+\cdots+C_{2016}^{2015}\right)$$

$$=2\sqrt{1001}\left(C_{2016}^{1}1001^{1007}+C_{2016}^{3}1001^{1006}+\cdots+C_{2016}^{2015}\right)$$

$$=2\sqrt{1001}.X$$

ដែល $X=C_{2016}^{1}1001^{1007}+C_{2016}^{3}1001^{1006}+\cdots+C_{2016}^{2015}$ ជាចំនួនគត់ ។

យើងបាន: $\sqrt{1001}\left[\left(\sqrt{1001}+1\right)^{2016}-\left(\sqrt{1001}-1\right)^{2016}\right]=2.1001.X$

$$=11.182.X$$

ដូចនេះ $\sqrt{1001}\left[\left(\sqrt{1001}+1\right)^{2016}-\left(\sqrt{1001}-1\right)^{2016}\right]$ ចែកដាចនឹង 11 ។

លំហាត់ទី៩

គេឲ្យ $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ជា n ចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $0\le x_j\le\frac{1}{2}$

ចំពោះ $1\le j\le n$ ។ ស្រាយថា: $\frac{\prod_{j=1}^{n}x_j}{\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^n}\le\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)}{\left(\sum_{j=1}^{n}(1-x_j)\right)^n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\frac{\prod_{j=1}^{n}x_j}{\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^n}\le\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)}{\left(\sum_{j=1}^{n}(1-x_j)\right)^n}$:

ឧបមាថាវិសមភាពខាងលើពិតគេបាន:

$$\ln\left(\frac{\prod_{j=1}^{n}x_j}{\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^n}\right)\le\ln\left(\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)}{\left(\sum_{j=1}^{n}(1-x_j)\right)^n}\right)$$

$$\ln\left(\prod_{j=1}^{n}x_j\right)-n\ln\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)\le\ln\left(\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)\right)-n\ln\left(\sum_{j=1}^{n}(1-x_j)\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\ln(1-x_j)-\sum_{j=1}^{n}\ln x_j\ge n\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{n}(1-x_j)\right)-\ln\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)\right)$$

តាង $f(x)=\ln(1-x)-\ln x \ ; \ 0<x\le\frac{1}{2}$

គេបាន:

$$f'(x)=-\frac{1}{(1-x)}-\frac{1}{x}\Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+1-2x+x^2}{x^2(1-x)^2}$$

ឬ $f''(x)=\frac{1-2x}{x^2(1-x)^2}>0$ ព្រោះ $0<x\le\frac{1}{2}$

ដោយ $f''(x)>0$ នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ផត ។

តាមវិសមភាពយិនសិន $(jensen's\,equality)$

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\ge f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n}f(x_j)\ge nf\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j}{n}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\ln(1-x_j)-\ln x_j\Big)\ge n\left(\ln\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j}{n}\right)-\ln\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j}{n}\right)\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\ln(1-x_j)-\sum_{j=1}^{n}\ln x_j\ge n\left(\ln\left(n-\sum_{j=1}^{n}x_j\right)-\ln\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\ln(1-x_j)-\sum_{j=1}^{n}\ln x_j\ge n\left(\ln\sum_{j=1}^{n}(1-x_j)-\ln\sum_{j=1}^{n}x_j\right)$$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{\prod_{j=1}^{n}x_j}{\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^n}\le\dfrac{\prod_{j=1}^{n}\left(1-x_j\right)}{\left(\sum_{j=1}^{n}\left(1-x_j\right)\right)^n}$ ។

លំហាត់ទី១០

ក-គណនា $S=C_{2014}^{0}+3C_{2014}^{1}+4C_{2014}^{2}+5C_{2014}^{3}+\cdots+2016C_{2014}^{2014}$

ខ-គណនា $S=C_{2015}^{0}+2C_{2015}^{1}+3C_{2015}^{2}+4C_{2015}^{3}+\cdots+2016C_{2015}^{2015}$

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $S=C_{2014}^{0}+3C_{2014}^{1}+4C_{2014}^{2}+5C_{2014}^{3}+\cdots+2016C_{2014}^{2014}$

របៀបទី១

យើងមាន: $S=C_{2014}^{0}+3C_{2014}^{1}+4C_{2014}^{2}+5C_{2014}^{3}+\cdots+2016C_{2014}^{2014}$

$=C_{2014}^{0}+(1+2)C_{2014}^{1}+(2+2)C_{2014}^{2}+(2+3)C_{2014}^{3}+\cdots+(2+2014)C_{2014}^{2014}$

$=\left(C_{2014}^{1}+2C_{2014}^{2}+3C_{2014}^{3}+\cdots+2014C_{2014}^{2014}\right)$

$+2\left(C_{2014}^{0}+C_{2014}^{1}+C_{2014}^{2}+C_{2014}^{3}+\cdots+C_{2014}^{2014}\right)-C_{2014}^{0}$

$=S_1+2S_2-1 \quad (*)$

យើងមាន:

$(1+x)^{2014}=C_{2014}^{0}+C_{2014}^{1}x+C_{2014}^{2}x^2+C_{2014}^{3}x^3+\cdots+C_{2014}^{2014}x^{2014} \quad (**)$

ធ្វើដេរីវេលើ (**) គេបាន:

$2014(1+x)^{2013}=C_{2014}^{1}+2C_{2014}^{2}x+3C_{2014}^{3}x^2+\cdots+2014C_{2014}^{2014}x^{2013}$

បើ $x=1$ គេបាន:

$2014(1+1)^{2013}=C_{2014}^{1}+2C_{2014}^{2}+3C_{2014}^{3}+\cdots+2014C_{2014}^{2014}=2014.2^{2013}$

នាំឲ្យ $S_1=2014.2^{2013}$

បើ $x=1$ តាម (**) គេបាន:

$(1+1)^{2014}=2^{2014}=C_{2014}^{0}+C_{2014}^{1}+C_{2014}^{2}+C_{2014}^{3}+\cdots+C_{2014}^{2014}$

នាំឲ្យ $S_2=2^{2014}$

តាម (*) យើងបាន:

ដូចនេះ $S=2014.2^{2013}+2.2^{2014}-1$ ។

របៀបទី២

យើងមាន:

$$\left(1+x\right)^{2014}=C_{2014}^{0}+C_{2014}^{1}x+C_{2014}^{2}x^{2}+C_{2014}^{3}x^{3}+\cdots+C_{2014}^{2014}x^{2014}\quad(*)$$

យក $(*)\times x^{2}$ គេបាន:

$$x^{2}\left(1+x\right)^{2014}=C_{2014}^{0}x^{2}+C_{2014}^{1}x^{3}+C_{2014}^{2}x^{4}+C_{2014}^{3}x^{5}+\cdots+C_{2014}^{2014}x^{2016}\quad(**)$$

ធ្វើដេរីវេលើ $(**)$ យើងបាន:

$$2x(1+x)^{2014}+2014x^{2}(1+x)^{2013}$$

$$=2C_{2014}^{0}x+3C_{2014}^{1}x^{2}+4C_{2014}^{2}x^{3}+5C_{2014}^{3}x^{4}+\cdots+2016C_{2014}^{2014}x^{2015}$$

បើ $x=1$ គេបាន: $S=2C_{2014}^{0}+3C_{2014}^{1}+4C_{2014}^{2}+5C_{2014}^{3}+\cdots+2016C_{2014}^{2014}$

$$=2.2^{2014}+2014.2^{2013}-1$$

ដូចនេះ $S=2014.2^{2013}+2.2^{2014}-1$ ។

ខ-គណនា $S=C_{2015}^{0}+2C_{2015}^{1}+3C_{2015}^{2}+4C_{2015}^{3}+\cdots+2016C_{2015}^{2015}$

របៀបទី១

យើងមាន: $S=C_{2015}^{0}+2C_{2015}^{1}+3C_{2015}^{2}+4C_{2015}^{3}+\cdots+2016C_{2015}^{2015}$

$$=\left(C_{2015}^{0}+C_{2015}^{1}+C_{2015}^{2}+C_{2015}^{3}+\cdots+C_{2015}^{2015}\right)$$

$$+\left(C_{2015}^{1}+2C_{2015}^{2}+3C_{2015}^{3}+\cdots+2015C_{2015}^{2015}\right)$$

$$=S_{1}+S_{2}$$

យើងមាន:

$$\left(1+x\right)^{2015}=C_{2015}^{0}+C_{2015}^{1}x+C_{2015}^{2}x^{2}+C_{2015}^{3}x^{3}+\cdots+C_{2015}^{2015}x^{2015}\quad(*)$$

បើ $x=1$ តាម $(*)$ គេបាន:

$$S_{1}=C_{2015}^{0}+C_{2015}^{1}+C_{2015}^{2}+C_{2015}^{3}+\cdots+C_{2015}^{2015}=2^{2015}$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ $(*)$ យើងបាន:

$$2015(1+x)^{2014}=C_{2015}^{1}+2C_{2015}^{2}x+3C_{2015}^{3}x^{2}+\cdots+2015C_{2015}^{2015}x^{2014}\quad(**)$$

បើ $x=1$ តាម $(**)$ គេបាន:

$$S_2=C_{2015}^1+2C_{2015}^2+3C_{2015}^3+\cdots+2015C_{2015}^{2015}=2015.2^{2014}$$

យើងបាន: $S=S_1+S_2=2^{2015}+2015.2^{2014}=2017.2^{2014}$

ដូចនេះ

$$S=C_{2015}^0+2C_{2015}^1+3C_{2015}^2+4C_{2015}^3+\cdots+2016C_{2015}^{2015}=2017.2^{2014}$$

របៀបទី២

យើងមាន:

$$(1+x)^{2015}=C_{2015}^0+C_{2015}^1x+C_{2015}^2x^2+C_{2015}^3x^3+\cdots+C_{2015}^{2015}x^{2015} \quad (*)$$

យក $(*)\times x$ គេបាន:

$$x(1+x)^{2015}=C_{2015}^0x+C_{2015}^1x^2+C_{2015}^2x^3+C_{2015}^3x^4+\cdots+C_{2015}^{2015}x^{2016} \quad (**)$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ $(**)$ យើងបាន:

$$(1+x)^{2015}+2015x(1+x)^{2014}$$

$$=C_{2015}^0+2xC_{2015}^1+3x^2C_{2015}^2+\cdots+2016x^{2015}C_{2015}^{2015}$$

បើ $x=1$ គេបាន:

$$C_{2015}^0+2C_{2015}^1+3C_{2015}^2+\cdots+2016C_{2015}^{2015}=2^{2015}+2015.2^{2014}=2017.2^{2014}$$

ដូចនេះ

$$S=C_{2015}^0+2C_{2015}^1+3C_{2015}^2+4C_{2015}^3+\cdots+2016C_{2015}^{2015}=2017.2^{2014}$$

លំហាត់ទី១១

រកមេគុណនៃ x^4 ក្នុងការពន្លាតកន្សោម: $\left(1+2x+3x^2\right)^{10}$

ដំណោះស្រាយ

រកមេគុណនៃ x^4 ក្នុងការពន្លាតកន្សោម: $\left(1+2x+3x^2\right)^{10}$

យើងមាន: $\left(1+2x+3x^2\right)^{10}=\sum_{10}^{k}C_{10}^k\left(2x+3x^2\right)^k$

$$=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}\sum_{i=0}^{k}C_{i}^{k}(2x)^{k-i}.(3x^2)^i$$

$$=\sum_{k=0}^{10}\sum_{i=0}^{k}C_{10}^{k}C_{k}^{i}2^{k-i}.3^i.x^{k+1}$$

តាមលក្ខខណ្ឌ: $\begin{cases}0\le i\le k\le 10\\ i,k\in\mathbb{N}\\ k+i=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=4\wedge i=0\\ k=3\wedge i=1\\ k=2\wedge i=2\end{cases}$

មេគុណនៃ x^4 គឺ $C_{10}^{4}C_{4}^{0}2^4.3^0+C_{10}^{3}C_{3}^{1}2^2.3^1+C_{10}^{2}C_{2}^{2}2^0.3^2=8085$

ដូចនេះមេគុណនៃ x^4 គឺ 8085 ។

លំហាត់ទី១២

រកតម្លៃនៃ $A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{12090j}{n^3}$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃនៃ $A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{12090j}{n^3}$

យើងមាន: $A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{12090j}{n^3}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{12090}{n^3}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}j$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{12090}{n^3}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{6045}{n^3}\sum_{j=1}^{n}\left(j^2+j\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{6045}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= 6045 \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{6n^3}+\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^3}\right)$$

$$= 6045 \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{3}+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}\right) = 2015$$

ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$

ដូចនេះ $A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{i}\frac{12090j}{n^3} = 2015$

លំហាត់ទី១៣

គេតាង $\{x\}$ ជាផ្នែកទសភាគនៃចំនួនពិត x ។

គណនាតម្លៃលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\left\{(2+\sqrt{3})^n\right\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\left\{(2+\sqrt{3})^n\right\}$

តាមការពន្លាតទ្វេធាញូតុនយើងឃើញថា:

$(2-\sqrt{3})^n = a - b\sqrt{3}$

$(2+\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$ ដែល a,b ជាចំនួនគត់

យើងបាន: $(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n = 2a$

$$\left\{(2-\sqrt{3})^n\right\} + \left\{(2+\sqrt{3})^n\right\} = 1$$

ឬ $\left\{(2+\sqrt{3})^n\right\} = 1 - \left\{(2-\sqrt{3})^n\right\}$

ដោយ $0 < 2-\sqrt{3} < 1 \Rightarrow 0 < (2-\sqrt{3})^n < 1$

$\Rightarrow (2-\sqrt{3})^n = \left\{(2-\sqrt{3})^n\right\}$

នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\{(2-\sqrt{3})^n\right\} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left\{(2-\sqrt{3})^n\right\} = 0$

យើងបាន: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\{(2+\sqrt{3})^n\right\} = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty}\left\{(2+\sqrt{3})^n\right\} = 1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\{(2+\sqrt{3})^n\right\} = 1$

លំហាត់ទី១៤

ស្រាយថា: $\left\lfloor \sqrt[3]{x} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[3]{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor$ គ្រប់ចំនួនពិត ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\left\lfloor \sqrt[3]{x} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[3]{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor$ គ្រប់ចំនួនពិត:

តាង $x = t + a \quad , \quad 0 \le a < 1$

នាំឲ្យ $\lfloor x \rfloor = t$

$\sqrt[3]{\lfloor x \rfloor} = \sqrt[3]{t}$

$\left\lfloor \sqrt[3]{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[3]{t} \right\rfloor$

ដោយ $\sqrt[3]{t} \le \sqrt[3]{t+a} \le \sqrt[3]{t+1}$

$\Rightarrow \left\lfloor \sqrt[3]{t+a} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[3]{t} \right\rfloor$

$\Leftrightarrow \left\lfloor \sqrt[3]{x} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[3]{t} \right\rfloor$

យើងបាន: $\left\lfloor \sqrt[3]{x} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[3]{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor$ ពិត

ដូចនេះ $\left\lfloor \sqrt[3]{x} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[3]{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យប្លង់ (P) មានសមីការ $x-2y+z-2=0$ ចំណុច $M_n \in (P)$ ដែល $M_n \in \left(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\right)$ និង $a_1=2$, $a_2=4$ ។

រកកូអរដោនេនៃ M_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

រកកូអរដោនេនៃ M_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដោយ $M_n \in (P)$ គេបាន:

$a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} - 2 = 0$

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$

សមីការ $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$

សមីការសម្គាល់ $x^2 - 2x + 1 = 0$ មានឫសឌុប $x=1$

គេបាន: $a'_n = An + B$

តែ $x = 1 \Rightarrow a''_n = Cn^2$

$\Leftrightarrow c(n+2)^2 - 2c(n+1)^2 + cn^2 = 2$

បើ $n=0: 4c - 2c = 2$ ឬ $c=1$

យើងបាន: $a_n = a'_n + a''_n = An + B + n^2 \quad (*)$

នាំឲ្យ $\begin{cases} a_1 = A + B + 1 = 2 \\ a_2 = 2A + B + 4 = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -1 , B = 2$

តាម (*) គេបាន: $a_n = n^2 - n + 2$

$\Rightarrow a_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 2 = n^2 + n + 2$

$\Rightarrow a_{n+2} = (n+2)^2 - (n+2) + 2 = n^2 + 3n + 4$

$\Rightarrow M_n\left(n^2 - n + 2 , n^2 + n + 2 , n^2 + 3n + 4\right)$

ដូចនេះ $M_n\left(n^2-n+2\ ,\ n^2+n+2\ ,\ n^2+3n+4\right)$ ។

❖រូបមន្តផលបូកដោយផ្នែក: (Summation by parts)

$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k\left(b_{k+1}-b_k\right)$ ដែល $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \ ,k>1$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន: $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \Rightarrow a_k = A_k - A_{k-1}$

យើងបាន:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} b_k\left(A_k - A_{k-1}\right)\\ &= A_1 b_1 + b_2\left(A_2 - A_1\right) + b_3\left(A_3 - A_2\right) + \cdots + b_n\left(A_n - A_{n-1}\right)\\ &= A_n b_n - A_1\left(b_2 - b_1\right) - A_2\left(b_3 - b_2\right) - \cdots - A_{n-1}\left(b_n - b_{n-1}\right)\\ &= A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k\left(b_{k+1} - b_k\right)\end{aligned}$$

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង $a_1, a_2, ..., a_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសគ្នា ។ ស្រាយថា: $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

ដោយ $a_1, a_2, ..., a_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសគ្នា នោះ

$A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ មានតម្លៃយ៉ាងតិច $1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

តាមរូបមន្តផលបូកដោយផ្នែក:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}=\frac{A_n}{n^2}-\sum_{k=1}^{n-1}A_k\left(\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\geq\frac{(n+1)}{2n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}\cdot\left(\frac{(2k+1)}{k^2(k+1)^2}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)}{2k(k+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ ពិត ។

ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១៧

បើ x ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\lfloor nx\rfloor\geq\frac{\lfloor x\rfloor}{1}+\frac{\lfloor 2x\rfloor}{2}+\frac{\lfloor 3x\rfloor}{3}+\cdots+\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}$

ដែល $\lfloor x\rfloor$ ជាផ្នែកគត់នៃ x ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\lfloor nx\rfloor\geq\frac{\lfloor x\rfloor}{1}+\frac{\lfloor 2x\rfloor}{2}+\frac{\lfloor 3x\rfloor}{3}+\cdots+\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}$

យើងនឹងស្រាយតាមវិចារកំណើន:

តាង $a_k=\frac{\lfloor kx\rfloor}{k}$ នោះ $A_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lfloor ix\rfloor}{i}$

បើ $n=1$: $\lfloor x\rfloor=\lfloor x\rfloor$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n-1$: $\lfloor (n-1)x\rfloor\ge A_{n-1}$

ត្រូវស្រាយថាវាពិតដល់ n : $\lfloor nx\rfloor\ge A_n$

តាមរូបមន្តផលបូកដោយផ្នែក

$$\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor=\sum_{k=1}^{n}a_k.k=A_n.n-\sum_{k=1}^{n-1}A_k$$

$$\begin{aligned}A_n.n&\le\lfloor nx\rfloor+\sum_{k=1}^{n-1}\lfloor kx\rfloor+\sum_{k=1}^{n-1}\lfloor kx\rfloor\\&=\lfloor nx\rfloor+\sum_{k=1}^{n-1}\lfloor kx\rfloor+\sum_{k=1}^{n-1}\lfloor (n-k)x\rfloor\\&=\lfloor nx\rfloor+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\lfloor kx\rfloor+\lfloor (n-k)x\rfloor\right)\ ;\lfloor a\rfloor+\lfloor b\rfloor\le\lfloor a+b\rfloor\\&\le\lfloor nx\rfloor+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\lfloor kx+(n-k)x\rfloor\right)\\&=\lfloor nx\rfloor+\sum_{k=1}^{n-1}\lfloor nx\rfloor=n\lfloor nx\rfloor\end{aligned}$$

$\Rightarrow A_n\le\lfloor nx\rfloor$ ពិត

ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យ $\alpha_i\left(i=\overline{1,2015}\right)$ ដែល $\alpha_i\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ ។

គណនាតម្លៃធំបំផុតនៃកន្សោម: $A=\left(\sum_{i=1}^{2015}\sin\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2015}\frac{1}{\sin\alpha_i}\right)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃធំបំផុតនៃកន្សោម: $A=\left(\sum_{i=1}^{2015}\sin\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2015}\frac{1}{\sin\alpha_i}\right)$

យើងមាន: $\alpha_i\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ នាំឲ្យ $sin\alpha_i\in\left[\frac{1}{2},1\right]$

យើងបាន: $\left(\sin\alpha_i-\frac{1}{2}\right)(\sin\alpha_i-1)\le 0$

$$\sin^2\alpha_i-\frac{3}{2}\sin\alpha_i+\frac{1}{2}\le 0$$

$$\sin^2\alpha_i+\frac{1}{2}\le\frac{3}{2}\cdot\sin\alpha_i$$

$$\sin\alpha_i+\frac{1}{2\sin\alpha_i}\le\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\sum_{=1}^{2015}\left(\sin\alpha_i+\frac{1}{2\sin\alpha_i}\right)\le\sum_{i=1}^{2015}\frac{3}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{2015}\sin\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2015}\frac{1}{\sin\alpha_i}\le\frac{3.2015}{2}\quad(1)$$

តាមវិសមភាព *Cauchy* :

$$\sum_{i=1}^{2015}\sin\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2015}\frac{1}{\sin\alpha_i}\ge 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2015}\sin\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2015}\frac{1}{2\sin\alpha_i}\right)}$$

$$\sum_{i=1}^{2015}\sin\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2015}\frac{1}{\sin\alpha_i}\ge 2\sqrt{\frac{1}{2}.A}\quad(2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន:

$$2\sqrt{\frac{1}{2}.A}\le\frac{3.2015}{2}$$

$$2A\le\left(\frac{3.2015}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow A \le \dfrac{6045^2}{8}$

ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃ $A = \left(\sum_{i=1}^{2015} \sin\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2015} \dfrac{1}{\sin\alpha_i}\right)$ គឺ $\dfrac{6045^2}{8}$ ។

សមភាពកើតមានកាលណា: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin\alpha_i = \dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha_i = 1 \end{array}\right. \\ \sum_{i=1}^{2015} \sin\alpha_i = \sum_{i=1}^{2015} \dfrac{1}{\sin\alpha_i} \end{cases}$

លំហាត់ទី១៩

អនុគមន៍ $f(x,y)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម:

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x និង y ដែល:

$(i).\ f(0, y) = y + 2014$

$(ii).f(x,0) = f(x-1, 1)$ ចំពោះគ្រប់ $x \ge 1$ ។

$(iii).\ f(x, y) = f\left(x-1, f\left(x, y-1\right)\right)$ ចំពោះគ្រប់ $x \ge 1$ និង $y \ge 1$ ។

គណនា $f(1, n)$ និង $f(2, n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ $f(x,y)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម:

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x និង y ដែល

$(i).\ f(0, y) = y + 2014$

$(ii).f(x,0) = f(x-1, 1)$ ចំពោះគ្រប់ $x \ge 1$ ។

$(iii).\ f(x, y) = f\left(x-1, f\left(x, y-1\right)\right)$ ចំពោះគ្រប់ $x \ge 1$ និង $y \ge 1$ ។

គណនា $f(1,n)$

តាម (iii): $f(1,n)=f(0,f(1,n-1))$

តាម (i): $f(1,n)=f(1,n-1)+2014$

តាង $a_n=f(1,n)\Rightarrow a_{n-1}=f(1,n-1)$

យើងបាន $a_n=a_{n-1}+2014$ នោះស្វ៊ីត a_n ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន

ផលសងរួម $d=2014$ និង $a_0=f(1,0)=f(0,1)$ តាម (ii) និង (i)

$\Rightarrow a_0=f(1,0)=f(0,1)=2014+1=2015$

គេបាន $a_n=a_0+nd=2015+2014n$

ដូចនេះ $f(1,n)=2015+2014n$

$f(2,n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n

តាម (iii): $f(2,n)=f(1,f(2,n-1))$

$f(2,n)=2014f(2,n-1)+2015$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

តាង $b_n=f(2,n)\Rightarrow b_{n-1}=f(2,n-1)$

យើងបាន $b_n=2014b_{n-1}+2015$

សមីការសម្គាល់ $t=2014t+2015\Rightarrow t=-\dfrac{2015}{2013}$

យើងបាន

$$b_n+\frac{2015}{2013}=2014b_n+2015+\frac{2015}{2013}$$

$$b_n+\frac{2015}{2013}=2014b_n+2014\cdot\frac{2015}{2013}$$

$$\Leftrightarrow b_n+\frac{2015}{2013}=2014\left(b_n+\frac{2015}{2013}\right)$$

តាង $c_n=b_n+\dfrac{2015}{2013}\Rightarrow c_n=2014c_{n-1}$

គេបានស្វ៊ីត (c_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q=2014$

និង $c_0 = b_0 + \frac{2015}{2013} = f(2\,,0) + \frac{2015}{2013} = f(1,1) + \frac{2015}{2013}$ តាម (ii)

$$c_0 = 2014 + 2015 + \frac{2015}{2013} = 2014\left(1 + \frac{2015}{2013}\right) = 2014\left(\frac{4018}{2013}\right)$$

$$\Rightarrow c_n = c_0 q^n = 2014\left(\frac{4018}{2013}\right)2014^n = \left(\frac{4018}{2013}\right)2014^{n+1}$$

$$\Rightarrow b_n + \frac{2015}{2013} = \left(\frac{4018}{2013}\right)2014^{n+1} \Rightarrow b_n = \left(\frac{4018}{2013}\right)2014^{n+1} - \frac{2015}{2013}$$

ដូចនេះ $f(2\,,n) = \left(\frac{4018}{2013}\right)2014^{n+1} - \frac{2015}{2013}$

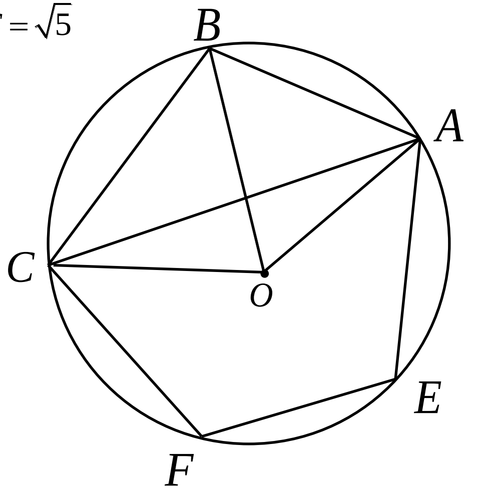
លំហាត់ទី២០

$ABCDE$ ជាបញ្ចកោណនិយ័តមួយចារឹកក្នុងរង្វង់ឯកតា។
បង្ហាញថា $AB \times AC = \sqrt{5}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $AB \times AC = \sqrt{5}$

របៀបទី១



តាមទ្រឹស្តីកបទកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ AOB

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\cdot OA\cdot OB\cos AOB$$

$$= 1+1-2\cdot\cos 72^\circ = 2-2\cdot\cos 72^\circ$$

$$= 2\left(1-\cos 72^\circ\right) = 4\sin^2 36^\circ$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{4\sin^2 36^\circ} = 2\sin 36^\circ = 4\sin 18^\circ\cos 18^\circ$$

តាមទ្រឹស្តីកបទកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ AOC

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2\cdot OA\cdot OC\cos AOC$$

$$= 1+1-2\cdot\cos 144^\circ = 2-2\cdot\cos 144^\circ$$

$$= 2\left(1-\cos 144^\circ\right) = 4\sin^2 72^\circ$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{4\sin^2 72^\circ} = 2\sin 72^\circ = 2\cos 18^\circ$$

$$\Rightarrow AB\cdot AC = 8\sin 18^\circ\cos^2 18^\circ$$

គណនា $\sin 18^\circ$ និង $\cos 18^\circ$

យើងមាន

$$\cos 36^\circ = 1-2\sin^2 18^\circ$$

$$\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \sin 3\cdot 18^\circ = 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ$$

តាង $t=\sin 18^\circ$, $0<t<\dfrac{1}{2}$

$$3t-4t^3 = 1-2t^2 \Leftrightarrow 4t^3-2t^2-3t+1=0$$

$$4t^3-4t^2+2t^2-2t-t+1=0$$

$$\left(4t^3-4t^2\right)+\left(2t^2-2t\right)-\left(t-1\right)=0$$

$$4t^2\left(t-1\right)+2t\left(t-1\right)-\left(t-1\right)=0$$

$$\left(t-1\right)\left(4t^2+2t-1\right)=0$$

$t-1=0\Rightarrow t=1$ មិនយក

$4t^2+2t-1=0\Rightarrow t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ តែ $0<t<\dfrac{1}{2}$

គេបាន $t=\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

$$\Rightarrow \cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}\sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\Rightarrow AB\cdot AC=8\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2$$

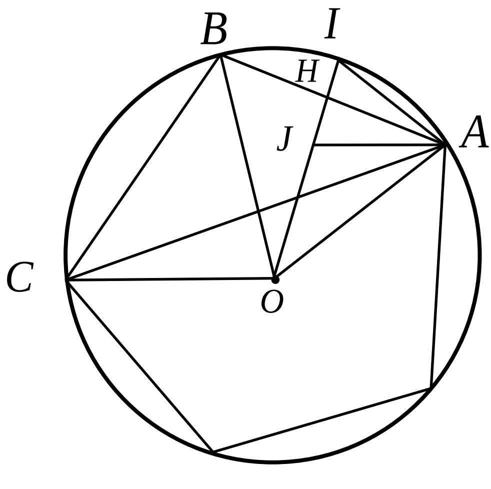
$$=2\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)\left(5+\sqrt{5}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)=\sqrt{5}$$

បង្ហាញថា $AB\times AC=\sqrt{5}$

របៀបទី២



សង់ OI ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ AOB ដែលកែងនឹង AB ត្រង់ H

AJ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ OAI យើងបាន

$$\angle AOI=\frac{1}{2}\angle AOB=36^\circ$$

$$\angle OAI=\frac{1}{2}\left(180^\circ-36^\circ\right)=72^\circ$$

$$\angle IAJ=\angle JAO=\frac{1}{2}\angle OAI=36^\circ$$

ΔIAJ សមបាតកំពូល A និង ΔAJO សមបាតកំពូល J

ហើយ $\Delta IAJ\sim\Delta AOI$

នាំ $\frac{IA}{OA}=\frac{IJ}{IA}\Rightarrow\frac{IA}{1}=\frac{1-OJ}{IA}=\frac{1-IA}{IA}$

គេបាន $IA^2+IA-1=0$

$$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-1)=5$$

$IA=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ឬ $IA=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}<0$ មិនយក

$$\Rightarrow IJ=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$IH=\frac{1}{2}IJ=\frac{1}{2}\times\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

ក្នុងត្រីកោណកែង AHI កែងត្រង់ H

$$AH^2=IA^2-IH^2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

$$AH=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\Rightarrow AB=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

ΔOKA និង ΔBKA កែងត្រង់ K (OB កែងនឹង AC ត្រង់ K)

$$KA^2=OA^2-OK^2=1-OK^2$$

$$KA^2 = AB^2 - BK^2 = \left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\right)^2 - (1-OK)^2$$

$$= \frac{10-2\sqrt{5}}{4} - 1 + 2KO - OK^2$$

$$\Rightarrow \frac{5-\sqrt{5}}{2} - 1 + 2KO - OK^2 = 1 - OK^2$$

$$2KO = 2 - \frac{5-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow OK = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\Rightarrow KA^2 = 1 - OK^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}$$

$$KA^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} \Rightarrow KA = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

គេបាន $AC = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$

$$\Rightarrow AB \times AC = \left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\right) = \frac{\sqrt{80}}{4} = \sqrt{5}$$

ដូចនេះ $AB \times AC = \sqrt{5}$

លំហាត់ទី២១

រកសំណល់នៃវិធីចែក $P(x) = x^{2015} + 1$ ចែកនឹង $x^2 - 2x + 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកសំណល់នៃវិធីចែក $P(x) = x^{2015} + 1$ ចែកនឹង $x^2 - 2x + 1$

របៀបទី១

$p(x)=x^{2015}+1$ ចែកនឹង $x^2-2x+1=(x-1)^2$

តាង $y=x-1\Rightarrow y^2=(x-1)^2$

គេបាន $x=y+1$

$$x^{2015}+1=(y+1)^{2015}+1=y^{2015}+2015y^{2014}+\cdots+2015y+1+1$$

$$x^{2015}+1=y^2\left(y^{2013}+2015y^{2012}+\cdots\right)+2015y+2\equiv 2015y+2\left(\bmod y^2\right)$$

$$\equiv 2015(x-1)+2\left(\bmod (x-1)^2\right)$$

$$\equiv 2015x-2013\left(\bmod (x-1)^2\right)$$

ដូចនេះ សំណល់នៃ $P(x)=x^{2015}+1$ ចែកនឹង x^2-2x+1 គឺ $2015x-2013$

របៀបទី២

សំណល់នៃ $P(x)=x^{2015}+1$ ចែកនឹង x^2-2x+1 គឺ $ax+b$

យើងមាន $P(x)=x^{2015}+1=Q(x)(x-1)^2+ax+b$

បើ $x=1\Rightarrow P(1)=a+b=2$

$P'(x)=2015x^{2014}$

ម្យ៉ាងទៀត $P'(x)=Q'(x)(x-1)^2+2(x-1)Q(x)+a$

$P'(x)=Q'(x)(x-1)^2+2(x-1)Q(x)+a=2015x^{2014}$

បើ $x=1\Rightarrow P'(1)=a=2015\Rightarrow b=-2013$

ដូចនេះ សំណល់នៃ $P(x)=x^{2015}+1$ ចែកនឹង x^2-2x+1 គឺ $2015x-2013$

ខ្ញុំដើរយឺត តែខ្ញុំមិនដើរថយក្រោយ !

លំហាត់ទី២២

រកអនុគមន៍ $f: IR \to IR$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$2014f\left(x-1\right)+2013f(1-x)=x\ ,\forall x\in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍ $f: IR \to IR$

របៀបទី១

តាង $a=2014\ ,\ b=2013$

យើងបាន $af\left(x-1\right)+bf\left(1-x\right)=x$

ជំនួស x ដោយ $x+1$

$af\left(x+1-1\right)+bf\left(1-x-1\right)=x+1$

$af\left(x\right)+bf\left(-x\right)=x+1\ (1)$

ជំនួស x ដោយ $-x$

$af\left(-x\right)+bf\left(x\right)=-x+1\ (2)$

យក (1) គុណនឹង a

$a^2f\left(x\right)+abf\left(-x\right)=ax+a\ (3)$

យក (2) គុណនឹង b

$abf\left(-x\right)+b^2f\left(x\right)=-bx+b\ (4)$

យក $(3)-(4)$ យើងបាន

$\left(a^2-b^2\right)f(x)=ax+bx+a-b$

$(a-b)(a+b)f(x)=(a+b)x+(a-b)$

$f(x)=\dfrac{x}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}$

តែ $a=2014$, $b=2013$

$$\Rightarrow f(x)=x+\frac{1}{4027}$$

ដូចនេះ $f(x)=x+\frac{1}{4027}$

រកអនុគមន៍ $f: IR \to IR$

របៀបទី២

យើងមាន: $2014f(x-1)+2013f(1-x)=x$

តាង $y=x-1 \Rightarrow -y=1-x$ គេបាន:

$$2014f(y)+2013f(-y)=y+1 \quad (1)$$

ជំនួស $y \to -y$ គេបាន:

$$2014f(-y)+2013f(y)=-y+1 \quad (2)$$

យក $(1)\times 2014-(2)\times 2013$:

$$\left(2014^2-2013^2\right)f(y)=4027y+1$$

$$4027f(y)=4027y+1$$

$$\Rightarrow f(y)=y+\frac{1}{4027}$$

$$\Rightarrow f(x)=x+\frac{1}{4027}$$

ដូចនេះ $f(x)=x+\frac{1}{4027}$; $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ និង $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ ចំពោះ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ។គេកំណត់ $y_n = x_n^2 + 2^{n+2}$

បង្ហាញថា y_n ជាការេនៃចំនួនគត់សេស ចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា y_n ជាការេនៃចំនួនគត់សេស ចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

របៀបទី១

យើងមាន $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ និង $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n \Leftrightarrow x_{n+2} - x_{n+1} = 2(x_{n+1} - x_n)$$

តាង $z_n = x_{n+1} - x_n$ ដែល $z_0 = x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1$

គេបាន $z_{n+1} = 2z_n$ នោះ z_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = 2$

$$z_n = z_0 q^n = 1 \times 2^n = 2^n$$

គេបាន $x_{n+1} - x_n = 2^n$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(x_{k+1} - x_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \Rightarrow x_n - x_1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$$

$$x_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 1 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$\Rightarrow y_n = \left(2^n - 1\right)^2 + 2^{n+2} = \left(2^n\right)^2 - 2 \times 2^n + 1 + 4 \times 2^n$$

$$= \left(2^n\right)^2 + 2 \times 2^n + 1 = \left(2^n + 1\right)^2$$

ដូចនេះ $y_n=\left(2^n+1\right)^2$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនសេស

របៀបទី២

យើងមាន $x_0=0$, $x_1=1$ និង $x_{n+2}=3x_{n+1}-2x_n$

ចំពោះ $n=0,1,2,3,...$ យើងមាន:

$$x_0=0=2^0-1$$
$$x_1=1=2^1-1$$
$$x_2=3=2^2-1$$
....
$$x_n=\quad 2^n-1$$

យើងនឹងស្រាយឲ្យពិតដល់ $n+1$

$$x_{n+1}=3x_n-2x_{n-1}=3\left(2^n-1\right)-2\left(2^{n-1}-1\right)$$
$$=3\times2^n-3-2^n+2=2^{n+1}-1$$

គេបាន $x_n=2^n-1$

$$\Rightarrow y_n=\left(2^n-1\right)^2+2^{n+2}=\left(2^n\right)^2-2\times2^n+1+4\times2^n$$
$$=\left(2^n\right)^2+2\times2^n+1=\left(2^n+1\right)^2$$

ដូចនេះ $y_n=\left(2^n+1\right)^2$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់សេស

របៀបទី៣

យើងមាន $x_0=0$, $x_1=1$ និង $x_{n+2}=3x_{n+1}-2x_n$

សមីការសម្គាល់

$r^2-3r+2=0$ សមីការមានឫស $r_1=1$, $r_2=2$

គេបាន $x_n=A\times1^n+B\times2^n$

$$x_0=A\times1^0+B\times2^0\Rightarrow A+B=0\ (1)$$
$$x_1=A\times1^1+B\times2^1\Rightarrow A+2B=1\ (2)$$

យក $(2)-(1)$ យើងបាន

$B=1 \Rightarrow A=-1$

គេបាន $x_n = 2^n - 1$

$\Rightarrow y_n = \left(2^n - 1\right)^2 + 2^{n+2} = \left(2^n\right)^2 - 2\times 2^n + 1 + 4\times 2^n$

$= \left(2^n\right)^2 + 2\times 2^n + 1 = \left(2^n + 1\right)^2$

ដូចនេះ $y_n = \left(2^n + 1\right)^2$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់សេស ។

លំហាត់ទី២៤

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានអរតូសង់ H ដែលកំណត់លើកម្ពស់ AA' បានផលធៀប $\frac{AH}{HA'} = k$ ដែល k ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា: $\tan B \tan C = k+1$, $\tan B + \tan C = k \tan A$

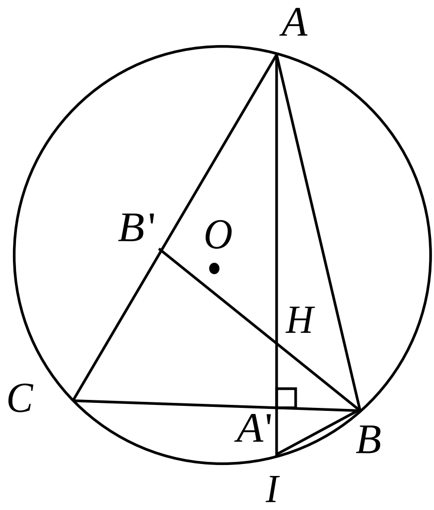
និង $cos\left(B-C\right) = \frac{k+2}{k} cosA$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\tan B \tan C = k+1$, $\tan B + \tan C = k \tan A$

និង $cos\left(B-C\right) = \frac{k+2}{k} cosA$

របៀបទី១



+បង្ហាញថា $\tan B \tan C = k+1$

តាង I ជាចំនុចប្រសព្វរវាងរង្វង់ផ្ចិត O ដែលចារឹក ក្រៅត្រីកោណ ABC និង AA' ។ ក្នុងត្រីកោណកែង $AA'B$ និង $AA'C$ មាន:

$$\tan B \tan C = \frac{AA'}{BA'} \times \frac{AA'}{CA'} = \frac{AA' \cdot AA'}{BA' \cdot CA'} \quad (1)$$

ត្រីកោណកែង $A'AC$ ដូចត្រីកោណកែង $A'BI$ ព្រោះ

$\angle AA'C = \angle BA'I = 90^\circ$

$\angle CAA' = \angle IBA'$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម CI)

វិបាក $\frac{AA'}{BA'} = \frac{CA'}{IA'} \Rightarrow AA' \cdot IA' = BA' \cdot CA'$

$BA' \cdot CA' = AA' \cdot HA'$ ព្រោះ $IA' = HA'$

តាម (1) គេបាន:

$$\tan B \tan C = \frac{AA' \cdot AA'}{BA' \cdot CA'} = \frac{AA' \cdot AA'}{AA' \cdot HA'} = \frac{AA'}{HA'}$$

$= \dfrac{AH + HA'}{HA'}$

$= \dfrac{AH}{HA'} + 1$

$= k + 1$

ដូចនេះ $\tan B \tan C = k + 1$

+បង្ហាញថា $\tan B + \tan C = k \tan A$

$\tan B + \tan C = \dfrac{sin(B+C)}{\cos B cosC}$ (2)

តែ $\tan B \tan C = k + 1 \Leftrightarrow \sin B sinC = (k+1)\cos B cosC$

$\sin B sinC = k \cos B cosC + \cos B cosC$

$-k \cos B cosC = \cos B cosC - \sin B sinC$

$-k \cos B cosC = cos(B+C)$

$\Rightarrow \cos B cosC = -\dfrac{cos(B+C)}{k}$

តាម (2) គេបាន:

$\tan B + \tan C = -k \times \dfrac{sin(B+C)}{cos(B+C)}$

$= -k \tan(B+C)$

$= -k \tan(\pi - A) = k \tan A$

ដូចនេះ $\tan B + \tan C = k \tan A$

+បង្ហាញថា $cos\left(B - C\right) = \dfrac{k+2}{k} cosA$

យើងមាន:

$cos\left(B - C\right) = \cos B cosC + \sin B sinC$

$= \cos B cosC + (k+1)\cos B cosC$

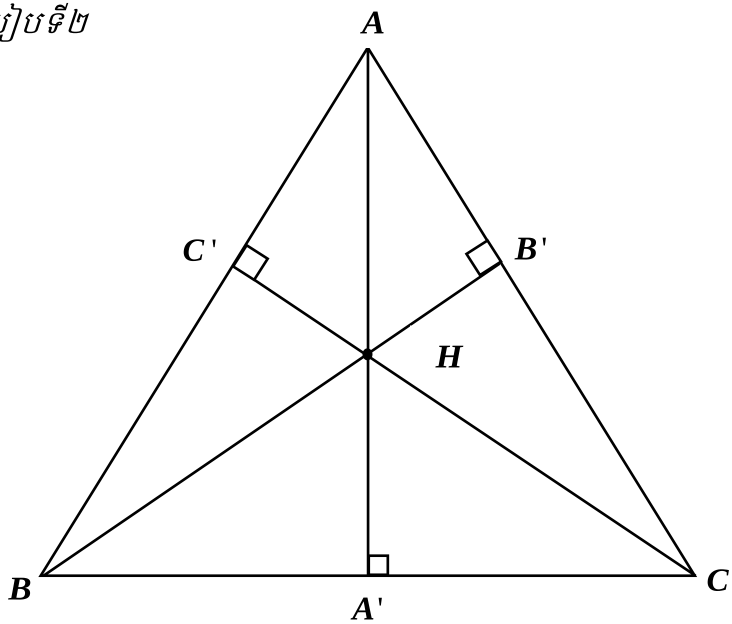
$= (k+2)\cos B cosC$

តែ $\cos B cosC = -\dfrac{cos(B+C)}{k}$

$$\Rightarrow cos\left(B-C\right)=-\frac{k+2}{k}cos(B+C)$$
$$=-\frac{k+2}{k}cos(\pi-A)$$
$$=\frac{k+2}{k}cosA$$

ដូចនេះ $cos\left(B-C\right)=\frac{k+2}{k}cosA$

របៀបទី២



+បង្ហាញថា $\tan B\tan C=k+1$

សង់កម្ពស់ AA', BB', CC' ប្រសព្វគ្នាត្រង់ H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ ABC ។

ក្នុងត្រីកោណ $AA'B$ និង $AA'C$ គេមាន:

$\tan B=\frac{AA'}{A'B}$, $\tan C=\frac{AA'}{A'C}$

គេបាន: $\tan B \tan C = \dfrac{AA'^2}{A'B.A'C}$ (*)

ត្រីកោណកែង $A'HB$ និង $A'CA$ មាន $\angle HBA' = \angle A'AC$ (មុំមានជ្រុងកែងរៀងគ្នា) នោះត្រីកោណកែងទាំងពីរជាត្រីកោណដូចគ្នា គេបានផលធៀបដំណូច $\dfrac{A'H}{A'C} = \dfrac{A'B}{A'A}$

$\Rightarrow A'B.A'C = AA'A'H$ (**)

យក (**) ជំនួសក្នុង (*) គេបាន: $\tan B \tan C = \dfrac{AA'^2}{AA'A'H} = \dfrac{AA'}{A'H}$

$$= \frac{AH + A'H}{A'H} = \frac{AH}{A'H} + 1$$

តែ $\dfrac{AH}{A'H} = k$ យើងបាន: $\tan B \tan C = k + 1$ ពិត ។

ដូចនេះ $\tan B \tan C = k + 1$ ។

+បង្ហាញថា $\tan B + \tan C = k \tan A$

ដោយ $\tan B = \dfrac{AA'}{BA'}$ និង $\tan C = \dfrac{AA'}{A'C}$ (សម្រាយខាងលើ)

គេបាន:

$$\tan B + \tan C = \frac{AA'}{BA'} + \frac{AA'}{A'C} = \frac{AA'(BA' + A'C)}{BA'.A'C} = \frac{AA'.BC}{A'B.A'C} \quad (***)$$

យក (**) ជំនួសក្នុង (***) គេបាន:

$$\tan B + \tan C = \frac{AA'.BC}{A'H.AA'} = \frac{BC}{A'H} = \frac{AH}{A'H} \cdot \frac{BC}{AH} = k \cdot \frac{BC}{AH} \quad (1)$$

ក្នុងត្រីកោណកែង BCB' និង AHB' មានមុំ $\angle CBB' = \angle HAB'$ (មុំមានជ្រុងកែងរៀងគ្នា) នោះត្រីកោណទាំងពីរជាត្រីកោណកែងដូចគ្នា ។ គេបានផលធៀបដំណូច $\dfrac{BC}{AH} = \dfrac{BB'}{AB'} = \tan A$ (2)

យក (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $\tan B + \tan C = k \tan A$ ពិត ។

+បង្ហាញថា $cos\left(B-C\right)=\dfrac{k+2}{k}cosA$

គេមាន: $\cos(B-C)+\cos(B+C)=2\cos B\cos C$

និង $\cos(B-C)-\cos(B+C)=2\sin B\sin C$

គេបាន: $\dfrac{\cos(B-C)-\cos(B+C)}{\cos(B-C)+\cos(B+C)}=\dfrac{2\sin B\sin C}{2\cos B\cos C}=\tan B\tan C$

ដោយ $\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$

ហើយ $\tan B\tan C=k+1$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

គេបាន: $\dfrac{\cos(B-C)+\cos A}{\cos(B-C)-\cos A}=k+1$

ឬ $(k+1)\cos(B-C)-(k+1)\cos A=\cos(B-C)+\cos A$

ឬ $k\cos(B-C)=(k+2)\cos A$ នោះ $cos\left(B-C\right)=\dfrac{k+2}{k}cosA$ ពិត

ដូចនេះ $cos\left(B-C\right)=\dfrac{k+2}{k}cosA$

លំហាត់ទី២៥

ត្រីកោណ ABC មួយមានមុំទាំងបី A, B, C និង បរិមាត្រ $2p$ ។

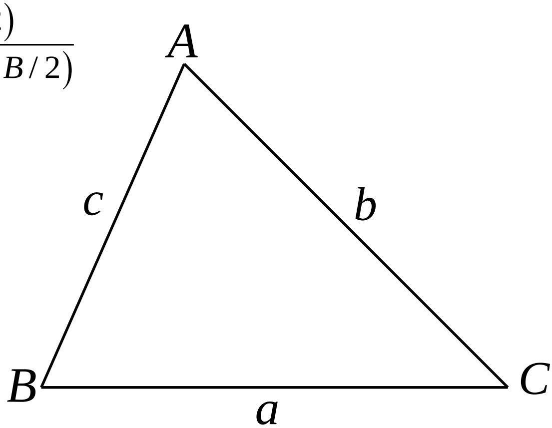
បង្ហាញថា: $BC=\dfrac{psin\left(A/2\right)}{\cos\left(B/2\right)\cos\left(C/2\right)}$, $AC=\dfrac{psin\left(B/2\right)}{\cos\left(A/2\right)\cos\left(C/2\right)}$

និង $AB=\dfrac{psin\left(C/2\right)}{\cos\left(A/2\right)\cos\left(B/2\right)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $BC=\dfrac{psin\left(A/2\right)}{\cos\left(B/2\right)\cos\left(C/2\right)}$, $AC=\dfrac{psin\left(B/2\right)}{\cos\left(A/2\right)\cos\left(C/2\right)}$

និង $AB=\dfrac{psin\left(C/2\right)}{\cos\left(A/2\right)\cos\left(B/2\right)}$



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស:

យើងបាន: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2p}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2p}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\frac{p}{\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\frac{p}{\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)}=\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\Rightarrow BC=\frac{p\sin A}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$BC=\frac{2p\sin(A/2)\cos(A/2)}{2\cos(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2)}=\frac{p\sin(A/2)}{\cos(B/2)\cos(C/2)}$$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន:

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\Rightarrow AC=\frac{p\sin B}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$AC=\frac{2p\sin(B/2)\cos(B/2)}{2\cos(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2)}=\frac{p\sin(B/2)}{\cos(A/2)\cos(C/2)}$$

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\Rightarrow AB=\frac{p\sin C}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$AB=\frac{2p\sin(C/2)\cos(C/2)}{2\cos(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2)}=\frac{p\sin(C/2)}{\cos(A/2)\cos(B/2)}$$

ដូចនេះ $BC=\dfrac{psin\left(A/2\right)}{\cos\left(B/2\right)\cos\left(C/2\right)}$, $AC=\dfrac{psin\left(B/2\right)}{\cos\left(A/2\right)\cos\left(C/2\right)}$

និង $AB=\dfrac{psin\left(C/2\right)}{\cos\left(A/2\right)\cos\left(B/2\right)}$

លំហាត់ទី២៦

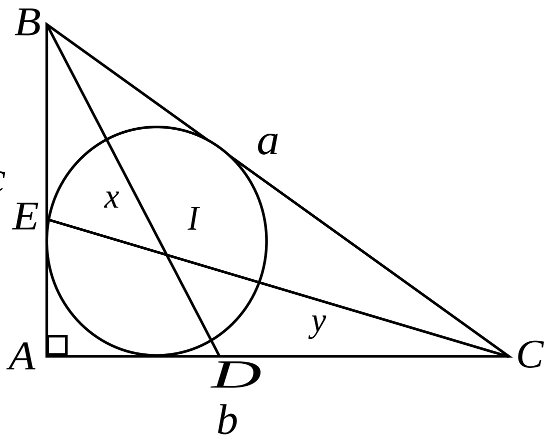
ត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A ហើយ $BC=a$ ។ អង្កត់ពុះក្នុងនៃមុំ B និង C មានរង្វាស់ x និង y ដែល $xy=m^2$ ។

១/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin\left(B/2\right)\sin\left(C/2\right)=\dfrac{m^2}{4a^2}$

២/ ចំណុច I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|BI|\cdot|CI|=\dfrac{1}{2}m^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

១/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin\left(B/2\right)\sin\left(C/2\right)=\dfrac{m^2}{4a^2}$



ក្នុងត្រីកោណកែង ABC

$$\begin{cases} \sin B = \dfrac{b}{a} \\ \sin C = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \sin B \sin C = \frac{b}{a} \times \frac{c}{a} = \frac{bc}{a^2}$$

ក្នុងត្រីកោណកែង ABD

$$\cos\frac{B}{2} = \frac{c}{x}$$

ក្នុងត្រីកោណកែង ACE

$$\cos\frac{C}{2} = \frac{b}{y}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{bc}{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B \sin C}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{bc}{a^2} \times \frac{xy}{bc} = \frac{xy}{a^2}$$

តែ $xy = m^2$

$$\Rightarrow \frac{\sin B\sin C}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{m^2}{a^2}$$

$$\frac{4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{m^2}{a^2}$$

$$4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{m^2}{a^2}\Rightarrow \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{m^2}{4a^2}$$

ដូចនេះ $\sin(B/2)\sin(C/2)=\dfrac{m^2}{4a^2}$

២/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|BI|\cdot|CI|=\dfrac{1}{2}m^2$

ក្នុងត្រីកោណ IBC មាន:

$$\angle BIC=180^\circ-\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=180^\circ-45^\circ=135^\circ$$

$$\sin\angle BIC=\sin 135^\circ=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស:

$$\frac{BI}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{CI}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{BC}{\sin\angle BIC}\Leftrightarrow\frac{BI}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{CI}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=a\sqrt{2}$$

$$\frac{BI}{\sin\frac{C}{2}}=a\sqrt{2}\Rightarrow BI=a\sqrt{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\frac{CI}{\sin\frac{B}{2}}=a\sqrt{2}\Rightarrow CI=a\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}$$

យើងបាន: $BI\cdot CI=a\sqrt{2}\sin\dfrac{C}{2}\cdot a\sqrt{2}\sin\dfrac{B}{2}$

$$BI\cdot CI=2a^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=2a^2\cdot\frac{m^2}{4a^2}=\frac{m^2}{2}$$

ដូចនេះ $|BI|\cdot|CI|=\frac{1}{2}m^2$

លំហាត់ទី២៧

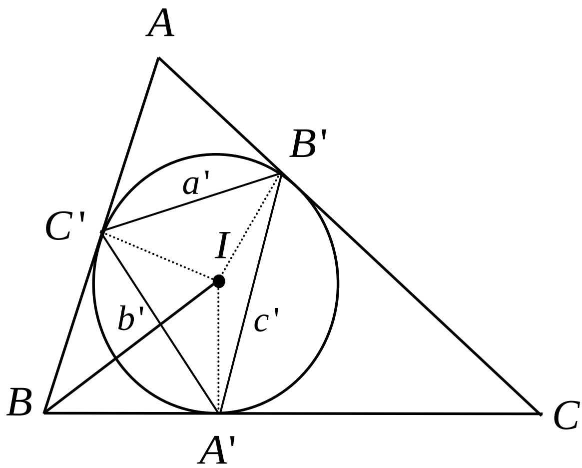
ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ និង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ហើយដែលរង្វង់នេះប៉ះជ្រុង BC , AC , AB រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច A' , B' , C' ។ តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC និង S' ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ $A'B'C'$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{S'}{S}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{S'}{S}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

របៀបទី១

គេមាន: $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ និង $B'C'=a'$, $A'C'=b'$, $A'B'=c'$



យើងមានចតុកោណ $AC'IB'$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

$$\Rightarrow \angle C'IB' = 180^\circ - \angle A$$

តែ $\angle A' = \frac{1}{2}\angle B'IC' \Rightarrow \angle A' = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន:

$\angle B' = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B$ និង $\angle C' = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C$

យើងមាន: $S = \frac{1}{2}ab\sin C$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a\sin B}{\sin A}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A}$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរយើងបាន:

$$S' = \frac{1}{2}(a')^2\frac{\sin B'\sin C'}{\sin A'}$$

តែ $\sin B' = \sin\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) = \cos\frac{B}{2}, \sin C' = \cos\frac{C'}{2}$, $\sin A' = \cos\frac{A'}{2}$

$$\Rightarrow S' = \frac{1}{2}(a')^2\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

យើងបាន: $\frac{S'}{S} = \frac{(a')^2}{a}\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

ម្យ៉ាងទៀត $a = BC = BA' + A'C$

$$a = r\cot\frac{B}{2} + r\cot\frac{C}{2} = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

$$a = r\cdot\frac{\sin\left(\left(B+C\right)/2\right)}{\sin\left(B/2\right)\sin\left(C/2\right)} = r\cdot\frac{\cos\left(A/2\right)}{\sin\left(B/2\right)\sin\left(C/2\right)}$$

$$a' = B'C' = 2r\sin A' = 2r\cos\frac{A}{2}$$

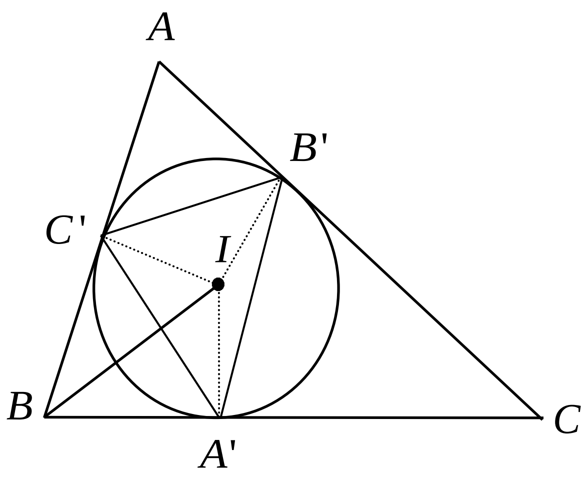
$$\Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{2r\cos\frac{A}{2}}{r\cdot\frac{\cos\left(A/2\right)}{\sin\left(B/2\right)\sin\left(C/2\right)}} = 2\sin\left(B/2\right)\sin\left(C/2\right)$$

យើងបាន:

$$\frac{S'}{S} = \left(2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2\times\frac{\sin(A/2)}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ដូចនេះ $\frac{S'}{S} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ។

របៀបទី២



តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC

p កន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC

$\angle B'IC' = \alpha$, $\angle B'IA' = \beta$, $\angle C'IA' = \gamma$

ក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ ABC គឺ $S = pr$ (*)

ហើយ $S' = S_{IB'C'} + S_{IA'B'} + S_{IA'C'}$

$= \frac{1}{2}r^2 \sin\alpha + \frac{1}{2}r^2 \sin\beta + \frac{1}{2}r^2 \sin\gamma$

$= \frac{1}{2}r^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ (1)

ដោយចតុកោណ $AC'IB', BC'IA', CB'IA'$, មានផលបូកមុំឈមស្មើ 180^0 នោះចតុកោណទាំងបីសុទ្ធតែចារឹកក្នុងរង្វង់ ។

គេបាន: $\alpha + A = \pi \Rightarrow A = \pi - \alpha \Rightarrow \sin A = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន: $\sin B = \sin\beta$, $\sin C = \sin\gamma$

តាម (1) យើងបាន: $S' = \frac{1}{2}r^2(\sin A + \sin B + \sin C)$ (2)

យើងមាន:

$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cdot\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$

$= 2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}$

$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

តាម (2) យើងបាន: $S' = \frac{1}{2}r^2\left(4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$

$= 2r^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ (**)

យក (*) ធៀបនឹង (**) គេបាន: $\frac{S'}{S}=\frac{2r}{p}\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

តែ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$, $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

នាំឲ្យ $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}=\frac{ps}{abc}$

យើងបាន: $\frac{S'}{S}=\frac{2rs}{abc}$ (i)

យើងមាន:

$Sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$

$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=\frac{\frac{S^2}{p}}{abc}=\frac{S^2}{pabc}=\frac{S^2}{\frac{S}{r}abc}$$

$$=\frac{Sr}{abc}\quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេបាន: $\frac{S'}{S}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

ដូចនេះ: $\frac{S'}{S}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ។

"ជីវិតខ្ញុំ ខ្ញុំជាអ្នកក្តោបក្តាប់"
កុំខ្វល់នឹងពាក្យសើចចំអករបស់គេ ហើយក៏មិនចាំបាច់គេចពីគេដែរ
ត្រូវបង្ហាញឲ្យពួកគេដឹងថាយើងក៏អាចធ្វើបានដូចគេដែរ ។
"កុំបោះបង់គោលដៅរបស់ខ្លួន កុំបរាជ័យដោយសារតែគេនិយាយ
ព្រោះនេះជាជីវិតរបស់យើង ត្រូវតស៊ូ និងសង្ឃឹម"

លំហាត់ទី២៨

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A=\dfrac{(2014m)!}{(m!)^{2014}\times 2014!}$ ជាចំនួនគត់ចំពោះ $m=1,2,3,\ldots$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A=\dfrac{(2014m)!}{(m!)^{2014}\times 2014!}$ ជាចំនួនគត់ចំពោះ $m=1,2,3,\ldots$

យើងមាន: $\dfrac{(2014m)!}{(m!)^{2014}}=\dfrac{(2014m)!}{m!\cdot(2013m)!}\cdot\dfrac{(2013m)!}{m!\cdot(2012m)!}\cdot\dfrac{(2012m)!}{m!\cdot(2011m)!}\cdot\ldots\cdot\dfrac{(2m)!}{m!\cdot m!}$

$=C(2014m,m)\cdot C(2013m,m)\cdot C(2012m,m)\cdot\ldots\cdot C(2m,m)$, $C_n^r=\dfrac{n}{r}C_{n-1}^{r-1}$

$=2014C(2014m-1,m-1)\cdot 2013C(2013m-1,m-1)\cdot\ldots\cdot 2C(2m-1,m-1)$

$=2014!C(2014m-1,m-1)\cdot C(2013m-1,m-1)\cdot\ldots\cdot C(2m-1,m-1)$

ដោយ $C(2014m-1,m-1),C(2013m-1,m-1),\ldots,C(2m-1,m-1)$

សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ ។

ដូចនេះ $A=\dfrac{(2014m)!}{(m!)^{2014}\times 2014!}$ ជាចំនួនគត់ ។

លំហាត់ទី២៩

បង្ហាញថា $1+\sqrt{\dfrac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{3+1}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{4+1}{4}}+\ldots+\sqrt[2013]{\dfrac{2013+1}{2013}}<2014$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $1+\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+1}{3}}+\sqrt[4]{\frac{4+1}{4}}+\ldots+\sqrt[2013]{\frac{2013+1}{2013}}<2014$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ យើងបាន:

$$\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}}=\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\ldots\cdot 1}\leq\frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{k}+1+1+1+\ldots+1\right)$$

$$\leq\frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{k}+(k-1)\right)$$

$$\leq\frac{k+1}{k^2}+\frac{k^2-k}{k^2}$$

$$\leq 1+\frac{1}{k^2}$$

ដោយសញ្ញា $(=)$ មិនអាចកើតឡើងកាលណា $k=2,3,4,\ldots,2013$

យើងបាន:

$$\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+1}{3}}+\sqrt[4]{\frac{4+1}{4}}+\ldots+\sqrt[2013]{\frac{2013+1}{2013}}<\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2013^2}\right)$$

$$<(1+1+\ldots+1)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2013^2}\right)$$

$$<2012+\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{2012\times 2013}\right)$$

$$<2012+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right)$$

$$<2013-\frac{1}{2013}$$

$$\Rightarrow 1+\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+1}{3}}+\sqrt[4]{\frac{4+1}{4}}+\ldots+\sqrt[2013]{\frac{2013+1}{2013}}<2014-\frac{1}{2013}<2014$$

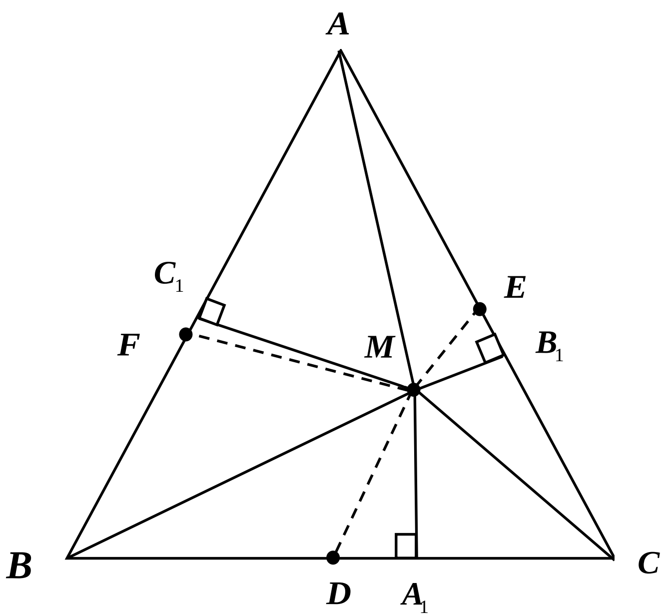
ដូចនេះ $1+\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+1}{3}}+\sqrt[4]{\frac{4+1}{4}}+\ldots+\sqrt[2013]{\frac{2013+1}{2013}}<2014$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យចំណុច M មួយនៅក្នុងត្រីកោណសម័ង្ស ABC ។ ពី M គូសបន្ទាត់កែងនឹងជ្រុង BC , AC និង AB រៀងគ្នាត្រង់ A_1 , B_1 និង C_1 ។ រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់: $P=\dfrac{MA^2+MB^2+MC^2}{\left(MA_1+MB_1+MC_1\right)^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់: $P=\dfrac{MA^2+MB^2+MC^2}{\left(MA_1+MB_1+MC_1\right)^2}$



ដៅ D , E , F ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃ BC , CA , AB

តាង a ជាជ្រុងត្រីកោណសម័ង្ស

យើងមាន: $S_{ABC} = S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAB}$ (1)

តែ $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

ហើយ $S_{MBC} = \dfrac{1}{2}aMA_1$, $S_{MCA} = \dfrac{1}{2}aMB_1$, $S_{MAB} = \dfrac{1}{2}aMC_1$

តាម (1) គេបាន: $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2}a\left(MA_1 + MB_1 + MC_1\right)$

$$MA_1 + MB_1 + MC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

យើងមាន: $MB^2 + MC^2 = 2MD^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

$$\Rightarrow MD^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

ដូចគ្នា: $ME^2 = \dfrac{MA^2 + MC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4}$

$$MF^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$$

យើងបាន:

$$MD^2 + ME^2 + MF^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4}$$

$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{3a^2}{4}$$

នាំឲ្យ: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = MD^2 + ME^2 + MF^2 + \dfrac{3a^2}{4}$ (3)

តែ $MA_1 + MB_1 + MC_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\left(MA_1 + MB_1 + MC_1\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

តាម (3) គេបាន:

$$MA^2+MB^2+MC^2=MD^2+ME^2+MF^2+\left(MA_1+MB_1+MC_1\right)^2 \quad (*)$$

យើងមាន: $MD^2+ME^2+MF^2\geq MA_1^2+MB_1^2+MC_1^2$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz:$

$$\left(MA_1^2+MB_1^2+MC_1^2\right)\left(1^2+1^2+1^2\right)\geq\left(MA_1+MB_1+MC_1\right)^2$$

$$MA_1^2+MB_1^2+MC_1^2\geq\frac{1}{3}\left(MA_1+MB_1+MC_1\right)^2$$

តាម (*) គេបាន: $MA^2+MB^2+MC^2\geq\frac{4}{3}\left(MA_1+MB_1+MC_1\right)^2$

$$\frac{MA^2+MB^2+MC^2}{\left(MA_1+MB_1+MC_1\right)^2}\geq\frac{4}{3}$$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតរបស់: $P=\dfrac{MA^2+MB^2+MC^2}{\left(MA_1+MB_1+MC_1\right)^2}$ គឺ: $\dfrac{4}{3}$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យ $[x]$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុត មិនលើសពី x , $\{x\}=x-[x]$ ។
រកគ្រប់បណ្តាចំនួនពិត $x\neq 0$ ដើម្បីឲ្យបីចំនួន: $x,[x],\{x\}$
បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

រកគ្រប់បណ្តាចំនួនពិត $x\neq 0$ ដើម្បីឲ្យបើចំនួន: $x,[x],\{x\}$
បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ:

ដោយ $x,[x],\{x\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រគេបាន: $x.\{x\}=[x]^2$

សមមូល $x\left(x-[x]\right)=[x]^2$

$$x^2-[x]x-[x]^2=0$$

តាម $\Delta=[x]^2+4[x]^2$

សមីការមានចម្លើយ: $x=\frac{[x]\pm\sqrt{[x]^2+4[x]^2}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}[x]$

ដោយ $\{x\}=x-[x]=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}[x]$ និង $0\neq\{x\}<1$

នាំឲ្យ $0\neq\{x\}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).[x]<1$ ឬ $0\leq[x]<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

តែ $x\neq 0$ នោះយើងបាន: $[x]=1\Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

ដូចនេះ $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣២

ឧបមាថា ត្រីកោណ T_1 មានក្រឡាផ្ទៃ P រង្វាស់ជ្រុង a,b,c ។
ត្រីកោណ T_2 មានក្រឡាផ្ទៃ Q រង្វាស់ជ្រុង i,j,k ។
បង្ហាញថា:
$16PQ\leq a^2\left(-i^2+j^2+k^2\right)+b^2\left(i^2-j^2+k^2\right)+c^2\left(i^2+j^2-k^2\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា:

$$16PQ\leq a^2\left(-i^2+j^2+k^2\right)+b^2\left(i^2-j^2+k^2\right)+c^2\left(i^2+j^2-k^2\right)$$

តាង α,β ជាមុំរបស់ត្រីកោណ T_1 និង T_2 រៀងគ្នា ដែលឈមនឹងជ្រុងរង្វាស់ c និង k ។

ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ: $2P=ab\sin\alpha$, $2Q=i.j\sin\beta$

ឧបមាថា:

$$16PQ \le a^2\left(-i^2+j^2+k^2\right)+b^2\left(i^2-j^2+k^2\right)+c^2\left(i^2+j^2-k^2\right)$$

យើងបាន:

$$4abij\sin\alpha\sin\beta \le a^2\left(-i^2+j^2+k^2\right)+b^2\left(i^2-j^2+k^2\right)+c^2\left(i^2+j^2-k^2\right)$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស: $k^2=i^2+j^2-2ij\cos\beta$

$$\Rightarrow -i^2+j^2+k^2=-i^2+j^2+i^2+j^2-2ij\cos\beta=2j^2-2ij\cos\beta$$

$$\Rightarrow i^2-j^2+k^2=i^2-j^2+i^2+j^2-2ij\cos\beta=2i^2-2ij\cos\beta$$

$$\Rightarrow i^2+j^2-k^2=i^2+j^2-i^2-j^2+2ij\cos\beta=2ij\cos\beta$$

យើងទាញបាន:

$$4abij\sin\alpha\sin\beta \le a^2\left(2j^2-2ij\cos\beta\right)+b^2\left(2i^2-2ij\cos\beta\right)+c^2.2ij\cos\beta$$

តែ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$

យើងបាន: $4abij\sin\alpha\sin\beta \le a^2\left(2j^2-2ij\cos\beta\right)+b^2\left(2i^2-2ij\cos\beta\right)$

$$+\left(a^2+b^2-2ab\cos\alpha\right).2ij\cos\beta$$

$$\Leftrightarrow 4abij\sin\alpha\sin\beta \le 2a^2j^2-2a^2ij\cos\beta+2b^2i^2-2b^2ij\cos\beta$$

$$+2a^2ij\cos\beta+2b^2ij\cos\beta-4abij\cos\alpha\cos\beta$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2j^2+b^2i^2\right)-4abij(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2(aj-bi)^2+4abij\left[1-\cos(\alpha-\beta)\right]\ge 0 \quad (1)$$

ដោយ $(aj-bi)^2\ge 0$, $4abij>0$, $1-\cos(\alpha-\beta)\ge 0$

នាំឲ្យ (1) ពិត

ដូចនេះ $16PQ \le a^2\left(-i^2+j^2+k^2\right)+b^2\left(i^2-j^2+k^2\right)+c^2\left(i^2+j^2-k^2\right)$

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតពីរ (x_n) និង (y_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$x_{n+1}=x_n^3-3x_n$, $y_{n+1}=y_n^3-3y_n$ $(\forall n\ge 1)$ និង $x_1^2=y_1+2$ ។

បង្ហាញថា: $x_n^2=y_n+2$ ចំពោះ $n\ge 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $x_n^2=y_n+2$ ចំពោះ $n\geq 1$

យើងនឹងស្រាយតាមវិចារកំណើន:

-បើ $n=1$ គេបាន: $x_1^2=y_1+2$ ពិត

-ឧបមាថាពិតដល់ $n=k$ គឺ $x_k^2=y_k+2$ ពិត

-បន្តស្រាយឲ្យពិតដល់ $n=k+1$ គឺ $x_{k+1}^2=y_{k+1}+2$

យើងមាន: $x_{k+1}^2=\left(x_k^3-3x_k\right)^2=x_k^6-6x_k^4+9x_k^2$

$$=\left(y_k+2\right)^3-6\left(y_k+2\right)^2+9\left(y_k+2\right)$$

$$=y_k^3-3y_k+2=y_{k+1}+2 \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $x_n^2=y_n+2$ ចំពោះ $n\geq 1$ ។

លំហាត់ទី៣៤

រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តូចបំផុត ដែល n មានសំណល់ $1,2,3$ 4 និង 5 ពេលចែកនឹង $2,3,4,5$ និង 6 រៀងគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តូចបំផុត:

យើងមាន: $n\equiv 1 \pmod 2$

$$\equiv 2 \pmod 3$$

$$\equiv 3 \pmod 4$$

$$\equiv 4 \pmod 5$$

$$\equiv 5 \pmod 6$$

$$\Rightarrow n+1\equiv 0 \pmod 2$$

$$\equiv 0 \pmod 3$$

$\equiv 0 \pmod 4$

$\equiv 0 \pmod 5$

$\equiv 0 \pmod 6$

យើងបាន: $n+1 = PPCM(2,3,4,5,6) = 60$

នាំឲ្យ $n = 60-1 = 59$

ដូចនេះ $n = 59$ ។

លំហាត់ទី៣៥

ចូររកសំណល់នៃការចែក $(1332)^{9876543}$ នឹង 121 ។

ដំណោះស្រាយ

ចូររកសំណល់នៃការចែក $(1332)^{9876543}$ នឹង 121

យើងមាន: $(1332)^{9876543} = (1331+1)^{9876543}$

$$
\begin{aligned}
&= (1331)^{9876543} + (1331)^{9876542} + \cdots + (1331) + 1 \\
&= 1331\left[(1331)^{9876542} + (1331)^{9876541} + \cdots + 1\right] + 1 \\
&= 1331N + 1 \\
&= 121(11N) + 1
\end{aligned}
$$

ដែល $N = (1331)^{9876542} + (1331)^{9876541} + \cdots + 1$

ដូចនេះសំណល់នៃការចែក $(1332)^{9876543}$ នឹង 121 គឺ 1 ។

លំហាត់ទី៣៦

រកតម្លៃនៃ $A = \tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2\times 2^2} + \cdots + \tan^{-1}\frac{1}{2\times 2016^2}\right)$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃនៃ $A=\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{2\times 2^2}+\cdots+\tan^{-1}\frac{1}{2\times 2016^2}\right)$

យើងមាន: $\frac{1}{2k^2}=\frac{2}{1+4k^2-1}=\frac{(2k+1)-(2k-1)}{1+(2k+1)(2k-1)}$

តាង $\tan x=2k+1\Rightarrow x=\tan^{-1}(2k+1)$

$\tan y=2k-1\Rightarrow y=\tan^{-1}(2k-1)$

គេបាន: $\frac{1}{2k^2}=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}=\tan(x-y)$

$$\tan^{-1}\frac{1}{2k^2}=\tan^{-1}\left[\tan(x-y)\right]=x-y$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{2k^2}=\tan^{-1}(2k+1)-\tan^{-1}(2k-1)$$

$$\sum_{k=1}^{2016}\tan^{-1}\frac{1}{2k^2}=\sum_{k=1}^{2016}\left[\tan^{-1}(2k+1)-\tan^{-1}(2k-1)\right]$$

$$=\tan^{-1}(4033)-\tan^{-1}1$$

$$\Rightarrow \tan\left(\sum_{k=1}^{2016}\tan^{-1}\frac{1}{2k^2}\right)=\tan\left[\tan^{-1}(4033)-\tan^{-1}1\right]$$

$$=\frac{\tan\left(\tan^{-1}4033\right)-\tan\left(\tan^{-1}1\right)}{1-\tan\left(\tan^{-1}4033\right).\tan\left(\tan^{-1}1\right)}$$

$$=\frac{4033-1}{1+4033.1}=\frac{4032}{4034}$$

ដូចនេះ $A=\frac{4032}{4034}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

គេឲ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:
$\frac{\sqrt{6}}{xy}+\frac{\sqrt{2}}{yz}+\frac{\sqrt{3}}{zx}=6$ ។ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម:

$$P=\frac{\sqrt{6x^2+3}-\sqrt{3}}{x}+\frac{\sqrt{6y^2+2}-\sqrt{2}}{y}+\frac{\sqrt{6z^2+1}-1}{z}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម:

$$P=\frac{\sqrt{6x^2+3}-\sqrt{3}}{x}+\frac{\sqrt{6y^2+2}-\sqrt{2}}{y}+\frac{\sqrt{6z^2+1}-1}{z}$$

យើងមាន: $\frac{\sqrt{6}}{xy}+\frac{\sqrt{2}}{yz}+\frac{\sqrt{3}}{zx}=6$

$$\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+\sqrt{6}z=6xyz$$

ពិនិត្យចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC

$$\begin{cases}\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C\\ \tan A>0,\tan B>0,\tan C>0\end{cases}$$

តាង $\sqrt{2}x=\tan A$, $\sqrt{3}y=\tan B$, $\sqrt{6}z=\tan C$

ដោយ A,B,C ជាមុំស្រួចទាំងបីរបស់ត្រីកោណ ABC នោះ

$$\sqrt{2}x=\tan A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x\tan^2\frac{A}{2}+2\tan\frac{A}{2}-\sqrt{2}x=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{2}x} \\ \tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{-1-\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{2}x} \quad \text{មិនយក} \end{cases}$$

ធ្វើដូចគ្នា: $\tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{1+3y^2}}{\sqrt{3}y}$

$$\tan\frac{C}{2} = \frac{-1+\sqrt{1+6z^2}}{\sqrt{6}z}$$

គេបាន: $P = \dfrac{\sqrt{6x^2+3}-\sqrt{3}}{x} + \dfrac{\sqrt{6y^2+2}-\sqrt{2}}{y} + \dfrac{\sqrt{6z^2+1}-1}{z}$

$$= \sqrt{6}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$$

តាង $f(x) = \tan x \quad , \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{4}$

គេបាន: $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ នោះ $f''(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cos^4 x} > 0 \quad , \quad \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ផត ។

តាមវិសមភាព *jensen* គេបាន:

$$f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \geq 3f\left(\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}\right) = 3f\left(\frac{A+B+C}{6}\right)$$

$$= 3f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow P \geq 3\sqrt{2}$$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ P គឺ $3\sqrt{2}$ ហើយសមភាពកើតមានពេល

$A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$

ឬ $\begin{cases}\sqrt{2}x=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}\\ \sqrt{3}y=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}\\ \sqrt{6}z=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\ y=1\\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ។

លំហាត់ទី៣៨

ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) ដែលប៉ះទៅនឹងស្វ៊ែមានសមីការ $(S):(x-5)^2+(y+1)^2+(z+13)^2=308$ ហើយជាមួយសមីការនៃបន្ទាត់: $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+13}{2}$ និង $\begin{cases}x+7=3t\\ y+1=-2t\\ z=8\end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $\begin{cases}(S):(x-5)^2+(y+1)^2+(z+13)^2=308\\ (D_1):\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+13}{2}\\ (D_2):x+7=3t\ ,\ y+1=-2t\ ,\ z=8\end{cases}$

(D_1): មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}_1=(2,-3,2)$

(D_2): មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}_2=(3,-2,0)$

បន្ទាត់ (D_1) និង (D_2) បង្កើតបានជាប្លង់ (P) មួយ ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$

យើងបាន:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -2\end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{i}+6\vec{j}+5\vec{k}$$

ប្លង់ (Q) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (D_1) និង (D_2) នោះ

$$\left.\begin{array}{l}(Q)\ //\ (P)\\ n\perp(P)\end{array}\right|\Rightarrow(Q)\perp\vec{n}$$

$\Rightarrow\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃ (Q)

តាម $M(\alpha,\beta,\gamma)$ ជាចំណុចប៉ះរវាង (S) និង (Q) ។

យើងមាន: $(S):(x-5)^2+(y+1)^2+(z+13)^2=308$

នោះស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $\mathrm{I}(5,-1,-13)$

យើងមាន: $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{IM}\perp(Q)\\ \vec{n}\perp(Q)\end{array}\right|\Rightarrow\overrightarrow{IM}\ //\vec{n}$

តែ $\overrightarrow{IM}=(\alpha-5,\beta+1,\gamma+13)$

យើងបាន: $\overrightarrow{IM}\ //\vec{n}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha-5}{4}=\dfrac{\beta+1}{6}=\dfrac{\gamma+13}{5}=k$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=4k+5\\ \beta=6k-1\\ \gamma=5k-13\end{cases}$$

ដោយ $M(\alpha,\beta,\gamma)\in(S)$

$\Rightarrow(\alpha-5)^2+(\beta+1)^2+(\gamma+13)^2=308$

$\Leftrightarrow(4k)^2+(6k)^2+(5k)^2=308$

$\Leftrightarrow 77k^2=308$

យើងបាន: $k=\pm2$

កូអរដោនេចំណុច $M(13,11,-3)$; $M(-3-13-23)$

សមីការប្លង់ $(Q):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

យើងបាន:

$$\left[\begin{array}{l}(Q_1):4(x-13)+6(y-11)+5(z+3)=0\\(Q_2):4(x+3)+6(y+13)+5(z+23)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(Q_1):4x+6y+5z-103=0\\(Q_2):4x+6y+5z+205=0\end{array}\right.$$

ដូចនេះសមីការប្លង់ដែលត្រូវរកគឺ:

$(Q_1):4x+6y+5z-103=0$

$(Q_2):4x+6y+5z+205=0$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនខុសគ្នា និង $\alpha,\beta,\varphi,\gamma$ ជាមុំបួនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់: $\dfrac{a}{\tan(\varphi+\alpha)}=\dfrac{b}{\tan(\varphi+\beta)}=\dfrac{c}{\tan(\varphi+\gamma)}$ ។ បង្ហាញថា:
$\dfrac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta)+\dfrac{b+c}{b-c}\sin^2(\beta-\gamma)+\dfrac{c+a}{c-a}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\dfrac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta)+\dfrac{b+c}{b-c}\sin^2(\beta-\gamma)+\dfrac{c+a}{c-a}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$

យើងមាន: $\dfrac{a}{\tan(\varphi+\alpha)}=\dfrac{b}{\tan(\varphi+\beta)}=\dfrac{c}{\tan(\varphi+\gamma)}=k$

$$\frac{a}{\tan(\varphi+\alpha)}=\frac{b}{\tan(\varphi+\beta)}=k\Leftrightarrow\frac{a+b}{\tan(\varphi+\alpha)+\tan(\varphi+\beta)}=k$$

$$\Rightarrow a+b=k\left[\tan(\varphi+\alpha)+\tan(\varphi+\beta)\right]=k\frac{\sin(2\varphi+\alpha+\beta)}{\cos(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\beta)}$$

$$\frac{a}{\tan(\varphi+\alpha)}=\frac{b}{\tan(\varphi+\beta)}=k\Leftrightarrow\frac{a-b}{\tan(\varphi+\alpha)-\tan(\varphi+\beta)}=k$$

$$\Rightarrow a-b=k\left[\tan(\varphi+\alpha)-\tan(\varphi+\beta)\right]=k\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\beta)}$$

យើងបាន: $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\dfrac{\mathrm{k}.\sin(2\varphi+\alpha+\beta)}{\cos(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\beta)}}{\dfrac{\mathrm{k}.\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\beta)}}=\frac{\sin(2\varphi+\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}\quad(1)$$

សម្រាយដូចគ្នាគេបាន: $$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\sin(2\varphi+\beta+\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)}\quad(2)$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\sin(2\varphi+\gamma+\alpha)}{\sin(\gamma-\alpha)}\quad(3)$$

តាម (1),(2) និង (3) គេបាន:

$$\begin{cases}\dfrac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta)=\sin(\alpha-\beta)\sin(2\varphi+\alpha+\beta)\\ \dfrac{b+c}{b-c}\sin^2(\beta-\gamma)=\sin(\beta-\gamma)\sin(2\varphi+\beta+\gamma)\\ \dfrac{c+a}{c-a}\sin^2(\gamma-\alpha)=\sin(\gamma-\alpha)\sin(2\varphi+\gamma+\alpha)\end{cases}$$

គេបាន: $$\frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{b+c}{b-c}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{c+a}{c-a}\sin^2(\gamma-\alpha)$$

$$=\sin(\alpha-\beta)\sin(2\varphi+\alpha+\beta)+\sin(\beta-\gamma)\sin(2\varphi+\beta+\gamma)$$
$$+\sin(\gamma-\alpha)\sin(2\varphi+\gamma+\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos(-2\varphi-2\beta)-\cos(2\varphi+2\alpha)\right]+\frac{1}{2}\left[\cos(-2\varphi-2\gamma)-\cos(2\varphi+2\beta)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\cos(-2\varphi-2\alpha)-\cos(2\varphi+2\gamma)\right]=0$$

ដូចនេះ $$\frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{b+c}{b-c}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{c+a}{c-a}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$$ ។

លំហាត់ទី៤០

ដោះស្រាយសមីការ:

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ:

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$$

យើងមាន:

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$+2\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{7\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{3x}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{8}\right)=2\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{7\pi}{24}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{4}+\frac{7\pi}{24}\right)\left(\cos\left(\frac{3x}{4}+\frac{\pi}{24}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

យើងបាន:

$$\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{7\pi}{24}\right)=0\Rightarrow \frac{x}{4}+\frac{7\pi}{24}=k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{7\pi}{6}+4k\pi \quad , \ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos\left(\frac{3x}{4}+\frac{\pi}{24}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=0\Rightarrow \cos\left(\frac{3x}{4}+\frac{\pi}{24}\right)=\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{4}+\frac{\pi}{24}=\pm\frac{\pi}{6}+2t\pi \ , \ t\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{8}{3}t\pi \ , \ x=-\frac{5\pi}{18}+\frac{8}{3}t\pi \ , \ t\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះសមីការមានចម្លើយ: $x=-\frac{7\pi}{6}+4k\pi \ , \ k\in\mathbb{Z}$

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{8}{3}t\pi \ , \ x=-\frac{5\pi}{18}+\frac{8}{3}t\pi \ , \ t\in\mathbb{Z}$$

លំហាត់ទី៤១

បង្ហាញថាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ដែលមាន n ខ្ទង់ $(n>2)$ ស្មើនឹង: $494\underbrace{999...9}_{n-3}55\underbrace{000...0}_{n-2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ដែលមាន n ខ្ទង់ $(n>2)$ ស្មើនឹង: $494\underbrace{999...9}_{n-3}55\underbrace{000...0}_{n-2}$

ចំនួនគត់ n ខ្ទង់គឺ $10^{n-1},10^{n-1}+1,10^{n-1}+2,...,10^{n}-1$

ផលបូកគ្រប់ចំនួនគត់ n ខ្ទង់កំនត់ដោយ:

$S=10^{n-1}+(10^{n-1}+1)+(10^{n-1}+2)+...+(10^{n}-1)$ ជាផលបូកស្មើតនព្វន្ត មានផលសងរួម 1 មានចំនួនតួ

$(10^{n}-1)-10^{n-1}+1=10.10^{n-1}-10^{n-1}=9.10^{n-1}$

យើងបាន: $S=\frac{9.10^{n-1}(10^{n-1}+10^{n}-1)}{2}$

$$=45.10^{n-2}(11.10^{n-1}-1)$$

$$=495.10^{2n-3}-45.10^{n-2}$$

$$=495\underbrace{00...00}_{n-3}.10^{n}-(100-55).10^{n-2}$$

$$=(494\underbrace{99...99}_{n-3}+1).10^{n}-100.10^{n-2}+55.10^{n-2}$$

$$=494\underbrace{99...99}_{n-3}.10^{n}+10^{n}-10^{n}+55.10^{n-2}$$

$$= 494\underbrace{99...99}_{n-3}55\underbrace{00...00}_{n-2}$$ ពិត ។

ដូចនេះ ផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ដែលមាន n ខ្ទង់ $(n>2)$ ស្មើនឹង: $494\underbrace{999...9}_{n-3}55\underbrace{000...0}_{n-2}$ ។

លំហាត់ទី៤២

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី 3 ។ គេដឹងថា $P(x)+2$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^2$ ហើយ $P(x)-2$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^2$ ។ ចូរកំណត់ $P(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ពហុធា $P(x)$

តាមបំរាប់: $\begin{cases} P(x)+2=(x+1)^2(ax+b) & (1) \\ P(x)-2=(x-1)^2(cx+d) & (2) \end{cases}$

គេបាន: $\begin{cases} P(-1)+2=0 \\ P(1)-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(-1)=-2 \\ P(1)=2 \end{cases}$

ដោយធ្វើដេរីវេលើ (1) និង (2) គេបាន:

$$\begin{cases} P'(x)=2(x+1)(ax+b)+a(x+1)^2 \\ P'(x)=2(x-1)(cx+d)+c(x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'(x)=(x+1)\left[2(ax+b)+a(x+1)\right] & (3) \\ P'(x)=(x-1)\left[2(cx+d)+c(x-1)\right] & (4) \end{cases}$$

តាម (3) និង (4) បញ្ជាក់ថា $P'(x)$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)(x-1)$

គេបាន: $P'(x)=k(x+1)(x-1)$ (ព្រោះ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី 3)

$$\Rightarrow P(x)=k\int(x+1)(x-1)\,dx=k\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+r$$

ចំពោះ $x=\pm 1$ គេបាន:

$$\begin{cases} P(-1)=\dfrac{2}{3}k+r=-2 \\ P(1)=-\dfrac{2}{3}k+4=2 \end{cases} \Rightarrow k=-3\ ;\ r=0$$

ដូចនេះ $P(x)=-3\left(\dfrac{x^3}{3}-x\right)=3x-x^3$ ។

លំហាត់ទី៤៣

បើ x,y,z ជាបីចំនួនពិត ដែល $x,y,z\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ \ ,k\in\mathbb{Z}$

ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$\tan^2 x\tan^2 y+\tan^2 y\tan^2 z+\tan^2 z\tan^2 x+2\tan^2 x\tan^2 y\tan^2 z=1$$

បង្ហាញថា: $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=1$:

យើងមាន:

$$\tan^2 x\tan^2 y+\tan^2 y\tan^2 z+\tan^2 z\tan^2 x+2\tan^2 x\tan^2 y\tan^2 z=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}+\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}\cdot\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}+\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$+2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}\cdot\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 y}{1-\sin^2 y}+\frac{\sin^2 y}{1-\sin^2 y}\cdot\frac{\sin^2 z}{1-\sin^2 z}+\frac{\sin^2 z}{1-\sin^2 z}\cdot\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$$

$$+2\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 y}{1-\sin^2 y}\cdot\frac{\sin^2 z}{1-\sin^2 z}=1\quad(1)$$

យក $a=\sin^2 x$, $b=\sin^2 y$, $c=\sin^2 z$ តាម (1) យើងបាន:

$$\frac{a}{1-a}\cdot\frac{b}{1-b}+\frac{b}{1-b}\cdot\frac{c}{1-c}+\frac{c}{1-c}\cdot\frac{a}{1-a}+2\frac{a}{1-a}\cdot\frac{b}{1-b}\cdot\frac{c}{1-c}=1$$

$$\Leftrightarrow ab(1-c)+bc(1-a)+ca(1-b)+2abc=(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\Leftrightarrow ab-abc+bc-abc+ca-abc+2abc=(1-b-a+ab)(1-c)$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-abc=1-b+bc-c-a+ac+ab-abc$$

$$\Leftrightarrow 1-x-y-z=0$$

$$\Leftrightarrow x+y+z=1$$

នាំឲ្យ: $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=1$

ដូចនេះ $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=1$ ។

លំហាត់ទី៤៤

រកតម្លៃអប្បបរមា និងអតិបរមានៃអនុគមន៍: $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{(1+\cos x)^2}$

ចំពោះ $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃអប្បបរមា និងអតិបរមានៃអនុគមន៍: $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{(1+\cos x)^2}$

យើងមាន: $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{4\cos^4\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\quad(1)$$

តាង $t=\tan\dfrac{x}{2}$

ដោយ $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{4}\le\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{4}$ នោះ $-1\le t\le1$

តាម (1) យើងបាន: $y=f(t)=\frac{1}{4}\left(1+t^2\right)^2+\frac{1}{2}t\left(1+t^2\right)$

$$=\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f'(t)=t^3+\frac{3}{2}t^2+t+\frac{1}{2}$$

បើ $t=-1$ នោះ $f'(-1)=0$ នាំឲ្យ:

$$f'(t)=(t+1)\left(t^2+\frac{1}{2}\right)\ge0\ ;\ \forall t\in\left[-1,1\right]$$

$\Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[-1,1]$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $f(x)$ គឺ: $f(-1)=0$

តម្លៃអតិបរមានៃ $f(x)$ គឺ: $f(1)=2$ ។

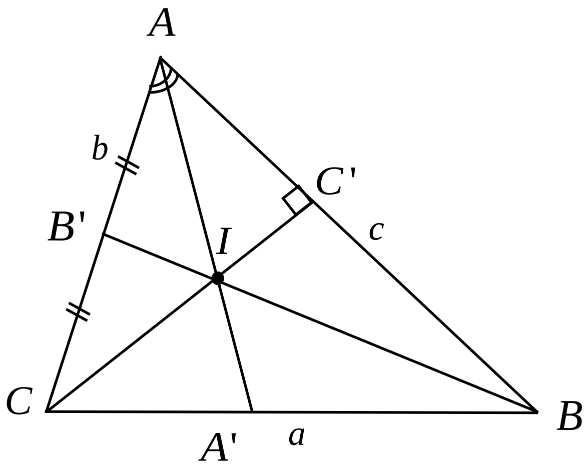
លំហាត់ទី៤៥

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A មេដ្យានគូសចេញពីកំពូល B និងកម្ពស់គូសចេញពីកំពូល C ប្រសព្វគ្នាត្រង់ I ។

បង្ហាញថា: $\cos A=\dfrac{\sin C}{\sin B+\sin C}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\cos A=\dfrac{\sin C}{\sin B+\sin C}$:



ក្នុងត្រីកោណ ABB' មាន: $S_{ABB'} = S_{ABI} + S_{AIB'}$ នាំឲ្យ:

$$\frac{1}{2} AB AB' \sin A = \frac{1}{2} AB AI \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2} AI AB' \sin\frac{A}{2}$$

$$AB AB' 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = AB AI \sin\frac{A}{2} + AI AB' \sin\frac{A}{2}$$

$$2AB AB' \cos\frac{A}{2} = AB AI + AI AB'$$

$$2c.\frac{b}{2}\cos\frac{A}{2} = cAI + AI\frac{b}{2}$$

$$2bc\cos\frac{A}{2} = AI(b+2c)$$

$$\Rightarrow AI = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+2c} \quad (1)$$

ក្នុងត្រីកោណ ACC' មាន: $S_{AC'C} = S_{AC'I} + S_{AIC}$ នាំឲ្យ:

$$\frac{1}{2} AC' AC \sin A = \frac{1}{2} AC' AI \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2} AI.AC \sin\frac{A}{2}$$

$$2AC' AC \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = AC' AI \sin\frac{A}{2} + AI.AC \sin\frac{A}{2}$$

$$2AC'b\cos\frac{A}{2}=AC'AI+AIb=(AC'+b)AI \quad (2)$$

ក្នុងត្រីកោណកែង $AC'C$ មាន: $\cos A=\frac{AC'}{b}\Rightarrow AC'=b\cos A$

តាម (2) គេបាន: $2b^2\cos A\cos\frac{A}{2}=(b\cos A+b)AI$

$$\Rightarrow AI=\frac{2b\cos A\cos\frac{A}{2}}{1+\cos A} \quad (3)$$

តាម (1) និង (3) គេបាន: $\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+2c}=\frac{2b\cos A\cos\frac{A}{2}}{1+\cos A}$

$c+c\cos A=b\cos A+2c\cos A$

$c=(b+c)\cos A$

$$\Rightarrow \cos A=\frac{c}{b+c} \quad (*)$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=2R\sin C \\ b=2R\sin B \end{cases}$$

តាម (*) យើងបាន: $\cos A=\frac{2R\sin C}{2R\sin B+2R\sin C}=\frac{\sin C}{\sin B+\sin C}$

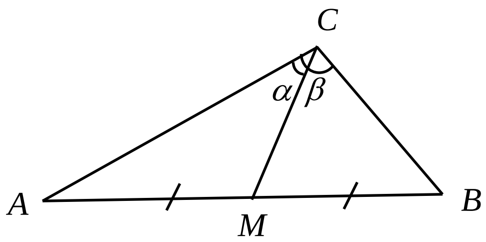
ដូចនេះ $\cos A=\frac{\sin C}{\sin B+\sin C}$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មាន CM ជាមេដ្យាន $ACM=\alpha$, $BCM=\beta$

ក) បង្ហាញថា: $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ខ)គណនាមុំ A,B,C

ដំណោះស្រាយ



ក) បង្ហាញថា: $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$:

ក្នុងត្រីកោណ AMC

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស: $\frac{CM}{\sin A}=\frac{AM}{\sin\alpha}\Leftrightarrow\frac{\sin A}{\sin\alpha}=\frac{CM}{AM}$ (1)

ក្នុងត្រីកោណ BCM

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស: $\frac{CM}{\sin B}=\frac{BM}{\sin\beta}\Leftrightarrow\frac{\sin B}{\sin\beta}=\frac{CM}{BM}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន: $\frac{\sin A}{\sin\alpha}=\frac{\sin B}{\sin\beta}\Leftrightarrow\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

(ព្រោះ CM ជាមេដ្យានត្រីកោណ ABC នោះ $BM=AM$)

ដូចនេះ $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ។

ខ)គណនាមុំ A,B,C :

+ករណី $\alpha=\beta$ នោះ ABC ត្រីកោណសមបាទកំពូល C

$\Rightarrow\angle A=\angle B$ ឬ $2A=2B=\pi-C$ ឬ $A=B=\frac{\pi}{2}-\alpha$

ដូចនេះ $A=B=\frac{\pi}{2}-\alpha$; $C=2\alpha$ ។

+ករណី $\alpha\neq\beta$

យើងមាន: $\frac{\sin A}{\sin\alpha}=\frac{\sin B}{\sin\beta}\Rightarrow\frac{\sin A+\sin B}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin\alpha-\sin\beta}$

$$\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\tan\frac{A+B}{2}\cot\frac{\alpha+\beta}{2}\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\quad (*)$$

តែ $A+B+C=\pi \Rightarrow A+B=\pi-C=\pi-(\alpha+\beta)$ (ព្រោះ $C=\alpha+\beta$)

$\Rightarrow \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}$ នោះ $\tan\frac{A+B}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$

តាម (*) យើងបាន: $\tan\frac{A-B}{2}=\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cot^2\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$\Rightarrow \frac{A-B}{2}=\arctan\left[\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cot^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

$$\Rightarrow A-B=2\arctan\left[\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cot^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

ដោយ $A+B=\pi-(\alpha+\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}+\arctan\left[\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cot^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right] \\ B=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}-\arctan\left[\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cot^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right] \\ C=\alpha+\beta \end{cases}$$

ដូចនេះ $A=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}+\arctan\left[\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cot^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$

$$B=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}-\arctan\left[\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cot^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\quad ;\quad C=\alpha+\beta$$

លំហាត់ទី៤៧

គេឲ្យសមីការ $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\ \left(a,b,c,d\in\mathbb{R};a>0\right)$

មានឫស x_1,x_2,x_3,x_4 និង $x_1^{2^{2015}}+x_2^{2^{2015}}+x_3^{2^{2015}}+x_4^{2^{2015}}=4$ ។

កំណត់តម្លៃ b,c,d ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ b,c,d :

ដោយ x_1,x_2,x_3,x_4 ជាឫសនៃសមីការ $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$

គេបាន: $x_1+x_2+x_3+x_4=-a$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$: យើងបាន:

$$(-a)^2=\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)^2\le 4\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)\ \ (1)$$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$: យើងបាន:

$$4\left[\left(x_1^2\right)^2+\left(x_2^2\right)^2+\left(x_3^2\right)^2+\left(x_4^2\right)^2\right]\ge\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)^2$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\le\sqrt{4\left(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4\right)}\ \ (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន:

$$(-a)^2\le 4\sqrt{4\left(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4\right)}$$

ដោយប្រើវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ ជាបន្តបន្ទាប់គេបាន:

$$a^2\le 4\sqrt{4\left(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4\right)}\le 4\sqrt{4\sqrt{4\left(x_1^8+x_2^8+x_3^8+x_4^8\right)}}\le\ldots$$

$$\le 4\sqrt{4\sqrt{4\sqrt{4\ldots\sqrt{4\left(x_1^{2^{2015}}+x_2^{2^{2015}}+x_3^{2^{2015}}+x_4^{2^{2015}}\right)}}}}=16$$

$\Rightarrow 0<a\le 4$ ព្រោះ $a>0$

បើ $x_1=x_2=x_3=x_4=-1$

នោះ $x_1^{2^{2015}}+x_2^{2^{2015}}+x_3^{2^{2015}}+x_4^{2^{2015}}=4$ ពិត

ហើយ $x_1+x_2+x_3+x_4=-4=-a\Rightarrow a=4$

សមីការខាងលើទៅជា: $(x+1)^4=0$ ឬ $x^4+4x^3+6x^2+4x+1=0$

យើងទាញបាន: $b=6,c=4,d=1$

ដូចនេះ $b=6,c=4,d=1$ ។

លំហាត់ទី៤៨

គេឲ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ: $\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}=1$ ។ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម:

$$A=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម: $A=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$

យើងមាន: $\frac{x^2}{x+y}=x-\frac{xy}{x+y}$ (*)

ដោយ $x,y>0$ តាមវិសមភាពកូស៊ីគេបាន: $x+y\ge 2\sqrt{xy}$

$$\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{2\sqrt{xy}}\Leftrightarrow\frac{xy}{x+y}\le\frac{xy}{2\sqrt{xy}}$$

$$-\frac{xy}{x+y}\ge-\frac{xy}{2\sqrt{xy}}$$

$$x-\frac{xy}{x+y}\ge x-\frac{xy}{2\sqrt{xy}}$$

តាម (*) យើងបាន: $\frac{x^2}{x+y}\ge x-\frac{xy}{2\sqrt{xy}}=x-\frac{\sqrt{xy}}{2}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នា $\frac{y^2}{y+z}\geq y-\frac{\sqrt{yz}}{2}$ (2)

$\frac{z^2}{z+x}\geq z-\frac{\sqrt{xz}}{2}$ (3)

តាម (1),(2) និង (3) គេបាន:

$$\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}\geq x+y+z-\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}}{2}=x+y+z-\frac{1}{2} \quad (4)$$

យើងមាន: $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

$y+z\geq 2\sqrt{yz}$

$x+z\geq 2\sqrt{xz}$

យើងបាន: $2(x+y+z)\geq 2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}\right)$

$x+y+z\geq\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}=1$

តាម (4) គេបាន: $\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ តម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម: $A=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$ គឺ $\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឲ្យ a_n, b_n ជាចំនួនពិតនិង $n\in\mathbb{N}^*$ ។ ចូរគណនា:

$$A=\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k+ib_k}{ia_k-b_k} \qquad B=\sum_{p=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{p}\frac{a_k+ib_k}{ia_k-b_k}\right)$$

ដំណោះស្រាយ

គណនា: $A=\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k+ib_k}{ia_k-b_k}$ និង $B=\sum_{p=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{p}\frac{a_k+ib_k}{ia_k-b_k}\right)$

យើងមាន: $\dfrac{a_k+ib_k}{ia_k-b_k}=\dfrac{-i(ia_k-b_k)}{ia_k-b_k}=-i$

យើងបាន:

$$A=\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k+ib_k}{ia_k-b_k}=\left(\frac{a_1+ib_1}{ia_1-b_1}\right)\left(\frac{a_2+ib_2}{ia_2-b_2}\right)\left(\frac{a_3+ib_3}{ia_3-b_3}\right)\cdots\left(\frac{a_n+ib_n}{ia_n-b_n}\right)$$

$$=\underbrace{(-i)(-i)(-i)...(-i)}_{n}=(-i)^n=(i^2.i)^n=i^{3n}$$

ដូចនេះ $A=\prod_{k=1}^{n}\dfrac{a_k+ib_k}{ia_k-b_k}=i^{3n}$ ។

យើងមាន: $B=\sum_{p=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{p}\dfrac{a_k+ib_k}{ia_k-b_k}\right)=\sum_{p=1}^{n}\left(i^{3p}\right)$

$$=i^3+(i^3)^2+\cdots+(i^3)^n=i^3\cdot\frac{1-(i^3)^n}{1-i^3}=i^3\cdot\frac{1-i^{3n}}{(-1)(-1)-i^3}$$

$$=i^3\cdot\frac{1-i^{3n}}{i^2.i^2-i^3}=i^3\cdot\frac{1-i^{3n}}{i^4-i^3}=\frac{1-i^{3n}}{i-1}$$

ដូចនេះ $B=\sum_{p=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{p}\dfrac{a_k+ib_k}{ia_k-b_k}\right)=\dfrac{1-i^{3n}}{i-1}$ ។

លំហាត់ទី៥០

រកពហុធាដឺក្រេទី 5 នៃ $P(x)$ ដែល $P(x)+a$ ចែកដាច់នឹង $(x+a)^3$ ហើយ $P(x)-a$ ចែកដាច់នឹង $(x-a)^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកពហុធាដឺក្រេទី 5 នៃ $P(x)$:

ដោយ $P(x)+a$ ចែកដាច់នឹង $(x+a)^3$ នោះ $P(x)+a=(x+a)^3 f(x)$

ដែល $f(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី 2 ។

ដោយ $P(x)-a$ ចែកដាច់នឹង $(x-a)^3$ នោះ $P(x)-a=(x-a)^3 g(x)$

ដែល $g(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី 2 ។

យើងមាន:

$$\begin{cases} P(x)+a=(x+a)^3 f(x) \\ P(x)-a=(x-a)^3 g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'(x)=3(x+a)^2 f(x)+(x+a)^3 f'(x) \\ P'(x)=3(x-a)^2 g(x)+(x-a)^3 g'(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P'(x)=(x+a)^2\left[3f(x)+(x+a)f'(x)\right] \\ P'(x)=(x-a)^2\left[3g(x)+(x-a)g'(x)\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P'(x)=(x+a)^2 R_1(x) \;\; ; \;\; R_1(x)=3f(x)+(x+a)f'(x) \\ P'(x)=(x-a)^2 R_2(x) \;\; ; \;\; R_2(x)=3g(x)+(x-a)g'(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P'(x)=(x+a)^2 R_1(x) \\ P'(x)=(x-a)^2 R_2(x) \end{cases}$$

នោះ $P'(x)$ ចែកដាច់នឹង $(x+a)^2.(x-a)^2$

ដោយ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី 5 នោះ $P'(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី 4

យើងបាន: $P'(x)=k(x+a)^2(x-a)^2$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយ

$$\Rightarrow P'(x)=k(x^2-a^2)^2=k(x^4-2a^2x^2+a^4)$$

$$\Rightarrow \int P'(x)dx=\int k(x^4-2a^2x^2+a^4)dx$$

$$\Rightarrow P(x)=k\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}a^2x^3+a^4x\right)+c \quad (1)$$

តែ $\begin{cases} P(x)+a=(x+a)^3 f(x) \\ P(x)-a=(x-a)^3 g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(-a)+a=(-a+a)^3 f(a) \\ P(a)-a=(a-a)^3 g(a) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(-a)+a=0 \\ P(a)-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(-a)=-a \\ P(a)=a \end{cases}$$

តាម (1) គេបាន: $\begin{cases} P(-a)=k\left[\dfrac{(-a)^5}{5}-\dfrac{2a^2}{3}(-a)^3+a^4(-a)\right]+c \\ P(a)=k\left[\dfrac{a^5}{5}-\dfrac{2}{3}a^2.a^3+a^4(a)\right]+c \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = k\left(-\dfrac{a^5}{5}+\dfrac{2}{3}a^5 - a^5\right)+c \\ a = k\left(\dfrac{a^5}{5}-\dfrac{2}{3}a^5+a^5\right)+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = k\left(-\dfrac{8}{15}\right)a^5 + c \quad (*) \\ a = k\left(\dfrac{8}{15}\right)a^5 + c \quad (**) \end{cases}$$

យក $(*)-(**)$ យើងបាន: $-2a = k\dfrac{-16}{15}\cdot a^5 \Rightarrow k = \dfrac{15}{8}\cdot\dfrac{1}{a^4} = \dfrac{15}{8a^4}$

យកជំនួសក្នុង $(**)$ គេបាន: $a = \left(\dfrac{15}{8a^4}\right)\left(\dfrac{8}{15}a^5\right)+c$

$\Rightarrow a = a + c$ ឬ $c = 0$

តាម (1) យើងបាន: $P(x) = \dfrac{15}{8a^4}\left(\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{2}{3}a^2x^3+a^4x\right)$

ដូចនេះ: $P(x) = \dfrac{15}{8a^4}\left(\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{2}{3}a^2x^3+a^4x\right)$ ។

លំហាត់ទី៥១

គេឲ្យ $x^2+y^2=16$; $u^2+v^2=25$; $xu+yv\geq 20$

យក $A=x+v$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតនៃ A ។

ដំណោះស្រាយ

ចូររកតម្លៃធំបំផុតនៃ A:

យើងមាន: $x^2+y^2=16 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{16}=1$ នោះ $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2+\left(\dfrac{y}{4}\right)^2=1$

តាង $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{4} \\ \sin\alpha = \dfrac{y}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4\cos\alpha \\ y = 4\sin\alpha \end{cases}$ (1)

យើងមាន: $u^2+v^2=25 \Leftrightarrow \dfrac{u^2}{25}+\dfrac{v^2}{25}=1$ នោះ $\left(\dfrac{u}{5}\right)^2+\left(\dfrac{v}{5}\right)^2=1$

តាង $\begin{cases} \cos\beta = \dfrac{u}{5} \\ \sin\beta = \dfrac{v}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5\cos\beta \\ v = 5\sin\beta \end{cases}$ (2)

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$:

$|ux+vy| \le \sqrt{(u^2+v^2)(x^2+y^2)}$

$|ux+vy| \le \sqrt{25.16}=20$

$ux+vy\le 20$ តែ $ux+vy\ge 20$ គេបាន: $ux+vy=20$ (3)

យក (1) និង (2) ជំនួសក្នុង (3) យើងបាន:

$20\cos\alpha\cos\beta+20\sin\alpha\sin\beta=20$

$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=1$

$\cos(\alpha-\beta)=1$

សមីការមានចម្លើយ: $\alpha-\beta=2k\pi$ ឬ $\alpha=\beta+2k\pi$

នោះ $\cos\alpha=\cos\beta$ និង $\sin\alpha=\sin\beta$

គេបាន: $A=x+v=4\cos\alpha+5\sin\beta=4\cos\alpha+5\sin\alpha$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$:

$|4\cos\alpha+5\sin\alpha| \le \sqrt{(4^2+5^2)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}=\sqrt{41}$

$4\cos\alpha+5\sin\alpha\le\sqrt{41}$

$\Rightarrow A\le\sqrt{41}$

$\Rightarrow A=\sqrt{41}$ ជាសមភាពកើតមាននៅពេល:

$$\begin{cases}\dfrac{\cos\alpha}{4}=\dfrac{\sin\alpha}{5}\\ 4\cos\alpha+5\sin\alpha=\sqrt{41}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{41}}\\ \cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{41}}\end{cases} \text{ និង } \begin{cases}\sin\beta=\dfrac{5}{\sqrt{41}}\\ \cos\beta=\dfrac{4}{\sqrt{41}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{16}{\sqrt{41}}\\ y=\dfrac{20}{\sqrt{41}}\end{cases};\begin{cases}u=\dfrac{20}{\sqrt{41}}\\ v=\dfrac{25}{\sqrt{41}}\end{cases}$$

ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃ A គឺ: $\sqrt{41}$ ពេល $x=\dfrac{16}{\sqrt{41}}$, $v=\dfrac{25}{\sqrt{41}}$ ។

លំហាត់ទី៥២

ដោះស្រាយសមីការ: $\sqrt[2015]{x^3+3x-3}+\sqrt[2015]{-x^3-3x+5}=2$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ: $\sqrt[2015]{x^3+3x-3}+\sqrt[2015]{-x^3-3x+5}=2$

តាង $a=\sqrt[2015]{x^3+3x-3}$, $b=\sqrt[2015]{-x^3-3x+5}$ សមីការទៅជា:

$$a+b=2\Leftrightarrow\frac{a+b}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow 1=\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2015}\le\frac{a^{2015}+b^{2015}}{2}=\frac{x^3+3x-3-x^3-3x+5}{2}=1$$

សមភាពកើតមាននៅពេល $a^2=b^2$

យើងបាន: $\left(\sqrt[2015]{x^3+3x-3}\right)^2=\left(\sqrt[2015]{-x^3-3x+5}\right)^2$

$$\left(x^3+3x-3\right)^2=\left(-x^3-3x+5\right)^2$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x-3=-x^3-3x+5\\ x^3+3x-3=x^3+3x-5\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\quad x^3+3x-4=0$$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+4)=0$

$\Rightarrow (x-1)\left(x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{15}{4}\right)=0$

$\Rightarrow (x-1)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right]=0$

ដោយ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$

យើងបាន: $x-1=0$ ឬ $x=1$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x=1$ ។

លំហាត់ទី៥៣

គេឲ្យបួនចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c,d ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d}\geq 3$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $abcd\leq\frac{1}{81}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $abcd\leq\frac{1}{81}$:

យើងមាន: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d}\geq 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a}\geq\left(1-\frac{1}{1+b}\right)+\left(1-\frac{1}{1+c}\right)\left(1-\frac{1}{1+d}\right)=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d} \quad (*)$$

តាមវិសមភាព *Cauchy* :

$$\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{1+b}\cdot\frac{c}{1+c}\cdot\frac{d}{1+d}}$$

តាម (*) យើងបាន: $\frac{1}{1+a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{1+b}\cdot\frac{c}{1+c}\cdot\frac{d}{1+d}}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន:

$$\frac{1}{1+b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{1+a}\cdot\frac{c}{1+c}\cdot\frac{d}{1+d}}\quad (2)$$

$$\frac{1}{1+c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{1+a}\cdot\frac{b}{1+b}\cdot\frac{d}{1+d}}\quad (3)$$

$$\frac{1}{1+d}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{1+a}\cdot\frac{b}{1+b}\cdot\frac{c}{1+c}}\quad (4)$$

យកវិសមីការ $(1),(2),(3)$ និង (4) គុណបញ្ចូលគេបាន:

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}\geq\frac{81abcd}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}$$

$$\Rightarrow abcd\leq\frac{1}{81}$$ ពិត

សមភាពកើតមាននៅពេល

$$\frac{a}{1+a}=\frac{b}{1+b}=\frac{c}{1+c}=\frac{d}{1+d}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow a=b=c=d=3$$ ។

ដូចនេះ $abcd\leq\frac{1}{81}$ ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យចំនួនពិត a,b,c ដែល $a\geq 1,b\geq 1,c\geq 1$ ។ បង្ហាញថា:

$$\sqrt{(a+1)(b-1)}+\sqrt{(b+1)(c-1)}+\sqrt{(c+1)(a-1)}<a+b+c$$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\sqrt{(a+1)(b-1)}+\sqrt{(b+1)(c-1)}+\sqrt{(c+1)(a-1)}<a+b+c$

តាមវិសមភាពកូស៊ី: $\sqrt{(a+1)(b-1)}\leq\frac{(a+1)+(b-1)}{2}=\frac{a+b}{2}\quad (1)$

$$\sqrt{(b+1)(c-1)}\leq\frac{(b+1)+(c-1)}{2}=\frac{b+c}{2}\quad (2)$$

$$\sqrt{(c+1)(a-1)}\leq\frac{(c+1)+(a-1)}{2}=\frac{c+a}{2}\quad (3)$$

យក $(1)+(2)+(3)$ គេបាន:

$$\sqrt{(a+1)(b-1)}+\sqrt{(b+1)(c-1)}+\sqrt{(c+1)(a-1)}\le\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}$$
$$=a+b+c$$

សមភាពកើតមាននៅពេល $\begin{cases}a+1=b-1\\b+1=c-1\\c+1=a-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=-2\\b-c=-2\\c-a=-2\end{cases}$ មិនពិត

ដូចនេះ $\sqrt{(a+1)(b-1)}+\sqrt{(b+1)(c-1)}+\sqrt{(c+1)(a-1)}<a+b+c$ ។

លំហាត់ទី៥៥

គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ហើយ $abc=1$ ។

ស្រាយថា: $\dfrac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\dfrac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\dfrac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\dfrac{3}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\dfrac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\dfrac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\dfrac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\dfrac{3}{4}$:

ដោយ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}\ge3\sqrt[3]{\frac{a^3(1+b)(1+c)}{64(1+b)(1+c)}}=\frac{3a}{4}\quad(1)$$

សម្រាយដូចគ្នាគេបាន:

$$\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+c}{8}\ge3\sqrt[3]{\frac{b^3(1+a)(1+c)}{64(1+a)(1+c)}}=\frac{3b}{4}\quad(2)$$

$$\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+b}{8}\ge3\sqrt[3]{\frac{c^3(1+a)(1+b)}{64(1+a)(1+b)}}=\frac{3c}{4}\quad(3)$$

យក $(1)+(2)+(3)$ គេបាន:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{a+b+c}{2}-\frac{3}{4}\quad(*)$$

តែ $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\Rightarrow\frac{a+b+c}{2}-\frac{3}{4}\geq\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

តាម (*) គេបាន: $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}$

$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}$ ។

លំហាត់ទី៥៦

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$

យើងមាន $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)\geq(a+b)(2ab-ab)=(a+b)ab$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+abc\geq(a+b)ab+abc=(a+b+c)ab$

$\Leftrightarrow\frac{1}{a^3+b^3+abc}\leq\frac{1}{(a+b+c)ab}\quad(1)$

ធ្វើតាមលំនាំដូចគ្នាគេបាន: $\frac{1}{b^3+c^3+abc}\leq\frac{1}{(a+b+c)bc}\quad(2)$

$\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{(a+b+c)ca}\quad(3)$

យក $(1)+(2)+(3)$ យើងបាន:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)$$

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$ ។

លំហាត់ទី៥៧

បើ n ជាចំនួនគត់សេសវិជ្ជមានមិនតូចជាង 3 ។ ស្រាយថា:

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots-\frac{x^n}{n!}\right)<1 \quad , \quad x\neq 0$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots-\frac{x^n}{n!}\right)<1$$ ចំពោះ $x\neq 0$

តាង $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$

$g(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots-\frac{x^n}{n!}$

$\Rightarrow F(x)=f(x).g(x)$

ត្រូវបង្ហាញថា: $F(x)<1$

យើងមាន: $f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=f(x)-\frac{x^n}{n!}$

$$g'(x)=-1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=-g(x)-\frac{x^n}{n!}$$

$\Rightarrow F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$=\left[f(x)-\frac{x^n}{n!}\right]g(x)+f(x)\left[-g(x)-\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$=-\frac{x^n}{n!}\left[f(x)+g(x)\right]=-2\frac{x^n}{n!}\left[1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n-1)!}\right]$$

បើ $x<0$ នោះ $F'(x)>0$

បើ $x>0$ នោះ $F'(x)<0$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

តាមតារាងគេបាន: $F(x)<1$

ដូចនេះ $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots-\frac{x^n}{n!}\right)<1; x\neq 0$

លំហាត់ទី៥៨

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ លក្ខខណ្ឌ: $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ និង $f(x+y)=f\left(x^{2015}\right)+f\left(y^{2015}\right), \forall x,y\in\mathbb{R}$ គណនា $f\left(\sqrt[3]{2015}\right)$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $f\left(\sqrt[3]{2015}\right)$:

យើងមាន: $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ (1)

យក $x=y=0: f(0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$

$x=y=1: f(1)=2f(1)\Rightarrow f(1)=0$

យើងមាន: $f(x+y)=f\left(x^{2015}\right)+f\left(y^{2015}\right)$

យក $y=0: f(x)=f\left(x^{2015}\right)$

$x=0: f(y)=f\left(y^{2015}\right)$

$\Rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

តាម $(1): f(xy)=xf(y)+yf(x)$

យក $x=y: f\left(x^2\right)=2xf(x)$

បើ $x\neq 0$ យើងឧបមាថាពិតចំពោះ $n: f\left(x^n\right)=nx^{n-1}f(x)\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$

យើងនឹងស្រាយឲ្យបាន: $f\left(x^{n+1}\right)=(n+1)x^n f(x)$

តាម (1) យក $y=x^n: f\left(x^{n+1}\right)=xf\left(x^n\right)+x^n f(x)$

$=x\left[nx^{n-1}f(x)\right]+x^n f(x)$

$=nx^n f(x)+x^n f(x)=x^n.(n+1).f(x)$ ពិត

យើងបាន: $f\left(x^n\right)=nx^{n-1}f(x)$

យក $n=2015: f\left(x^{2015}\right)=2015x^{2014}f(x)$

តែ $f(x)=f\left(x^{2015}\right)\Rightarrow 2015x^{2014}f(x)=f(x)$

$\Rightarrow f(x)\left[2015x^{2014}-1\right]=0$

យើងបាន: $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ 2015x^{2014}-1\neq 0\ ,\ \forall x\neq 0 \end{array}\right.$

គេបាន: $f(x)=0$ ឬ $f\left(\sqrt[3]{2015}\right)=0$

ដូចនេះ $f\left(\sqrt[3]{2015}\right)=0$ ។

លំហាត់ទី៥៩

គេឲ្យចំនួនពិត $0<a<b<c$ និងអនុគមន៍ f ជាប់ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $[a,c]$ ដែល $f'(x)>0$ លើចន្លោះ $[a,c]$ ។

ចូរបង្ហាញថា: $(c-b)f(a)+(b-a)f(c)>(c-a)f(b)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចូរបង្ហាញថា: $(c-b)f(a)+(b-a)f(c)>(c-a)f(b)$:

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល: $f'(x)>0$ លើចន្លោះ $[a,c]$ ឬ

$f'(x)>0$ លើចន្លោះ $[a,b]\cup[b,c]$ ដែល $a\le b\le c$

នោះមាន $u\in[a,b]$ ដែល $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(u)$

$v\in[b,c]$ ដែល $\dfrac{f(\mathrm{c})-f(b)}{c-b}=f'(v)$

ដោយ $f'(x)>0$ លើចន្លោះ $[a,c]$ ដែល $a<u<b<v<c$ គេបាន:

$$f'(u)<f'(v)\quad\Leftrightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

$$(c-b)\big[f(b)-f(a)\big]<(b-a)\big[f(c)-f(b)\big]$$

$$(c-b)f(b)-(c-b)f(a)<(b-a)f(c)-(b-a)f(b)$$

$$(c-b)f(a)+(b-a)f(c)>(b-a)f(b)+(c-b)f(b)$$

$(c-b)f(a)+(b-a)f(c)>(c-a)f(b)$ ពិត

ដូចនេះ $(c-b)f(a)+(b-a)f(c)>(c-a)f(b)$ ។

"សេចក្តីសង្ឃឹមនៅតែមានជានិច្ច សម្រាប់អ្នកតស៊ូ"

លំហាត់ទី៦០

កំណត់អនុគមន៍ $f(x,y)$ ដែល:

$$\begin{cases} f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=x^2+y^2+z^2 \ ; \ \forall x,y,z\in\mathbb{R} & (1) \\ f\left(x^2+y-f(0,x),0\right)=x+f^2(y,0)-f\left(0,y^2-f(0,y)\right) & (2) \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ $f(x,y)$:

តាម (1) បើ $x=y=z=0: 3f(0,0)=0\Rightarrow f(0,0)=0$

$y=z=0:\ f(x,0)+f(0,x)=x^2\Rightarrow f(x,0)=x^2-f(0,x)$

$z=0:\ f(x,y)+f(y,0)+f(0,x)=x^2+y^2$

$\Rightarrow f(x,y)=x^2-f(0,x)+y^2-f(y,0)=f(x,0)+f(0,y)$

$(2):\ f\left(x^2+y-f(0,x),0\right)=x+f^2(y,0)-f\left(0,f(y,0)\right)\ ;\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

$=x+f\left(f(y,0),0\right)\ ;\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f\left(f(x,0)+y,0\right)=x+f\left(f(y,0),0\right)$

តាង $g(x)=f(x,0)\Rightarrow g\left(g(x)+y\right)=x+g\left(g(y)\right)$

តែ $g(0)=f(0,0)=0$

យក $y=0: g\left(g(x)=x+f(0,0)\right)=x\Rightarrow g\left(g(x)\right)=x$

$x=0: g(y)=g\left(g(y)\right)\Rightarrow g(x)=x\Leftrightarrow f(x,0)=x\Rightarrow f(y,0)=y$

$\Rightarrow f(0,x)=x^2-f(x,0)=x^2-x$

$\Rightarrow f(x,y)=x^2+y^2+x-y-x^2=x+y^2-y\ ;\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $f(x,y)=x+y^2-y\ ;\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ ។

"សោកស្ដាយអតីតកាល ប៉ុន្តែធ្វេសប្រហែសបច្ចុប្បន្នកាល"

លំហាត់ទី៦១

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ $x_0 = 2015$ និងចំពោះ $n \geq 1$ ។ បង្ហាញថា: $x_n = (-1)^n (2015)\begin{pmatrix} 2015 \\ n \end{pmatrix}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in [1, 2015]$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $\sum_{n=0}^{2015} 2^n x_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $x_n = (-1)^n (2015)\begin{pmatrix} 2015 \\ n \end{pmatrix}$

យើងនឹងបង្ហាញថា $x_0 = m$ និង $x_n = -\frac{m}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k$ នោះ $x_n = (-1)^n m \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$

បើ $n = 0$; $x_0 = (-1)^0 .m.\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = p : x_p = -\frac{m}{p}\sum_{k=0}^{p-1} x_k \Rightarrow x_p = (-1)^p m \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$

ត្រូវស្រាយឲ្យវាពិតដល់ $n = p+1 : x_{p+1} = (-1)^{p+1} m \begin{pmatrix} m \\ p+1 \end{pmatrix}$

យើងមាន: $x_p = -\frac{m}{p}\sum_{k=0}^{p-1} x_k = -\frac{m}{p}\left(x_{p-1} + \sum_{k=0}^{p-2} x_k\right)$

$$x_{p-1} = -\frac{m}{p}\sum_{p-1}^{p-2} x_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{p-2} x_k = \frac{-p-1}{m} x_{p-1}$$

$$\Rightarrow x_p = -\frac{m}{p}\left(x_{p-1} - \frac{p-1}{m} x_{p-1}\right) = -\frac{m}{p}\left(1 - \frac{p-1}{m}\right) x_{p-1}$$

$$= -\frac{m}{p}\left(\frac{m-p+1}{m}\right) x_{p-1}$$

$$x_p = -\frac{1}{p}(m-p+1)x_{p-1} = \left(\frac{p-m+1}{p}\right)x_{p-1}$$

$$\Rightarrow x_{p+1} = \frac{p-m}{p+1}x_p = \left(\frac{p-m}{p+1}\right)(-1)^p m\binom{n}{p} = (-1)^{p+1}\left(\frac{m-p}{p+1}\right)m\binom{m}{p}$$

$$x_{p+1} = (-1)^{p+1}\left(\frac{m-p}{p+1}\right)m\frac{m!}{p!(m-p)!} = (-1)^{p+1}m\frac{m!}{(p+1)!m-p-1)!}$$

$= (-1)^{p+1}m\binom{m}{p+1}$ ពិត

យើងបាន: $x_n = (-1)^n m\binom{m}{n}$ យក $m = 2015$ គេបាន:

$$x_n = (-1)^n(2015)\binom{2015}{n}$$

ដូចនេះ $x_n = (-1)^n(2015)\binom{2015}{n}$ ។

គណនាតម្លៃនៃ $\sum_{n=0}^{2015} 2^n x_n$:

យើងមាន: $x_n = (-1)^n(2015)\binom{2015}{n}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{2015} 2^n x_n = \sum_{n=0}^{2015} 2^n(-1)^n(2015)\binom{2015}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{2015} 2^n x_n = 2015\sum_{n=0}^{2015}(-2)^n\binom{2015}{n} = 2015\sum_{n=0}^{2015}\binom{2015}{n}(1)^{2015-n}(-2)^n$$

$$= 2015(1-2)^{2015} = -2015$$

ដូចនេះ $\sum_{n=0}^{2015} 2^n x_n = -2015$ ។

លំហាត់ទី៦២

បង្ហាញថា: $\left[\left(\sin\frac{2016}{2015}\right)^{\cos\frac{2016}{2015}}\right]^{\log_{2016}2017}>\left[\left(\cos\frac{2016}{2015}\right)^{\sin\frac{2016}{2015}}\right]^{\log_{2015}2016}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\left[\left(\sin\frac{2016}{2015}\right)^{\cos\frac{2016}{2015}}\right]^{\log_{2016}2017}>\left[\left(\cos\frac{2016}{2015}\right)^{\sin\frac{2016}{2015}}\right]^{\log_{2015}2016}$

យើងមាន: $n<n+1\Rightarrow\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}\Rightarrow\frac{1}{n}+1>1+\frac{1}{n+1}\Rightarrow\frac{n+1}{n}=\frac{n+2}{n+1}$

យើងបាន: $\log_n\frac{n+1}{n}>\log_n\frac{n+2}{n+1}$ (1)

ហើយ $n<n+1\Rightarrow\log_{\frac{n+2}{n+1}}n<\log_{\frac{n+2}{n+1}}n+1\Rightarrow\log_n\frac{n+2}{n+1}>\log_{n+1}\frac{n+2}{n+1}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន:

$\log_n\frac{n+1}{n}>\log_{(n+1)}\frac{n+2}{n+1}\Rightarrow\log_n(n+1)>\log_{(n+1)}(n+2)$

យក $n=2015$ យើងបាន: $\log_{2015}2016>\log_{2016}2017$ (*)

ដោយ $\frac{\pi}{4}<\frac{2016}{2015}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\frac{2016}{2015}>\cos\frac{2016}{2015}$ (**)

យក (*)×(**) គេបាន: $\sin\frac{2016}{2015}\cdot\log_{2015}2016>\cos\frac{2016}{2015}\cdot\log_{2016}2017$

$$\Rightarrow\left(\sin\frac{2016}{2015}\right)^{\cos\frac{2016}{2015}\cdot\log_{2016}2017}>\left(\cos\frac{2016}{2015}\right)^{\sin\frac{2016}{2015}\cdot\log_{2015}2016}$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(\sin\frac{2016}{2015}\right)^{\cos\frac{2016}{2015}}\right]^{\log_{2016}2017}>\left[\left(\cos\frac{2016}{2015}\right)^{\sin\frac{2016}{2015}}\right]^{\log_{2015}2016}$$ ពិត

ដូចនេះ $\left[\left(\sin\dfrac{2016}{2015}\right)^{\cos\frac{2016}{2015}}\right]^{\log_{2016}2017} > \left[\left(\cos\dfrac{2016}{2015}\right)^{\sin\frac{2016}{2015}}\right]^{\log_{2015}2016}$ ។

លំហាត់ទី៦៣

គេឲ្យ $p>2$ ជាចំនួនបឋម និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា: p ជាតួចែកនៃ $1^{p^n}+2^{p^n}+3^{p^n}+\cdots+(p-1)^{p^n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: p ជាតួចែកនៃ $1^{p^n}+2^{p^n}+3^{p^n}+\cdots+(p-1)^{p^n}$

ដោយ p ជាចំនួនបឋម នោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន: p^n ជាចំនួនគត់សេស ។

យក k ជាចំនួនគត់សេសមួយគេបាន:

$$d^k+(p-d)^k=p\left(d^{k-1}+d^{k-2}(p-d)+\cdots+(p-d)^{k-1}\right)$$

នោះ $1^{p^n}+2^{p^n}+3^{p^n}+\cdots+(p-1)^{p^n}$

$$=1^{p^n}+(p-1)^{p^n}+2^{p^n}+(p-2)^{p^n}+\cdots+\left(\frac{p-1}{2}\right)^{p^n}+\left(\frac{p+1}{2}\right)^{p^n}$$

$\Rightarrow 1^{p^n}+2^{p^n}+3^{p^n}+\cdots+(p-1)^{p^n}=p.k$; k ជាចំនួនគត់ ពិត

ដូចនេះ p ជាតួចែកនៃ $1^{p^n}+2^{p^n}+3^{p^n}+\cdots+(p-1)^{p^n}$ ។

លំហាត់ទី៦៤

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់សេសធំជាង ឬស្មើនឹង 5 ។ ស្រាយថា:

$\binom{n}{1}-5\binom{n}{2}+5^2\binom{n}{3}-\cdots+5^{n-1}\binom{n}{n}$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\binom{n}{1}-5\binom{n}{2}+5^2\binom{n}{3}-\cdots+5^{n-1}\binom{n}{n}$ មិនមែនជាចំនួនបឋម

តាង $N=\binom{n}{1}-5\binom{n}{2}+5^2\binom{n}{3}-\cdots+5^{n-1}\binom{n}{n}$

$$5N=5\binom{n}{1}-5^2\binom{n}{2}+5^3\binom{n}{3}-\cdots+5^{n}\binom{n}{n}$$

$$5N=1-1+5\binom{n}{1}-5^2\binom{n}{2}+5^3\binom{n}{3}-\cdots+5^{n}\binom{n}{n}$$

$$5N=1+(5-1)^n=1+4^n$$

$$\Rightarrow N=\frac{1}{5}\left(1+4^n\right)$$

ដោយ $4\equiv -1 \pmod 5$

$4^n\equiv(-1)^n\equiv -1 \pmod 5$ ដែល n ជាចំនួនគត់សេស

$4^n+1\equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow N$ ជាចំនួនគត់មួយ

យើងមាន: $N=\frac{1}{5}\left(4^n+1\right)=\frac{1}{5}\left[\left(2^n+1\right)^2-\left(2^{\frac{n+1}{2}}\right)^2\right]$

$$=\frac{1}{5}\left(2^n+1+2^{\frac{n+1}{2}}\right)\left(2^n+1-2^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left[\left(2^{\frac{n-1}{2}}+1\right)^2+2^{n-1}\right]\left[\left(2^{\frac{n-1}{2}}-1\right)^2+2^{n-1}\right]$$

ដោយ $n\geq 5$ នោះ $\left(2^{\frac{n-1}{2}}+1\right)^2+2^{n-1}>1$, $\left(2^{\frac{n-1}{2}}-1\right)^2+2^{n-1}>1$

នោះគេបាន: N មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ

ដូចនេះ $\binom{n}{1}-5\binom{n}{2}+5^2\binom{n}{3}+\cdots+5^{n-1}\binom{n}{n}$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

លំហាត់ទី៦៥

ចូរប្រៀបធៀបពីរចំនួនខាងក្រោម:

ក) $2015^{2016^{2015}}$ និង $2016^{2015^{2016}}$ ។

ខ) $A=\sqrt{2^{2^{2^{2^{2}}}}}$ និង $B=1+2^2+3^3+4^4+...+2014^{2014}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចូរប្រៀបធៀបពីរចំនួនខាងក្រោម:

ក) $2015^{2016^{2015}}$ និង $2016^{2015^{2016}}$

តាង $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$, $x>0$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $\ln x-1$ ព្រោះ $\ln^2 x>0$

បើ $\ln x-1=0\Rightarrow x=e$

បើ $\ln x-1>0\Rightarrow x>e$

បើ $\ln x-1<0\Rightarrow x<e$

តារាងអថេរភាព:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

តាមតារាង f ជាអនុគមន៍កើនកាលណា $x>e$

ដោយ $2016>2015\Rightarrow f(2016)>f(2015)\Leftrightarrow \dfrac{2016}{\ln 2016}>\dfrac{2015}{\ln 2015}$

$\Leftrightarrow 2016\ln 2015 > 2015\ln 2016$

$\Leftrightarrow \ln 2015^{2016} > \ln 2016^{2015}$

$\Leftrightarrow 2015^{2016} > 2016^{2015} \quad (1)$

ដោយ $2016 > 2015 \Rightarrow \ln 2016 > \ln 2015 \quad (2)$

យក $(1)\times(2) : 2015^{2016}\ln 2016 > 2016^{2015}\ln 2015$

$\Rightarrow \ln 2016^{2015^{2016}} > \ln 2015^{2016^{2015}}$

$\Rightarrow 2016^{2015^{2016}} > 2015^{2016^{2015}}$

ដូចនេះ $2016^{2015^{2016}} > 2015^{2016^{2015}}$ ។

សំគាល់: យើងអាចតាង $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ក៏បាន ។

អនុវត្តន៍: ចូរប្រៀបធៀប $2015^{123456789}$ និង 123456789^{2015} ។

ខ) $A=\sqrt{2^{2^{2^{2}}}}$ និង $B=1+2^2+3^3+4^4+...+2014^{2014}$

យើងមាន: $A=\sqrt{2^{2^{2^{2}}}}=\sqrt{2^{2^{16}}}=\sqrt{2^{65536}}=2^{32768}$

$B=1+2^2+3^3+4^4+...+2014^{2014}$

$< 2014^{2014}+2014^{2014}+2014^{2014}+...+2014^{2014}$

$< 2014\times 2014^{2014}=2014^{2015}<2048^{2015}$

$<\left(2^{11}\right)^{2015}=2^{22165}$

យើងបាន $B<2^{22165}<2^{32768}=A$

ដូចនេះ $A>B$ ។

លំហាត់ទី៦៦

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

$$\sin x+cosx-\sin x\cos x=1-\ln\frac{3+\sin x+\cos x}{4+\sin x\cos x}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ: $\sin x + cosx - \sin x\cos x = 1 - \ln\dfrac{3+\sin x+\cos x}{4+\sin x\cos x}$

យើងមាន: $\sin x + cosx - \sin x\cos x = 1 - \ln\dfrac{3+\sin x+\cos x}{4+\sin x\cos x}$

ដោយ $3+\sin x+\cos x = 3+\sqrt{2}\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+3>0$

ហើយ $4+\sin x\cos x = 4+\dfrac{1}{2}\sin 2x>0$

គេបាន: $\sin x+\cos x-\sin x\cos x$

$=1-\ln(3+\sin x+\cos x)+\ln(4+\sin x\cos x)$

$\Leftrightarrow \ln(3++\sin x+\cos x)+3+\sin x+\cos x$

$=\ln(4+\sin x\cos x)+4+\sin x\cos x$

តាង $f(t)=\ln t+t$, $t>0$ គេបាន:

$f(3+\sin x+\cos x)= f(4+\sin x+\cos x)$ (1)

យើងមាន: $f(t)=\ln t+t \Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t}+1>0$, $t>0$

នោះអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច ។

តាម $(1): 3+\sin x+\cos x = 4+\sin x\cos x$

$\sin x+\cos x-\sin x\cos x-1=0$

$(\sin x-1)(1-\cos x)=0$

យើងបាន:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x-1=0\\ 1-\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \cos x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=2k\pi\end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ទី៦៧

ដោះស្រាយសមីការ: $3^{2015x+3\cos x}-3^{2015x+4\cos^3 x}-3\cos 3x=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ: $3^{2015x+3\cos x}-3^{2015x+4\cos^3 x}-3\cos 3x=0$

យើងមាន: $3^{2015x+3\cos x}-3^{2015x+4\cos^3 x}-3\cos 3x=0$

$3^{2015x+3\cos x}-3^{2015x+4\cos^3 x}-3\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3^{2015x+3\cos x}+3(2015x+3\cos x)$

$=3^{2015x+4\cos^3 x}+3(2015x+4\cos^3 x)$

តាង $f(t)=3^t+3t$, $t\in\mathbb{R}$ គេបាន:

$f(2015x+3\cos x)=f(2015x+4\cos^3 x)$ (1)

យើងមាន: $f(t)=3^t+3t\Rightarrow f'(t)=3^t\ln 3+3>0$

នោះអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច ។

តាម (1): $2015x+3\cos x=2015x+4\cos^3 x$

$$4\cos^3 x-3\cos x=0$$

$\cos 3x=0=\cos\frac{\pi}{2}\Rightarrow 3x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ឬ $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$

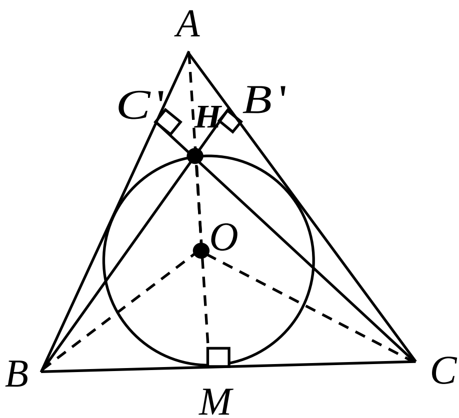
ដូចនេះសមីការមានឫស $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC សមបាតត្រង់ A ។ ដោយដឹងថា អរតូសង់ H នៃត្រីកោណនៅលើរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ ។ គណនា $\cos A$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\cos A$:



តាង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ

r កាំរង្វង់ចារឹក្នុងត្រីកោណ

M កណ្ដាល BC

A,H,M,O នៅលើបន្ទាត់តែមួយ

តាង $BHM = x$ កម្ពស់ BB'

នោះ $x = BHM = AHB' = 90 - \frac{A}{2}$

តាង $BOM = y \Rightarrow 2y = 180^0 - \left(\frac{B}{2} + \frac{B}{2}\right)$, $B = C$ នោះ $y = 90^0 - \frac{B}{2}$

តែក្នុងត្រីកោណកែង ABM : $B = 90^0 - \dfrac{A}{2}$

$\Rightarrow y = 90^0 - \dfrac{1}{2}\left(90^0 - \dfrac{A}{2}\right)$ ឬ $y = 45^0 + \dfrac{A}{4}$

ក្នុងត្រីកោណកែង BHM : $\tan x = \dfrac{BM}{MH} = \dfrac{BM}{2r} \Rightarrow 2\tan x = \dfrac{BM}{r}$

ក្នុងត្រីកោណកែង BOM : $\tan y = \dfrac{BM}{OM} = \dfrac{BM}{r}$

យើងបាន $\tan y = 2\tan x$

$$\Rightarrow \tan\left(45^0 + \frac{A}{4}\right) = 2\tan\left(90^0 - \frac{A}{2}\right) = 2\cot\frac{A}{2}$$

$$\tan\left(45^0 + \frac{A}{4}\right) = \frac{2}{\tan\frac{A}{2}}$$

$$\frac{\tan 45^0 + \tan\frac{A}{4}}{1 - \tan 45^0 \tan\frac{A}{4}} = \frac{2}{\tan 2.\frac{A}{4}}$$

$$\frac{1 + \tan\frac{A}{4}}{1 - \tan\frac{A}{4}} = \frac{2}{\dfrac{\tan\frac{A}{4}}{1 - \tan\frac{A}{4}}}$$

$$\frac{1 + \tan\frac{A}{4}}{1 - \tan\frac{A}{4}} = \frac{1 - \tan\frac{A}{4}}{\tan\frac{A}{4}}$$

$$\frac{1}{1 - \tan\frac{A}{4}} = \frac{1 - \tan^2\frac{A}{4}}{2\tan\frac{A}{4}}$$

$$\left(1-\frac{\sin\frac{A}{4}}{\cos\frac{A}{4}}\right)^2=\frac{\sin\frac{A}{4}}{\cos\frac{A}{4}}$$

$$\left(\cos\frac{A}{4}-\sin\frac{A}{4}\right)^2=\cos\frac{A}{4}\sin\frac{A}{4}$$

$$1-2\cos\frac{A}{4}\sin\frac{A}{4}=\cos\frac{A}{4}\sin\frac{A}{4}$$

$$1=\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}=1-2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

ដូចនេះ $\cos A=\frac{1}{9}$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គណនាផលគុណ $P=\dfrac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P=\dfrac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}$

យើងមាន: $m^4+\frac{1}{4}=\left(m^2+m+\frac{1}{2}\right)\left(m^2-m+\frac{1}{2}\right)$ គេបាន:

$$(2k-1)^4+\frac{1}{4}=\left[(2k-1)^2+(2k-1)+\frac{1}{2}\right]\left[(2k-1)^2-(2k-1)+\frac{1}{2}\right]$$

$$(2k)^4+\frac{1}{4}=\left[(2k)^2+(2k)+\frac{1}{2}\right]\left[(2k)^2-(2k)+\frac{1}{2}\right]$$

យើងបាន: $P=\dfrac{\prod_{k=1}^{n}\left[(2k-1)^2+(2k-1)+\frac{1}{2}\right]\left[(2k-1)^2-(2k-1)+\frac{1}{2}\right]}{\prod_{k=1}^{n}\left[(2k)^2+(2k)+\frac{1}{2}\right]\left[(2k)^2-(2k)+\frac{1}{2}\right]}$

$$P=\prod_{k=1}^{n}\frac{\left[(2k-1)^2+(2k-1)+\frac{1}{2}\right]\left[(2k-1)^2-(2k-1)+\frac{1}{2}\right]}{\left[(2k)^2+(2k)+\frac{1}{2}\right]\left[(2k)^2-(2k)+\frac{1}{2}\right]}$$

តែ $m^2-m+\frac{1}{2}=(m-1)^2+(m-1)+\frac{1}{2}$ គេបាន:

$(2k)^2-2k+\frac{1}{2}=(2k-1)^2+(2k-1)+\frac{1}{2}$ យើងបាន:

$$P=\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^2-(2k-1)+\frac{1}{2}}{(2k)^2+2k+\frac{1}{2}}=\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-2)^2+(2k-2)+\frac{1}{2}}{(2k)^2+2k+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{(2)^2+2+\frac{1}{2}}\times\frac{(2)^2+2+\frac{1}{2}}{(4)^2+4+\frac{1}{2}}\times\frac{(4)^2+4+\frac{1}{2}}{(6)^2+6+\frac{1}{2}}\times\cdots\times\frac{(2n-2)^2+(2n-1)+\frac{1}{2}}{(2n)^2+2n+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{(2n)^2+2n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{8n^2+4n+1}$$

ដូចនេះ $P=\dfrac{1}{8n^2+4n+1}$ ។

លំហាត់ទី៧០

ចំពោះ $\forall x, y \in [-1,1]$ គេតាង $f(x,y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ ។

ក)ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $|f(x,y)| \le 1$ ។

ខ)រកតម្លៃ x និង y ដែលនាំឲ្យ $f(x,y)$ មានតម្លៃតូចបំផុត និងធំបំផុត ។

ដំណោះស្រាយ

ក)ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $|f(x,y)| \le 1$

យើងមាន: $f(x,y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ ចំពោះ $\forall x, y \in [-1,1]$

តាមវិសមភាព $Cauchy - Schwarz$: $|a_1b_1 + a_2b_2| \le \sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right)}$

យើងបាន:

$$|f(x,y)| = \left|x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right| \le \sqrt{\left(x^2 + \sqrt{(1-x^2)^2}\right)\left(y^2 + \sqrt{(1-y^2)^2}\right)}$$

$|f(x,y)| \le \sqrt{\left(x^2 + 1 - x^2\right)\left(y^2 + 1 - y^2\right)} = 1$ ពិត

ដូចនេះ $|f(x,y)| \le 1$ ។

ខ)រកតម្លៃ x និង y ដែលនាំឲ្យ $f(x,y)$ មានតម្លៃតូចបំផុត និងធំបំផុត:

យើងមាន: $|f(x,y)| \le 1$ នោះ $-1 \le f(x,y) \le 1$

+តម្លៃតូចបំផុតនៃ $f(x,y) = -1$ ពេល $(x=-1, y=0);(x=0, y=-1)$

+តម្លៃធំបំផុតនៃ $f(x,y) = 1$ ពេល $(x=1, y=0);(x=0, y=1)$ ។

លំហាត់ទី៧១

គេឲ្យ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយ ។

កំណត់យក $S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ ។

ស្រាយថា: $1+\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r}{k}S_k(n)=(n+1)^r$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $1+\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r}{k}S_k(n)=(n+1)^r$

យើងមាន: $S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k=\sum_{p=1}^{n}p^k$

គេបាន: $1+\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r}{k}S_k(n)=1+\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r}{k}\sum_{p=1}^{n}p^k$

$=1+\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r}{k}p^k$

$=1+\sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}p^r-k^r\right)$

$=1+\sum_{p=1}^{n}\left[(k+1)^r-k^r\right]$

$=1+(n+1)^r-1^r$

$=(n+1)^r$ ពិត

ដូចនេះ $1+\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r}{k}S_k(n)=(n+1)^r$ ។

លំហាត់ទី៧២

គេឲ្យ a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនិង h_a,h_b,h_c ប្រវែងកម្ពស់រៀងគ្នានៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយថា: $\frac{a^2}{h_b^2+h_c^2}+\frac{b^2}{h_a^2+h_c^2}+\frac{c^2}{h_a^2+h_b^2}\geq 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\frac{a^2}{h_b^2+h_c^2}+\frac{b^2}{h_a^2+h_c^2}+\frac{c^2}{h_a^2+h_b^2}\geq 2$

តាមរូបមន្ត $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$

$\Rightarrow h_a^2=\frac{4S^2}{a^2}$, $h_b^2=\frac{4S^2}{b^2}$, $h_c^2=\frac{4S^2}{c^2}$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{h_b^2+h_c^2}+\frac{b^2}{h_a^2+h_c^2}+\frac{c^2}{h_a^2+h_b^2}$$

$$=\frac{a^2}{4S^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}+\frac{b^2}{4S^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)}+\frac{c^2}{4S^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}\right)}$$

$$=\frac{a^2b^2c^2}{4S^2}\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)$$

តាមរូបមន្ត $S=\frac{abc}{4R}\Rightarrow S^2=\frac{a^2b^2c^2}{16R^2}\Rightarrow\frac{a^2b^2c^2}{4S^2}=4R^2$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន:

$$\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\geq\frac{9}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{h_b^2+h_c^2}+\frac{b^2}{h_a^2+h_c^2}+\frac{c^2}{h_a^2+h_b^2}\geq\frac{18R^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

ត្រូវស្រាយថា: $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=4R^2\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)\quad (*)$

តែ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\dfrac{1-\cos 2A}{2}+\dfrac{1-\cos 2B}{2}+1-\cos^2 C$

$=2-\dfrac{1}{2}\left(\cos 2A+\cos 2B\right)-\cos^2 C$

$=2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2 C$

$A+B+C=\pi\Rightarrow A+B=\pi-C\Rightarrow \cos(A+B)=-\cos C$

$\Leftrightarrow \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+\cos C\left(\cos(A-B)-\cos C\right)$

$=2+\cos C\left(\cos(A-B)+\cos(A+B)\right)$

$=2+2\cos A\cos B\cos C$

យើងមាន: $\cos(A+B)=-\cos C$

$\Rightarrow \cos A\cos B\cos C=\dfrac{1}{2}\left(\cos(A+B)+\cos(A-B)\right)\cos C$

$=\dfrac{1}{2}\left(\cos(A-B)-\cos C\right)\cos C$

$=\dfrac{1}{2}\cos(A-B)\cos C-\dfrac{\cos^2 C}{2}$

$=-\dfrac{1}{2}\left(\cos C-\dfrac{\cos(A-B)}{2}\right)^2+\dfrac{\cos^2(A-B)}{8}\le\dfrac{\cos^2(A-B)}{8}\le\dfrac{1}{8}$

$\Rightarrow \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le 2+2.\dfrac{1}{8}=\dfrac{9}{4}$

តាម $(*)$ គេបាន: $a^2+b^2+C^2\le 4R^2\cdot\dfrac{9}{4}=9R^2$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{a^2}{h_b^2+h_c^2}+\dfrac{b^2}{h_a^2+h_c^2}+\dfrac{c^2}{h_a^2+h_b^2}\ge 2$ ។

លំហាត់ទី៧៣

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $A=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!n!}{(m+n+2)!}$

បើ $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $A=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!n!}{(m+n+2)!}$

យើងមាន: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!n!}{(m+n+2)!}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!n!\big((m+n+2)-(n+1)\big)}{(m+n+2)!(m+1)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!}{(m+1)}\frac{n!\big((m+n+2)-(n+1)\big)}{(m+n+2)!}$$

$$=\frac{m!}{(m+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n!(m+n+2)}{(m+n+2)!}-\frac{(n+1)!}{(m+n+2)!}\right)$$

$$=\frac{m!}{(m+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n!}{(m+n+1)!}-\frac{(n+1)!}{(m+n+2)!}\right)$$

$$=\frac{m!}{(m+1)}\cdot\frac{0!}{(m+1)!}=\frac{1}{(m+1)^2}$$

$$\Rightarrow\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!n!}{(m+n+2)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

ព្រោះ $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{6}$

ដូចនេះ $A=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!n!}{(m+n+2)!}=\frac{\pi^2}{6}$ ។

លំហាត់ទី៧៤

គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c,d ដែល $a+b+c+d=4$

ស្រាយថា: $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\ge 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\ge 2$

យើងមាន: $\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\ge 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}\quad (1)$

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន:

$$\frac{1}{b^2+1}=1-\frac{b^2}{b^2+1}\ge 1-\frac{b^2}{2b}=1-\frac{b}{2}\quad (2)$$

$$\frac{1}{c^2+1}=1-\frac{c^2}{c^2+1}\ge 1-\frac{c^2}{2c}=1-\frac{c}{2}\quad (3)$$

$$\frac{1}{d^2+1}=1-\frac{d^2}{d^2+1}\ge 1-\frac{d^2}{2d}=1-\frac{d}{2}\quad (4)$$

ដោយបូក $(1)+(2)+(3)+(4)$ គេបាន:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\ge 4-\frac{a+b+c+d}{2}=2$$ ពិត

ព្រោះ $a+b+c+d=4$

ដូចនេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

"អ្វីដែលអ្នកគិត អ្នកអាចធ្វើបាន"

លំហាត់ទី៧៥

គេឲ្យ a, b, c ជាប្រវែងជ្រុងនិង h_a, h_b, h_c ជាប្រវែងកម្ពស់រៀងគ្នា r ជាប្រវែងកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ស្រាយថា: $\frac{1}{h_a-2r}+\frac{1}{h_b-2r}+\frac{1}{h_c-2r}\geq\frac{3}{r}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\frac{1}{h_a-2r}+\frac{1}{h_b-2r}+\frac{1}{h_c-2r}\geq\frac{3}{r}$

តាមរូបមន្ត $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$

$$\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S}\,,\ \frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S}\,,\frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}$$

$$=\frac{2p}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}\ \left(p=\frac{a+b+c}{2},S=pr\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow\frac{r}{h_a}+\frac{r}{h_b}+\frac{r}{h_c}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{2r}{h_a}+\frac{2r}{h_b}+\frac{2r}{h_c}=2$$

$$\Leftrightarrow-\frac{2r}{h_a}-\frac{2r}{h_b}-\frac{2r}{h_c}=-2$$

$$\Leftrightarrow 3-\frac{2r}{h_a}-\frac{2r}{h_b}-\frac{2r}{h_c}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{h_a-2r}{h_a}+\frac{h_b-2r}{h_b}+\frac{h_c-2r}{h_c}=1$$

តាមវិសមភាព $AM-HM$ គេបាន:

$$\left(\frac{h_a}{h_a-2r}+\frac{h_b}{h_b-2r}+\frac{h_c}{h_c-2r}\right)\left(\frac{h_a-2r}{h_a}+\frac{h_b-2r}{h_b}+\frac{h_c-2r}{h_c}\right)\geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{h_a}{h_a-2r}+\frac{h_b}{h_b-2r}+\frac{h_c}{h_c-2r}\geq 9$$

នោះ $\frac{2r}{h_a-2r}+\frac{2r}{h_b-2r}+\frac{2r}{h_c-2r}$

$$=\frac{h_a-(h_a-2r)}{h_a-2r}+\frac{h_a-(h_a-2r)}{h_a-2r}+\frac{h_a-(h_a-2r)}{h_a-2r}$$

$$=\frac{h_a}{h_a-2r}+\frac{h_b}{h_b-2r}+\frac{h_c}{h_c-2r}-3\geq 9-3=6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_a-2r}+\frac{1}{h_b-2r}+\frac{1}{h_c-2r}\geq \frac{3}{r}$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{h_a-2r}+\frac{1}{h_b-2r}+\frac{1}{h_c-2r}\geq \frac{3}{r}$ ។

លំហាត់ទី៧៦

គេឲ្យ a, b, c, l_a, l_b, l_c ជាប្រវែងជ្រុងនិងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃត្រីកោណមួយរៀងគ្នា ។ តាង p ជាកន្លះបរិមាត្រនិង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង ស្រាយថា: $\frac{l_a}{a}+\frac{l_b}{b}+\frac{l_c}{c}\leq \frac{p}{2r}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\frac{l_a}{a}+\frac{l_b}{b}+\frac{l_c}{c}\le\frac{p}{2r}$

តាមរូបមន្តកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង:

$$l_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}, l_b=\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)}, l_c=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)} \quad (1)$$

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន:

$$x+y\ge 2\sqrt{xy} \ , x,y\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\le 1$$

$$\Rightarrow l_a\le\sqrt{p(p-a)}, l_b\le\sqrt{p(p-b)}, l_c\le\sqrt{p(p-c)}$$

ហើយម្យ៉ាងទៀត: $h_a\le l_a, h_b\le l_b, h_c\le l_c$

$$\Rightarrow \frac{l_a}{a}+\frac{l_b}{b}+\frac{l_c}{c}=\frac{l_a h_a}{2S}+\frac{l_b h_b}{2S}+\frac{l_c h_c}{2S}\le\frac{l_a^2+l_b^2+l_c^2}{2S} \quad (2)$$

ព្រោះ $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$

តាម (1) និង (2) គេបាន:

$$\frac{l_a}{a}+\frac{l_b}{b}+\frac{l_c}{c}\le\frac{p(p-a)+p(p-b)+p(p-c)}{2S}$$

$$\frac{l_a}{a}+\frac{l_b}{b}+\frac{l_c}{c}\le\frac{3p^2-p(a+b+c)}{2S}=\frac{3p^2-2p^2}{2S}=\frac{p^2}{2pr}=\frac{p}{2r}$$

$$\frac{l_a}{a}+\frac{l_b}{b}+\frac{l_c}{c}\le\frac{p}{2r} \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\frac{l_a}{a}+\frac{l_b}{b}+\frac{l_c}{c}\le\frac{p}{2r}$ ។

"ផ្លូវទៅកាន់ជ័យជំនះ គ្មានដានជើងមនុស្សខ្ជិលច្រអូសឡើយ"

លំហាត់ទី៧៧

គេឲ្យ a, b, c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន។

កំណត់យក $m = \min\{a, b, c\}$,$M = \max\{a, b, c\}$ ។ ស្រាយថា:

$$1. \frac{|Mm - ab|}{(a+b)c} \le \frac{M-m}{2m}$$

$$2. \frac{|Mm - ab|}{(a+b)c} + \frac{|Mm - ab|}{(a+b)c} + \frac{|Mm - ab|}{(a+b)c} \le \frac{3(M-m)}{2m}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា:

$$1. \frac{|Mm - ab|}{(a+b)c} \le \frac{M-m}{2m}$$

ដំបូងត្រូវស្រាយថា: $\frac{|Mm - ab|}{(a+b)} \le \frac{M-m}{2}$

$$\frac{(Mm-ab)^2}{(a+b)^2} \le \frac{(M-m)^2}{2^2}$$

$$\Leftrightarrow 2^2(Mm-ab)^2 - (a+b)^2(M-m)^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2(Mm-ab) - (a+b)(M-m)\right]$$

$$\left[2(Mm-ab) + (a+b)(M-m)\right] \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2Mm - ab - ab - M(a+b) + m(a+b)\right]$$

$$\left[2Mm - ab - ab + M(a+b) - m(a+b)\right] \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\mathrm{M}(2m-a-b) + a(m-b) + b(m-a)\right]$$

$$\left[m(2M-a-b) + a(\mathrm{M}-b) + b(\mathrm{M}-a)\right] \le 0$$

តែ $m = \min\{a, b, c\}$

$\Rightarrow m \le a, m \le b \Rightarrow m-a \le 0, m-b \le 0$

$\Rightarrow 2m-a-b \le 0$

$\Rightarrow \left[\mathrm{M}(2m-a-b)+a(m-b)+b(m-a)\right] \le 0$

ហើយ $M = \max\{a, b, c\}$

$\Rightarrow M \ge a, M \ge b \Rightarrow M-a \ge 0, M-b \ge 0$

$\Rightarrow 2M-a-b \ge 0$

$\Rightarrow \left[m(2M-a-b)+a(\mathrm{M}-b)+b(\mathrm{M}-a)\right] \ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\mathrm{M}(2m-a-b)+a(m-b)+b(m-a)\right]$

$\left[m(2M-a-b)+a(\mathrm{M}-b)+b(\mathrm{M}-a)\right] \le 0$ ពិត

$\Rightarrow \frac{|Mm-ab|}{(a+b)} \le \frac{M-m}{2}$ (1)

តែ $m = \min\{a, b, c\} \Rightarrow m \le c \Rightarrow \frac{1}{c} \le \frac{1}{m}$ (2)

យក $(1)\times(2)$ គេបាន: $\frac{|Mm-ab|}{(a+b)c} \le \frac{M-m}{2m}$ ពិត

ដូចនេះ: $\frac{|Mm-ab|}{(a+b)c} \le \frac{M-m}{2m}$ ។

2. $\frac{|Mm-ab|}{(a+b)c} + \frac{|Mm-ab|}{(a+b)c} + \frac{|Mm-ab|}{(a+b)c} \le \frac{3(M-m)}{2m}$

យើងមាន: $\frac{|Mm-ab|}{(a+b)c} \le \frac{M-m}{2m}$

ដូចគ្នាដែរ

$\frac{|Mm-bc|}{(b+c)a} \le \frac{M-m}{2m}$, $\frac{|Mm-ac|}{(a+c)b} \le \frac{M-m}{2m}$

$\frac{|Mm-ab|}{(a+b)c} + \frac{|Mm-ab|}{(a+b)c} + \frac{|Mm-ab|}{(a+b)c} \le \frac{3(M-m)}{2m}$ ពិត

ដូចនេះ: $\dfrac{|Mm-ab|}{(a+b)c}+\dfrac{|Mm-ab|}{(a+b)c}+\dfrac{|Mm-ab|}{(a+b)c}\le\dfrac{3(M-m)}{2m}$ ។

លំហាត់ទី៧៨

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម:

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin^2\frac{\pi}{4n}+\sin^2\frac{2\pi}{4n}+\sin^2\frac{3\pi}{4n}+\cdots+\sin^2\frac{n\pi}{4n}\right)$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម:

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin^2\frac{\pi}{4n}+\sin^2\frac{2\pi}{4n}+\sin^2\frac{3\pi}{4n}+\cdots+\sin^2\frac{n\pi}{4n}\right)$$

យើងមាន: $A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin^2\frac{\pi}{4n}+\sin^2\frac{2\pi}{4n}+\sin^2\frac{3\pi}{4n}+\cdots+\sin^2\frac{n\pi}{4n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\sin^2\left(\frac{r}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=\int_0^1\sin^2\frac{n\pi}{4}dn$$

$$=\int_0^1\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{2}dn$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)dn$$

$$=\frac{1}{2}\left[n-\frac{2}{\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$$

ដូចនេះ $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$ ។

លំហាត់ទី៧៩

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម: $A=\int_{-1}^{\infty}\left(\frac{x^4}{1+x^6}\right)^2 dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម: $A=\int_{-1}^{\infty}\left(\frac{x^4}{1+x^6}\right)^2 dx$

យើងមាន:

$$A=\int_{-1}^{\infty}\left(\frac{x^4}{1+x^6}\right)^2 dx$$

$$=\int_{-1}^{\infty}\left(\frac{(x^3)^2}{\left(1+(x^3)^2\right)^2}\right)x^2dx$$

តាង $x^3=\tan\beta \Rightarrow 3x^2dx=\frac{1}{\cos^2\beta}d\beta$

$$\Rightarrow x^2dx=\frac{1}{3\cos^2\beta}d\beta$$

បើ $x=-1\Rightarrow \beta=-\frac{\pi}{4}$

$x=\infty\Rightarrow \beta=\frac{\pi}{2}$

គេបាន: $A=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\tan^2\beta}{\left(1+\tan^2\beta\right)^2}\right)\frac{d\beta}{\cos^2\beta}$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\beta}{\left(\frac{1}{\cos^2\beta}\right)^2}\frac{d\beta}{\cos^2\beta}$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\tan^2\beta\cos^2\beta d\beta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\beta d\beta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\beta}{2}d\beta$$

$$=\frac{1}{6}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\beta)d\beta$$

$$=\frac{1}{6}\left[\beta-\frac{1}{2}\sin 2\beta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(-\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{12}$$

ដូចនេះ $A=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{12}$

លំហាត់ទី៨០

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}$

យើងមាន: $\left(1-x^2\right)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k x^{2k}$

មេគុណរបស់ x^{2n} ក្នុងការពន្លាតត្រូវនឹង $k=n$ គឺ: $(-1)^n\binom{2n}{n}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\left(1-x^2\right)^{2n}=(1-x)^{2n}(1+x)^{2n}$

$$=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k x^k\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}x^j$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{k}\binom{2n}{j}x^{k+j}$$

មេគុណរបស់ x^{2n} ត្រូវនឹង $k+j=2n$ គឺ:

$$\sum_{k+j=2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n}{j}$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n}{2n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2 \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន: $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}$

ដូចនេះ $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}$ ។

លំហាត់ទី៨១

គេឲ្យ $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ ។ ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

គេបាន: $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{2a_2^2}+\frac{1}{3a_3^2}+\cdots+\frac{1}{na_n^2}<2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{2a_2^2}+\frac{1}{3a_3^2}+\cdots+\frac{1}{na_n^2}<2$

ចំពោះគ្រប់ $k\geq 2$ គេបាន:

$$\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}=\frac{a_k-a_{k-1}}{a_{k-1}a_k}=\frac{1}{ka_{k-1}a_k}>\frac{1}{ka_k^2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{ka_k^2}<\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a_1}=1$$

$$1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{ka_k^2}<2$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{2a_2^2}+\frac{1}{3a_3^2}+\cdots+\frac{1}{na_n^2}<2$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{2a_2^2}+\frac{1}{3a_3^2}+\cdots+\frac{1}{na_n^2}<2$ ។

លំហាត់ទី៨២

គេឲ្យ $a,b,c,x,y,z>0$ ។

ស្រាយថា: $\frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}+\frac{cz}{c+z}\leq\frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}+\frac{cz}{c+z}\leq\frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}$

ចំពោះ $\alpha,\beta,p,q>0$

យើងមាន: $(\alpha p-\beta q)^2\geq 0$

$\alpha^2p^2-2\alpha\beta pq+\beta^2q^2\geq 0$

$$2\alpha\beta pq \le \alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2$$

$$pq\alpha^2 + 2\alpha\beta pq + pq\beta^2 \le pq\alpha^2 + \alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 + pq\beta^2$$

$$pq(\alpha+\beta)^2 \le p\alpha^2(q+p) + \beta^2 q(q+p)$$

$$pq(\alpha+\beta)^2 \le (p+q)(p\alpha^2 + q\beta^2)$$

$$\frac{pq}{p+q} \le \frac{p\alpha^2 + \beta^2 q}{(\alpha+\beta)^2}$$

យក $\alpha = x+y+z, \beta = a+b+c$

$$\frac{ax}{a+x} \le \frac{(x+y+z)^2 a + (a+b+c)^2 x}{(x+y+z+a+b+c)^2}$$

$$\frac{by}{b+y} \le \frac{(x+y+z)^2 b + (a+b+c)^2 y}{(x+y+z+a+b+c)^2}$$

$$\frac{cz}{c+z} \le \frac{(x+y+z)^2 c + (a+b+c)^2 z}{(x+y+z+a+b+c)^2}$$

$$\frac{ax}{a+x} + \frac{by}{b+y} + \frac{cz}{c+z} \le \frac{(x+y+z)^2(a+b+c) + (a+b+c)^2(x+y+z)}{(x+y+z+a+b+c)^2}$$

$$\frac{ax}{a+x} + \frac{by}{b+y} + \frac{cz}{c+z} \le \frac{(x+y+z)(a+b+c)(x+y+z+a+b+c)}{(x+y+z+a+b+c)^2}$$

$$\frac{ax}{a+x} + \frac{by}{b+y} + \frac{cz}{c+z} \le \frac{(x+y+z)(a+b+c)}{(x+y+z+a+b+c)}$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{ax}{a+x} + \frac{by}{b+y} + \frac{cz}{c+z} \le \frac{(x+y+z)(a+b+c)}{(x+y+z+a+b+c)}$

លំហាត់ទី៨៣

គេឲ្យ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ ។ ស្រាយថា: $\sum_{k=1}^{n} k a_k \le \binom{n}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^k$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\sum_{k=1}^{n} ka_k \le \binom{n}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^k$

តាមវិសមភាព *Cauchy* ចំពោះ $1 \le k \le n$ គេបាន:

$$a_k^k + (k-1) = a_k^k + \underbrace{1+1+ +1}_{k-1} \ge ka_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k \le \sum_{k=1}^{n} a_k^k + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k \le \binom{n}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^k \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} ka_k \le \binom{n}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^k$ ។

លំហាត់ទី៨៤

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k និង p ជាចំនួនពិត

គេបាន: $\int_0^{\infty} \frac{\sin kx \cos^k x}{x^p} dx = \frac{1}{2^k} \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2rx}{x^p} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\int_0^{\infty} \frac{\sin kx \cos^k x}{x^p} dx = \frac{1}{2^k} \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2rx}{x^p} dx$

តាង $z = \left(1+e^{2ix}\right)^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} e^{2rxi} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (\cos 2rx + i \sin 2rx)$

នោះផ្នែកនិម្មិតនៃ z គឺ: $\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \sin 2rx = \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} \sin 2rx \quad (1)$

តែម្យ៉ាងទៀត $z = \left(1+e^{2ix}\right)^k = e^{ixk}\left(e^{-ix} + e^{ix}\right)^k$

$$= (\cos kx + i \sin kx)(\cos x - i \sin x + \cos x + i \sin x)^k$$

$$= 2^k \cos^k x (\cos kx + i \sin kx)$$

$$= 2^k \cos kx \cos^k x + i 2^k \sin kx \cos^k x$$

នោះផ្នែកនិម្មិតនៃ z គឺ: $2^k\sin kx\cos^k x \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន: $\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\sin 2rx = 2^k\sin kx\cos^k x$

$$\frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\frac{\sin 2rx}{x^p} = \frac{\sin kx\cos^k x}{x^p}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin kx\cos^k x}{x^p}dx = \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\sin 2rx}{x^p}dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin kx\cos^k x}{x^p}dx = \frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\int_0^\infty \frac{\sin 2rx}{x^p}dx \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ: $\int_0^\infty \frac{\sin kx\cos^k x}{x^p}dx = \frac{1}{2^k}\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\int_0^\infty \frac{\sin 2rx}{x^p}dx$ ។

លំហាត់ទី៨៥

គណនាផលបូក: $S = \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក: $S = \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$

ចំពោះ $n \ge 1$

យើងមាន:

$$\arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n+2} = \arctan\left(\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}}{1+\frac{1}{n(n+2)}}\right) = \arctan\left(\frac{2}{(n+1)^2}\right)$$

ចំពោះ $N \geq 2$

$$\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{N} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \arctan\left(\frac{2}{(n+1)^2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\left(\arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \arctan\frac{1}{0} + \arctan 1 - \arctan(0) - \arctan(0)$$

ព្រោះបើ $N \to \infty \Rightarrow N-1 \to \infty \Rightarrow \dfrac{1}{N+1} = \dfrac{1}{N+2} = 0$

$$= \arctan(\infty) + \arctan\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \arctan\left(\tan\frac{\pi}{2}\right) + \arctan\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

ដូចនេះ $S = \dfrac{3\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី៨៦

គណនាផលបូក: $S = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក: $S = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$

យើងមាន: $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}-\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}}=\frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}}-\frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}}$

$$=\frac{n!(2n-k)!}{(n-k)!2n!}-\frac{n!(2n-k-1)!}{(n-k-1)!(2n)!}$$

$$=\frac{n!(2n-k-1)!}{(n-k)!(2n-1)!}\left(\frac{2n-k}{2n}-\frac{n-k}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n!(2n-k-1)!}{(n-k)!(2n-1)!}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n!k!(2n-k-1)!}{k!(n-k)!(2n-1)!}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}=2\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}}-\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}}\right]=2$$

ដូចនេះ $S=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}=2$ ។

លំហាត់ទី៨៧

ដាក់ជាកត្តា: $(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដាក់ជាកត្តា: $(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3$

តាង $n=a+2b-3c$, $m=b+2c-3a$, $p=c+2a-3b$

$\Rightarrow n+m+p=0$

យើងមាន:

$(m+n+p)^3 = m^3 + 3m(n+p)(m+n+p) + (n+p)^3$

$= m^3 + 3m(n+p)(m+n+p) + n^3 + p^3 + 3np(n+p)$

$= m^3 + n^3 + p^3 + 3m(n+p)(m+n+p) + 3np(n+p) + 3mnp - 3mnp$

$= m^3 + n^3 + p^3 + 3(nm+mp)(m+n+p) + 3np(m+n+p) - 3mnp$

$= m^3 + n^3 + p^3 + 3(nm+mp+np)(m+n+p) - 3mnp$

ដោយ $n+m+p=0$ គេបាន:

$m^3 + n^3 + p^3 = 3nmp$

$(b+2c-3a)^3 + (a+2b-3c)^3 + (c+2a-3b)$

$= 3(a+2b-3c)(b+2c-3a)(c+2a-3b)$

ដូចនេះ $(b+2c-3a)^3 + (a+2b-3c)^3 + (c+2a-3b)$

$= 3(a+2b-3c)(b+2c-3a)(c+2a-3b)$ ។

លំហាត់ទី៨៨

បើ $x^2+y^2=1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$\left|16\left(x^2+y^2\right)+20\left(x^3+y^3\right)+5\left(x+y\right)\right| \le \sqrt{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\left|16\left(x^2+y^2\right)+20\left(x^3+y^3\right)+5\left(x+y\right)\right| \le \sqrt{2}$

ដោយ $x^2+y^2=1$ នោះតាង $x=\sin\alpha$, $y=\cos\alpha$

យើងមាន: $\sin 5\alpha = \sin 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 3\alpha$

$= \left(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\right)\left(1-2\sin^2\alpha\right) + 2\sin\alpha\cos\alpha\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)$

$= \left(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\right)\left(1-2\sin^2\alpha\right) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha\left(4\cos^2\alpha - 3\right)$

$= \left(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\right)\left(1-2\sin^2\alpha\right) + 2\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-4\sin^2\alpha\right)$

$= 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha = 16x^5 - 20x^3 + 5x \quad (1)$

យើងមាន: $\cos 5\alpha = \cos 3\alpha \cos 2\alpha - \sin 3\alpha \sin 2\alpha$

$=\left(2\cos^2\alpha-1\right)\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)-2\sin\alpha\cos\alpha\left(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right)$

$=8\cos^5\alpha-6\cos^3\alpha-4\cos^3\alpha+3\cos\alpha-6\left(1-\cos^2\alpha\right)\cos\alpha$

$+8\cos\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)^2$

$=8\cos^5\alpha-6\cos^3\alpha-4\cos^3\alpha+3\cos\alpha-6\cos\alpha+6\cos^3\alpha+8\cos\alpha$

$-16\cos^3\alpha+8\cos^5\alpha$

$=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha$

$=16y^5-20y^3+5y \quad (2)$

យក $(1)+(2):16\left(x^5+y^5\right)-20\left(x^3+y^3\right)+5\left(x+y\right)=\sin 5\alpha+\cos 5\alpha$

$$=\sqrt{2}\cos\left(5\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

ដោយ $\left|\cos\left(5\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right|\le 1\Rightarrow\left|\sqrt{2}\cos\left(5\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right|\le\sqrt{2}$

ដូចនេះ $\left|16\left(x^2+y^2\right)+20\left(x^3+y^3\right)+5\left(x+y\right)\right|\le\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៨៩

គេឲ្យ $0<x<1$, $0<y<1$ និង $xy+yz+xz=1$ ។

បង្ហាញថា: $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$

តាង $x=\tan\alpha$, $y=\tan\beta$, $z=\tan\gamma$

ដោយ $x,y,z\in(0,1)\Rightarrow\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

យើងមាន: $xy+yz+xz=1$

យើងបាន: $\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\alpha\tan\gamma=1$

តែ $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\alpha\tan\gamma}$

$\Rightarrow\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\infty$ នោះ $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$

តាង $S=\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2}$ យើងបាន:

$$2S=\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}+\frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}$$
$$=\tan2\alpha+\tan2\beta+\tan2\gamma$$

ដោយ $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow2\alpha+2\beta+2\gamma=\pi$ ឬ $\tan(2\alpha+2\beta+2\gamma)=0$

$$\tan(2\alpha+2\beta+2\gamma)=\frac{\tan2\alpha+\tan2\beta+\tan2\gamma-\tan2\alpha\tan2\beta\tan2\gamma}{1-\tan2\alpha\tan2\beta+\tan2\beta\tan2\gamma+\tan2\alpha\tan2\gamma}$$

$\Rightarrow\tan2\alpha+\tan2\beta+\tan2\gamma=\tan2\alpha\tan2\beta\tan2\gamma$

ដោយ $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ នោះ $\tan\alpha>0,\tan\beta>0,\tan\gamma>0$

តាមវិសមភាព *Cauchy* :

$2S\ge3\sqrt[3]{\tan2\alpha\tan2\beta\tan2\gamma}=3\sqrt[3]{\tan2\alpha+\tan2\beta+\tan2\gamma}$

$2S\ge3\sqrt[3]{2S}$

$8S^3\ge27.2S$

$S^2\ge\dfrac{27}{4}$ ឬ $S\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; $(S>0)$

សមភាពកើតមានពេល $\tan2\alpha=\tan2\beta=\tan2\gamma$

$$\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma\Leftrightarrow x=y=z \quad ។$$

ដូចនេះ $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2}\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

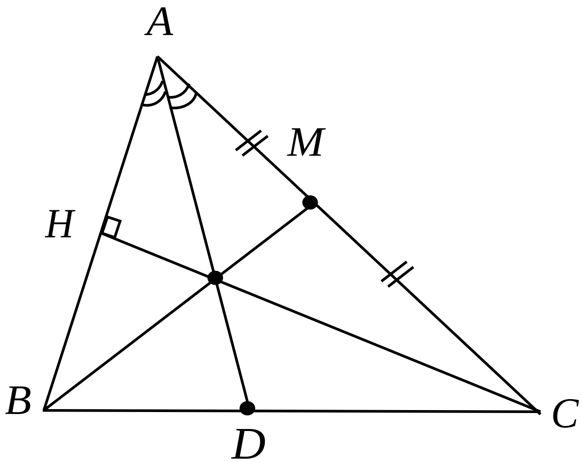
លំហាត់ទី៩០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មាន AD ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A , BM ជាមេដ្យាន និង CH កម្ពស់ ។

បង្ហាញថា: $\dfrac{\sin B+\sin C}{\sqrt{\cos^2 B+\sin^2 C}}=\dfrac{\sin C}{\cos B}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\dfrac{\sin B+\sin C}{\sqrt{\cos^2 B+\sin^2 C}}=\dfrac{\sin C}{\cos B}$



តាមទ្រឹស្តីបទ *Ceva* គេបាន: $\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CM}{MA}\cdot\dfrac{AH}{BH}=1 \quad (1)$

ដោយ BM ជាមេដ្យាន នោះ $CM=MA$

តាម (1) គេបាន: $\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{AH}{BH}=1 \quad (2)$

តែ AD ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A យើងបាន:

$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}$

ក្នុងត្រីកោណកែង ACH មាន $\cot A=\frac{AH}{HC}\Rightarrow AH=HC.\cot A$

ក្នុងត្រីកោណកែង BCH មាន $\cot B=\frac{BH}{HC}\Rightarrow BH=HC.\cot B$

យើងបាន: $\frac{AH}{BH}=\frac{HC.\cot A}{HC.\cot B}=\frac{\tan B}{\tan A}$

តាម (2) គេបាន: $\frac{\sin C}{\sin B}\cdot\frac{\tan B}{\tan A}=\frac{\sin C}{\sin A}\cdot\frac{\cos A}{\cos B}=1 \quad (3)$

យើងមាន:

$$\frac{\sin B+\sin C}{\sin C}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin(A+B)}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A\cos B+\sin B\cos A} \quad (4)$$

តាម (3) : $\frac{\sin C}{\sin A}\cdot\frac{\cos A}{\cos B}=1\Rightarrow \sin C.\cos A=\sin A.\cos B \quad (5)$

តាម (5) និង (4) គេបាន: $\frac{\sin B+\sin C}{\sin C}=\frac{1}{\cos A} \quad (6)$

យើងមាន: $\frac{1}{\cos A}=\sqrt{1+\tan^2 A}=\sqrt{1+\frac{\sin^2 C}{\cos^2 B}}$

ព្រោះ $\sin C\cos A=\sin A\cos B\Rightarrow \tan A=\frac{\sin C}{\cos B}$

យើងបាន: $\frac{1}{\cos A}=\sqrt{\frac{\sin^2 C+\cos^2 B}{\cos^2 B}}=\frac{\sqrt{\cos^2 B+\sin^2 C}}{\cos B} \quad (7)$

តាម (6) និង (7) គេបាន: $\frac{\sin B+\sin C}{\sqrt{\cos^2 B+\sin^2 C}}=\frac{\sin C}{\cos B}$ ។

ដូចនេះ $\frac{\sin B+\sin C}{\sqrt{\cos^2 B+\sin^2 C}}=\frac{\sin C}{\cos B}$ ។

លំហាត់ទី៩១

ត្រីកោណ ABC មានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច ។

បង្ហាញថា: $\dfrac{\tan^2 A}{\sin\dfrac{A}{2}}+\dfrac{\tan^2 B}{\sin\dfrac{B}{2}}+\dfrac{\tan^2 C}{\sin\dfrac{C}{2}}\geq 18$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\dfrac{\tan^2 A}{\sin\dfrac{A}{2}}+\dfrac{\tan^2 B}{\sin\dfrac{B}{2}}+\dfrac{\tan^2 C}{\sin\dfrac{C}{2}}\geq 18$

យើងមាន: $\dfrac{\tan A}{\sqrt{\sin\dfrac{A}{2}}}, \dfrac{\tan B}{\sqrt{\sin\dfrac{B}{2}}}, \dfrac{\tan C}{\sqrt{\sin\dfrac{C}{2}}}$ និង

$\sqrt{\sin\dfrac{A}{2}}, \sqrt{\sin\dfrac{B}{2}}, \sqrt{\sin\dfrac{C}{2}}$

ប្រើវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន:

$$\left(\frac{\tan^2 A}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\tan^2 B}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\tan^2 C}{\sin\frac{C}{2}}\right)\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\geq(\tan A+\tan B+\tan C)^2 \quad (1)$$

ដោយ $\left(\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\right)>0$ តាម (1) គេបាន:

$$\frac{\tan^2 A}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\tan^2 B}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\tan^2 C}{\sin\frac{C}{2}}\geq\frac{(\tan A+\tan B+\tan C)^2}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}} \quad (2)$$

បង្ហាញថា $\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{3}{2}$

តាង $f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x \Rightarrow f''(x)=-\sin x<0$

នោះ f ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមវិសមភាព *Jensen* :

$$\frac{f\left(\frac{A}{2}\right)+f\left(\frac{B}{2}\right)+f\left(\frac{C}{2}\right)}{3}\le f\left(\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}\right)=f\left(\frac{A+B+C}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

តែ $f(x)=\sin x$ គេបាន:

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le 3\sin\frac{\pi}{6}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \quad (3)$$ ពិត

ដោយ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ $\tan A>0,\tan B>0,\tan C>0$

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន:

$$\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$$

$$\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt[3]{\tan A+\tan B+\tan C}$$

$$\left(\tan A+\tan B+\tan C\right)^3\, 27\left(\tan A+\tan B+\tan C\right)$$

$$\left(\tan A+\tan B+\tan C\right)^2\ge 27$$

តែ $\tan A+\tan B+\tan C>0$ យើងបាន:

$$\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt{3} \quad (4)$$

យក $(3),(4)$ ជំនួសក្នុង (2) គេបាន:

$$\frac{\tan^2 A}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\tan^2 B}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\tan^2 C}{\sin\frac{C}{2}}\ge 18$$

ដូចនេះ $\frac{\tan^2 A}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\tan^2 B}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\tan^2 C}{\sin\frac{C}{2}}\ge 18$ ។

លំហាត់ទី៩២

ចំនួនមួយមានលេខ 4 ខ្ទង់ ហើយជាការេប្រាកដ ។
រកចំនួននោះដោយដឹងថា 2 លេខខាងដើមស្មើគ្នា
ហើយ 2 លេខខាងចុងស្មើគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនមានលេខ 4 ខ្ទង់ នោះ

តាងចំនួនមានលេខ 4 ខ្ទង់ នោះដោយ $N=\overline{aabb}$

ដែល $0<a\le 9$, $0\le b\le 9$

យើងមាន: $N=\overline{aabb}=a.1000+a.100+10.b+b=1100a+11b$

$=11(100a+b)$ នោះ N ចែកដាច់នឹង 11

តែ N ជាការេប្រាកដនោះ N ចែកដាច់នឹង $(11)^2$

នាំឲ្យ $100a+b$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

ដោយ $100a+b=99a+(a+b)$ ហើយ $99a$ ចែកដាច់នឹង 11

ដើម្បីឲ្យ $100a+b$ ចែកដាច់នឹង 11 លុះត្រាតែ $a+b$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

ដោយ $1\le a\le 9$, $0\le b\le 9$ នោះ $1\le a+b\le 18\Rightarrow a+b=11$

យើងបាន:

$a=2, b=9\Rightarrow N=2299$

$a=3, b=8\Rightarrow N=3388$

$a=4, b=7\Rightarrow N=4477$

$a=5, b=6\Rightarrow N=5566$

$a=6, b=5\Rightarrow N=6655$

$a=7,b=4 \Rightarrow N=7744=88^2$

$a=8,b=3 \Rightarrow N=8833$

$a=9,b=2 \Rightarrow N=9922$

ដូចនេះចំនួនមានលេខ 4 ខ្ទង់ នោះគឺ $N=7744$ ។

លំហាត់ទី៩៣

a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិពីរ ហើយ A និង B ជាចំនួនពីរ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $A=5a+4b$ និង $B=11a+9b$ ។

ស្រាយថា: $PGCD(a,b)=PGCD(A,B)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $PGCD(a,b)=PGCD(A,B)$

តាង $d=PGCD(a,b)$; $d'=PGCD(A,B)$

ដោយ $d=PGCD(a,b)$ នោះ $a \vdots d$, $b \vdots d$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \vdots d \\ b \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a+4b \vdots d \\ 11a+9b \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5a+4b) \vdots d \\ (11a+9b) \vdots d \end{cases} \Rightarrow PGCD(A,B) \vdots d$$

យើងបាន: $d' \vdots d \quad (1)$

ដោយ $d'=PGCD(A,B)$ នោះ $A \vdots d', B \vdots d'$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \vdots d' \\ B \vdots d' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a+4b \vdots d' \\ 11a+9b \vdots d' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(5a+4b) \vdots d' \\ 11a+9b \vdots d' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a+8b \vdots d' \ (*) \\ 11a+9b \vdots d' \ (**) \end{cases}$$

យក $(**)-(*)$ គេបាន: $a+b \vdots d' \Rightarrow 5(a+b) \vdots d' \Rightarrow 5a+5b \vdots d'$

គេបាន: $\begin{cases} 5a+5b \vdots d' \\ A \vdots d' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a+5b \vdots d' \ (i) \\ 5a+4b \vdots d' \ (ii) \end{cases}$

យក $(i)-(ii)$ គេបាន: $b \vdots d'$

ដោយ $a+b \vdots d'$ និង $b \vdots d'$ នោះ $a \vdots d'$

ដោយ $\begin{cases} a \vdots d' \\ b \vdots d' \end{cases} \Rightarrow PGCD(a,b) = d'$ ឬ $d \vdots d'$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន: $d = d'$

ដូចនេះ $PGCD(a,b) = PGCD(A,B)$ ។

លំហាត់ទី៩៤

គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ គណនា $PGCD\left(a^n, b^n\right)$ ជាអនុគមន៍នៃ $PGCD(a,b)$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។ បើ a និង b បឋមរវាងគ្នា នោះ a^n និង b^n ក៏បឋមរវាងគ្នាដែរ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $PGCD\left(a^n, b^n\right)$ ជាអនុគមន៍នៃ $PGCD(a,b)$:

តាង $d = PGCD(a,b)$; $d' = PGCD\left(a^n, b^n\right)$

យើងបាន $a = da'$; $b = db'$ ដែល a', b' បឋមរវាងគ្នា

$$\Rightarrow PGCD\left(a^n, b^n\right) = PGCD\left(d^n.(a')^n \, , \, d^n.(b')^n\right)$$

$$= d^n PGCD\left[(a')^n \, , (b')^n\right] = d^n$$

ព្រោះ a និង b បឋមរវាងគ្នា នោះ $(a')^n$ និង $(b')^n$ ក៏បឋមរវាងគ្នា

ដូចនេះ $PGCD\left(a^n, b^n\right) = \left[PGCD(a,b)\right]^n$

ពីទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាបើ a និង b បឋមរវាងគ្នា

$\Rightarrow PGCD(a,b) = 1$

$\Rightarrow PGCD\left(a^n, b^n\right) = 1^n = 1$ នោះ a^n និង b^n បឋមរវាងគ្នា

a^n និង b^n បឋមរវាងគ្នា

$\Rightarrow PGCD\left(a^n, b^n\right) = 1 \Rightarrow \left[PGCD(a,)\right]^n = 1$

$\Rightarrow PGCD(a,b) = 1$ នោះ a និង b បឋមរវាងគ្នា ។

លំហាត់ទី៩៥

កំណត់សំណល់វិធីចែកនៃ $S=2^{\frac{1.2}{2}}+2^{\frac{2.3}{2}}+2^{\frac{3.4}{2}}+\cdots+2^{\frac{2014.2015}{2}}$ នឹង 7 ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់សំណល់វិធីចែកនៃ $S=2^{\frac{1.2}{2}}+2^{\frac{2.3}{2}}+2^{\frac{3.4}{2}}+\cdots+2^{\frac{2014.2015}{2}}$ នឹង 7

យើងមាន: $S=2^{\frac{1.2}{2}}+2^{\frac{2.3}{2}}+2^{\frac{3.4}{2}}+\cdots+2^{\frac{2014.2015}{2}}$

$$S=2+2^3+2^6+2^{10}+2^{15}+2^{21}+2^{1007.2015}$$

ដោយ $2\equiv 2 \pmod 7$

$2^3\equiv 1 \pmod 7$

$2^6\equiv 1 \pmod 7$

$2^{10}\equiv 2 \pmod 7$

$2^{15}\equiv 1 \pmod 7$

$2^{21}\equiv 1 \pmod 7$

....

$\Rightarrow 2+2^3+2^6\equiv 2+1+1 \pmod 7$

$2^{10}+2^{15}+2^{21}\equiv 2+1+1 \pmod 7$

....

$2^{\frac{2011.2012}{2}}+2^{\frac{2012.2013}{2}}+2^{\frac{2013.2014}{2}}\equiv 4 \pmod 7$

$S\equiv 671\times 4+2 \pmod 7$

$S\equiv 5 \pmod 7$

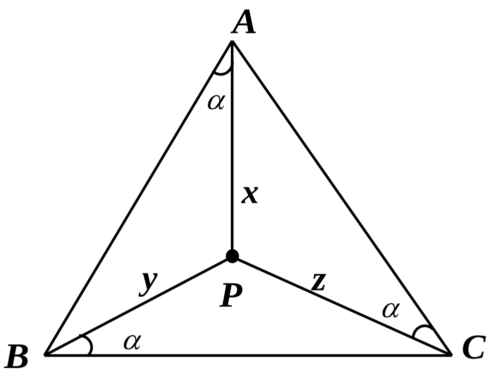
ដូចនេះសំណល់វិធីចែកនៃ $S=2^{\frac{1.2}{2}}+2^{\frac{2.3}{2}}+2^{\frac{3.4}{2}}+\cdots+2^{\frac{2014.2015}{2}}$ នឹង 7 គឺ 5 ។

លំហាត់ទី៩៦

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ដែលមានរង្វាស់ជ្រុង $AB=13$, $BC=14$ $CA=15$ ។ P ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅខាងក្នុងត្រីកោណ ABC ដែលមាន $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$ និង $\tan PAB=\frac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា ។ រក $m+n$ ។

ដំណោះស្រាយ

រក $m+n$:



តាង $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$ និង $PA=x$, $PB=y$, $PC=z$

ដែល $\tan\alpha=\frac{m}{n}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស ក្នុង ΔPAB , ΔPBC និង ΔPAC

យើងបាន: $y^2=x^2+c^2-2xc\cos\alpha$

$z^2=y^2+a^2-2ya\cos\alpha$

$x^2=z^2+b^2-2zb\cos\alpha$

បូកអង្គ និងអង្គគេបាន:

$a^2+b^2+c^2=2xc\cos\alpha+2ya\cos\alpha+2zb\cos\alpha$

តែ $S_{ABC}=S_{PAB}+S_{PBC}+S_{PAC}=\frac{1}{2}xc\sin\alpha+\frac{1}{2}ya\sin\alpha+\frac{1}{2}zb\sin\alpha$

គេបាន: $a^2+b^2+c^2=4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{2}xc\sin\alpha+\frac{1}{2}ya\sin\alpha+\frac{1}{2}zb\sin\alpha\right)$

$$=4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}S_{ABC}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4S_{ABC}}{a^2+b^2+c^2}$$ ឬ $$\tan\alpha=\frac{4S_{ABC}}{a^2+b^2+c^2}$$

តែ $S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{13+14+15}{2}=21$

$\Rightarrow S_{ABC}=\sqrt{21\times8\times7\times6}=84$

$\Rightarrow\tan\alpha=\frac{4\times84}{13^2+14^2+15^2}=\frac{336}{590}=\frac{168}{295}$ ឬ $\frac{m}{n}=\frac{168}{295}$ តែ $(m,n)=1$

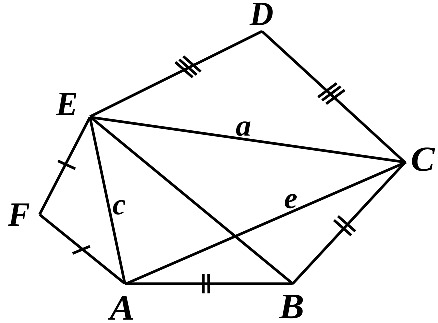
នោះ $m=168$, $n=295\Rightarrow m+n=168+295=463$

ដូចនេះ $m+n=463$ ។

លំហាត់ទី៩៧

គេឲ្យឆកោណប៉ោង $ABCDEF$ មួយ ដែលមានជ្រុង $AB=BC$ $CD=DE$ និង $EF=FA$ ។ បង្ហាញថា: $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{3}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា: $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{3}{2}$

របៀបទី១

តាង $AE=c$, $EC=a$, $AC=e$

តាមវិសមភាព *Ptolemy* ក្នុងចតុកោណ *ABCE* គេបាន:

$AB\times a+BC\times c\geq e\times BE\Leftrightarrow BC(a+c)\geq e.BE$ ឬ $\frac{BC}{BE}\geq\frac{e}{a+c}$

ដូចគ្នានេះដែរ $\frac{DE}{DA}\geq\frac{a}{e+c}$ និង $\frac{FA}{FC}\geq\frac{c}{a+e}$

យើងបាន: $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{e}{a+c}+\frac{a}{e+c}+\frac{c}{a+e}$

ដោយ $\frac{e}{a+c}+\frac{a}{e+c}+\frac{c}{a+e}=\frac{e+a+c}{a+c}+\frac{a+e+c}{e+c}+\frac{c+a+e}{a+e}-3$

$$=(e+a+c)\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{e+c}+\frac{1}{a+e}\right)-3$$

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន:

$e+a+c=\frac{1}{2}\left[(a+c)+(e+c)+(a+e)\right]\geq\frac{1}{2}\cdot3\sqrt[3]{(a+c)(e+c)(a+e)}$

និង $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{e+c}+\frac{1}{a+e}\geq3\sqrt[3]{\frac{1}{(a+c)(e+c)(a+e)}}$

គេបាន: $\frac{e}{a+c}+\frac{a}{e+c}+\frac{c}{a+e}\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{3}{2}$ ។

របៀបទី២

តាង $AE=c$, $EC=a$, $AC=e$

តាមវិសមភាព *Ptolemy* ក្នុងចតុកោណ *ABCE* គេបាន:

$AB\times a+BC\times c\geq e\times BE\Leftrightarrow BC(a+c)\geq e.BE$ ឬ $\frac{BC}{BE}\geq\frac{e}{a+c}$

ដូចគ្នានេះដែរ $\frac{DE}{DA}\ge\frac{a}{e+c}$ និង $\frac{FA}{FC}\ge\frac{c}{a+e}$

យើងបាន: $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{e}{a+c}+\frac{a}{e+c}+\frac{c}{a+e}$ (1)

យើងមាន: $\frac{e}{a+c}+\frac{a}{e+c}+\frac{c}{a+e}=\frac{e^2}{ea+ec}+\frac{a^2}{ea+ac}+\frac{c^2}{ac+ec}$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$

$$\frac{e}{a+c}+\frac{a}{e+c}+\frac{c}{a+e}\ge\frac{(e+a+c)^2}{2(ea+ec+ac)}\ge\frac{3}{2}$$

$$(e+a+c)^2\ge 3(ea+ec+ac)$$

$$e^2+a^2+c^2+2(ea+ec+ac)\ge 3(ea+ec+ac)$$

$$e^2+a^2+c^2\ge ea+ec+ac$$

$$2e^2+2a^2+2c^2\ge 2ea+2ec+2ac$$

$(e-a)^2+(a-c)^2+(c-e)^2\ge 0$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{3}{2}$ ។

របៀបទី៣

តាង $AE=c$, $EC=a$, $AC=e$

តាមវិសមភាព $Ptolemy$ ក្នុងចតុកោណ $ABCE$ គេបាន:

$AB\times a+BC\times c\ge e\times BE\Leftrightarrow BC(a+c)\ge e.BE$ ឬ $\frac{BC}{BE}\ge\frac{e}{a+c}$

ដូចគ្នានេះដែរ $\frac{DE}{DA}\ge\frac{a}{e+c}$ និង $\frac{FA}{FC}\ge\frac{c}{a+e}$

យើងបាន: $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{e}{a+c}+\frac{a}{e+c}+\frac{c}{a+e}$ (1)

តាង $s=e+a+c$ គេបាន:

តាម (1): $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{e}{s-e}+\frac{a}{s-a}+\frac{c}{s-c}$ (2)

តាង $f(x)=\frac{x}{s-x}$, $s>x>0$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{s-x+x}{(s-x)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x)=-\frac{s.2(s-x)'(s-x)}{(s-x)^4}$$

$$=\frac{2s}{(s-x)^3}>0$$

នោះអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ផត

តាមវិសមភាព *Jensen* គេបាន:

$$\frac{f(e)+f(a)+f(c)}{3}\geq f\left(\frac{e+a+c}{3}\right)=f\left(\frac{s}{3}\right)$$

$$\frac{e}{s-e}+\frac{a}{s-a}+\frac{c}{s-c}\geq 3\frac{\frac{s}{3}}{s-\frac{s}{3}}=3-\frac{s}{2s}=\frac{3}{2}$$ ពិត ។

ដូចនេះ $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៩៨

n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល 2014! ចែកដាច់នឹង 5^n ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n\leq 501$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n\leq 501$:

យើងមាន: $2014!=1\times2\times3\times\cdots\times2014$

ចំនួនដែលអាចចែកដាច់នឹង 5 គឺ: $5, 10, 15, ..., 2010$

ចំនួនជាពហុគុណនៃ 5 មាន $5, 10, ...$ គេបាន: $\left\lfloor\frac{2014}{5}\right\rfloor=402$

ចំនួនជាពហុគុណនៃ 25 មាន $25, 50, 75, ...$ គេបាន: $\left\lfloor \frac{2014}{25} \right\rfloor = 80$

ចំនួនជាពហុគុណនៃ 125 មាន $125, 250, ...$ គេបាន: $\left\lfloor \frac{2014}{125} \right\rfloor = 16$

ចំនួនជាពហុគុណនៃ 625 មាន $625, 1250, ...$ គេបាន: $\left\lfloor \frac{2014}{625} \right\rfloor = 3$

ចំនួនតួចែកនឹង 5 ក្នុង $2014!$ ទាំងអស់មាន: $402+80+16+3=501$

ដោយ $2014! = 5^{501} \times k$ ហើយ $2014! \vdots 5^n$ នោះ $5^{501} \times k \vdots 5^n$

តែ $(k,5)=1 \Rightarrow 5^{501} \vdots 5^n$

ដូចនេះ $n \le 501$ ។

លំហាត់ទី៩៩

គេមានចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន: $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$

ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ: $\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_k = 96 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 144 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k^3 = 216 \end{cases}$

រកចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន: $x_1, x_2, ..., x_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន: $x_1, x_2, ..., x_n$

យើងមាន: $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 144$ ឬ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_k^2 = 144$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន:

$$\sqrt{x_1}.\sqrt{x_1^3}+\sqrt{x_2}.\sqrt{x_2^3}+\cdots+\sqrt{x_n}.\sqrt{x_n^3}$$

$$\le\sqrt{\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)}.\sqrt{\left(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3\right)}$$

$$\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^3}=\sqrt{96}.\sqrt{216}=144$$

ឬ $\sum_{k=1}^{n}x_k^2\le 144$

សមភាពកើតមានកាលណា: $\frac{\sqrt{x_1^3}}{\sqrt{x_1}}=\frac{\sqrt{x_2^3}}{\sqrt{x_2}}=\cdots=\frac{\sqrt{x_n^k}}{\sqrt{x_n}}=t$

$$\Rightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n=t$$

គេបាន: $\sum_{k=1}^{n}x_k=t+t+\cdots+t=nt=96$ នោះ $t=\frac{96}{n}$ (1)

$\sum_{k=1}^{n}x_k^2=nt^2=144\Rightarrow t^2=\frac{144}{n}$ (2)

យក (2) ធៀប (1) យើងបាន: $t=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី១០០

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}}<C(100,50)<\frac{2^{100}}{10}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}}<C(100,50)<\frac{2^{100}}{10}$

យើងមាន: $\frac{1}{2^{100}}C(100,50)=\frac{100!}{2^{100}50!50!}=\frac{100!}{2^{50}50!2^{50}50!}$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot 100}{2^{50}(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 50)2^{50}(1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot 50)}$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot 100}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 100)(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 100)}$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 100}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}=A$$

យើងមាន: $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$

$$\frac{3}{4}>\frac{3}{5}$$

$$\frac{5}{6}>\frac{5}{7}$$

$$\vdots$$

$$\frac{99}{100}>\frac{99}{101}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ $A>\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\ldots\times\frac{97}{99}\times\frac{99}{101}=\frac{1}{101}$ នោះ: $\frac{1}{101}<A$ (1)

តែ $101>10\sqrt{2}\Rightarrow\frac{1}{10\sqrt{2}}<\frac{1}{101}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន: $\frac{1}{10\sqrt{2}}<A$ (*)

យើងមាន: $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$

$$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$$

$$\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$$

$$\vdots$$

$$\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ $A<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{100}{101}$

$$=2\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\frac{100}{99}\times\frac{1}{101}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{\frac{3}{4}}\times\frac{1}{\frac{5}{6}}\times\cdots\times\frac{1}{\frac{99}{100}}\times\frac{1}{101}$$

$$=\frac{1}{A}\times\frac{1}{101}$$

$\Rightarrow A<\frac{1}{A}\times\frac{1}{101}$ ឬ $A^2<\frac{1}{101}$ ឬ $A<\frac{1}{\sqrt{101}}$ (3)

ដោយ $\sqrt{101}>\sqrt{100}=10\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}$ (4)

តាម (3) និង (4) គេបាន: $A<\frac{1}{10}$ (**)

តាម (*) និង (**) យើងបាន: $\frac{1}{10\sqrt{2}}<A<\frac{1}{10}$

តែ $A=\frac{1}{2^{100}}C(100,50)\Rightarrow\frac{1}{10\sqrt{2}}<\frac{1}{2^{100}}C(100,50)<\frac{1}{10}$

$\Rightarrow\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}}<C(100,50)<\frac{2^{100}}{10}$

ដូចនេះ $\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}}<C(100,50)<\frac{2^{100}}{10}$ ។

លំហាត់ទី១០១

គេឲ្យស្វីត *Fibonacci* កំណត់ដោយ: $f_0=1, f_1=1, f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ ដែល $n\geq 1$ ។

ក)ចូររកតម្លៃ $f_2, f_3, ..., f_{10}$ ។

ខ)តាង $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ហើយ $X_n=\begin{bmatrix}f_{n-1}\\ f_n\end{bmatrix}$ ចំពោះ $n\geq 1$ ។ បង្ហាញថា: $AX_n=X_{n+1}$ ចំពោះ $n\geq 1$ និងបង្ហាញថា $A^nX_1=X_{n+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ $f_2, f_3, ..., f_{10}$

យើងមាន: $f_0=1, f_1=1, f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 1$ យើងបាន:

$f_2=f_1+f_0=1+1=2$

$f_3=f_2+f_1=2+1=3$

$f_4=f_3+f_2=3+2=5$

$f_5=f_4+f_3=5+3=8$

$f_6=f_5+f_4=8+5=13$

$f_7=f_6+f_5=13+8=21$

$f_8=f_7+f_6=21+13=34$

$f_9=f_8+f_7=34+21=55$

$f_{10}=f_9+f_8=55+34=89$

ដូចនេះ

$f_2=2, f_3=3, f_4=5, f_5=8, f_6=13, f_7=21, f_8=34, f_9=55, f_{10}=89$

ខ)បង្ហាញថា: $AX_n=X_{n+1}$ ចំពោះ $n\geq 1$

គេមាន: $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $X_n=\begin{bmatrix}f_{n-1}\\ f_n\end{bmatrix}\Rightarrow X_{n+1}=\begin{bmatrix}f_n\\ f_{n+1}\end{bmatrix}$

គេបាន: $AX_n=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{n-1}\\f_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_n\\f_n+f_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_n\\f_{n+1}\end{bmatrix}$, $f_n+f_{n-1}=f_{n+1}$

តែ $X_{n+1}=\begin{bmatrix}f_n\\f_{n+1}\end{bmatrix}\Rightarrow AX_n=X_{n+1}$ ពិត ។

បង្ហាញថា $A^nX_1=X_{n+1}$, $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$, $X_n=\begin{bmatrix}f_{n-1}\\f_n\end{bmatrix}$

យើងស្រាយតាមវិចារកំណើន: $A^nX_1=X_{n+1}$ ចំពោះ $n\geq 1$

បើ $n=1$ គេបាន: $AX_1=X_2\Leftrightarrow\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_0\\f_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1\\f_0+f_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\end{bmatrix}=X_2$ ពិត

បើ $n=2$ គេបាន: $A^2X_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}X_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_0\\f_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1+f_0\\f_0+2f_1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}f_2\\f_0+f_1+f_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_2\\f_1+f_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_2\\f_3\end{bmatrix}=X_3$ ពិត

ឧបមាថាពិតដល់ n គឺ: $A^nX_1=X_{n+1}$

យើងនឹងស្រាយឲ្យពិតដល់ $n+1$ គឺ: $A^{n+1}X_1=X_{n+2}$ ។

យើងមាន: $A^nX_1=X_{n+1}$ នោះយើងបាន:

$A^{n+1}X_1=AX_{n+1}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_n\\f_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{n+1}\\f_n+f_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{n+1}\\f_{n+2}\end{bmatrix}=X_{n+2}$ ពិត

ដូចនេះ $A^nX_1=X_{n+1}$ ចំពោះ $n\geq 1$ ។

លំហាត់ទី១០២

គេឲ្យ $x>0,y>0,z>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $x+y+z=2016$ ។

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ $S=\dfrac{x^{30}}{x^{21}}+\dfrac{y^{30}}{y^{21}}+\dfrac{z^{30}}{z^{21}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន: $x>0, y>0, z>0$ និង $x+y+z=2016=3\times 672$

$\dfrac{x^{30}}{672^8 y^{21}}$ មាន 1 តួ y មាន 21 តួ 672 មាន 8 តួ

តាមវិសមភាព *Cauchy* , 30 តួយើងបាន:

$$\frac{x^{30}}{672^8 y^{21}}+21y+8\times 672\geq 30\sqrt[30]{\frac{x^{30}}{672^8 y^{21}}\cdot y^{21}\cdot 672^8}=30x$$

ឬ $\dfrac{x^{30}}{672^8 y^{21}}+21y+8\times 672\geq 30x \quad (i)$

ធ្វើដូចគ្នានេះដែរគេបាន: $\dfrac{y^{30}}{672^8 . z^{21}}+21z+8\times 672\geq 30y \quad (ii)$

$\dfrac{z^{30}}{672^8 . x^{21}}+21x+8\times 672\geq 30z \quad (iii)$

យក $(i)+(ii)+(iii)$ យើងបាន:

$$\frac{x^{30}}{672^8 . y^{21}}+\frac{y^{30}}{672^8 . z^{21}}+\frac{z^{30}}{672^8 . x^{21}}+21(x+y+z)+3\times 8\times 672\geq 30(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{672^8}A\geq 30(x+y+z)-21(x+y+z)-8\times 2016$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{672^8}A\geq 9\times 2016-8\times 2016=2016 \quad \text{ឬ } A\geq 2016\times 672^8$$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ A គឺ: 2016×672^8 ពេល $x=y=z=672$

លំហាត់ទី១០៣

ក)កំណត់ពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ដែល $GCD(a,b)=21$ និង $99a-1665b=0$ ។

ខ)គេឲ្យ $S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ និង $S_1=1$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $S_n=\dfrac{1}{S_1^2}+\dfrac{1}{2S_2^2}+\dfrac{1}{3S_3^2}+\cdots+\dfrac{1}{nS_n^2}<2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)កំណត់ពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b

យើងមាន: $99a-1665b=0$

$\Rightarrow 99a=1665b$

$9\times 11a=9\times 5\times 35b$

$11a=5\times 35b$

ដោយ 11 និង (5×35) បឋមរវាងគ្នា ហើយ 21 ជាតួចែករួមធំបំផុត នៃ a និង b គេបាន: $a=5\times 35\times 21=3885$

$$b=11\times 21=231$$

ដូចនេះ $a=3885\,,\,b=231$ ។

ខ)ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $S_n=\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{2S_2^2}+\frac{1}{3S_3^2}+\cdots+\frac{1}{nS_n^2}<2$

យើងមាន: $S_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}$

$$\Rightarrow\ S_{k-1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k-1}$$

យើងបាន: $S_k-S_{k-1}=\frac{1}{k}\Rightarrow\frac{1}{S_{k-1}}-\frac{1}{S_k}=\frac{S_k-S_{k-1}}{S_k.S_{k-1}}=\frac{1}{k.S_{k-1}.S_k}>\frac{1}{kS_k^2}$

ឬ $\frac{1}{kS_k^2}<\frac{1}{S_{k-1}}-\frac{1}{S_k}$ ឲ្យតម្លៃ $k=2,3,...,n$ គេបាន:

$\frac{1}{2S_2^2}<1-\frac{1}{S_2}$

$\frac{1}{3S_3^2}<\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}$

....

$\frac{1}{nS_n^2}<\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$

បូកអង្គនិងអង្គគេបាន:

$$\frac{1}{2S_2^2}+\frac{1}{3S_3^2}+\cdots+\frac{1}{nS_n^2}<1-\frac{1}{S_n}$$

$$\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{2S_2^2}+\frac{1}{3S_3^2}+\cdots+\frac{1}{nS_n^2}<1+\frac{1}{S_1^2}-\frac{1}{S_n}=2-\frac{1}{S_n}<2$$

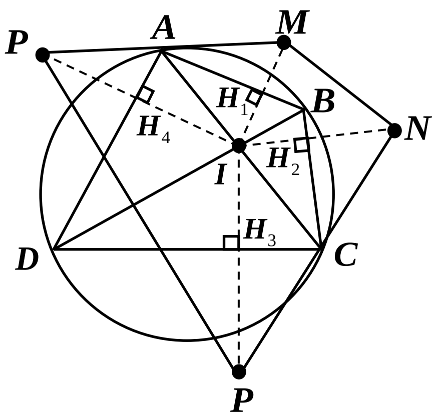
ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{2S_2^2}+\frac{1}{3S_3^2}+\cdots+\frac{1}{nS_n^2}<2$ ។

លំហាត់ទី១០៤

គេឲ្យចតុកោណ $ABCD$ មានក្រឡាផ្ទៃស្មើ S ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O ។ តាង I ជាចំណុចប្រសព្វនៃអង្កត់ទ្រូង AC និង BD ហើយចំណុច M , N , P និង Q ជាចំណុចឆ្លុះនៃ I ធៀបនឹងជ្រុង AB , BC , CD , DA រៀងគ្នា ។ រកតម្លៃអតិបរមានៃផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $MNPQ$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃអតិបរមានៃផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $MNPQ$



តាង H_1,H_2,H_3,H_4 ជាចំណោលកែងនៃ I លើជ្រុង AB , BC

CD និង DA រៀងគ្នា ។

យើងមាន: $S_{MIN}=\frac{1}{2}IM\cdot IN\sin MIN=2IH_1.IH_2.\sin B$ (1)

$$IH_1.IH_2=\frac{4S_{AIB}.S_{BIC}}{AB.AC}\le\frac{\left(S_{AIB}+S_{BIC}\right)^2}{AB.AC}=\frac{S_{ABC}^2}{AB.AC}=\frac{1}{2}S_{ABC}.\mathrm{sinB}\quad(2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន: $S_{MIN}\le S_{ABC}.\sin^2 B\le S_{ABC}$

ធ្វើដូចគ្នានេះដែរ: $S_{NIP}\le S_{BCD}$

$S_{PIQ}\le S_{CDA}$

$S_{QIM}\le S_{DAB}$

$$\Rightarrow S_{MNPQ}=S_{MIN}+S_{NIP}+S_{PIQ}+S_{QIM}\le S_{ABC}+S_{BCD}+S_{CDA}+S_{DAB}=2S$$

សមភាពកើតឡើងកាលណា:

$\begin{cases}S_{AIB}=S_{BIC}=S_{CID}=S_{DIA}\\ \sin A=\sin B=\sin C=\sin D=1\end{cases}$ នោះ $ABCD$ ជាចតុកោណកែង

ដូចនេះតម្លៃអតិបរមានៃផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $MNPQ$ គឺ $2S$ កាលណា $ABCD$ ជាចតុកោណកែង ។

លំហាត់ទី១០៥

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ។ m_a,m_b,m_c ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ ABC ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $m_a.m_b.m_c\le\frac{27}{8}R^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $m_a.m_b.m_c\le\frac{27}{8}R^3$

តាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន:

$$\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} \quad (1) \\ m_b^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4} \quad (2) \\ m_c^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4} \quad (3) \end{cases}$$

យក $(1)+(2)+(3)$ យើងបាន: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

តាមវិសមភាព *Cauchy* បីតួ គេបាន:

$$m_a^2.m_b^2.m_c^2 \le \left(\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\right)^3 \quad (*)$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$$

យើងបាន: $\frac{a^2+b^2+c^2}{4} = R^2\left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right)$

តាម $(*)$ គេបាន: $m_a^2.m_b^2.m_c^2 \le \left[R^2\left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right)\right]^3 \quad (**)$

យើងនឹងស្រាយថា: $Sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$

យើងមាន: $Sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$

$$\frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos 2A + \cos 2B\right) - \sin^2 C + \frac{5}{4} \ge 0$$

$$\cos(A+B)\cos(A-B) + 1 - \sin^2 C + \frac{1}{4} \ge 0$$

$$\cos C-\cos(A-B)\cos C+\frac{1}{4}\ge 0$$

$$\left[\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2(A-B)\ge 0$$

$$\left[\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2+\frac{1}{4}\sin^2(A-B)\ge 0$$ ពិត

សមភាពកើតមានកាលណា:

$$\begin{cases}\sin(A-B)=0\\ \cos C=\dfrac{1}{2}\cos(A-B)\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}$$

តាម (**) គេបាន:

$$m_a^2.m_b^2.m_c^2\le\left(\frac{9}{4}R^2\right)^3=\left(\frac{27}{8}R^3\right)^2\Rightarrow m_a.m_b.m_c\le 27R^3$$

ដូចនេះ $m_a.m_b.m_c\le 27R^3$ ។

លំហាត់ទី១០៦

ដោះស្រាយសមីការចំពោះអញ្ញាតិ x និង m,n,p ជាចំនួនវិជ្ជមាន

$$\frac{x^3+n^3}{(x+n)^3}+\frac{x^3+m^3}{(x+n)^3}+\frac{x^3+p^3}{(x+n)^3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{(x-m)(x-p)(x-n)}{(x+m)(x+p)(x+n)}=\frac{3}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ:

$$\frac{x^3+n^3}{(x+n)^3}+\frac{x^3+m^3}{(x+n)^3}+\frac{x^3+p^3}{(x+n)^3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{(x-m)(x-p)(x-n)}{(x+m)(x+p)(x+n)}=\frac{3}{2}$$

សមីការមានន័យកាលណា: $x\ne -n, x\ne -m, x\ne -p$

យើងមាន: $\dfrac{x^3+s^3}{(x+s)^3}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{(x-s)^2}{(x+s)^2}$, $x\ne -s$ គេបានសមីការទៅជា:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{(x-n)^2}{(x+n)^2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{(x-m)^2}{(x+m)^2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{(x-p)^2}{(x+p)^2}$$

$$+\frac{3}{2}\cdot\frac{(x-n)(x-m)(x-p)}{(x+n)(x+m)(x+p)}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\left[\frac{(x-n)^2}{(x+n)^2}+\frac{(x-m)^2}{(x+m)^2}+\frac{(x-p)^2}{(x+p)^2}\right]+\frac{3}{2}\cdot\frac{(x-n)(x-m)(x-p)}{(x+n)(x+m)(x+p)}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{(x-n)^2}{(x+n)^2}+\frac{(x-m)^2}{(x+m)^2}+\frac{(x-p)^2}{(x+p)^2}+2\frac{(x-n)(x-m)(x-p)}{(x+n)(x+m)(x+p)}=2$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-n)^2}{(x+n)^2}+\frac{(x-m)^2}{(x+m)^2}+\frac{(x-p)^2}{(x+p)^2}+2\frac{(x-n)(x-m)(x-p)}{(x+n)(x+m)(x+p)}-1=0$$

តាង $a=\frac{x-n}{x+n},b=\frac{x-m}{x+m},c=\frac{x-p}{x+p}$ គេបាន:

$$a^2+b^2+c^2+2abc-1=0$$

$$c^2+2abc+a^2b^2=1-a^2-b^2-a^2b^2$$

$$\left(c+ab\right)^2=1-a^2-b^2(1-a^2)$$

$$\left(c+ab\right)^2=\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{x-p}{x+p}+\frac{(x-n)(x-m)}{(x+n)(x+m)}\right]^2=\left[1-\left(\frac{x-n}{x+n}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{x-m}{x+m}\right)^2\right]$$

$$\left[(x-p)(x+n)(x+m)+(x-n)(x-m)(x+p)\right]^2$$

$$=(x+p)^2\left[(x+n)^2-(x-n)^2\right]\left[(x+m)^2-(x-m)^2\right]\ (*)$$

យើងមាន: $(x-p)(x+n)(x+m)=(x-p)\left[x^2+(m+n)x+mn\right]$

$$=x^3+(m+n)x^2+mnx-px^2-(mp+np)x-mnp$$

$$=x^3+(m+n-p)x^2+(mn-mp-np)x-mnp$$

ម្យ៉ាងទៀត $(x-n)(x-m)(x+p)=\left[x^2-(m+n)x+mn\right](x+p)$

$$=x^3-(m+n)x^2+mnx+px^2-(\mathrm{p}m+pn)x+mnp$$

$$=x^3-(m+n-p)x^2-(pm+pn-mn)x+mnp$$

$\Rightarrow (x-p)(x+n)(x+m)+(x-n)(x-m)(x+p)$

$= x^3+(m+n-p)x^2+(mn-mp-np)x-mnp$

$+x^3-(m+n-p)x^2-(\mathrm{p}m+pn-mn)x+mnp$

$= 2x^3+\left(2mn-2mp-2np\right)x$

$= 2x\left(x^2+mn-mp-np\right)$

ហើយ $(x+n)^2-(x-n)^2=4nx,(x+m)^2-(x-m)^2=4mx$

តាម $(*)$ គេបាន:

$4x^2\left(x^2+mn-mp-np\right)^2=(x+p)^2.4nx.4mx=4^2\sqrt{(mn)^2}x^2(x+p)^2$

$2^2x^2\left(x^2+mn-mp-np\right)^2-4^2\sqrt{(mn)^2}x^2(x+p)^2=0$

$4x^2\left[\left(x^2+mn-mp-np\right)^2-2^2\sqrt{(mn)^2}x^2(x+p)^2\right]=0$

$x^2\left[\left(x^2+mn-mp-np-2\sqrt{mn}(x+p)\right)\right]$

$\left[\left(x^2+mn-mp-np+2\sqrt{mn}(x+p)\right)\right]=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2+mn-mp-np-2\sqrt{mn}(x+p)=0 \\ x^2+mn-mp-np+2\sqrt{mn}(x+p)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2\sqrt{mn}x+mn-mp-np-2p\sqrt{mn}=0 \\ x^2+2\sqrt{mn}x+mn-mp-np+2p\sqrt{mn}=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2x\sqrt{mn}+\sqrt{(mn)^2}=\sqrt{(mp)^2}+2p\sqrt{mn}+\sqrt{(np)^2} \\ x^2+2x\sqrt{mn}+\sqrt{(mn)^2}=\sqrt{(mp)^2}-2p\sqrt{mn}+\sqrt{(np)^2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (x-\sqrt{mn})^2=(\sqrt{mp}+\sqrt{np})^2 \\ (x+\sqrt{mn})^2=(\sqrt{mp}-\sqrt{np})^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{mn}\pm(\sqrt{mp}+\sqrt{np}) \\ x=-\sqrt{mn}\pm(\sqrt{mp}-\sqrt{np}) \end{array}\right.$$

ដូចនេះ

$x=0, x=\sqrt{mn}\pm(\sqrt{mp}+\sqrt{np}), x=-\sqrt{mn}\pm(\sqrt{mp}-\sqrt{np})$ ជាឬសនៃសមីការ ។

លំហាត់ទី១០៧

គេឲ្យ a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយស្រាយថា:

$(a+b-c)^a(b+c-a)^b(a+c-b)^c \le a^a b^b c^c$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $(a+b-c)^a(b+c-a)^b(a+c-b)^c \le a^a b^b c^c$

យើងមាន: $(a+b-c)^a(b+c-a)^b(a+c-b)^c \le a^a b^b c^c$

$$\left(\frac{a+b-c}{a}\right)^a\left(\frac{b+c-a}{b}\right)^b\left(\frac{a+c-b}{c}\right)^c \le 1$$

តាមវិសមភាពក្នុងត្រីកោណគេបាន:

$a+b>c, b+c>a, a+c>b$

$\Rightarrow a+b-c>0, b+c-a>0, a+c-b>0$

នោះតាម វិសមភាព: $AM-GM$

$$\sqrt[a+b+c]{\left(\frac{a+b-c}{a}\right)^{a}\left(\frac{b+c-a}{b}\right)^{b}\left(\frac{a+c-b}{c}\right)^{c}}$$

$$\le\frac{1}{a+b+c}\left(a\left(\frac{a+b-c}{a}\right)+b\left(\frac{b+c-a}{b}\right)+c\left(\frac{a+c-b}{c}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\cdot(a+b+c)=1$$ ពិត

សមភាពកើតឡើងពេលត្រីកោណជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ដូចនេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១០៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយស្រាយថា:

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា:

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$$

ដោយ: $A+B+C=\pi\Rightarrow\frac{A+B+C}{2}=\frac{\pi}{2}$

$$\tan\left(\frac{A+B+C}{2}\right)=\tan\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{1-\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\right)}=\infty$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1$$

គេបាន:

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$+\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)+\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{A+B+C}{2}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{2}=1 \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ សមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១០៩

គេឲ្យ x,y,z ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$(x+y+z)^{x+y+z}.x^x.y^y.z^z \le (x+y)^{x+y}(y+z)^{y+z}(x+z)^{x+z}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$(x+y+z)^{x+y+z}.x^x.y^y.z^z \le (x+y)^{x+y}(y+z)^{y+z}(x+z)^{x+z}$$

កំណត់យក y,z ជាចំនួនវិជ្ជមាននិង x ជាអញ្ញាតិ

តាង $f(x)=(x+y+z)\ln(x+y+z)+x\ln x+y\ln y+z\ln z$

$-(x+y)\ln(x+y)-(y+z)\ln(y+z)-(x+z)\ln(x+z)$

ដែលជាអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $(0;+\infty)$ គេបាន:

$$f'(x)=\ln(x+y+z)+1+\ln x+1-\ln(x+y)-1-\ln(x+z)-1$$

$$=\ln\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}$$

$$=\ln\left(\frac{x^2+xy+zx}{x^2+xz+xy+yz}\right)$$

ត្រូវស្រាយថា: $\ln\left(\frac{x^2+xy+zx}{x^2+xz+xy+yz}\right)\le 0$

យើងមាន: $\ln\left(\frac{x^2+xy+zx}{x^2+xz+xy+yz}\right)\le 0=\ln 1$

$$\frac{x^2+xy+zx}{x^2+xz+xy+yz}\le 1$$

$$x^2+xy+zx\le x^2+xz+xy+yz$$

$0\le yz$ ពិត ព្រោះ y,z ជាចំនួនវិជ្ជមាន

នោះអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះចំពោះគ្រប់ $x\in(0;+\infty)$

$f(x)\le f(0)$ តែ $f(0)=0$

$\Leftrightarrow f(x)\le 0$

$(x+y+z)\ln(x+y+z)+x\ln x+y\ln y+z\ln z$

$-(x+y)\ln(x+y)-(y+z)\ln(y+z)-(x+z)\ln(x+z)\le 0$

$\Leftrightarrow \ln(x+y+z)^{x+y+z}+\ln x^x+\ln y^y+\ln z^z$

$\le \ln(x+y)^{x+y}+\ln(y+z)^{y+z}+\ln(x+z)^{x+z}$

$\Leftrightarrow \ln\left[(x+y+z)^{x+y+z}.x^x.y^y.z^z\right]\le \ln\left[(x+y)^{x+y}(y+z)^{y+z}(x+z)^{x+z}\right]$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^{x+y+z}.x^x.y^y.z^z\le (x+y)^{x+y}(y+z)^{y+z}(x+z)^{x+z}$ ពិត

ដូចនេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១១០

គេឲ្យ a,b,c ប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយថា:

$\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3+c^3+3abc}{2}}\ge \max\{a,b,c\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3+c^3+3abc}{2}}\ge \max\{a,b,c\}$

សន្មតថា: $\max\{a,b,c\}=a$ គេបាន:

$\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3+c^3+3abc}{2}}\ge a$

$-a^3+b^3+c^3+3abc\ge 0$

$-a^3+b^3+c^3-3(-a)bc\ge 0$ (*)

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន:

$$\left(a+b+c\right)^3=a^3+3a(b+c)(a+b+c)+(b+c)^3$$
$$=a^3+3a(b+c)(a+b+c)+b^3+c^3+3bc(b+c)$$
$$=a^3+b^3+c^3++3a(b+c)(a+b+c)+3bc(a+b+c)-3abc$$
$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left((a+b+c)^2-3ab-3bc-3ac\right)$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc)$$

ជំនួស a ដោយ $-a$ គេបាន:

$$-a^3+b^3+c^3-3(-a)bc$$
$$=\frac{1}{2}(-a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2ac-2bc)$$
$$=\frac{1}{2}(b+c-a)\left[(a+b)^2+(a+c)^2+(b-c)^2\right]\geq 0$$ ពិត

ដូចនេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១១១

គេឲ្យ $ABCDEFGHIJKL$ ជាពហុកោណនិយ័តដែលមាន 12 ជ្រុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃពហុកោណនោះ។ ស្រាយថា:

$a.\ \frac{AB}{AF}+\frac{AF}{AB}=2$

$b.\ AB^2+AC^2+AD^2+AE^2+AF^2=12R^2$

ដំណោះស្រាយ

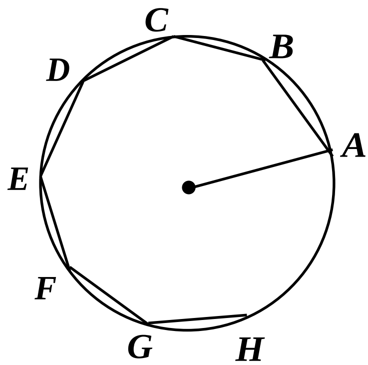
ស្រាយថា: $a.\ \frac{AB}{AF}+\frac{AF}{AB}=2$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស:

$$\frac{AB}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{AF}{\sin\frac{5\pi}{6}}=2R$$

$$\Rightarrow AB=2R\sin\frac{\pi}{6}\ ,\ AF=2R\sin\frac{5\pi}{6}$$

នោះ $\frac{AB}{AF}+\frac{AF}{AB}=\frac{2R\sin\frac{\pi}{6}}{2R\sin\frac{5\pi}{6}}+\frac{2R\sin\frac{5\pi}{6}}{2R\sin\frac{\pi}{6}}$



$$=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{5\pi}{6}}+\frac{\sin\frac{5\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{5\pi}{6}=2\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}=2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{\pi}{6}=2\sin^2\frac{\pi}{6}$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{AB}{AF}+\frac{AF}{AB}=2$ ។

ស្រាយថា: *b.* $AB^2+AC^2+AD^2+AE^2+AF^2=12R^2$

ដូចគ្នាតាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសគេបាន:

$$AC^2=4R^2\sin^2\frac{2\pi}{6}, AD^2=4R^2\sin^2\frac{3\pi}{6}, AE^2=4R^2\sin^2\frac{4\pi}{6}$$

$$\Rightarrow AB^2+AC^2+AD^2+AE^2+AF^2$$

$$=4R^2\left(\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{2\pi}{6}+\sin^2\frac{3\pi}{6}+\sin^2\frac{4\pi}{6}+\sin^2\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=4R^2\left(\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 4R^2\left(2\sin^2\frac{\pi}{6}+2\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 4R^2\left(2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{4}+1\right)$$

$= 4R^2.3 = 12R^2$ ពិត

ដូចនេះ $AB^2+AC^2+AD^2+AE^2+AF^2=12R^2$ ។

លំហាត់ទី១១២

ស្រាយថាក្នុងត្រីកោណដែលមានមុំស្រួចមួយគេបាន:
$\sqrt{a^2b^2-4S^2}+\sqrt{a^2c^2-4S^2}=a^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\sqrt{a^2b^2-4S^2}+\sqrt{a^2c^2-4S^2}=a^2$

តាមរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ: $S=\frac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}=\frac{1}{2}ac\sin B$

$\Rightarrow a^2b^2\sin^2 C=4S^2$, $a^2c^2\sin^2 B=4S^2$ គេបាន:

$$\sqrt{a^2b^2-4S^2}+\sqrt{a^2c^2-4S^2}=\sqrt{a^2b^2-a^2b^2\sin^2 C}+\sqrt{a^2c^2-a^2c^2\sin^2 B}$$

$$= ab\sqrt{1-\sin^2 C}+ac\sqrt{1-\sin^2 B}$$

$$= ab\cos C+ac\cos B$$

$$= ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$= a^2$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{a^2b^2-4S^2}+\sqrt{a^2c^2-4S^2}=a^2$ ។

លំហាត់ទី១១៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយដែល: $\max\{A,B\}=C+30^\circ$ ។

ស្រាយថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងកាលណា $\frac{R}{r}=\sqrt{3}+1$

ដែល R ជា r កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនិងក្នុងរៀងគ្នារបស់ត្រីកោណ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងកាលណា $\frac{R}{r}=\sqrt{3}+1$

សន្មតថា: $\max\{A,B\}=A$ នោះបើត្រីកោណ

ABC ជាត្រីកោណកែង $\Rightarrow A=90^\circ, B=30^\circ, C=60^\circ$ និង

ឧបមាថាបើ $\frac{R}{r}=\sqrt{3}+1$ នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែង

តាមរូបមន្ត: $S=pr=\frac{abc}{4R}\Rightarrow r=\frac{abc}{4Rp}$

តែ $p=\frac{1}{2}(a+b+c)\Rightarrow \mathrm{r}=\frac{abc}{2R(a+b+c)}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$\Rightarrow a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$

គេបាន: $r=\frac{8R^3\sin A.\sin B.\sin C}{4R^2(\sin A+\sin B+\sin C)}$

$$=\frac{16R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)}$$

$$=\frac{16R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$=\frac{8R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{4\mathrm{R}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=4\mathrm{R}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r=4(\sqrt{3}+1)r\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{4}=2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{B}{2}=\left(\cos\frac{A-C}{2}-\cos\frac{A+C}{2}\right).\sin\frac{B}{2}$$

ម្យ៉ាងទៀត $A-C=30°$ គេបាន:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{4}=2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{B}{2}=2\left(\cos\frac{A-C}{2}-\cos\frac{A+C}{2}\right)\sin\frac{B}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{4}=2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\sin\frac{B}{2}\right)\sin\frac{B}{2}$$ ព្រោះ $\sin 15^0=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

តាង $x=\sin\frac{B}{2}$ នោះ $x^2-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{3}-1}{4}=0$

សមីការមានឫស: $x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \frac{B}{2}=15°, \frac{B}{2}=45°$ មិនយកព្រោះ $A>B$

$\Rightarrow B=30°, A=90°, C=30°$ នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែង

ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងកាលណា $\frac{R}{r}=\sqrt{3}+1$

ដែល $\max\{A,B\}=C+30^\circ$ ។

លំហាត់ទី១១៤

គណនាផលបូក: $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}+1}$ ចំពោះ $a>1$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក: $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}+1}$ ចំពោះ $a>1$

យើងមាន: $\frac{2^n}{a^{2^n}+1}=\frac{2^n\left(a^{2^n}-1\right)}{a^{2^{n+1}}-1}$

$$=\frac{2^n\left(a^{2^n}+1\right)-2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}$$

$$=\frac{2^n}{a^{2^n}-1}-\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{a^{2^n}+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{a^{2^n}-1}-\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}\right)=\frac{1}{a-1}$$

ដូចនេះ: $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}+1}=\frac{1}{a-1}$ ។

លំហាត់ទី១១៥

គណនាផលបូក: $\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots$

ចំពោះ $x>1$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក: $\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots$

ចំពោះ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយកំណត់យក:

$$S_n(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\cdots+\frac{x^{2^n}}{(x+1)(x^2+1)\ldots(x^{2^n}+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_n(x)}{x-1}=\frac{x}{x^2-1}+\frac{x^2}{x^4-1}+\cdots+\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}$$

$$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)+\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^4-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x^{2^n}-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}\right)$$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}$$

ចំពោះ $x>1$ និង $n\to\infty$ គេបាន:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{S_n(x)}{x-1}=\frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=1$$

ដូចនេះ $\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\cdots=1$

លំហាត់ទី១១៦

គេឲ្យ a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនិង α,β,γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយរៀងគ្នា។ ស្រាយថា:

$$a\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+b\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+c\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\ge 2\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $a\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+b\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+c\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\geq 2\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)$

បើ $a\geq b$ នោះ $\alpha\geq\beta$ តែបើ $a\leq b$ នោះ $\alpha\leq\beta$ គេបាន:

$(a-b)(\alpha-\beta)\geq 0$

$\Leftrightarrow a\alpha+b\beta\geq b\alpha+a\beta$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\beta}+\frac{b}{\alpha}\geq\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta} \qquad (1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន:

$$\frac{a}{\gamma}+\frac{c}{\alpha}\geq\frac{a}{\alpha}+\frac{c}{\gamma} \qquad (2)$$

$$\frac{c}{\beta}+\frac{b}{\gamma}\geq\frac{c}{\gamma}+\frac{b}{\beta} \qquad (3)$$

យក $(1)+(2)+(3)$ គេបាន:

$a\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+b\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+c\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\geq 2\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)$ ពិត

ដូចនេះ $a\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+b\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+c\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\geq 2\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)$ ។

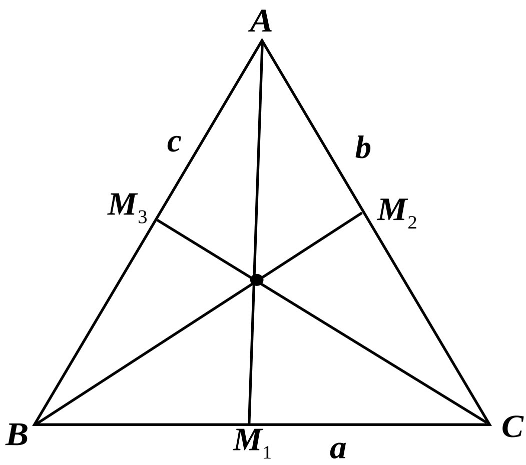
លំហាត់ទី១១៧

គេឲ្យ m_a,m_b,m_c ជាប្រវែងមេដ្យាននិង a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយថា:

$$m_am_b+m_bm_c+m_am_c\leq\frac{5}{4}(ab+bc+ac) \quad ។$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $m_am_b+m_bm_c+m_am_c\leq\frac{5}{4}(ab+bc+ac)$



តាមវិសមភាពក្នុងត្រីកោណគេបាន:

$$m_a < b + \frac{a}{2} \quad (\Delta AM_1C)$$

$$m_b < c + \frac{b}{2} \quad (\Delta BM_2\,\mathrm{A})$$

$$m_c < a + \frac{c}{2} \quad (\Delta CM_3\,\mathrm{B})$$

បូកអង្គ និងអង្គគេបាន:

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$$

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c$$

$$m_a^2 + m_a^2 + m_a^2 + 2\left(m_a m_b + m_b m_c + m_a m_c\right) < a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

តាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន: $m_a^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$

$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

$$\Rightarrow m_a^2+m_a^2+m_a^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)+2\left(m_am_b+m_bm_c+m_am_c\right)$$

$$<a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(m_am_b+m_bm_c+m_am_c\right)<\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ac)$$

$$m_am_b+m_bm_c+m_am_c<\frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ac) \qquad (*)$$

យើងមាន: $a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ac)$

$=a(a-b-c)+b(b-a-c)+c(c-a-b)<0$

(វិសមភាពក្នុងត្រីកោណ)

តាម $(*)$: $m_am_b+m_bm_c+m_am_c<\frac{1}{8}\cdot 2(ab+bc+ac)+(ab+bc+ac)$

$=\frac{5}{4}(ab+bc+ac)$ ពិត

ដូចនេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១១៨

គេឲ្យ m_a,m_b,m_c ជាប្រវែងមេដ្យាននិង a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយថា:

$$am_a+bm_b+cm_c\le\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $am_a+bm_b+cm_c\le\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន:

$$(a^2+b^2+c^2)(m_a^2+m_b^2+m_c^2)\ge\left(am_a+bm_b+cm_c\right)^2 \quad (*)$$

តាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន: $m_a^2=\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$

$$m_b^2=\frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}$$

$$m_c^2=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

$$\Rightarrow m_a^2+m_a^2+m_a^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

តាម $(*)$ គេបាន: $\left(am_a+bm_b+cm_c\right)^2\le\dfrac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$

$am_a+bm_b+cm_c\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)$ ពិត

ដូចនេះ $am_a+bm_b+cm_c\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

លំហាត់ទី១១៩

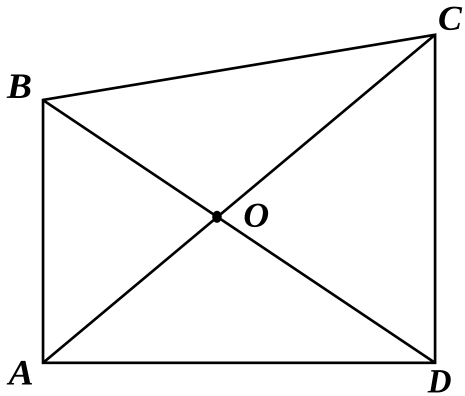
គេឲ្យ $ABCD$ ជាចតុកោណប៉ោងមួយ។ស្រាយថា:

$\max\left\{AB+CD, AD+BC\right\}<AC+BD<AB+BC+CD+DA$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា:

$$\max\left\{AB+CD, AD+BC\right\}<AC+BD<AB+BC+CD+DA$$



យក O ជាចំណុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូង AC និង BD យើងបាន:

$AO+OB>AB, CO+OD>CD$

$\Rightarrow AC+BD>AB+CD$

ស្រដៀងគ្នាដែរ

$AO+OD>AD, BO+OC>BC$

$\Rightarrow AC+BD>AD+BC$

$\Rightarrow \max\{AB+CD, AD+BC\}<AC+BD$ ពិត

ម្យ៉ាងទៀត

$AC<AB+BC$, $AC<AD+DC$

$$\Rightarrow AC<\frac{1}{2}(AB+BC+AD+DC)$$

ស្រដៀងគ្នាដែរ

$$BD<\frac{1}{2}(AB+BC+AD+DC)$$

$\Rightarrow AC+BD<AB+BC+AD+DC$ ពិត

ដូចនេះ $\max\{AB+CD, AD+BC\}<AC+BD<AB+BC+CD+DA$

លំហាត់ទី១២០

គេតាង $[x]$ ជាចំនួនគត់រិជ្ជមានធំបំផុត មិនលើសពី x ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការខាងក្រោមគ្មានឫស:

$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការខាងក្រោមគ្មានឫស:

$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$

យើងមាន: $x-1<[x]\le x$ យើងបាន:

$x-1+2x-1+4x-1+8x-1+16x-1+32x-1$

$<[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]$

$\le x+2x+4x+8x+16x+32x$

$\Rightarrow 63x-6<12345\le 63x$ ឬ $195<x<196$

សរសេរ x ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល ២

$x=195+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots$ ដែល $a=0$, $a=1$ យើងបាន:

$[2x]=2.195+a_1$

$[4x]=4.195+2a_1+a_2$

$[8x]=8.195+4a_1+2a_2+a_3$

$[16x]=16.195+8a_1+4a_2+2a_3+a_4$

$[32x]=32.195+16a_1+8a_2+4a_3+2a_4+a_5$

បូកអង្គ និងអង្គ គេបាន:

$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]$

$=63.195+31a_1+15a_2+7a_3+3a_4+a_5=12345$

$\Rightarrow 31a_1+15a_2+7a_3+3a_4+a_5=60$ មិនពិតព្រោះ

$31a_1+15a_2+7a_3+3a_4+a_5 \le 31+15+7+3+1=57<60$

ដូចនេះសមីការ $[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$

គ្មានឫស ៕

"ឧបសគ្គតែងតែមកជាគូនឹងគ្នា ជាមួយជោគជ័យ
បើខ្លាចឧបសគ្គ ក៏ប្រៀបដូចជាខ្លាចជោគជ័យ
បើបានស្គាល់ឧបសគ្គកាន់តែច្រើនប៉ុណ្ណា
អ្នកក៏នឹងស្គាល់ជោគជ័យកាន់តែច្រើនប៉ុណ្ណោះដែរ ។
(អាល់បឺត អាញស្តាញ)

ឯកសារយោង:

1.ELEMENTARY NUMBER THEORY WITH APPLICATIONS

2nd Edition.

2.Red Book.

3.360 Problems for Mathematical conteste .

4.Inequalities , Theory , Techniques and Selected Problems.

5.Selected Problems of The Vietnamese Mathematical .

(1962-2009).

6.សៀវភៅអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្ររបស់វៀតណាម ។

7.សៀវភៅស្វ៊ីតរបស់វៀតណាម ។

8.សៀវភៅសមីការ និងវិសមីការរបស់វៀតណាម ។

9.សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១០ ភាគ២ របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ។

10.សៀវភៅធរណីមាត្រអឺគ្លីតរបស់លោកគ្រូ លឹម ផល្គុន ៕