

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

វិទ្យាល័យសុខ អាន ១ ឧសភា

អនុសាសន៍ដ៏ក្រៃឆ្នើម

រៀបរៀងដោយ : សន ពៅ

គណៈកម្មាធិការ + ១ ជំនាន់ទី២៤

ត្រួតពិនិត្យដោយ : ឌុន ឡុំ

សាក្សីការពារវិទ្យាល័យសុខ អាន ១ ឧសភា

ឆ្នាំ ២០១៩

មាតិកា

អានម្នាក់ថា	iii
១ សមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត	1
១.១ និយមន័យ	1
១.២ ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២	2
១.២.១ ដោះស្រាយសមីការតាមផលគុណកត្តា	2
១.២.២ ដោះស្រាយសមីការតាមលក្ខណៈបូសកាឡេ	4
១.២.៣ ដោះស្រាយសមីការដោយបំពេញជាការេ	5
១.៣ រូបមន្តសមីការដឺក្រេទី២	6
១.៣.១ ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត	6
១.៤ ទំនាក់ទំនងរវាងបូស និងមេគុណ	11
១.៤.១ គណនាផលបូក និងផលគុណបូស	11
១.៤.២ អនុវត្តចំពោះផលបូក និងផលគុណបូស	12
២ វិសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត	17
២.១ សញ្ញាណវិសមីការដឺក្រេទី២	17
២.២ ដោះស្រាយវិសមីការតាមសញ្ញាត្រីធាដឺក្រេទី២	17
២.២.១ ករណី $\Delta > 0$	17
២.២.២ ករណី $\Delta = 0$	20
២.២.៣ ករណី $\Delta < 0$	21
២.៣ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត	22
២.៤ អនុវត្តវិសមីការ	25
៣ អនុគមន៍ដឺក្រេទី២ និងក្រាប	27
៣.១ អនុគមន៍ $y = ax^2$	27
៣.២ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = a(x - p)^2$	29
៣.៣ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = a(x - p)^2 + q$	33
៣.៤ តម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី២	37
៣.៥ ដំណោះស្រាយសមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី២តាមក្រាប	41

៣.៥.១ ដំណោះស្រាយសមីការដីក្រេទី២តាមក្រាប	41
៣.៥.២ ដំណោះស្រាយវិសមីការដីក្រេទី២តាមក្រាប	43
៣.៦ ការអនុវត្តនៃក្រាប	46
៤ លំហាត់	51
៥ ដំណោះស្រាយ	67
៦ លំហាត់ស្រាវជ្រាវ	139

អប្បបរមា

សៀវភៅ **អនុតមន៍ដីក្រអឺង** ដែលលោកអ្នកកំពុងអាននៅពេលនេះ បានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំណងផ្តល់ជាឯកសារស្រាវជ្រាវ ដល់សិស្សានុសិស្ស ក៏ដូចជារដ្ឋបាលអភិវឌ្ឍន៍ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជាដែរ។

លំហាត់ទាំងឡាយត្រូវបានជ្រើសរើសយកលំហាត់ល្អៗ ស្របតាមស្តង់ដារជាតិ និងអន្តរជាតិ ដែលទាមទារឱ្យអ្នកសិក្សាទាំងឡាយព្យាយាមសិក្សា និង រិះគិតគ្រប់ករណីទាំងអស់។

ថ្វីត្បិតតែមានការប្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការសរសេរ និងមកប្រែប្រួលឯកសារក៏ដោយ ក៏ពិតជាច្រៀងមិនផុតពីកំហុសឆ្គងឡើយ។ ហេតុនេះខ្ញុំរង់ចាំទទួលបានការរិះគន់ស្ថាប័ននាពីរគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានទាំងអស់ ក្នុងគោលបំណងអភិវឌ្ឍសៀវភៅមួយក្បាលនេះឱ្យមានលក្ខណៈកាន់តែល្អប្រសើរឡើង ដើម្បីបម្រើជាប្រយោជន៍ដល់កុលបុត្រកុលធីតាខ្មែរទាំងឡាយ។

ខ្ញុំសង្ឃឹមយ៉ាងមុតមាំថា សៀវភៅនេះនឹងក្លាយជាមិត្តដ៏ល្អសម្រាប់អ្នកសិក្សា និងសិស្សានុសិស្ស។

ថ្ងៃសៅរ៍ ១០ រោច ខែផល្គុន ឆ្នាំច សំរឹទ្ធិស័ក ព.ស ២៥៦២
តាកែវ ថ្ងៃទី ៣០ ខែ មីនា ឆ្នាំ ២០១៩
សន ពៅ

១. សមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត

១.១. និយមន័យ

និយមន័យ. សមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត x មានរាង $ax^2 + bx + c = 0$ ដែលមានមេគុណ a, b និង c ជាចំនួនពិត និង $a \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ 1. សមីការ $2x^2 + 3x - 4 = 0$ ជាសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត x ដែល $a = 2, b = 3$ និង $c = -4$

ឧទាហរណ៍ 2. សមីការ $-t^2 + 2t + 2018 = 0$ ជាសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត t ដែល $a = -1, b = 2$ និង $c = 2018$ ។

ឧទាហរណ៍ 3. សមីការ $20x - 1 = 0$ មិនមែនជាសមីការដឺក្រេទី២ ទេ ព្រោះ $a = 0$ ។

ឧទាហរណ៍ 4. បង្ហាញថាសមីការ $(x + 1)(3x - 1) - (4x - 1)^2 = 3x + 7$ ជាសមីការដឺក្រេទី២ ។

ចម្លើយ. គេមាន $(x + 1)(3x - 1) - (4x - 1)^2 = 3x + 7$

$$(3x^2 - x + 3x - 1) - (16x^2 - 8x + 1) = 3x + 7$$

$$3x^2 + 2x - 1 - 16x^2 + 8x - 1 = 3x + 7$$

$$-13x^2 + 10x - 2 = 3x + 7$$

$$-13x^2 + 10x - 2 - 3x - 7 = 0$$

$$-13x^2 + 7x - 9 = 0 \text{ ជាសមីការដឺក្រេទី២ ដែល } a = -13, b = 7 \text{ និង } c = -9 \text{ ។}$$

សម្គាល់. តម្លៃអញ្ញាត x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការហៅថាបូសនៃសមីការ។ ដោះស្រាយសមីការគឺរកបូសនៃសមីការ។

ឧទាហរណ៍ 5. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា 1 និង 2 ជាបូសនៃសមីការ $x^2 - 3x + 2 = 0$ ។

ចម្លើយ. ចំពោះ $x = 1$: $1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$

$$0 = 0 \text{ ផ្ទៀងផ្ទាត់}$$

$$\text{ចំពោះ } x = 2 : 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$$

$$0 = 0 \text{ ផ្ទៀងផ្ទាត់}$$

ឧទាហរណ៍ 6. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $x = 2 + 3i$ និង $x = 2 - 3i$ ជាច្រើននៃសមីការ $x^2 - 4x + 13 = 0$ ។

ចម្លើយ . ចំពោះ $x = 2 + 3i$ គេបាន

$$\begin{aligned} (2 + 3i)^2 - 4(2 + 3i) + 13 &= (4 + 12i + 9i^2) - 8 - 12i + 13 \\ &= 4 + 12i - 9 + 5 + 12i \\ &= 0 \text{ ផ្ទៀងផ្ទាត់} \end{aligned}$$

ចំពោះ $x = 2 - 3i$ គេបាន

$$\begin{aligned} (2 - 3i)^2 - 4(2 - 3i) + 13 &= (4 - 12i + 9i^2) - 8 + 12i + 13 \\ &= 4 - 12i - 9 + 5 + 12i \\ &= 0 \text{ ផ្ទៀងផ្ទាត់} \end{aligned}$$

១.២. ដោះស្រាយសមីការជីក្រេទី២

១.២.១. ដោះស្រាយសមីការតាមផលគុណកត្តា

ជាទូទៅ. ផលគុណនៃពីរកត្តាស្មើនឹងសូន្យ លុះត្រាតែកត្តាណាមួយស្មើនឹងសូន្យ។

$$A \times B = 0 \text{ លុះត្រាតែ } A = 0 \text{ ឬ } B = 0 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ 7. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $5x^2 - 45 = 0$

ឃ. $6x^2 + 5x^2 - 4 = 0$

ខ. $(x - 4)(x + 1) = -4$

ង. $(3x - 1)^2 - 25x^2 = 0$

គ. $9x^2 + 12x = 3 + 12x + 5x^2$

ច. $8x^2 + x - 1 = 3x^2 - 2x + 1$

ចម្លើយ . ដោះស្រាយសមីការ

$$\text{ក. } 5x^2 - 45 = 0 \iff 5(x^2 - 9) = 0 \iff 5(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$\text{គេបាន } x - 3 = 0 \text{ ឬ } x + 3 = 0$$

$$\bullet \text{ បើ } x - 3 = 0 \iff x = 3$$

$$\bullet \text{ បើ } x + 3 = 0 \iff x = -3$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានចូលស } x = -3 \text{ ឬ } x = 3$$

$$\text{ខ. } (x - 4)(x + 1) = -4$$

$$x^2 + x - 4x - 4 = -4$$

$$x^2 - 3x = 0 \iff x(x - 3) = 0$$

$$\text{គេបាន } x = 0 \text{ ឬ } x - 3 = 0 \iff x = 0 \vee x = 3$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានចូលស } x = 0 \text{ ឬ } x = 3$$

$$\text{គ. } 9x^2 + 12 = 3 + 12x + 5x^2$$

$$9x^2 + 12 - 3 - 12x - 5x^2 = 0$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \iff (2x - 3)^2 = 0 \iff 2x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានចូលស } x = \frac{3}{2}$$

$$\text{ឃ. } 6x^2 + 5x - 4 = 0 \iff (2x - 1)(3x + 4) = 0$$

$$\diamond \text{ បើ } 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

$$\diamond \text{ បើ } 3x + 4 = 0 \iff x = -\frac{4}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានចូលស } x = \frac{1}{2} \text{ ឬ } x = -\frac{4}{3}$$

$$\text{ង. } (3x - 1)^2 - 25x^2 = 0$$

$$(3x - 1)^2 - (5x)^2 = 0$$

$$[(3x - 1) - 5x][(3x - 1) + 5x] = 0$$

$$(-2x - 1)(8x - 1) = 0$$

$$\diamond \text{ បើ } -2x - 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$$

$$\diamond \text{ បើ } 8x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{8}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានចូស } x = -\frac{1}{2} \text{ ឬ } x = \frac{1}{8}$$

$$\text{ច. } 8x^2 + x - 1 = 3x^2 - 2x + 1$$

$$8x^2 + x - 1 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \iff (5x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\diamond \text{ បើ } 5x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{5}$$

$$\diamond \text{ បើ } x + 1 = 0 \iff x = -1$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានចូស } x = \frac{2}{5} \text{ ឬ } x = -1$$

១.២.២. ដោះស្រាយសមីការតាមលក្ខណៈឫសការេ

ជាទូទៅ. សមីការ $x^2 = b$ ដែល b ជាចំនួនវិជ្ជមាន មានចូសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x = \sqrt{b}$ ឬ $x = -\sqrt{b}$

ឧទាហរណ៍ 8. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } (x - 2)^2 = 10$$

$$\text{គ. } (y - 3)^2 = -5$$

$$\text{ខ. } 3(5x + 4)^2 - 81 = 0$$

$$\text{ឃ. } 7 + 25(2y + 3)^2 = 0$$

ចម្លើយ . ដោះស្រាយសមីការ

$$\text{ក. } (x - 2)^2 = 10 \iff x - 2 = \pm\sqrt{10} \iff x = 2 \pm \sqrt{10}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានចូស } x = 2 - \sqrt{10} \text{ ឬ } x = 2 + \sqrt{10}$$

$$\text{ខ. } 3(5x + 4)^2 - 81 = 0 \iff 3(5x + 4)^2 = 81 \iff (5x + 4)^2 = \frac{81}{3} = 27$$

$$\iff 5x + 4 = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3} \iff x = \frac{-4 \pm 3\sqrt{3}}{5}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានចូស } x = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{5} \text{ ឬ } x = \frac{-4 + 3\sqrt{3}}{5}$$

$$\text{គ. } (y - 3)^2 = -5 \iff y - 3 = \pm\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}i \iff y = 3 \pm \sqrt{5}i$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានចូស } y = 3 - \sqrt{5}i \text{ ឬ } y = 3 + \sqrt{5}i$$

$$\begin{aligned}
 \text{ឃ. } 7 + 25(2y + 3)^2 &= 0 \iff 25(2y + 3)^2 = -7 \iff (2y + 3)^2 = -\frac{7}{25} \\
 &\iff 2y + 3 = \pm \sqrt{-\frac{7}{25}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{5} i \iff 2y = -3 \pm \frac{\sqrt{7}}{5} i \iff y = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{10} i \\
 &\text{ដូចនេះ សមីការមានចូល } y = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{10} i \text{ ឬ } y = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{10} i
 \end{aligned}$$

១.២.៣. ដោះស្រាយសមីការដោយបំពេញជាការេ

ជាទូទៅ. ដើម្បីបំពេញជា **ការេឆ្មោត** ចំពោះកន្សោម $x^2 + bx$ គេបូកនឹង $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ដែលជាការេនៃពាក់កណ្តាលមេគុណ x ។ ហើយគេបាន $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$ ។

ឧទាហរណ៍ 9. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $x^2 + 5x + 2 = 0$

ឃ. $x^2 - 10x + 25 = 0$

ខ. $x(2x + 3) = 6$

ង. $2x^2 - x - 2 = 0$

គ. $3x^2 - 2x + 1 = 0$

ច. $x^2 - 4x + 8 = 0$

ចម្លើយ . ដោះស្រាយសមីការ

ក. $x^2 + 5x + 2 = 0$

ខ. $x(2x + 3) = 6$

$$x^2 + 5x = -2$$

$$2x^2 + 3x = 6$$

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 3$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = -2 + \frac{25}{4} = \frac{17}{4}$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{17}{4}} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = 3 + \frac{9}{16} = \frac{57}{16}$$

$$x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$x + \frac{3}{4} = \pm \sqrt{\frac{57}{16}} = \pm \frac{\sqrt{57}}{4}$$

$$\text{ដូចនេះ } x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$x = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{57}}{4}$$

$$\text{ដូចនេះ } x = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{57}}{4}$$

គ. $3x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x = -\frac{1}{3}$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = -\frac{2}{9}$$

$$x - \frac{1}{3} = \pm \sqrt{-\frac{2}{9}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{3} i$$

$$x = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} i$$

ដូចនេះ $x = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} i$

ង. $2x^2 - x - 2 = 0$

$$2x^2 - x = 2$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x = 1$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}$$

$$x - \frac{1}{4} = \pm \sqrt{\frac{17}{16}} = \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

ដូចនេះ $x = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$

ឃ. $x^2 - 10x + 25 = 0$

$$(x - 5)^2 = 0$$

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

ដូចនេះ $x = 5$

ច. $x^2 - 4x - 8 = 0$

$$x^2 - 4x = 8$$

$$x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 8 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 2^2 = 8 + 2^2$$

$$(x - 2)^2 = 8 + 4 = 12$$

$$x - 2 = \pm \sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

$$x = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $x = 2 \pm 2\sqrt{3}$

១.៣. រូបមន្តសមីការដឺក្រេទី២

១.៣.១. ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត

ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង a គេបាន $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

ដោះស្រាយតាមវិធីបំពេញជាការេ គេបាន

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

គេបានឫសនៃសមីការដឺក្រេទី២គឺ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ហៅថា **រូបមន្តឫសនៃសមីការដឺក្រេទី២**។

កន្សោម $\Delta = b^2 - 4ac$ ហៅថា **ឌីសក្រីមីណង់** នៃសមីការដឺក្រេទី២ ។

ជំនួយការ. ចម្លើយនៃសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ ដែល $a \neq 0$ តាមឌីសក្រីមីណង់

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

(1) ចំពោះ $\Delta > 0$ នោះសមីការមានឫសពីរ **ជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា**

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ។}$$

(2) ចំពោះ $\Delta = 0$ នោះសមីការមាន**ឫសមុប** $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ។

(3) ចំពោះ $\Delta < 0$ នោះសមីការមានឫសពីរជាចំនួន **កុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា** គឺ

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta} i}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta} i}{2a} \text{ ។}$$

តាម (1) និង (2) គេបាន $\Delta \geq 0$ សមីការមានឫសជា **ចំនួនពិត** ។

ឧទាហរណ៍ 10. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $x^2 - 6x - 7 = 0$

ខ. $3x^2 - 5x - 4 = 0$

គ. $3x^2 + 2x + 1 = 0$

ឃ. $4x^2 + 3x + 2 = 0$

ចម្លើយ . ដោះស្រាយសមីការ

ក. $x^2 - 6x - 7 = 0$ មាន $a = 1, b = -6, c = -7$

គេបាន $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(-7) = 36 + 28 = 64 > 0$

នាំឱ្យ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{6 + 8}{2} = \frac{14}{2} = 7$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{6 - 8}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x_1 = 7, x_2 = -1$

ខ. $3x^2 - 5x - 4 = 0$ មាន $a = 3, b = -5, c = -4$

គេបាន $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-4) = 25 + 48 = 73$

នាំឱ្យ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{73}}{2 \times 3} = \frac{5 + \sqrt{73}}{6}$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{73}}{2 \times 3} = \frac{5 - \sqrt{73}}{6}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x_1 = \frac{5 + \sqrt{73}}{6}, x_2 = \frac{5 - \sqrt{73}}{6}$

គ. $3x^2 + 2x + 1 = 0$ មាន $a = 3, b = 2, c = 1$

គេបាន $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 - 12 = -8$

នាំឱ្យ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{-8}}{2 \times 3} = \frac{-2 + \sqrt{8}i}{6} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}i}{6} = \frac{-1 + \sqrt{2}i}{3}$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{-8}}{2 \times 3} = \frac{-2 - \sqrt{8}i}{6} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}i}{6} = \frac{-1 - \sqrt{2}i}{3}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{2}i}{3}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{2}i}{3}$

ឃ. $4x^2 + 3x + 2 = 0$ មាន $a = 4, b = 3, c = 2$

គេបាន $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 4 \times 2 = 9 - 32 = -23$

នាំឱ្យ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{-23}}{2 \times 4} = \frac{-3 + \sqrt{23}i}{8}$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{-23}i}{2 \times 4} = \frac{-3 - \sqrt{23}i}{8}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{23}i}{8}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{23}i}{8}$

សង្ខេប៖ ក្នុងសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ បើ b ជាចំនួនគូ តាង $b = 2b'$ ។ ដូចនេះ សមីការមានទម្រង់ $ax^2 + 2b'x + c = 0$ ដែលមាន $\Delta = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$ ។

ក្នុងករណីនេះ ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ គេគណនាតាម $\Delta' = b'^2 - ac$ ។ ប្រសិនសមីការកំណត់ដូចខាងក្រោម :

※ បើ $\Delta' > 0$ សមីការមានប្រសព្វពីរផ្សេងគ្នាគឺ

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

※ បើ $\Delta' = 0$ សមីការមានប្រសព្វគ្នាគឺ $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$

※ បើ $\Delta' < 0$ សមីការមានប្រសព្វជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លងគ្នាគឺ

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{-\Delta'} i}{a}, \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{-\Delta'} i}{a}$$

ឧទាហរណ៍ 11. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $x^2 - 10x + 21 = 0$

គ. $\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$

ខ. $2y^2 + 12y + 19 = 0$

ឃ. $y^2 - 20y + 51 = 0$

ចម្លើយ . ដោះស្រាយសមីការ

ក. $x^2 - 10x + 21 = 0$

តាម $\Delta' = b'^2 - ac = (-5)^2 - 21 = 25 - 21 = 4$

គេបាន $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-5) + \sqrt{4}}{1} = 5 + 2 = 7$

$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-5) - \sqrt{4}}{1} = 5 - 2 = 3$

ដូចនេះ សមីការមានប្រសព្វ $x = 3$ ឬ $x = 7$

ខ. $2y^2 + 12y + 19 = 0$

តាម $\Delta' = b'^2 - ac = 6^2 - 2 \times 19 = 36 - 38 = -2$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } y_1 &= \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-6 + \sqrt{-2}}{2} = -3 + \frac{\sqrt{2}i}{2} \\ y_2 &= \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-6 - \sqrt{-2}}{2} = -3 - \frac{\sqrt{2}i}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានចូស } y = -3 + \frac{\sqrt{2}i}{2} \text{ ឬ } y = -3 - \frac{\sqrt{2}i}{2}$$

$$\text{គ. } \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$$

$$\text{តាម } \Delta' = b'^2 - ac = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0 \text{ នោះសមីការមានចូសឌុបគឺ}$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានចូស } x = 3$$

$$\text{ឃ. } y^2 - 20y + 51 = 0$$

$$\text{តាម } \Delta' = b'^2 - ac = (10)^2 - 51 = 100 - 51 = 49$$

$$\text{គេបាន } y_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-10) + \sqrt{49}}{1} = 10 + 7 = 17$$

$$y_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-10) - \sqrt{49}}{1} = 10 - 7 = 3$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានចូស } y = 3 \text{ ឬ } y = 17$$

ឧទាហរណ៍ 12. ក. រកតម្លៃ a ដែលនាំឱ្យសមីការ $(a - 2)x^2 + (3a - 6)x + 2a - 3 = 0$ មានចូសឌុប ហើយរកតម្លៃចូសឌុបនោះ ។

ខ. រកតម្លៃ k ដែលនាំឱ្យសមីការ $4x^2 - 2kx + k + 3 = 0$ មានចូសឌុប ហើយរកតម្លៃចូសឌុបនោះ ។

ចម្លើយ . ក. រកតម្លៃ a

$$\text{សមីការ } (a - 2)x^2 + (3a - 6)x + 2a - 3 = 0, a \neq 2 \text{ មានចូសឌុបលុះត្រាតែ } \Delta = 0$$

$$\text{សមមូល } (3a - 6)^2 - 4(a - 2)(2a - 3) = 0$$

$$9a^2 - 36a + 36 - 4(2a^2 - 3a - 4a + 6) = 0$$

$$9a^2 - 36a + 36 - 4(2a^2 - 7a + 6) = 0$$

$$9a^2 - 36a + 36 - 8a^2 + 28a - 24 = 0$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0$$

$$\text{តាម } \Delta' = (-4)^2 - 12 = 16 - 12 = 4$$

$$\text{គេបាន } a_1 = 4 + 2 = 6, a_2 = 4 - 2 = 2 \text{ តែ } a \neq 2 \text{ នាំឱ្យ } a = 6$$

$$\text{ហើយប្រសិនបើសម្រាប់ } x_1 = x_2 = -\frac{(3a-6)}{2(a-2)} = -\frac{3(a-2)}{2(a-2)} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានប្រសូលឌុបលុះត្រាតែ } a = 6 \text{ ហើយប្រសូលឌុបនោះគឺ } x = -\frac{3}{2}$$

ខ. រកតម្លៃ k

$$\text{គេមានសមីការ } 4x^2 - 2kx + k + 3 = 0 \text{ មានប្រសូលឌុបលុះត្រាតែ } \Delta' = 0$$

$$\text{សមមូល } k^2 - 4(k+3) = 0$$

$$k^2 - 4k - 12 = 0$$

$$\text{តាម } \Delta'_1 = 4 + 12 = 16 \text{ គេបាន } k_1 = 2 + 4 = 6, k_2 = 2 - 4 = -2$$

$$\text{► បើ } k = 6 \text{ ប្រសូលឌុបនោះគឺ } x_1 = x_2 = -\frac{-k}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{► បើ } k = -2 \text{ ប្រសូលឌុបនោះគឺ } x_1 = x_2 = -\frac{-k}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ } k = 6, x = \frac{3}{2} \text{ និង } k = -2, x = -\frac{1}{2}$$

១.៤. ទំនាក់ទំនងរវាងប្រសូល និងមេគុណ

១.៤.១. គណនាផលបូក និងផលគុណប្រសូល

សមីការដឺក្រេទី២ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ។ បើ α និង β ជាប្រសូលនៃសមីការដឺក្រេទី២ នោះ

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

គេបាន

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} \alpha \times \beta &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{2a \times 2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

ជាទូទៅ. ទំនាក់ទំនងរវាងបូស និងមេគុណនៃសមីការដឺក្រេទី២

បើ α និង β ជាបូសនៃសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ នោះ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
និង $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ។

ឧទាហរណ៍ 13. សមីការ $2x^2 + 8x + 3 = 0$ មានបូស α និង β ។ គណនា :

ក. $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

ខ. $\alpha^2 + \beta^2$

ចម្លើយ . គេមាន α និង β ជាបូសនៃសមីការ $2x^2 + 8x + 3 = 0$

គេបាន $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{8}{2} = -4$ និង $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

ក. គណនា $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

គេមាន $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{3}{2} \times (-4) = -6$

ដូចនេះ $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -6$

ខ. គណនា $\alpha^2 + \beta^2$

គេមាន $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-4)^2 - 2 \times \frac{3}{2} = 16 - 3 = 13$

ដូចនេះ $\alpha^2 + \beta^2 = 13$

១.៤.២. អនុវត្តចំពោះផលបូក និងផលគុណបូស

□ មុខគណនាបូសនៃសមីការដឺក្រេទី២ងាយ

ក្នុងសមីការ $x^2 - 5x + 6 = 0$ គេមាន $5 = 2 + 3$ និង $6 = 2 \times 3$

ដូចនេះបូសនៃសមីការនេះគឺ $x = 2$ ឬ $x = 3$

□ ដោយស្គាល់បូសមួយគេអាចទាញរកបូសមួយទៀត

សមីការដឺក្រេទី២ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

➡ បើសមីការមានបូស $x_1 = 1 \iff a + b + c = 0$

ម្យ៉ាងទៀតតាមផលគុណបូស $x_1x_2 = \frac{c}{a} \iff x_2 = \frac{c}{a}$

➡ បើសមីការមានឫស $x_1 = -1 \iff a - b + c = 0$

$$\text{ម្យ៉ាងទៀតតាមផលគុណឫស } x_1 x_2 = \frac{c}{a} \iff -x_2 = \frac{c}{a} \iff x_2 = -\frac{c}{a}$$

➡ បើ $a + b + c = 0$ សមីការ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ មានឫស $x_1 = 1$ និង $x_2 = -\frac{c}{a}$

➡ បើ $a - b + c = 0$ សមីការ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ មានឫស $x_1 = -1$ និង $x_2 = -\frac{c}{a}$

ឧទាហរណ៍ 14. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $2x^2 + 7x - 9 = 0$

ខ. $5x^2 - 3x - 8 = 0$

ចម្លើយ . ដោះស្រាយសមីការ

ក. $2x^2 + 7x - 9 = 0$ គេសង្កេតឃើញថា $a + b + c = 2 + 7 - 9 = 0$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x_1 = 1$ និង $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{9}{2}$

ខ. $5x^2 - 3x - 8 = 0$ គេសង្កេតឃើញថា $a - b + c = 5 + 3 - 8 = 0$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x_1 = -1$ និង $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{-8}{5} = \frac{8}{5}$

ឧទាហរណ៍ 15. ក. ដោះស្រាយសមីការ $\frac{4}{x-2} - \frac{x-3}{x+4} = 0$ ។

ខ. គេមានសមីការ $-x^2 + x + a = 0$ ។ កំណត់តម្លៃ a ដោយដឹងថា $x = -1$ ជាឫសនៃសមីការ។
រកឫសមួយទៀតនៃសមីការ។

ចម្លើយ . ក. ដោះស្រាយសមីការ $\frac{4}{x-2} - \frac{x-3}{x+4} = 0$

ចំពោះ $x \neq 2$ និង $x \neq -4$ គេបាន $\frac{4}{x-2} - \frac{x-3}{x+4} \implies 4(x+4) - (x-3)(x-2) = 0$

$$4x + 16 - x^2 + 5x - 6 = 0 \iff -x^2 + 9x + 10 = 0$$

គេសង្កេតឃើញថា $a - b + c = -1 - 9 + 10 = 0$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x_1 = -1$ និង $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{-10}{-1} = -10$

ខ. គេមាន $x = -1$ ជាឫសនៃសមីការ $-x^2 + x + a = 0 \iff -1 - 1 + a = 0 \iff a = 2$

ឫសមួយទៀតនៃសមីការគឺ $x = -\frac{a}{-1} = \frac{2}{1} = 2$

ដូចនេះ $a = 2$ និងឫសមួយទៀតនៃសមីការ $x = 2$

□ ការដាក់កន្សោមដឺក្រេទី២ ជាផលគុណកត្តា

គេមានសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ មានឫស α និង β គេបាន $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ និង $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ។

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta] \\ &= a(x - \alpha)(x - \beta) \end{aligned}$$

ជាទូទៅ. បើសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា α និង β នោះកន្សោមដឺក្រេទី២ $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ ។

សម្គាល់ ក្នុងករណីសមីការដឺក្រេទី២ មានឫសឌុបនោះគេបាន $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$ ។

ឧទាហរណ៍ 16. ដាក់កន្សោមដឺក្រេទី២ ខាងក្រោមជាផលគុណកត្តា

ក. $2x^2 + x - 21$

គ. $x^2 + 2x - 1$

ខ. $2x^2 - 11x + 12$

ឃ. $2x^2 - 3x + 2$

ចម្លើយ . ដាក់កន្សោមដឺក្រេទី២ ជាផលគុណកត្តា

ក. បើ $2x^2 + x - 21 = 0$ តាម $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-21) = 1 + 168 = 169 = 13^2$

គេបាន $x_1 = \frac{-1 + 13}{4} = \frac{12}{4} = 3$, $x_2 = \frac{-1 - 13}{4} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$

ដូចនេះ $2x^2 + x - 21 = 2(x - 3) \left(x + \frac{7}{2} \right) = (x - 3)(2x + 7)$

ខ. បើ $2x^2 - 11x + 12 = 0$ តាម $\Delta = (-11)^2 - 4 \times 2 \times 12 = 121 - 96 = 25 = 5^2$

គេបាន $x_1 = \frac{11 + 5}{4} = 4$, $x_2 = \frac{11 - 5}{4} = \frac{3}{2}$

ដូចនេះ $2x^2 - 11x + 12 = 2(x - 4)(x - \frac{3}{2}) = (x - 4)(2x - 3)$

គ. បើ $x^2 + 2x - 1 = 0$ តាម $\Delta' = 1 + 1 = 2$

គេបាន $x_1 = -1 + \sqrt{2}$, $x_2 = -1 - \sqrt{2}$

ដូចនេះ $x^2 + 2x - 1 = (x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

ឃ. បើ $2x^2 - 3x + 2 = 0$ តាម $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 = 7i^2$

$$\text{គេបាន } x_1 = \frac{3 + \sqrt{7}i}{4}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{7}i}{4}$$

$$\text{ដូចនេះ } 2x^2 - 3x + 2 = 2 \left(x - \frac{3 + \sqrt{7}i}{4} \right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{7}i}{4} \right)$$

□ បង្កើតសមីការដឺក្រេទី២ដោយស្គាល់ផលបូក និងផលគុណឬស

សមីការដឺក្រេទី២ ដែលមានឬស α និង β មានរាង $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

ឬ $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ ។ ដូចនេះ សមីការមានរាង $x^2 - Sx + P = 0$ ។

ជាទូទៅ. សមីការដឺក្រេទី២ដែលមានឬស α និង β ហើយ $\alpha + \beta = S$ និង $\alpha\beta = P$ មានរាង $x^2 - Sx + P = 0$

ឧទាហរណ៍ 17. គេមានសមីការ $x^2 - 2x + 7 = 0$ មានឬស α និង β ។ រកសមីការដឺក្រេទី២ ដែលមានឬស $\alpha + 2$ និង $\beta + 2$ ។

ចម្លើយ . គេមាន α និង β ជាឬសនៃសមីការ $x^2 - 2x + 7 = 0$ គេបាន $\alpha + \beta = 2$ និង $\alpha\beta = 7$

$$\text{ដោយ } \alpha + \beta = 2 \iff (\alpha + 2) + (\beta + 2) = 6$$

$$(\alpha + 2)(\beta + 2) = \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 = 7 + 2 \times 2 + 4 = 15$$

ដូចនេះ សមីការដឺក្រេទី២ ដែលមានឬស $\alpha + 2$ និង $\beta + 2$ មានទម្រង់ $x^2 - 6x + 15 = 0$

២. វិសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត

២.១. សញ្ញាណវិសមីការដឺក្រេទី២

ជាទូទៅ. វិសមីការដឺក្រេទី២ មានមួយអញ្ញាត x មានរាង $ax^2 + bx + c > 0$ ឬ $ax^2 + bx + c < 0$ ដែល $a \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ 18. $2x^2 + 3x - 5 < 0$, $x^2 \leq 4$, $x^2 + 5x + 6 > 0$ ជាវិសមីការដឺក្រេទី២ មានមួយអញ្ញាត x ។

២.២. ដោះស្រាយវិសមីការតាមសញ្ញាត្រីធាដឺក្រេទី២

២.២.១. ករណី $\Delta > 0$

ជាទូទៅ. បើវិសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ មាន $\Delta > 0$ សមីការមានចូសពីរផ្សេងគ្នាគឺ α និង β គេអាចដាក់ជាផលគុណកត្តា $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ ។

គេនឹងសិក្សាសញ្ញានៃត្រីធា $ax^2 + bx + c$ ដោយគ្រាន់តែសិក្សាសញ្ញាផលគុណ a និង $(x - \alpha)(x - \beta)$ ដែល $\alpha < \beta$ ចំពោះ $a > 0$ គេបានតារាងដូចខាងក្រោម :

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$x - \alpha$	-	0	+	+
$x - \beta$	-	-	0	+
$(x - \alpha)(x - \beta)$	+	0	-	+
$f(x)$	សញ្ញាដូច a	សញ្ញាផ្ទុយ a	សញ្ញាដូច a	

គេបានរូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម :

ចម្លើយនៃសមីការដឺក្រេទី២

ចំពោះ $\Delta > 0$ និង $a > 0$ សមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ មានច្រើនពីរផ្សេងគ្នា α និង β ដែល $\alpha < \beta$ នោះ

(1) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c > 0$ គឺ $x < \alpha$ ឬ $\beta < x$ ។

(2) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c < 0$ គឺ $\alpha < x < \beta$ ។

(3) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c \geq 0$ គឺ $x \leq \alpha$ ឬ $\beta \leq x$ ។

(4) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c \leq 0$ គឺ $\alpha \leq x \leq \beta$ ។

ឧទាហរណ៍ 19. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $x^2 - 2x - 2 > 0$ គ. $-5x^2 - 3x + 2 \leq 0$ ង. $(x+1)(x+4) > 18$

ខ. $2x^2 - 3x - 2 < 0$ ឃ. $3x^2 - 7x + 10 \geq 2x^2$ ច. $\frac{5x^2}{2} - \frac{x}{6} \geq \frac{1}{3}$

ចម្លើយ . ដោះស្រាយវិសមីការ

ក. $x^2 - 2x - 2 > 0$

បើ $x^2 - 2x - 2 = 0$ តាម $\Delta = 4 + 8 = 12$ គេបាន $x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{3}$	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 - 2x - 2 > 0$		+	-	+

ដូចនេះវិសមីការមានចម្លើយគឺ $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, +\infty)$

ខ. $2x^2 - 3x - 2 < 0$

បើ $2x^2 - 3x - 2 = 0$ តាម $\Delta = 9 + 16 = 25$ គេបាន $x_1 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3+5}{4} = 2$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$2x^2 - 3x - 2 < 0$		+	-	+

ដូចនេះវិសមីការមានចម្លើយគឺ $x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

គ. $-5x^2 - 3x + 2 \leq 0$

បើ $-5x^2 - 3x + 2 = 0$ តាម $\Delta = 9 + 40 = 49$ គេបាន $x_1 = -1, x_2 = \frac{2}{5}$

x	$-\infty$	-1	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$-5x^2 - 3x + 2 \leq 0$	$-$	0	$+$	$-$

ដូចនេះវិសមីការមានចម្លើយគឺ $x \in \left(-\infty, -1\right] \cup \left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$

ឃ. $3x^2 - 7x + 10 \geq 2x^2 \iff x^2 - 7x + 10 \geq 0$

តាម $\Delta = 49 - 40 = 9$ គេបាន $x_1 = 5, x_2 = 2$

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
$x^2 - 7x + 10 \geq 0$	+	0	-	+

ដូចនេះវិសមីការមានចម្លើយគឺ $x \in (-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$

ង. $(x + 1)(x + 4) > 18 \iff x^2 + 5x - 14 > 0$

តាម $\Delta = 25 + 56 = 81$ គេបាន $x_1 = 2, x_2 = -7$

x	$-\infty$	-7	2	$+\infty$	
$x^2 + 5x - 14 > 0$	+	0	-	0	+

ដូចនេះវិសមីការមានចម្លើយគឺ $x \in (-\infty, -7] \cup [2, +\infty)$

ច. $\frac{5x^2}{2} - \frac{x}{6} \geq \frac{1}{3} \iff 15x^2 - x - 2 \geq 0$

តាម $\Delta = 1 + 120 = 121$ គេបាន $x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = -\frac{1}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$	
$15x^2 - x - 2 \geq 0$	+	0	-	0	+

ដូចនេះវិសមីការមានចម្លើយគឺ $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$

២.២.២. ករណី $\Delta = 0$

ករណី $\Delta = 0$ សមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ មានឫសឌុប តាងដោយ α ។

គេបាន $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$ នោះ $f(x)$ មានសញ្ញាដូច a ព្រោះ $(x - \alpha)^2 \geq 0$

ចម្លើយនៃសមីការដឺក្រេទី២

ចំពោះ $\Delta = 0$ និង $a > 0$ សមីការ $ax^2 + bx + c = 0 \iff a(x - \alpha)^2 = 0$

(1) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c > 0$ គឺគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ លើកលែងតែ α ។

(2) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c < 0$ មិនមានចម្លើយ ។

(3) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c \geq 0$ គឺ គ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់។

(4) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c \leq 0$ គឺ $x = \alpha$ ។

ឧទាហរណ៍ 20. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $x^2 - 4x + 4 > 0$

គ. $9x^2 - 12x + 4 \geq 0$

ខ. $4x^2 - 4x + 1 < 0$

ឃ. $64 \leq 16x - x^2$

ចម្លើយ . ដោះស្រាយវិសមីការ

ក. $x^2 - 4x + 4 > 0$ (1)

បើ $x^2 - 4x + 4 = 0$ តាម $\Delta = 16 - 16 = 0 \iff x = 2$ ហើយ $a = 1 > 0$ ។

ដូចនេះ វិសមីការ (1) មានចម្លើយគឺ $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ ឬ $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

ខ. $4x^2 - 4x + 1 < 0$ (2)

បើ $4x^2 - 4x + 1 = 0$ តាម $\Delta' = 4 - 4 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ ហើយ $a = 4 > 0$

គេបាន $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ គ្រប់ចំនួនពិត x ។

ដូចនេះ វិសមីការ (2) គ្មានចម្លើយ

គ. $9x^2 - 12x + 4 \geq 0$ (3)

បើ $9x^2 - 12x + 4 = 0$ តាម $\Delta' = 36 - 36 = 0 \iff x = \frac{2}{3}$ ហើយ $a = 9 > 0$

គេបាន $9x^2 - 12x + 4 \geq 0$ គ្រប់ចំនួនពិត x

ដូចនេះ វិសមីការ (3) មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិត x ឬ $x \in \mathbb{R}$

ឃ. $64 \leq 16x - x^2 \iff x^2 - 16x + 64 \leq 0$ (4)

បើ $x^2 - 16x + 64 = 0$ តាម $\Delta' = 64 - 64 = 0 \iff x = 8$ ហើយ $a = 1 > 0$

គេបាន $x^2 - 16x + 64 \geq 0$ គ្រប់ចំនួនពិត x

ដូចនេះ វិសមីការ (4) មានចម្លើយគឺ $x = 8$

២.២.៣. ករណី $\Delta < 0$

សមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា។

គេបានត្រីកោណ $f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]$

គេមាន $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ និង $\frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ ព្រោះ $\Delta < 0$ និង $a > 0$ ។

ដូចនេះ $f(x)$ មានសញ្ញាដូច a ជានិច្ច។

ចម្លើយនៃសមីការដឺក្រេទី២

ចំពោះ $\Delta < 0$ និង $a > 0$ សមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា នោះ

- (1) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c > 0$ គឺគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។
- (2) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c < 0$ គ្មានចម្លើយ ។
- (3) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c \geq 0$ គឺគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។
- (4) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c \leq 0$ គ្មានចម្លើយ ។

ឧទាហរណ៍ 21. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $2x^2 + 3x + 4 > 0$

គ. $2x^2 - 4x + 3 \geq 0$

ខ. $x^2 + 2x + 5 < 0$

ឃ. $5x \geq x^2 + 9$

ចម្លើយ . ដោះស្រាយវិសមីការ

ក. $2x^2 + 3x + 4 > 0$ (1)

បើ $2x^2 + 3x + 4 = 0$ តាម $\Delta = 9 - 32 = -23 < 0$ ហើយ $a = 2 > 0$

នោះ $2x^2 + 3x + 4 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ វិសមីការ (1) មានចម្លើយ $x \in \mathbb{R}$

ខ. $x^2 + 2x + 5 < 0$ (2)

បើ $x^2 + 2x + 5 = 0$ តាម $\Delta' = 1 - 5 = -4 < 0$ ហើយ $a = 1 > 0$

នោះ $x^2 + 2x + 5 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ វិសមីការ (2) គ្មានចម្លើយ

គ. $2x^2 - 4x + 3 \geq 0$ (3)

បើ $2x^2 - 4x + 3 = 0$ តាម $\Delta' = 4 - 6 = -2 < 0$ ហើយ $a = 2 > 0$

នោះ $2x^2 - 4x + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ វិសមីការ (3) មានចម្លើយ $x \in \mathbb{R}$

ឃ. $5x \geq x^2 + 9 \iff x^2 - 5x + 9 \leq 0$ (4)

បើ $x^2 - 5x + 9 = 0$ តាម $\Delta = 25 - 36 = -11 < 0$ ហើយ $a = 1 > 0$

នោះ $x^2 - 5x + 9 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ វិសមីការ (4) គ្មានចម្លើយ

២.៣. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត

ឧទាហរណ៍ 22. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការខាងក្រោម :

ក.
$$\begin{cases} x^2 - 6x + 6 \leq 0 \\ x^2 - 9x + 14 < 0 \end{cases}$$

ខ.
$$\begin{cases} -x^2 + 3x + 4 \geq 0 \\ (2x^2 + 3)(x^2 - 3x) > 0 \end{cases}$$

គ.
$$\begin{cases} x^2 + x - 3 > 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases}$$

ឃ.
$$\begin{cases} x^2 + x - 20 \leq 0 \\ 2x^2 + 7x + 3 > 0 \end{cases}$$

ចម្លើយ . ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ

ក.
$$\begin{cases} x^2 - 6x + 6 \leq 0 \\ x^2 - 9x + 14 < 0 \end{cases}$$

តាង $f(x) = x^2 - 6x + 6$ បើ $f(x) = 0$ មានចូស $x = 3 \pm \sqrt{3}$

$g(x) = x^2 - 9x + 14$ បើ $g(x) = 0$ មានចូស $x_1 = 2, x_2 = 7$

គេបានតារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	$3 - \sqrt{3}$	2	$3 + \sqrt{3}$	7	$+\infty$
$f(x) \leq 0$		+	-	-	+	+
$g(x) < 0$		+	+	-	-	+
$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$						

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធវិសមីការមានចម្លើយ $x \in (2, 3 + \sqrt{3}]$

ខ.
$$\begin{cases} -x^2 + 3x + 4 \geq 0 \\ (2x^2 + 3)(x^2 - 3x) > 0 \end{cases}$$

តាង $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ បើ $f(x) = 0$ មានចូស $x_1 = -1, x_2 = 4$

$g(x) = (2x^2 + 3)(x^2 - 3x)$ ដោយ $2x^2 + 3 > 0$

នោះបើ $g(x) = 0 \iff x^2 - 3x = 0$ មានចូស $x_1 = 0, x_2 = 3$

គេបានតារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	-1	0	3	4	$+\infty$
$f(x) \geq 0$		-	+	+	+	-
$g(x) > 0$		+	+	-	+	+
$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$						

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធវិសមីការមានចម្លើយ $x \in [-1, 0) \cup (3, 4]$

គ.
$$\begin{cases} x^2 + x - 3 > 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases}$$

តាង $f(x) = x^2 + x - 3$ បើ $f(x) = 0$ មានឫស $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$g(x) = x^2 - 5x + 4$ បើ $g(x) = 0$ មានឫស $x_1 = 1, x_2 = 4$

គេបានតារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	1	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	4	$+\infty$	
$f(x) > 0$		+	0	-	0	+	
$g(x) < 0$		+	+	0	-	0	+
$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$							

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធវិសមីការមានចម្លើយ $x \in \left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, 4\right)$

ឃ.
$$\begin{cases} x^2 + x - 20 \leq 0 \\ 2x^2 + 7x + 3 < 0 \end{cases}$$

តាង $f(x) = x^2 + x - 20$ បើ $f(x) = 0$ មានឫស $x_1 = -5, x_2 = 4$

$g(x) = 2x^2 + 7x + 3$ បើ $g(x) = 0$ មានឫស $x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{2}$

គេបានតារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	-5	-3	$-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$	
$f(x) \leq 0$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$g(x) < 0$		$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$							

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធវិសមីការមានចម្លើយ $x \in \left(-3, -\frac{1}{2}\right)$

២.៤. អនុវត្តវិសមីការ

ឧទាហរណ៍ 23. គេឱ្យសមីការ $x^2 + 2mx - 3m - 2 = 0$ ។ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមាន បួសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។

ចម្លើយ . ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតវិជ្ជមានលុះត្រាតែ

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m^2 + 3m + 2 > 0 \\ -m > 0 \\ -3m - 2 > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$+\infty$
$\Delta' > 0$	+	0	-	0	+	+
$S > 0$	+	+	+	+	0	-
$P > 0$	+	+	+	0	-	-
$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$						

ឧទាហរណ៍ 24. សិក្សាអត្ថិភាព និងសញ្ញាបួសនៃសមីការ $mx^2 - 2(2m - 3)x + 2m - 1 = 0$ តាម តម្លៃនៃ m ។

ចម្លើយ . គេមាន $mx^2 - 2(2m - 3)x + 2m - 1 = 0$

- បើ $m = 0$ គេបាន $6x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{6}$
- បើ $m \neq 0$ គេបាន $\Delta' = (2m - 3)^2 - m(2m - 1) = 2m^2 = 11m + 9$, $\Delta' = 0 \iff$
 $m_1 = 1, m_2 = \frac{9}{2}$
 $P = \frac{2m - 1}{m}, P = 0 \iff m = \frac{1}{2}$
 $S = \frac{2m - 3}{m}, S = 0 \iff m = \frac{3}{2}$

m	Δ'	P	S	$x_1 < x_2$
$+\infty$				
$\frac{9}{2}$	+	+	+	$0 < x_1 < x_2$
$\frac{3}{2}$	0			$x_1 = x_2 = 0$
$\frac{3}{2}$	-	+	+	} សមីការមានឫសជាចំនួនកុំផ្លិច
$\frac{1}{2}$	-	+	-	
$\frac{1}{2}$	0			$x_1 = x_2 = -1$
$\frac{1}{2}$	+	+	-	$x_1 < x_2 < 0$
$\frac{1}{2}$	+	0		$x_1 = 0, x_2 = -8$
0	+	-	-	$x_1 < 0 < x_2$
0				សមីការដឺក្រេទី១ មានឫស $x = \frac{1}{6}$
$-\infty$	+	-	-	$x_1 < 0 < x_2$

៣. អនុគមន៍ជីក្រេទី២ និងក្រាប

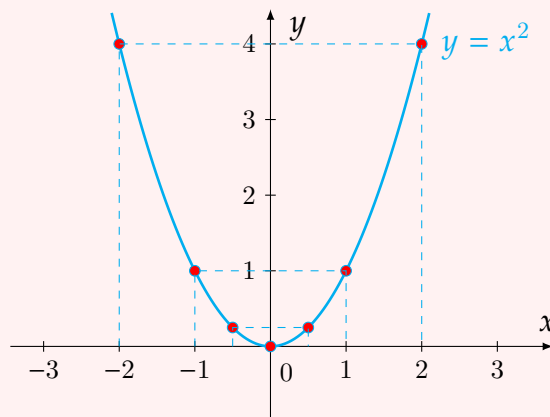
៣.១. អនុគមន៍ $y = ax^2$

ឧទាហរណ៍ 25. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ ។

ចម្លើយ . សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ តាមចំណុចខាងក្រោម

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4

ដោយចំណុចទាំងនេះ រួចភ្ជាប់គេបានក្រាបដូចខាងក្រោម



ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងលើហៅថា **ប៉ារ៉ាបូល** ។ ចំណុច $O(0, 0)$ នៃប៉ារ៉ាបូលនេះដែលស្ថិតនៅទាបជាងគេ ហៅថា **កំពូល** ហើយអ័ក្សអរដោនេជា **អ័ក្សធ្លុះ** នៃប៉ារ៉ាបូលនេះ។ ប៉ារ៉ាបូលនេះបែរភាពផតឡើងលើ។ ពិនិត្យភាពកើន និងចុះនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ ។

គេបាន : កំណើនអថេរ $\Delta x = x_2 - x_1$

$$\text{កំណើនអនុគមន៍ } \Delta f = f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$

$$\text{ដូចនេះ ផលធៀបកំណើន } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 \text{ ។}$$

- ចំពោះគ្រប់ x_1, x_2 ដែល $x_1 < x_2 < 0$ គេបាន $\frac{\Delta f}{\Delta x} = x_2 + x_1 < 0$ ហើយត្រូវបាននិយាយអនុគមន៍ចុះ ។ គេថា f ជាអនុគមន៍ចុះចំពោះ $x < 0$ ។

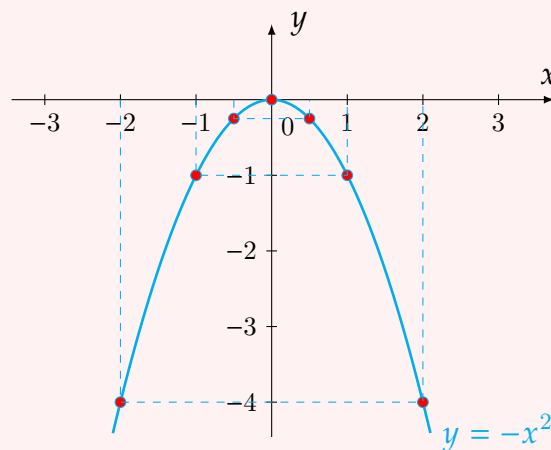
- ចំពោះគ្រប់ x_1, x_2 ដែល $0 < x_1 < x_2$ គេបាន $\frac{\Delta f}{\Delta x} = x_2 + x_1 > 0$ ហើយត្រូវបានដឹងអនុគមន៍កើន ។ គេថា f ជាអនុគមន៍កើនចំពោះ $x > 0$ ។

ឧទាហរណ៍ 26. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = -x^2$ ។

ចម្លើយ . សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = -x^2$ តាមចំណុចខាងក្រោម

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

ដោយចំណុចទាំងនេះ រួចភ្ជាប់គេបានក្រាបដូចខាងក្រោម



ចំណុច $O(0, 0)$ នៃប៉ារ៉ាបូលនេះដែលស្ថិតនៅខ្ពស់ជាងគេក៏ហៅថា **កំពូល** ហើយអ័ក្សអនេក្នុងនេះក៏ជា **អ័ក្សធ្លុះ** នៃប៉ារ៉ាបូលនេះ។ ប៉ារ៉ាបូលនេះបែរភាពផ្គត់ផ្គង់ក្រោម។

ពិនិត្យភាពកើន និងចុះនៃអនុគមន៍ $y = -x^2$ ។

គេបាន : កំណើនអថេរ $\Delta x = x_2 - x_1$

$$\text{កំណើនអនុគមន៍ } \Delta f = f(x_2) - f(x_1) = -x_2^2 + x_1^2 = -(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$

$$\text{ដូចនេះ ផលធៀបកំណើន } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = -(x_2 + x_1) \text{ ។}$$

- ចំពោះគ្រប់ x_1, x_2 ដែល $x_1 < x_2 < 0$ គេបាន $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -(x_2 + x_1) > 0$ ហើយត្រូវបានដឹងអនុគមន៍កើន ។ គេថា f ជាអនុគមន៍កើនចំពោះ $x < 0$ ។

- ចំពោះគ្រប់ x_1, x_2 ដែល $0 < x_1 < x_2$ គេបាន $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -(x_2 + x_1) < 0$ ហើយត្រូវបានដឹងអនុគមន៍ចុះ ។ គេថា f ជាអនុគមន៍ចុះចំពោះ $x > 0$ ។

ជាទូទៅ. – ចំពោះ $a > 0$ ប៉ារ៉ាបូល $y = ax^2$ បែរឆ្វេងឡើងលើ។
 – ចំពោះ $a < 0$ ប៉ារ៉ាបូល $y = ax^2$ បែរឆ្វេងចុះក្រោម។

៣.២. ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = a(x - p)^2$

ឧទាហរណ៍ 27. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ និង $y = (x - 2)^2$ រួចទាញសន្និដ្ឋានពីក្រាប។

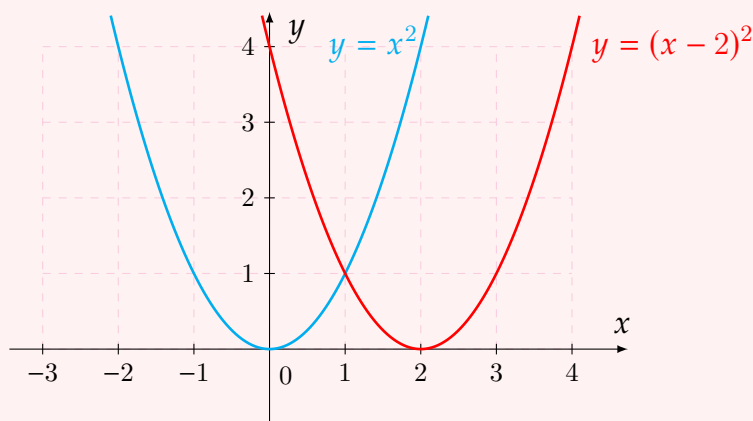
ចម្លើយ . ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ ជាប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = (x - 2)^2$ ជាប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច

x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4

ដោយចំណុចទាំងនេះរួចភ្ជាប់ គេបានរូបដូចខាងក្រោម



តាមក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងលើគេអាចសន្និដ្ឋានបានថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = (x - 2)^2$ បានដោយរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ ចំនួន 2 ឯកតាស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ឧទាហរណ៍ 28. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ និង $y = (x + 2)^2$ រួចទាញសន្និដ្ឋានពីក្រាប។

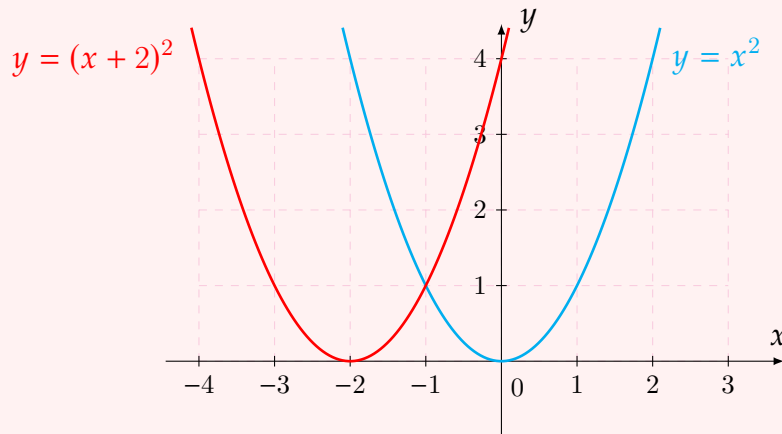
ចម្លើយ . ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ ជាប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = (x + 2)^2$ ជាប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច

x	-4	-3	-2	-1	0
y	4	1	0	1	4

ដោយចំណុចទាំងនេះរួចគ្នា គេបានរូបដូចខាងក្រោម



តាមក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងលើគេអាចសន្និដ្ឋានបានថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = (x + 2)^2$ បានដោយរំកិល ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ ចំនួន -2 ឯកតាស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ជាទូទៅ. ក្រាបតាង $y = a(x - p)^2$ ជារូបកំរិតនៃក្រាបតាង $y = ax^2$ ចំនួន p ឯកតាស្រប នឹងអ័ក្ស អាប់ស៊ីស។

- រំកិលទៅស្តាំ បើ $p > 0$ ។
- រំកិលទៅឆ្វេង បើ $p < 0$ ។

ឧទាហរណ៍ 29. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោមដោយប្រើក្រាបតាង $y = 3x^2$

ក. $y = 3(x + 2)^2$

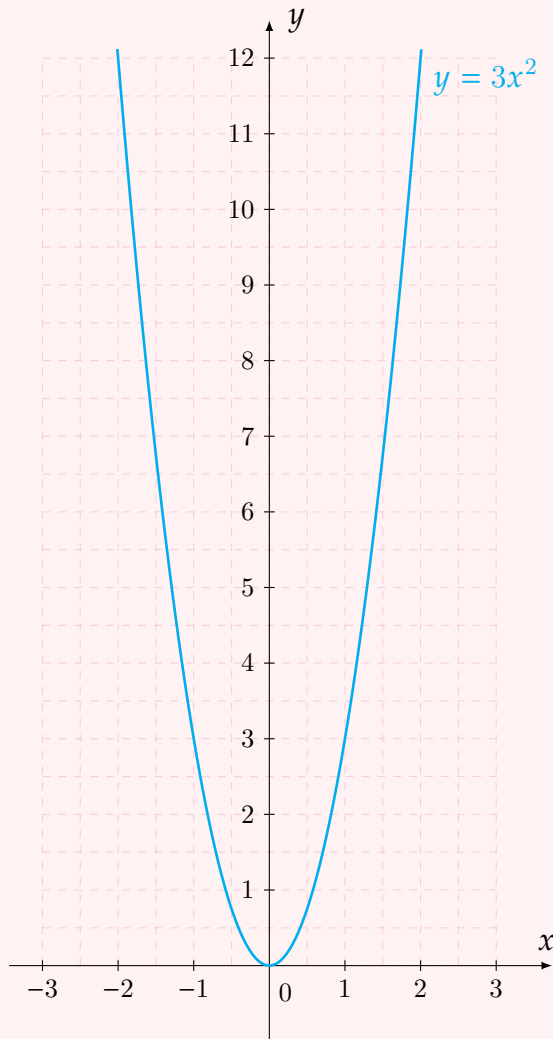
ខ. $y = 3(x - 1)^2$

បញ្ជី . សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = 3x^2$

គេមានតារាងតម្លៃដូចខាងក្រោម

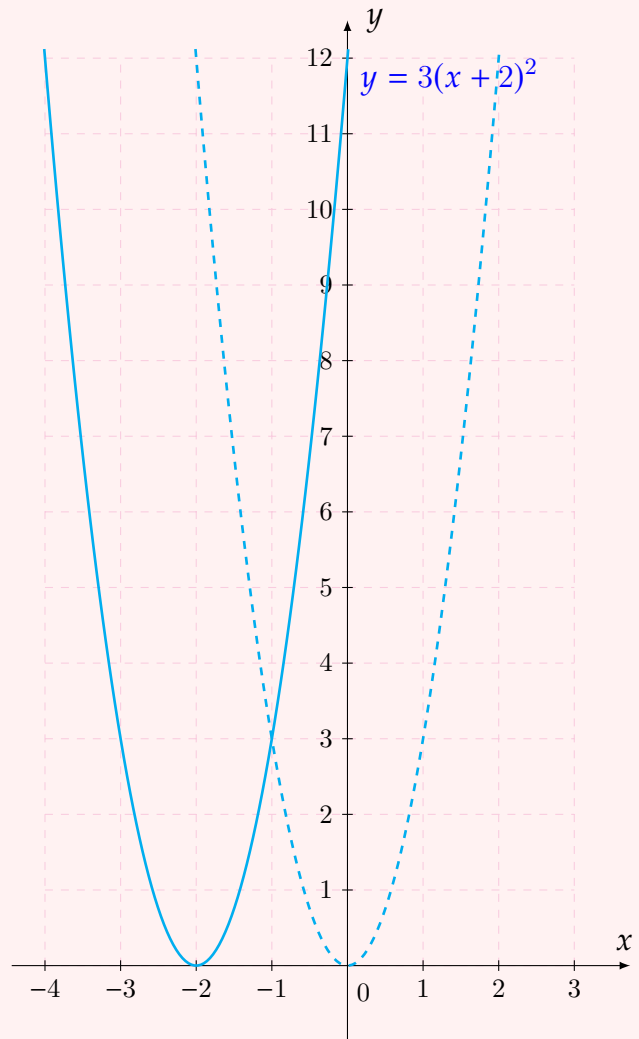
x	-2	-1	0	1	2
y	12	3	0	3	12

នៅចំណុចទាំងនេះរួចភ្ជាប់ គេបានរូបដូចខាងក្រោម



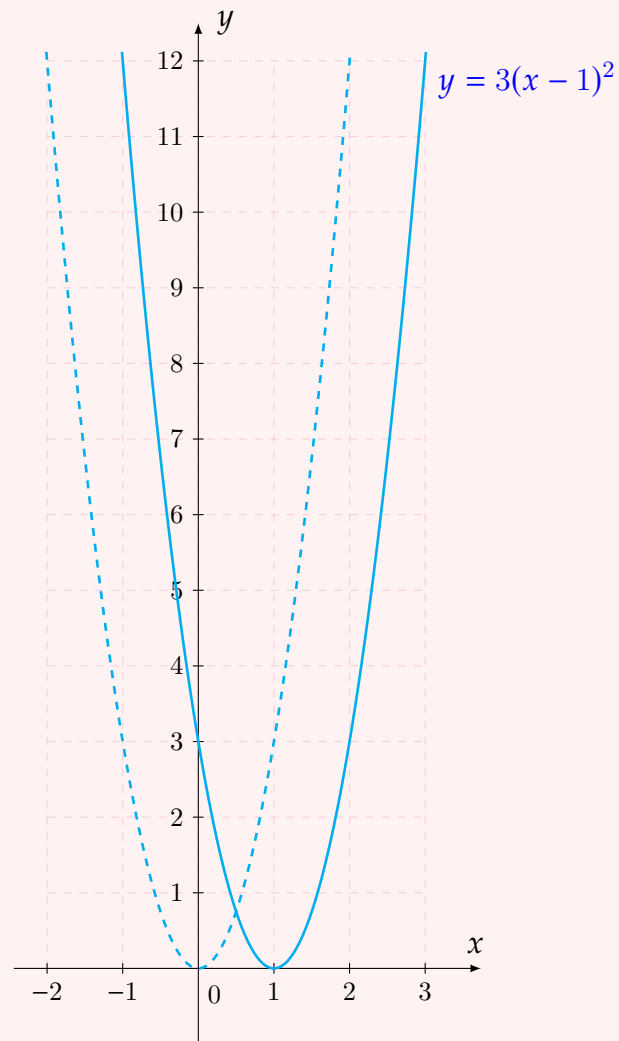
ក. $y = 3(x + 2)^2$

ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = 3(x + 2)^2$ បានដោយការរំកិលក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = 3x^2$ ចំនួន 2 ឯកតាស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស ទៅខាងឆ្វេង។ គេបានក្រាបដូចខាងក្រោម



ខ. $y = 3(x - 1)^2$

ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = 3(x - 1)^2$ បានដោយការរំកិលក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = 3x^2$ ចំនួន 1 ឯកតាស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស ទៅខាងស្តាំ។ គេបានក្រាបដូចខាងក្រោម



៣.៣. ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = a(x - p)^2 + q$

ឧទាហរណ៍ 30. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ និង $y = (x - 2)^2 + 1$ រួចទាញសន្និដ្ឋានពីក្រាប។

ចម្លើយ . ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ ជាប៉ារ៉ាបូល

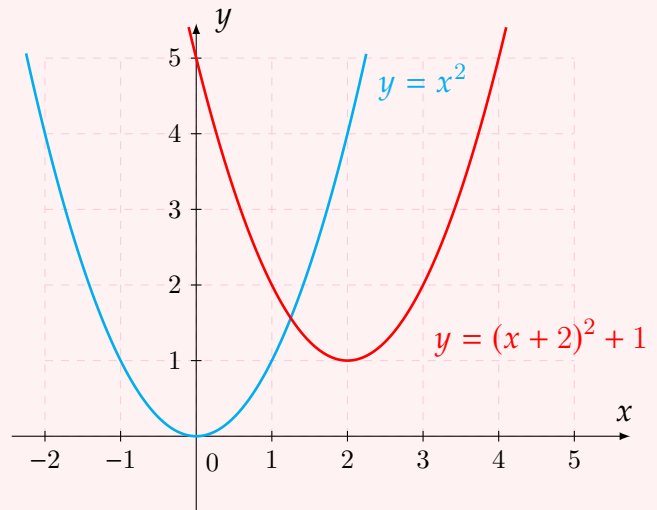
កាត់តាមចំណុច

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = (x - 2)^2 + 1$ ជាប៉ារ៉ាបូល

កាត់តាមចំណុច

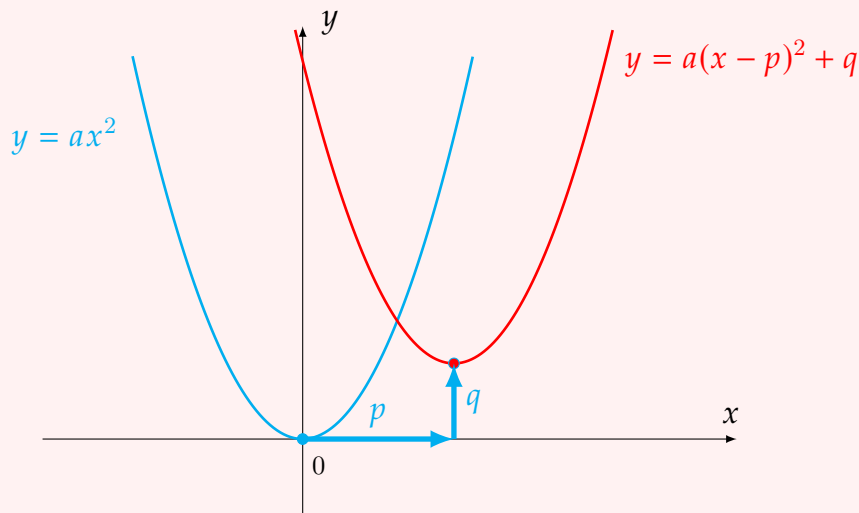
x	0	1	2	3	4
y	5	2	1	2	5



ដោយចំណុចទាំងនេះរួចភ្ជាប់ គេបានរូបដូចខាងស្តាំ

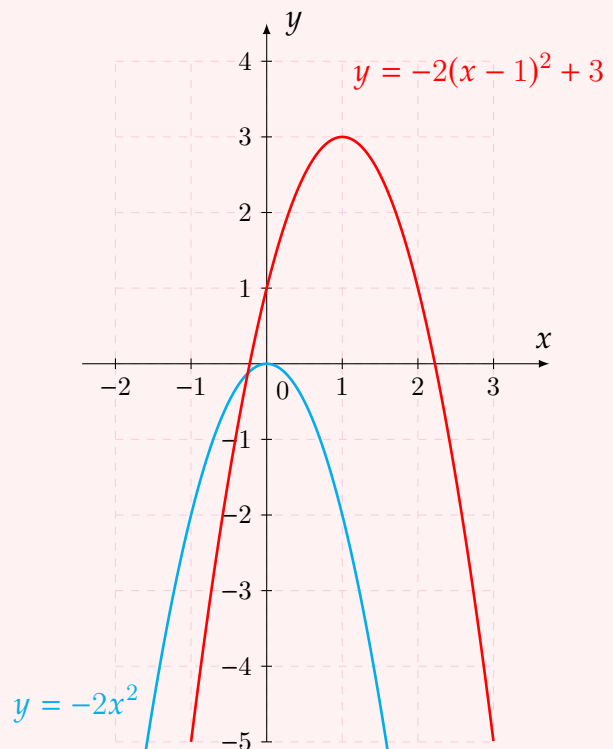
តាមក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងលើគេអាចសន្និដ្ឋានបានថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = (x - 2)^2 + 1$ បានដោយ រំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ ចំនួន 2 ឯកតាស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយបន្ទាប់មករំកិល 1 ឯកតា ស្របអ័ក្សអ័រដោនេ។

ជាទូទៅ. ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = a(x - p)^2 + q$ គឺជាប៉ារ៉ាបូលដែលបានដោយការរំកិល ក្រាបតាង $y = ax^2$ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសចំនួន p ឯកតា ហើយស្របនឹងអ័ក្សអ័រដោនេចំនួន q ឯកតា។ ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល (p, q) និងអ័ក្សធ្លុះមានសមីការ $x = p$ ។



ឧទាហរណ៍ 31. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = -2(x - 1)^2 + 3$ ។

ចម្លើយ . ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = -2(x - 1)^2 + 3$ ជាប៉ារ៉ាបូលបានដោយរំកិលក្រាបតាង $y = -2x^2$ ចំនួន 1 ឯកតា ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយ រំកិលស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេចំនួន 3 ឯកតា។



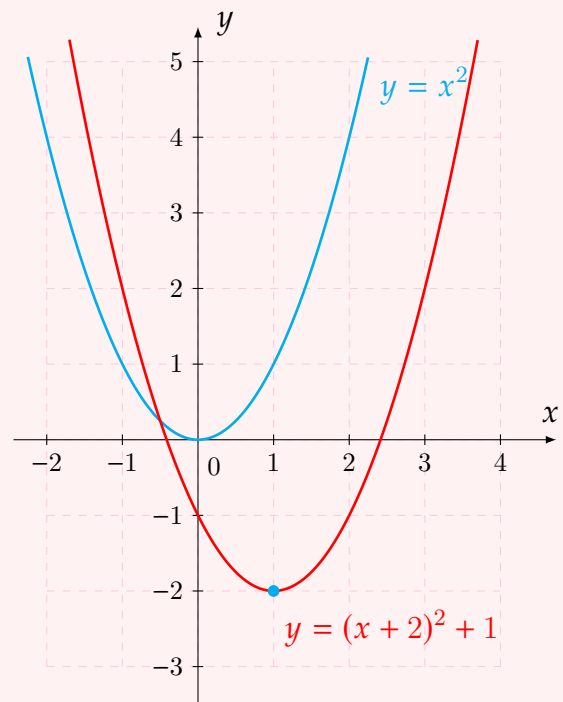
ឧទាហរណ៍ 32. សង់ក្រាបតាង $y = x^2 - 2x - 1$ ។

ចម្លើយ . គេមាន $y = x^2 - 2x - 1$

$$= (x^2 - 2x + 1) - 2$$

$$= (x - 1)^2 - 2$$

ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^2 - 2x - 1$ ជាប៉ារ៉ាបូល ប្រសិនបើយើងរកកំពូលក្រាបតាង $y = x^2$ ចំនួន 1 ឯកតា ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយរកកំពូលស្របនឹងអ័ក្សអូដ៊ីនេចំនួន 2 ឯកតា។



ដូចនេះ កូអរដោនេនៃកំពូលគឺ $(1, -2)$ គេបានក្រាបដូចខាងស្តាំ។

ជាទូទៅ. $y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - p)^2 + q$

ដែល $p = -\frac{b}{2a}$ និង $q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ ។

ក្រាបនៃ $y = ax^2 + bx + c$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$

និងអ័ក្សឆ្លុះមានសមីការ $x = -\frac{b}{2a}$ ។

ឧទាហរណ៍ 33. កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និងសមីការអ័ក្សឆ្លុះនៃសមីការខាងក្រោម :

ក. $y = x^2 + 2x + 3$

ខ. $y = -2x^2 + 8x + 1$

ចម្លើយ . កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និងសមីការអ័ក្សឆ្លុះនៃសមីការ

ក. $y = x^2 + 2x + 3$

- គេបានកូអរដោនេនៃកំពូលគឺ $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$
- ដោយ $-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$ និង $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{4 - 12}{4} = -\frac{-8}{4} = 2$
- ដូចនេះ កូអរដោនេនៃកំពូលគឺ $(-1, 2)$

- អ័ក្សឆ្លុះមានសមីការ $x = -\frac{b}{2a} = -1$

ខ. $y = -2x^2 + 8x + 1$

- គេបានកូអរដោនេនៃកំពូលគឺ $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$
ដោយ $-\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-4} = 2$ និង $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{64 + 8}{-8} = 9$
ដូចនេះ កូអរដោនេនៃកំពូលគឺ $(2, 9)$
- អ័ក្សឆ្លុះមានសមីការ $x = -\frac{b}{2a} = 2$

ឧទាហរណ៍ 34. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = 5x^2 + 2x - 3$

ខ. $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$

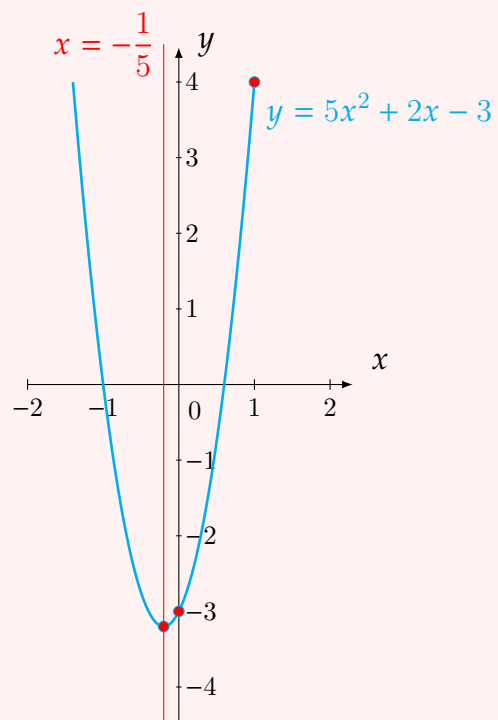
ចម្លើយ . សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y = 5x^2 + 2x - 3$

គេមានកូអរដោនេនៃកំពូលប៉ារ៉ាបូលនេះគឺ
 $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{16}{5}\right)$ និង អ័ក្សឆ្លុះមានសមីការ $x = -\frac{1}{5}$

ហើយ ប៉ារ៉ាបូល នេះ កាត់តាម ចំណុច
 $(0, -3), (1, 4)$

គេបានក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូលនេះគឺ



ខ. $y = 2x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

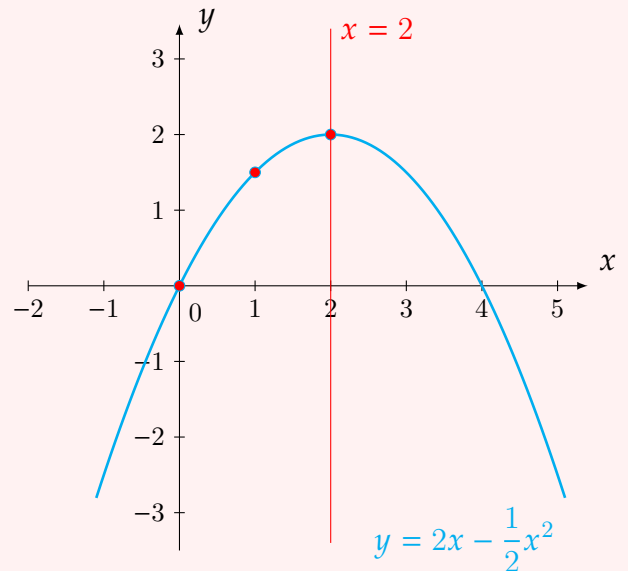
គេ មាន កូអរដោនេ នៃ កំពូល ប៉ារ៉ាប៉ូល នេះ គឺ

$(2, 2)$ និង អ័ក្សឆ្លងមានសមីការ $x = 2$

ហើយ ប៉ារ៉ាប៉ូល នេះ កាត់តាម ចំណុច

$(0, 0), (1, 3/2)$

គេបានក្រាបនៃប៉ារ៉ាប៉ូលនេះគឺ



៣.៤. តម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍ជីក្រេទី២

ឧទាហរណ៍ 35. គេឱ្យអនុគមន៍ជីក្រេទី២ $y = x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x - 1)^2 + 2$

ដោយ $(x - 1)^2 \geq 0$ គេបាន $y = (x - 1)^2 + 2 \geq 2$ ហើយអនុគមន៍មានតម្លៃ **អប្បបរមា** ស្មើ 2 កាលណា $x = 1$ តែគ្មានតម្លៃអតិបរមាលើ \mathbb{R} ទេ។

ឧទាហរណ៍ 36. គេឱ្យអនុគមន៍ជីក្រេទី២ $y = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x - 1)^2 + 3$

ដោយ $-2(x - 1)^2 \leq 0$ នោះគេបាន $y = -2(x - 1)^2 + 3 \leq 3$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃ **អតិបរមា** ស្មើ 3 កាលណា $x = 1$ តែគ្មានតម្លៃអប្បបរមាលើ \mathbb{R} ទេ។

ជំនួយការ. តម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍ជីក្រេទី២ $y = ax^2 + bx + c$

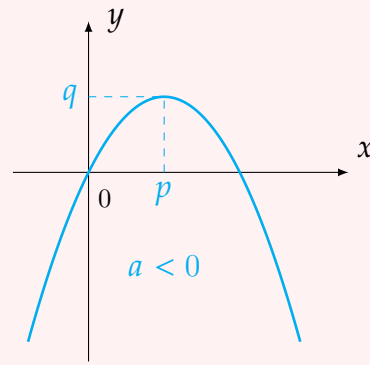
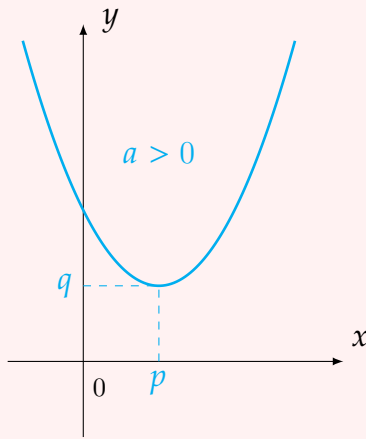
- បើ $a > 0$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃ **អប្បបរមា** ស្មើ $y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

ត្រង់ $x = -\frac{b}{2a}$ ហើយអនុគមន៍គ្មាន **អតិបរមា** ទេ។

- បើ $a < 0$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃ **អតិបរមា** ស្មើ $y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

ត្រង់ $x = -\frac{b}{2a}$ ហើយអនុគមន៍គ្មាន **អប្បបរមា** ទេ។

ដូចនេះ បើគេសរសេរ $y = ax^2 + bx + c = a(x - p)^2 + q$ នោះ គេបានក្រាបដូចខាងក្រោម



ឧទាហរណ៍ 37. ក. កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $y = -2x^2 + 3x + 4$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $y = x^2 - 4x - 3$ ។

ចម្លើយ . ក. អនុគមន៍ $y = -2x^2 + 3x + 4$ មានតម្លៃអតិបរមាស្មើ

$$y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{9 + 32}{-8} = \frac{41}{8} \text{ ត្រង់ } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

ខ. អនុគមន៍ $y = x^2 - 4x - 3$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ

$$y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{16 + 12}{4} = -7 \text{ ត្រង់ } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

ឧទាហរណ៍ 38. កំណត់តម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $y = x^2 - 2x - 2$ បើមានដែនកំណត់

$$D = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\} \text{ ។}$$

ចម្លើយ . សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍

$y = x^2 - 2x - 2$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល

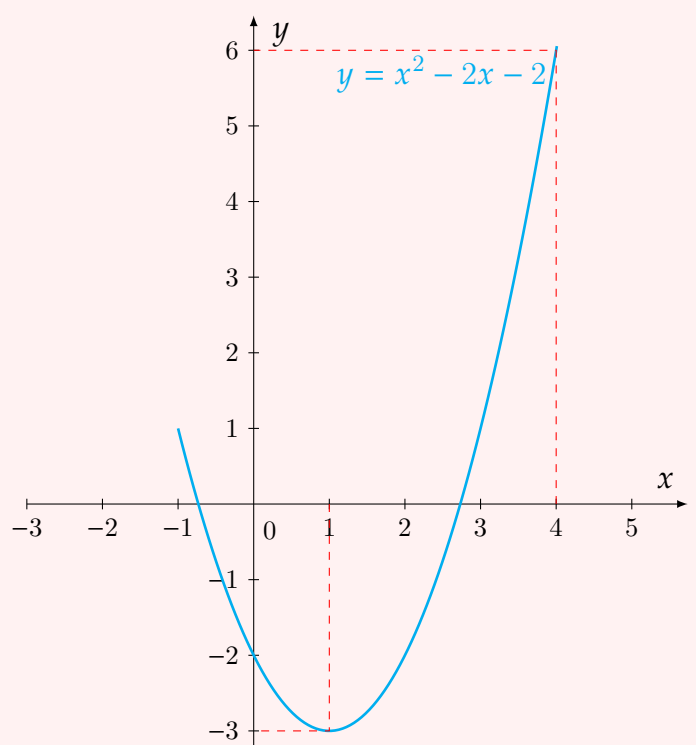
$(1, -3)$ និងកាត់តាមចំណុច

x	-1	0	4
y	1	-2	6

តាមក្រាបគេបានអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ

-3 ត្រង់ចំណុច $x = 1$ និង មានតម្លៃអតិបរមា

ស្មើ 6 ត្រង់ $x = 4$

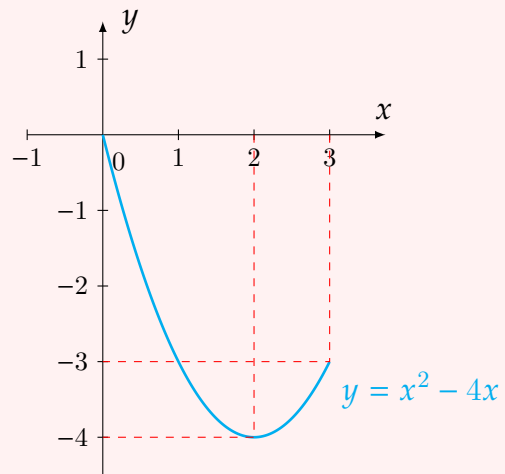


ឧទាហរណ៍ 39. កំណត់តម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី២ $y = x^2 - 4x$,
 $(0 \leq x \leq 3)$ ។

ចម្លើយ . គេមាន $y = x^2 - 4x$ ($0 \leq x \leq 3$)
 សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = x^2 - 4x$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $(2, -4)$ និងកាត់តាមចំណុច

x	0	1	3	4
y	0	-3	-3	0

តាមក្រាបគេបានអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ
 -4 ត្រង់ចំណុច $x = 2$ និង មានតម្លៃអតិបរមា
 ស្មើ 0 ត្រង់ $x = 0$



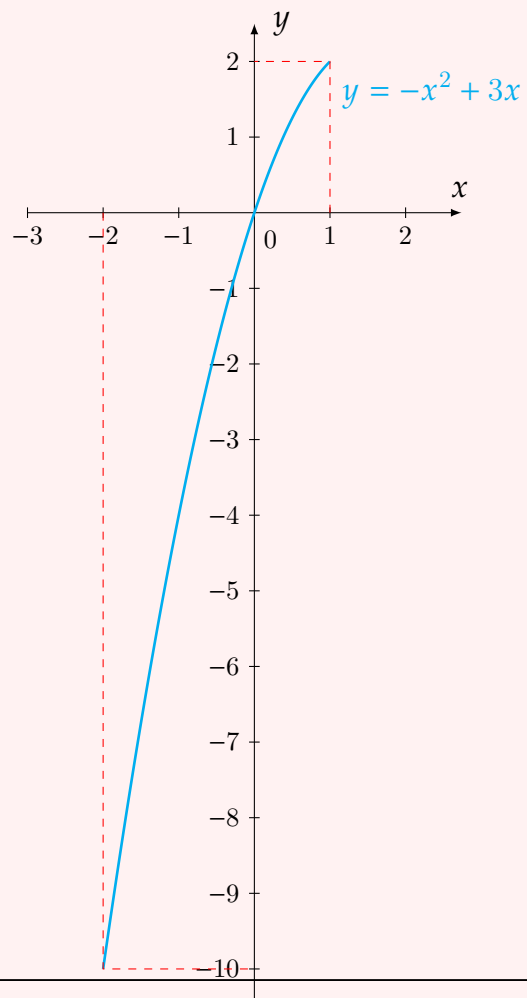
ឧទាហរណ៍ 40. កំណត់តម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី២
 $y = -x^2 + 3x$, ($-2 \leq x \leq 1$) ។

ចម្លើយ . គេមាន $y = -x^2 + 3x$
 $(-2 \leq x \leq 1)$

សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = -x^2 + 3x$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ និងកាត់តាមចំណុច

x	-2	-1	0	1
y	-10	-4	0	2

តាមក្រាបគេបានអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ
 -10 ត្រង់ចំណុច $x = -2$ និង មានតម្លៃអតិបរមា
 ស្មើ 2 ត្រង់ $x = 1$ ។



ឧទាហរណ៍ 41. គេសង់សួនច្បារចតុកោណកែងមួយដែលមានបរិមាត្រស្មើ 100 m ។ កំណត់វិមាត្រចតុកោណកែងដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡានៃសួនច្បារនោះមានតម្លៃធំបំផុត រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានោះ។

ចម្លើយ . កំណត់វិមាត្រនៃចតុកោណកែង

តាង x ជាទទឹង នោះគេបានបណ្តោយគឺ $50 - x$

គេបានផ្ទៃក្រឡា S នៃសួនច្បារគឺ $S = x(50 - x)$

$$S = 50x - x^2 = -(x - 25)^2 + 625 \text{ នោះ } S$$

មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = 25$

ចំពោះ $x = 25$ នោះ $50 - x = 25$ ហើយ $S = 625$

ដូចនេះ S មានតម្លៃធំបំផុតកាលណាចតុកោណកែងមានវិមាត្រ $25\text{ m}, 25\text{ m}$ ។

ផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត $S = 625\text{ m}^2$ ។

ឧទាហរណ៍ 42. គេកាត់ខ្សែមួយដែលមានប្រវែង 60m ជាពីរផ្នែក ហើយគេបត់ខ្សែទាំងនោះជាការេពីរ។ តើគេត្រូវកាត់ខ្សែត្រង់ណាដើម្បីឱ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡានៃការេទាំងពីរមានតម្លៃតូចបំផុត ?

ចម្លើយ . រកទីតាំងដែលត្រូវកាត់ តាង x ជារង្វង់នៃការេទី១ នោះរង្វង់នៃការេទី២ គឺ $\frac{60 - 4x}{4} = 15 - x$

ផលបូកនៃផ្ទៃក្រឡាការេទាំងពីរគឺ

$$S = S_1 + S_2$$

$$= x^2 + (15 - x)^2 = x^2 + 15^2 - 30x + x^2$$

$$= 2x^2 - 30x + 225$$

$$= 2(x^2 - 15x) + 225$$

$$= 2 \left[x^2 - 15x + \left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2 \right] + 225$$

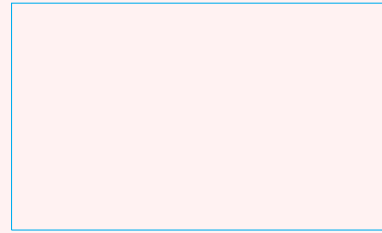
$$= 2 \left(x - \frac{15}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{15}{2} \right)^2 + 225$$

$$= 2 \left(x - \frac{15}{2} \right)^2 - \frac{225}{2} + 225$$

$$= 2 \left(x - \frac{15}{2} \right)^2 + \frac{225}{2} \geq \frac{225}{2}$$

នោះ S មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើនឹង $\frac{225}{2}$ ត្រង់ $x = \frac{15}{2}$

$50 - x$



x



ការេទី១



ការេទី២

$15 - x$

ដូចនេះ គេត្រូវកាត់ខ្សែនោះត្រង់ចំណុចដែលមានប្រវែងស្មើ $4x = 4 \times \frac{15}{2} = 30cm$ មានន័យថាគេត្រូវកាត់ខ្សែនោះត្រង់ចំណុចកណ្តាល។

៣.៥. ដំណោះស្រាយសមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី២តាមក្រាប

៣.៥.១. ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២តាមក្រាប

ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

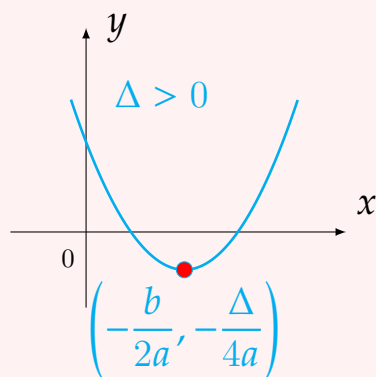
ដោយប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី២ $y = ax^2 + bx + c$ (2)

តាង $\Delta = b^2 - 4ac$ ជា **ឌីសក្រីមីណង់** នៃសមីការ (1) ។

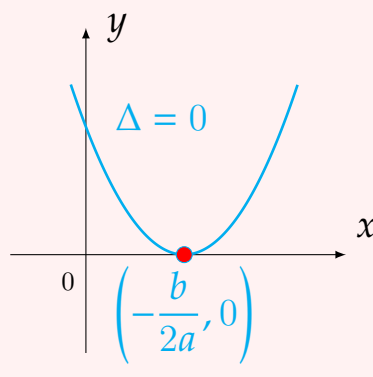
$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

ដូចនេះ ក្រាបនៃ (2) មានកំពូល $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$ ។

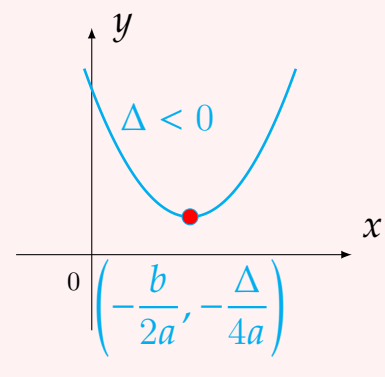
🔗 ចំពោះ $a > 0$ គេបានករណីដូចខាងក្រោម :



ប៉ារ៉ាបូលកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ 2 ចំណុចផ្សេងគ្នា។ សមីការ (1) មាន ឫស ពីរ ផ្សេងគ្នា x_1, x_2 ។

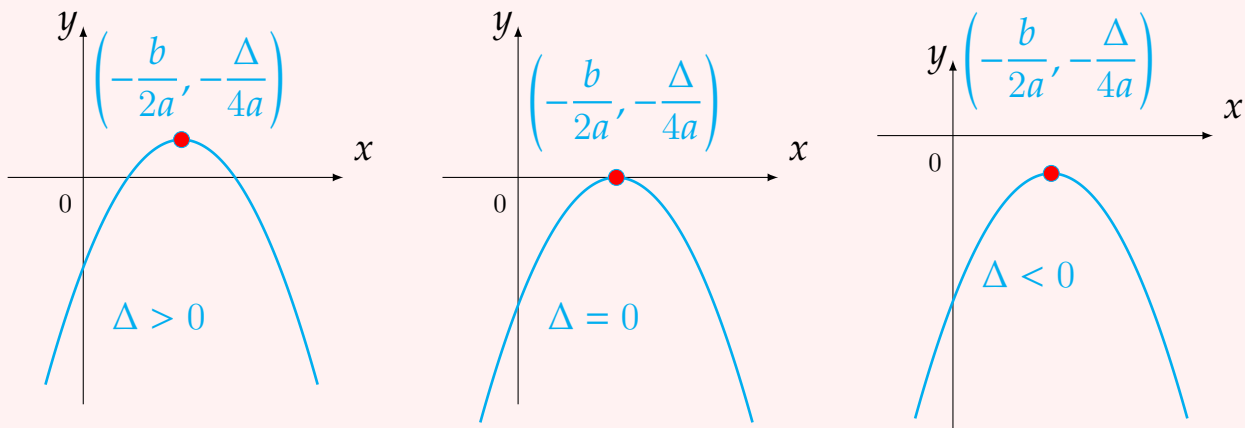


ប៉ារ៉ាបូលប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $\left(-\frac{b}{2a}, 0 \right)$ ។ សមីការ (1) មាន ឫស ឌុប $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ។



ប៉ារ៉ាបូលមិនជួបអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។ សមីការ (1) គ្មាន ឫស ជាចំនួនពិត

🔗 ចំពោះ $a < 0$ គេបានករណីដូចខាងក្រោម :



ប៉ារ៉ាបូលកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស
ត្រង់ ២ ចំណុចផ្សេងគ្នា។
សមីការ (1) មាន ឫស ពីរ
ផ្សេងគ្នា x_1, x_2 ។

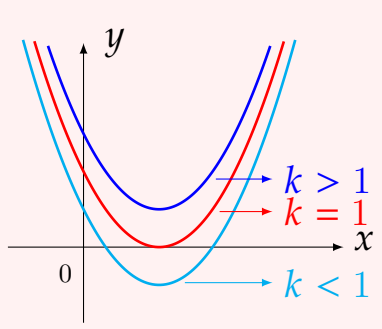
ប៉ារ៉ាបូលប៉ះនឹងអ័ក្ស
អាប់ស៊ីសត្រង់ $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$
។ សមីការ (1) មានឫសឌុប
 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ។

ប៉ារ៉ាបូលមិនជួបអ័ក្ស
អាប់ស៊ីស ។ សមីការ (1)
គ្មានឫសជាចំនួនពិត

ឧទាហរណ៍ 43. សិក្សាចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូលតាង $y = x^2 - 2x + k$ នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស
ទៅតាមតម្លៃ k ។

ចម្លើយ . តាង Δ ជាឌីសក្រីមីណង់នៃសមីការ
 $x^2 - 2x + k = 0$ នោះ $\frac{\Delta}{4} = 1 - k$ ។

- ចំពោះ $\frac{\Delta}{4} > 0 \iff 1 - k > 0$
 $\iff k < 1$ នោះក្រាបកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស
ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា។



- ចំពោះ $\frac{\Delta}{4} = 0 \iff 1 - k = 0 \iff k = 1$ នោះក្រាបប៉ះជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់មួយ
ចំណុច។
- ចំពោះ $\frac{\Delta}{4} < 0 \iff 1 - k < 0 \iff k > 1$ នោះក្រាបមិនកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសទេ។

ឧទាហរណ៍ 44. សិក្សាចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល $y = x^2 - mx + 4$ នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស
ទៅតាមតម្លៃ m ។

ចម្លើយ . តាង Δ ជាឌីសក្រីមីណង់នៃសមីការ $x^2 - mx + 4 = 0$ នោះគេបាន $\frac{\Delta}{4} = \frac{m^2 - 16}{4}$
 បើ $\frac{\Delta}{4} = 0 \iff \frac{m^2 - 16}{4} = 0 \iff m^2 - 16 = 0 \iff m = -4$ ឬ $m = 4$ គេបានតារាង
 សញ្ញា

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
$\frac{\Delta}{4}$		+	-	+

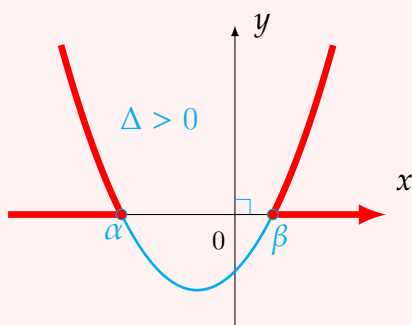
- បើ $\frac{\Delta}{4} > 0 \iff m < -4$ ឬ $m > 4$ នោះក្រាបកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា។
- បើ $\frac{\Delta}{4} = 0 \iff m = -4$ ឬ $m = 4$ នោះក្រាបប៉ះជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់មួយចំណុច។
- បើ $\frac{\Delta}{4} < 0 \iff -4 < m < 4$ នោះក្រាបមិនកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសទេ។

៣.៥.២. ដំណោះស្រាយវិសមីការដឺក្រេទី២តាមក្រាប

ដោះស្រាយវិសមីការដឺក្រេទី២ ដោយប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី២ $y = ax^2 + bx + c$ (1)

បើ $a > 0$ តាមឌីសក្រីមីណង់ $\Delta = b^2 - 4ac$ ហើយ α និង β ជាឫសនៃសមីការ និង $\alpha < \beta$ នៃ
 សមីការដឺក្រេទី២ $ax^2 + bx + c = 0$ (2)

- បើ $\Delta > 0$ ក្រាបនៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី២ គឺជួបរូបខាងក្រោម :

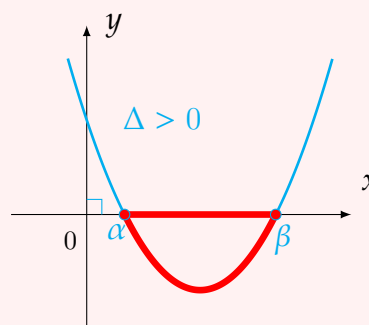


សំណុំឫសនៃវិសមីការដឺក្រេទី២

$$ax^2 + bx + c > 0$$

គឺសំណុំនៃ x ដែល $y > 0$ នៅលើក្រាបនៃ (1)

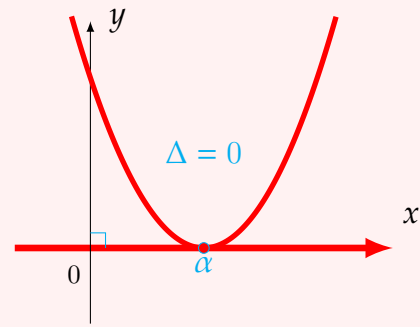
$$\text{គឺ } x < \alpha, x > \beta$$



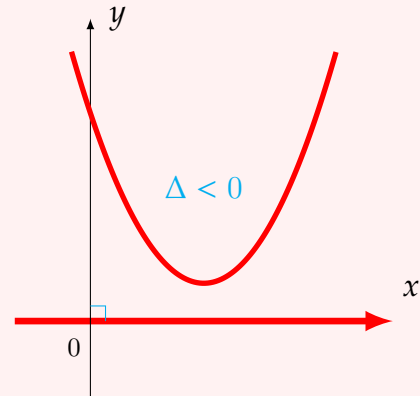
សំណុំឫសនៃវិសមីការដឺក្រេទី២

$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ គឺ } \alpha < x < \beta$$

- បើ $\Delta = 0$ សមីការ (2) មានចូសឌុប α នោះ
ក្រាបតាង (1) ជួបក្នុងរូបខាងស្តាំ។
សំណុំចូសនៃ $ax^2 + bx + c > 0$ ជាចំនួនពិត
ទាំងអស់លើកលែងតែ α ហើយ
 $ax^2 + bx + c < 0$ គ្មានចូសទេ។



- បើ $\Delta < 0$ សមីការ (2) គ្មានចូសជាចំនួនពិត
នោះក្រាបតាង (1) ជួបក្នុងរូបខាងស្តាំ។
សំណុំចូសនៃ $ax^2 + bx + c > 0$ ជាចំនួនពិត
ទាំងអស់ ហើយ $ax^2 + bx + c < 0$ គ្មានចូស
ទេ។



ឧទាហរណ៍ 45. ដោះស្រាយវិសមីការតាមក្រាប :

ក. $x^2 + 4x + 1 < 0$

គ. $-x^2 + 7x + 3 > 0$

ខ. $3x^2 + 7x + 3 \geq 0$

ឃ. $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ ។

ចម្លើយ . ដោះស្រាយវិសមីការតាមក្រាប

ក. $x^2 + 4x + 1 < 0$

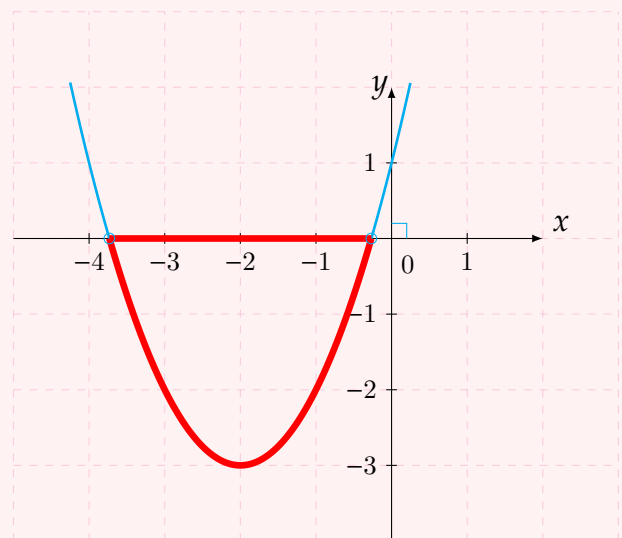
សង់ក្រាបតាង $y = x^2 + 4x + 1$

បើ $x^2 + 4x + 1 = 0$ មានឌីសគ្រីមីណង់

$\Delta = 16 - 4 = 12$ គេបាន

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$

កំពូលនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(-2, -3)$ ។



x	-3	-2	-1	0
y	-2	-3	-2	1

តាមក្រាបយើងឃើញថាវិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $-2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$

ខ. $3x^2 + 7x + 3 \geq 0$

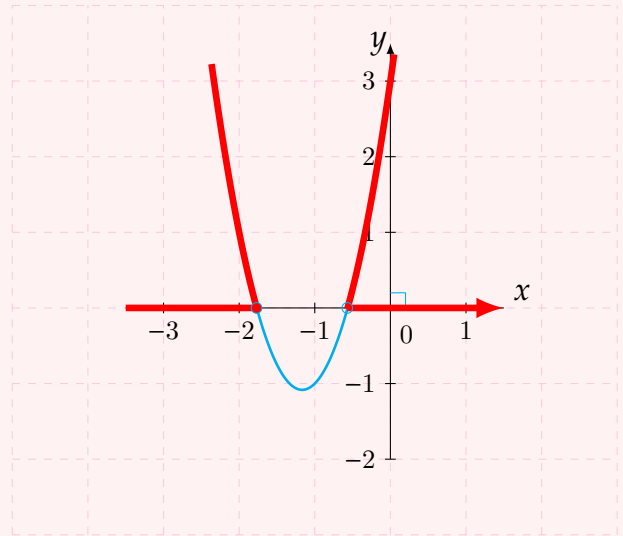
សង់ក្រាបតាង $y = 3x^2 + 7x + 3$ បើ

$3x^2 + 7x + 3 = 0$ មានឌីសគ្រីមីណង់

$$\Delta = 49 - 36 = 13 \text{ គេបាន}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{13}}{6}$$

កំពូលនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $\left(-\frac{7}{6}, -\frac{13}{12}\right)$ ។



x	-2	-1	0
y	1	-1	3

តាមក្រាបយើងឃើញថាវិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x \leq \frac{-7 + \sqrt{13}}{6}$ ឬ $x \geq \frac{-7 + \sqrt{13}}{6}$

គ. $-x^2 + 7x + 3 > 0 \iff x^2 - 7x - 3 < 0$

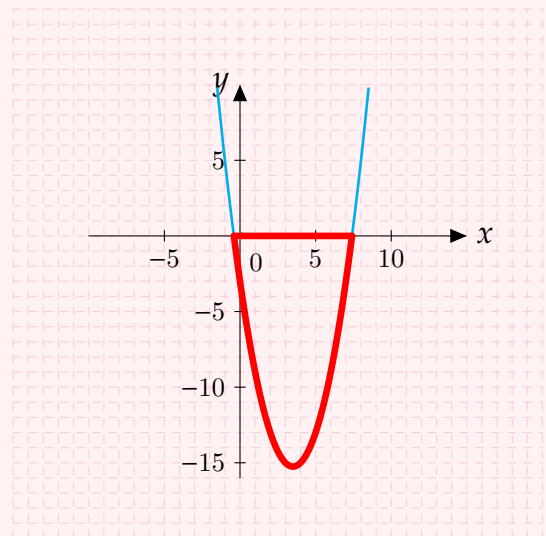
សង់ក្រាបតាង $y = x^2 - 7x - 3$

បើ $x^2 - 7x - 3 = 0$ មានឌីសគ្រីមីណង់

$$\Delta = 49 + 12 = 61 \text{ គេបាន}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{61}}{2}$$

កំពូលនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $\left(\frac{7}{2}, -\frac{61}{4}\right)$ ។



x	0	1	2	6
y	-3	-9	-15	-9

តាមក្រាបយើងឃើញថាវិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $\frac{7 + \sqrt{61}}{2} < x < \frac{7 + \sqrt{61}}{2}$

ប. $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

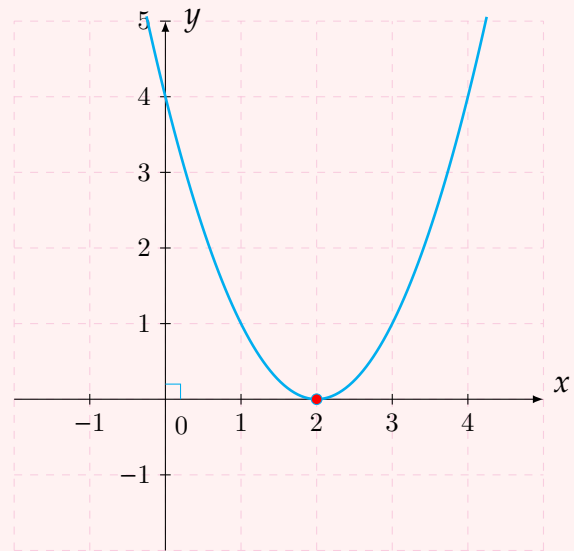
សង់ក្រាបតាង $y = x^2 - 4x + 4$ បើ

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \text{ មានឌីសគ្រីមីណង់}$$

$$\Delta = 16 - 16 = 0 \text{ គេបាន } x = \frac{4}{2} = 2$$

កំពូលនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(2, 0)$ ។

x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4



តាមក្រាបយើងឃើញថាសមីការមានចម្លើយ $x = 2$

៣.៦. ការអនុវត្តនៃក្រាប

ឧទាហរណ៍ 46. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យសមីការ $x^2 + 2(2k + 1)x + (k + 1) = 0$ មានបូសពីរផ្សេងគ្នា ហើយវិជ្ជមានទាំងពីរ ។

ចម្លើយ . សមីការមានបូសពីរផ្សេងគ្នា ហើយវិជ្ជមានទាំងពីរលុះត្រាតែប៉ារ៉ាបូលតាងអនុគមន៍

$$y = x^2 + 2(2k + 1)x + (k + 1) \text{ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ពីរចំណុចនៅខាងស្តាំគល់តម្រុយ } O \text{ ។}$$

ដោយមេគុណ x^2 ជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅខាងលើ។

តាង Δ ជាឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ $x^2 + 2(2k + 1)x + (k + 1) = 0$

នោះប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល $\left(-2k - 1, -\frac{\Delta}{4}\right)$ ហើយប៉ារ៉ាបូលកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(0, k + 1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\Delta}{4} < 0 \quad (1) \\ -2k - 1 > 0 \quad (2) \\ k + 1 > 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

$$\text{តាម (1) គេបាន } -\frac{\Delta}{4} < 0 \iff \frac{\Delta}{4} > 0 \iff \Delta > 0 \iff 4(2k + 1)^2 - 4(k + 1) > 0$$

$$(2k + 1)^2 - (k + 1) > 0$$

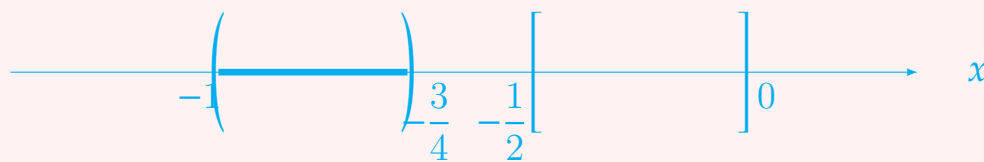
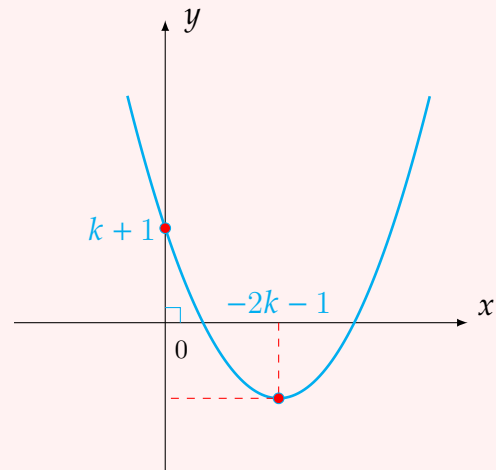
$$4k^2 + 4k + 1 - k - 1 > 0$$

$$4k^2 + 3k > 0 \iff k(4k + 3) > 0$$

គេបាន $k < -\frac{3}{4}$ ឬ $k > 0$

តាម (2) គេបាន $-2k - 1 > 0 \iff k < -\frac{1}{2}$

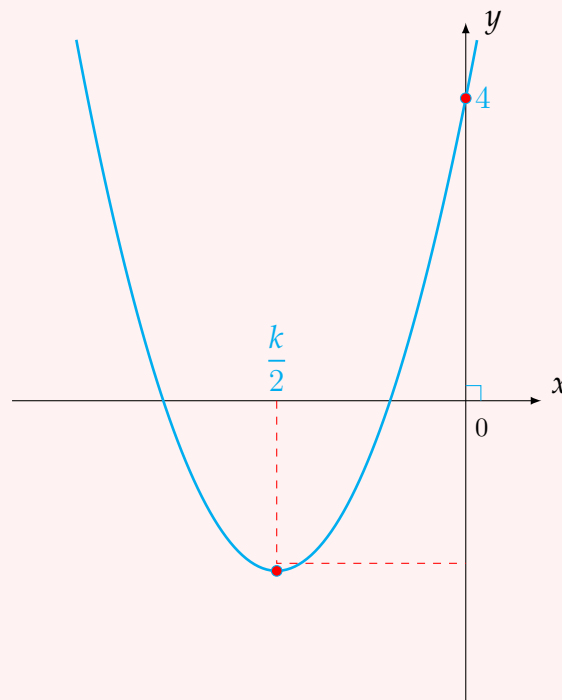
តាម (3) គេបាន $k + 1 > 0 \iff k > -1$



ដូចនេះ សំណុំនៃតម្លៃ k គឺ $-1 < k < -\frac{3}{4}$

ឧទាហរណ៍ 47. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យសមីការ $x^2 - kx + 4 = 0$ មានឫសទាំងពីរអវិជ្ជមាន។

ចម្លើយ . សមីការមានឫសពីរអវិជ្ជមានលុះត្រាតែប៉ារ៉ាម៉ែត្រតាងអនុគមន៍



$y = x^2 - kx + 4$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ពីរចំណុចនៅខាងឆ្វេងគល់តម្រុយ O ។

ដោយមេគុណ x^2 ជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះប៉ារ៉ាម៉ែត្រតាងភាពផុតទៅខាងលើ។

តាង Δ ជាឌីសក្រីមីណង់នៃសមីការ $x^2 - kx + 4 = 0$

នោះប៉ារ៉ាម៉ែត្រមានកំពូល $\left(\frac{k}{2}, -\frac{\Delta}{4}\right)$ ហើយប៉ារ៉ាម៉ែត្រកាត់អ័ក្សអ័ក្សដេនេត្រង់ចំណុច $(0, 4)$ ។

ដូចនេះ លក្ខខណ្ឌខាងលើសមមូលនឹង
$$\begin{cases} -\frac{\Delta}{4} < 0 & (1) \\ \frac{k}{2} < 0 & (2) \end{cases}$$

តាម (1) គេបាន $-\frac{\Delta}{4} < 0 \iff \frac{\Delta}{4} > 0 \iff \Delta > 0$

$k^2 - 16 > 0 \iff (k - 4)(k + 4) > 0 \iff k < -4$ ឬ $k > 4$

តាម (2) គេបាន $k < 0$

ដូចនេះសំណុំចម្លើយនៃ k គឺ $k < -4$ ។

ចំណេះដឹងបន្ថែម : ក្រាប និងសមីការ

ឧទាហរណ៍ 48. ប្រើក្រាបដើម្បីដោះស្រាយវិសមីការ $x^2 < 2x$ ។

គេអាចដោះស្រាយវិសមីការ $x^2 < 2x$ តាមក្រាប តាមរបៀបដូចខាងក្រោម

- សង់ក្រាបតាង $y = x^2$ និង $y = 2x$ ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេតែមួយ។
- កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបទាំងពីរ។
- ទាញរកសំណុំចម្លើយតាមក្រាប។

ចម្លើយ. សង់ក្រាប $y = x^2$ និង $y = 2x$

ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង បន្ទាត់ប្រសព្វគ្នាត្រង់គល់ O និង

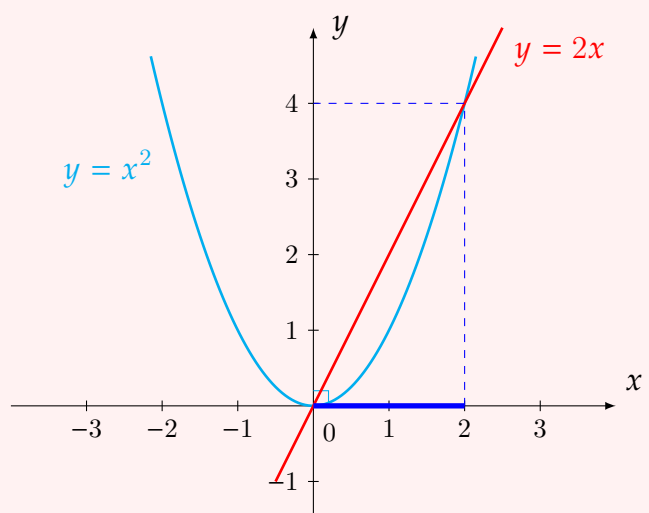
ចំណុច $(2, 4)$

តាមក្រាបគេឃើញថា ក្រាបនៃអនុគមន៍តាង

$y = x^2$ ស្ថិតនៅខាងក្រោមនៃក្រាបតាង

$y = 2x$ ចំពោះ $0 < x < 2$

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x \in (0, 2)$ ។



ឧទាហរណ៍ 49. ដោះស្រាយវិសមីការ $|x^2 - 4| < 2$ ។

ចម្លើយ. សង់ក្រាបនៃ $y = |x^2 - 4|$ និង $y = 2$

សង់ក្រាប $y = |x^2 - 4|$

$$y = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq -2 \\ -(x^2 - 4), & -2 < x < 2 \\ x^2 - 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបទាំងពីរ គេបាន

$$|x^2 - 4| = 2$$

- បើ $x < -2$ គេបាន $|x^2 - 4| = x^2 - 4$

$$\text{នាំឱ្យ } x^2 - 4 = 2 \iff x = \pm\sqrt{6}$$

$$\text{តែ } x < -2 \implies x = -\sqrt{6}$$

នោះ ក្រាប ទាំងពីរ ប្រសព្វគ្នា ត្រង់ ចំណុច

$$A(-\sqrt{6}, 2)$$

- បើ $-2 < x < 2$ គេបាន $|x^2 - 4| = -(x^2 - 4) = -x^2 + 4$

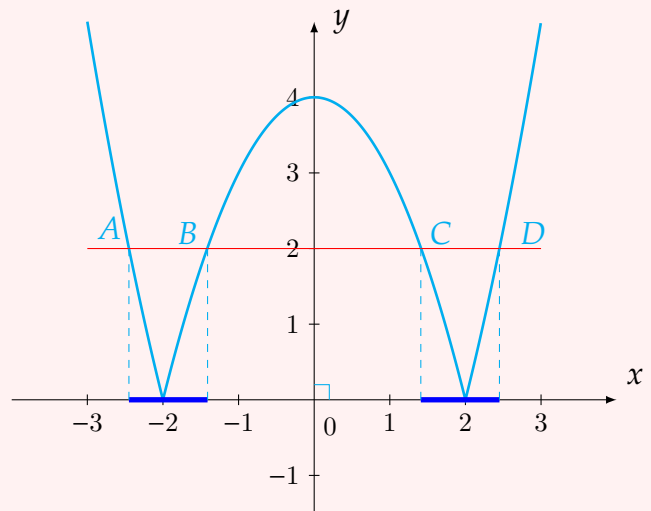
$$\text{នាំឱ្យ } -x^2 + 4 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

នោះក្រាបទាំងពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $B(-\sqrt{2}, 2)$ និង $C(\sqrt{2}, 2)$ ។

- បើ $x > 2$ គេបាន $|x^2 - 4| = x^2 - 4$ នាំឱ្យ $x^2 - 4 = 2 \iff x = \pm\sqrt{6}$

$$\text{តែ } x > 2 \implies x = \sqrt{6} \text{ នោះក្រាបទាំងពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច } D(\sqrt{6}, 2)$$

តាមក្រាបគេបាន សំណុំចម្លើយនៃវិសមីការគឺ $x \in (-\sqrt{6}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{6})$



៤. លំហាត់

១. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $(x - 1)^2 - 8(x - 1) = 0$

ខ. $\left(y + \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{49}{16} = 0$

គ. $5\sqrt{5}x^2 - 10x + \sqrt{5} = 0$

ឃ. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{6} = 0$

ង. $3iy^2 - y + 2i = 0$

ច. $(x - 1)^2 + 4(x - 1)(x - 3) - 2(2x - 3) = 0$

២. គេមានសមីការ $x^2 - x + 8 = 0$ មានឫស α និង β ។ ចូរគណនា

ក. $\alpha^2 + \beta^2$

គ. $\frac{\beta}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha}{1 + \beta^2}$

ខ. $\alpha^3 + \beta^3$

ឃ. $\alpha^4 + \beta^4$ ។

៣. គេមាន α និង β ជាឫសនៃសមីការខាងក្រោម

ក. $(x - 8)(x - 9) + (x - 10)(x - 12) = 0$ ។ គណនា $2(11 - \alpha)(11 - \beta)$ ។

ខ. $x(x + 1) + (x + 1)(x + 2) + (x + 2)(x + 3) + (x + 3)(x + 1) = 0$ ។

គណនា $(\alpha + 2)(\beta + 2)$ ។

៤. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $x^2 - 7x + 12 = 0$

គ. $6x^2 - 5x + 1 = 0$

ខ. $-x^2 + 4x + 5 = 0$

ឃ. $3x^2 + 10x + 5 = 0$

៥. គេមានសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ ។ បង្ហាញថា បើ x_1, x_2 និង x_3 ជាចំនួនពិតខុសៗគ្នា និង ជាឫសនៃសមីការ នោះ $a = b = c = 0$ ។

៦. រកតម្លៃ a ដែលនាំឱ្យសមីការ $(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x - a + a^2 = 0$ មានចូសលើសពីពីរ។
៧. រកតម្លៃ a ដែលនាំឱ្យសមីការ $2x^2 - (a^3 + 8a - 1)x + a^2 - 4a = 0$ មានចូសដែលមានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា។
៨. រកគ្រប់តម្លៃ a ដែលនាំឱ្យសមីការ $x^2 - ax + 1 = 0$ មិនមានចូសជាចំនួនពិត។
៩. រកតម្លៃ k ដែលនាំឱ្យសមីការ $x^2 + 2(k - 1)x + k + 5 = 0$ មានចូសមួយយ៉ាងតិចជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។

១០. ដោះស្រាយសមីការក្នុង \mathbb{R}

ក. $x^2 - |x| - 2 = 0$

ឆ. $|x^2 + x| = x^2 + x$

ខ. $x^2 + 5|x| + 4 = 0$

ជ. $|x^2 - x + 5| = x - x^2 - 5$

គ. $2x^2 - |5x - 2| = 0$

ឈ. $|x^2 - 1| = x + 3$

ឃ. $x^2 - |x - 1| = 0$

ញ. $|x^2 - 1| = |x + 3|$

ង. $|x^2 + x - 6| = x^2 + x - 6$

ដ. $|2x^2 - 1| = |x^2 - 2x - 3|$

ច. $|6x^2 - 5x + 1| = 5x - 6x^2 - 1$

ប. $|x^2 - 3|x| + 2| = x^2 - 2x$

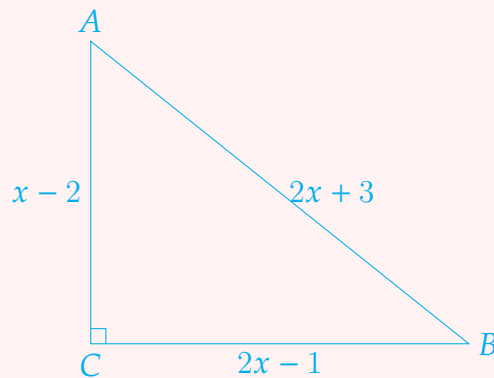
១១. ដោះស្រាយសមីការ $(x^2 - x)^2 - 4(x^2 - x) - 12 = 0$ ។

១២. គេមានសមីការ $x^2 - 2(k - 3)x + 4k = 0$ ដែលមានចូសពីរ α និង β ។

ក. រកតម្លៃ k ក្នុងករណីដែលចូសទាំងពីរវិជ្ជមាន។

ខ. រកតម្លៃ k ក្នុងករណីដែលចូសទាំងពីរអវិជ្ជមាន។

១៣. គេឱ្យត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណដែលមានមុំ $\angle ACB$ ជាមុំកែង (ដូចរូបខាងស្តាំ)។



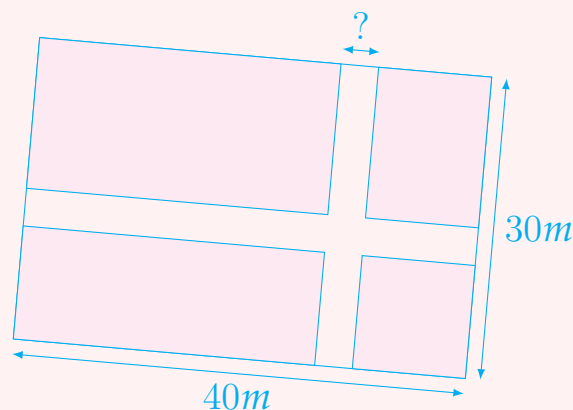
ក. តាងទ្រឹស្តីបទពីតាកែរសរសេរសមីការដែលមានអញ្ញាត x ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $x^2 - 20x - 4 = 0$

គ. រកផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ABC ។

១៤. សួនផ្កាមួយរាងចតុកោណកែងមានទទឹង $30m$ និង

បណ្តោយ $40m$ ។ គេចង់ធ្វើផ្លូវពីរកាត់គ្នាក្នុងសួនផ្កានោះ (ដូចរូបខាងស្តាំ) ដែលមានទទឹងផ្លូវស្មើគ្នា និងផ្ទៃក្រឡាស្មើនឹង $325m^2$ ។ គណនាទទឹងផ្លូវនោះ។



១៥. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $x^2 - 3x - 4 > 0$

គ. $2x^2 - x + 5 \leq 0$

ខ. $x^2 + 4x + 4 > 0$

ឃ. $-4x^2 + x - 1 < 0$

១៦. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ វិសមីការខាងក្រោម :

ក.
$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$$

ខ.
$$\begin{cases} -x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{គ.} \quad \begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases} & \text{ថ.} \quad \begin{cases} x^2 + x + 8 < 0 \\ x^2 + 6x + 5 = 0 \end{cases} \\
 \text{ឃ.} \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 25 \leq 0 \end{cases} & \text{ឆ.} \quad \begin{cases} |x - 2| + |x - 3| = 1 \\ 813x - 974 \leq 163x^2 \end{cases} \\
 \text{ង.} \quad \begin{cases} x^2 + 6x + 9 \leq 0 \\ 2x - 5 > 0 \end{cases} &
 \end{array}$$

១៧. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

$$\text{ក. } x^2 - |x| - 12 < 0$$

$$\text{គ. } 8x^2 + |-x| + 1 > 0$$

$$\text{ខ. } x^2 - 7|x| + 10 \leq 0$$

$$\text{ឃ. } -2x^2 - 3|x| + 4 \geq 0$$

១៨. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

$$\text{ក. } 3x^2 - |10x - 3| > 0$$

$$\text{ង. } |x^2 + 6x + 8| \leq -x^2 - 6x - 8$$

$$\text{ខ. } x^2 \leq |x - 2|$$

$$\text{ច. } |x^2 - 6| > 4x + 1$$

$$\text{គ. } |x^2 + x - 20| \leq x^2 + x - 20$$

$$\text{ឆ. } |x - 3| > |x^2 - 3|$$

$$\text{ឃ. } |x - 2x^2| > 2x^2 - x$$

១៩. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត c នៃវិសមីការ $x^2 + 7x + 9 > 8x + c$ ដើម្បីឱ្យវាមានចម្លើយចំពោះគ្រប់ x ។

២០. គេឱ្យសំណុំ A និង B ដូចខាងក្រោម :

$$A = \{x | 6x^2 - 7x - 5 > 0\} , \quad B = \{x | x^2 - 2x - 8 < 0\}$$

ចូររកគ្រប់ចំនួនគត់ក្នុងចំណោមធាតុនៃ $A \cap B$ ។

២១. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = -(x + 1)^2$

គ. $y = x^2 - 4|x| + 3$

ខ. $y = x^2 + x + 1$

ឃ. $y = |x^2 - 4| - |x^2 - 9|$

២២. រកចំណុចបរមា និងតម្លៃបរមានៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = -x^2$

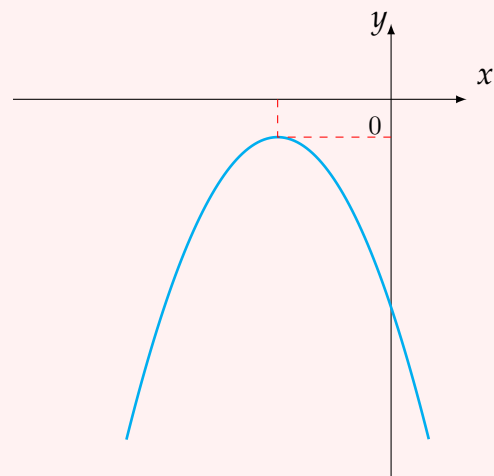
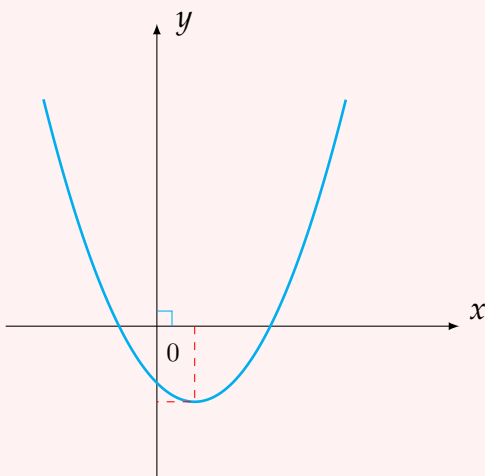
ឃ. $y = x^2 + 2x + 100$

ខ. $y = (x - 1)^2$

ង. $y = -4x^2 + x - 5$

គ. $y = -(2 + x)^2$

២៣. ប៉ារ៉ាបូលខាងក្រោមមានក្រាបតាង $y = ax^2 + bx + c$ ។ កំណត់សញ្ញានៃ a, b, c និង $\Delta = b^2 - 4ac$ ចំពោះក្រាបទាំងពីរខាងក្រោម :



២៤. កំណត់តម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍បើវាមានដែនកំណត់ភ្ជាប់ខាងក្រោម :

ក. $y = 3x - x^2 \quad (-1 \leq x \leq 2)$

គ. $y = 3x^2 - x + 5 \quad (1 \leq x \leq 2)$

ខ. $y = x^2 + 5x + 4 \quad (-3 \leq x \leq 0)$

ឃ. $y = -4x^2 + 5x - 8 \quad (2 \leq x \leq 3)$

២៥. រកចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល $y = x^2 + kx + 1$ និងបន្ទាត់ $y = 2x - 3$ តាមតម្លៃ k ។

២៦. គេមាន $f(x) = x^2 - 4x + 3$ និង $g(x) = (x - 2)^2 - 1$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ x គេបាន $f(x) = g(x)$ ។

ខ. ទាញជាផលគុណកត្តានៃ $f(x)$ ។

២៧. រកគ្រប់តម្លៃ m ដែលនាំឱ្យប្រសទាំងពីរនៃសមីការ $2x^2 + mx + m^2 - 5 = 0$

ក. តូចជាង 1

ខ. ធំជាង -1 ។

២៨. រកគ្រប់តម្លៃ k ដែលនាំឱ្យប្រសមួយនៃសមីការ $x^2 - (k + 1)x + k^2 + k - 8 = 0$ ធំជាង 2 និង ប្រសជាចំនួនពិតមួយផ្សេងទៀតតូចជាង 2 ។

២៩. បើ x_1 និង x_2 ជាប្រសនៃសមីការ $x^2 + 2(k - 3)x + 9 = 0$, ($x_1 \neq x_2$) ។ រកតម្លៃ k ដែលនាំឱ្យសមីការ $-6 < x_1 < 1$ និង $-6 < x_2 < 1$ ពិត។

៣០. រកគ្រប់តម្លៃ k ដែលនាំឱ្យប្រសមួយនៃសមីការ $(k - 5)x^2 - 2kx + k - 4 = 0$ តូចជាង 1 និង ប្រសមួយផ្សេងទៀតធំជាង 2 ។

៣១. គេមាន x_1 និង x_2 , ($x_1 \neq x_2$) ជាប្រសនៃសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ ។ បង្ហាញថាមាន $x_0 \in (x_1, x_2)$ ដែលជើងនៃអនុគមន៍ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ស្មើសូន្យ។

៣២. គេមានសមីការដឺក្រេទី២ $x^2 - 2(m - 1)x - 3 - m = 0$, $m \in \mathbb{R}$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការមានប្រសជាចំនួនពិតចំពោះគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យប្រស α និង β នៃសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់ $\alpha^2 + \beta^2 \geq 10$ ។

៣៣. គេមានសមីការដឺក្រេទី២ $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការមានប្រសជាចំនួនពិតចំពោះគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. តាង $A = 2(\alpha^2 + \beta^2) - 5\alpha\beta$ ។

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A = 8m^2 - 18m + 9$ ។

2. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $A = 27$ ។

3. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានប្រសមួយស្មើនឹងពីរដងនៃប្រសមួយទៀត។

៣៤. គេមានសមីការដឺក្រេទី២ $(m-1)x^2 + 2(m-1)x - m = 0$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសឌុប។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសពីរផ្សេងគ្នាសុទ្ធតែអវិជ្ជមាន។

៣៥. គេមានសមីការ $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 3m = 0$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការមានបួសជាចំនួនពិតពីរជានិច្ចចំពោះគ្រប់តម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសពីរ α និង β ដែល $1 < \alpha < \beta < 6$ ។

៣៦. គេមានសមីការ $x^2 + x + a = 0$ និង $x^2 + ax + 1 = 0$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការទាំងពីរមានបួសជាចំនួនពិតសមមូលគ្នា។

ខ. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសជាចំនួនពិតរួមគ្នាយ៉ាងតិចមួយ។

៣៧. ក. បង្ហាញថា $(m^2 + m - 1)^2 + 4m^2 + 4m = (m^2 + m + 1)^2$ ។

ខ. គេមានសមីការ $mx^2 - (m^2 + m + 1)x + m + 1 = 0$ (1) ។

រកលក្ខខណ្ឌនៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ (1) មានបួសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា ហើយខុសពី -1 ។

៣៨. គេមាន a, b ជាបួសនៃសមីការ $x^2 + px + 1 = 0$ និង c, d ជាបួសនៃសមីការ $y^2 + qy + 1 = 0$

បង្ហាញថា $(a-c)(a-d)(b-c)(b-d) = (p-q)^2$ ។

៣៩. បើ a និង b ជាបួសនៃសមីការ $x^2 + px + 1 = 0$ និង c និង d ជាបួសនៃសមីការ $x^2 + qx + 1 = 0$

បង្ហាញថា $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d) = q^2 - p^2$ ។

៤០. គេមានសមីការ $(m+2)x^2 - (2m-1)x - 3 + m = 0$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការមានបួសជាចំនួនពិតគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. រកគ្រប់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសជាចំនួនពិតមួយស្មើនឹងពីរដងនៃមួយទៀត។

៤១. គេមានសមីការ $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសជាចំនួនពិត។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសជាចំនួនពិត a និង b ដែល $a^2 + b^2 = 10$ ។

៤២. គេមានសមីការ $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសពីរ a និង b មិនអវិជ្ជមាន។

ខ. ចំពោះតម្លៃ m នៃសំនួរ ក ចូរគណនាតម្លៃនៃកន្សោម $E = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ជាអនុគមន៍នៃ m ។

៤៣. គេមានសមីការ $3x^2 - mx + 2 = 0$ ។ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសជាចំនួនពិត a និង b ដែល $3ab = 2a - 2$ ។

៤៤. គេមានសមីការ $x^2 - 2(m-1)x - m = 0$ ① ។

ក. បង្ហាញថាសមីការ ① មានបួសជាចំនួនពិតជានិច្ច ចំពោះគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. ចំពោះ $m \neq 0$ ចូរបង្កើតសមីការដែលមានបួស $a + \frac{1}{a}$ និង $b + \frac{1}{b}$ ដែល a និង b ជាបួសនៃសមីការ ① ។

៤៥. គេមានសមីការ $3x^2 - 5x + m = 0$ ។

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសជាចំនួនពិត x_1 និង x_2 ដែល $x_1^2 - x_2^2 = \frac{5}{9}$ ។

៤៦. គេមានសមីការ $x^2 - 2(m+4)x + m^2 - 8 = 0$ ។ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសជាចំនួនពិត a និង b ផ្ទៀងផ្ទាត់ :

ក. $A = a + b - 3ab$ មានតម្លៃធំបំផុត។

ខ. $B = a^2 + b^2 - ab$ មានតម្លៃតូចបំផុត។

គ. រកទំនាក់ទំនងរវាង a និង b ដែលមិនអាស្រ័យ m ។

៤៧. គេមានសមីការ $x^2 - 4x - m^2 - 3m = 0$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការមានបួសពីរ a និង b ជាចំនួនពិតជានិច្ច។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $a^2 + b^2 = 4(a+b)$ ។

គ. រកសមីការដឺក្រេទី២អញ្ញាត y ដែលមានបួស y_1 និង y_2 ផ្សេងផ្ទុក $y_1 + y_2 = a + b$ និង

$$\frac{y_1}{1 - y_2} + \frac{y_2}{1 - y_1} = 3 \text{ ។}$$

៤៨. គេមានសមីការ $x^2 + ax + 1 = 0$ ។ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសពិតពីរ α និង β ដែល $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 > 7$ ។

៤៩. គេមានសមីការ $2x^2 + 2(m + 2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសពិតពីរ a និង b ។

ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់តម្លៃ a និង b ជាបួសនៃសមីការគេបាន $|a + b + 3ab| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

៥០. គេមានសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសពីរដែលបួសមួយស្មើនឹងពីរដងនៃបួសមួយទៀតគឺ $9ac = 2b^2$ ។

៥១. គេមានសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសជាចំនួនពិតពីរដែលបួសមួយស្មើនឹង k ដងនៃបួសមួយទៀត ($k > 0$) គឺ : $kb^2 = (k + 1)^2 ac$

៥២. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ មានបួសជាចំនួនពិតជានិច្ចចំពោះគ្រប់តម្លៃ a, b និង c ។

៥៣. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យសមីការដឺក្រេទី២ខាងក្រោម :

$$(2a + 1)x^2 - (3a - 1)x + 2 = 0 \text{ និង } (b + 1)x^2 - (2b + 1)x - 1 = 0 \text{ មានបួសពីររួមគ្នា។}$$

៥៤. រកគ្រប់ចំនួនគត់ k ដើម្បីឱ្យសមីការ $kx^2 - (1 - 2k)x + k - 2 = 0$ មានបួសជាចំនួនសនិទាន។

៥៥. គេមានសមីការ $x^2 + ax + bc = 0$ ① និង $x^2 + bx + ac = 0$ ② ដែល a, b, c ខុសគ្នាពីរៗ និងខុសពីសូន្យ។ គេដឹងថាសមីការ ① និង ② មានបួសរួមគ្នាមួយ បង្ហាញថាបួសផ្សេងទៀតនៃសមីការ ① និង ② ជាបួសនៃសមីការ $x^2 + cx + ab = 0$ ។

៥៦. គេមានសមីការពីរ $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ និង $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ ។ ដោយដឹងថា $a_1a_2 \leq 2(b_1 + b_2)$ ។ បង្ហាញថា យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោមសមីការទាំងពីរនេះ មានមួយមានបួសជាចំនួនពិត។
៥៧. គេមានសមីការ $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$ និង $cx^2 + 2ax + b = 0$ ដែល $a, b, c \neq 0$ ។
បង្ហាញថា យ៉ាងតិចមានមួយក្នុងចំណោមសមីការទាំងនេះ មានបួសជាចំនួនពិត ។
៥៨. គេមានសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \neq 0$) មានបួសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត ដែលក្នុងនោះមានបួសមួយជាចំនួនវិជ្ជមានតាងដោយ x_1 ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការដឺក្រេទី២ $ct^2 + bt + a = 0$ ក៏មានបួសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នាដែរ ដែលមានបួស $t_1 > 0$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1 + t_1 \geq 2$ ។
៥៩. ដោយមិនដោះស្រាយសមីការ $3x^2 + 17x - 14 = 0$ ① ចូរគណនាតម្លៃនៃកន្សោម $P = \frac{3a^2 + 5ab + 3b^2}{6a^2b + 6ab^2}$ ដែល a និង b ជាបួសនៃសមីការ ①។
៦០. គេមានសមីការដឺក្រេទី២ $x^2 + ax + b = 0$ ។ កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសពីរគឺ a និង b ។
៦១. គេមានសមីការ $x^2 + ax + b = 0$ និង $x^2 - cx - d = 0$ ដែល $a(a-c) + c(c-a) + 8(d-b) > 0$ ស្រាយបញ្ជាក់ថាមានយ៉ាងតិចមួយក្នុងចំណោមសមីការទាំងពីរដែលមានបួសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា។
៦២. គេមានសមីការ $x^2 + px - 1 = 0$ ដែល p ជាចំនួនសេស ហើយសមីការមានបួសពិតពីរផ្សេងគ្នា x_1 និង x_2 ។ បង្ហាញថាបើ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិនោះ $x_1^n + x_2^n$ និង $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ ហើយបែបបរវាងគ្នា។
៦៣. គេមាន $a \neq 0$ ។ បើ x_1 និង x_2 ជាបួសពិតនៃសមីការ $x^2 - ax - \frac{1}{2a^2} = 0$ បង្ហាញថា $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$ ។
៦៤. (CHINA/2006) ដោះស្រាយសមីការ $2006x^2 + 2007x + 1 = 0$ ។

៦៥. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមដែលមានអញ្ញាត x :

ក. $(a^2 - 1)x + a(x^2 - 1) = a^2(x^2 - x + 1)$

ខ. $x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2 = 0$

៦៦. គេមានសមីការ $(x - 19)(x - 97) = p$ មានបួសជាចំនួនពិត r_1 និង r_2 ។

រកបួសតូចបំផុតនៃសមីការ $(x - r_1)(x - r_2) = -p$ ។

៦៧. (CHINA/2003) គេឱ្យ a ជាបួសតូចបំផុតនៃសមីការ $x^2 - 3|x| - 2 = 0$ ចូររកតម្លៃនៃ $-\frac{1}{a}$ ។

៦៨. គេឱ្យ a ជាបួសនៃសមីការ $x^2 - x - 3 = 0$ ។ គណនា $\frac{a^3 + 1}{a^5 - a^4 - a^3 + a^2}$ ។

៦៩. គេឱ្យសមីការ $x^2 - (2a + b)x + (2a^2 + b^2 - b + \frac{1}{2}) = 0$ មានបួសជាចំនួនពិត។ រកតម្លៃ a និង b ។

៧០. (CHINA/2005) គេឱ្យសមីការ $x^2 - ax + 3 - b = 0$ មានបួសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា, សមីការ $x^2 + (6 - a)x + 6 - b = 0$ មានបួសខុប និង សមីការ $x^2 + (4 - a)x + 5 - b = 0$ គ្មានបួសជាចំនួនពិត។

គេបានរង់នៃចំនួនពិត a និង b គឺ (ចូរប្រើសរសេរចម្លើយមួយដែលត្រឹមត្រូវ):

(A). $2 < a < 4, 2 < b < 5,$

(C). $2 < a < 4, 1 < b < 5$

(B). $1 < a < 4, 2 < b < 5,$

(D). $1 < a < 4, 1 < b < 5$ ។

៧១. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលសមីការ $c^2x^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2 = 0$ មិនមានបួសជាចំនួនពិត។ បញ្ជាក់ថា អង្កត់ដែលមានប្រវែង a, b, c អាចបង្កើតបានត្រីកោណមួយ។

៧២. (CHINA/2004) គេឱ្យសមីការអញ្ញាត $x : mx^2 - 2(m + 2)x + m + 5 = 0$ គ្មានបួសជាចំនួនពិត។

តើគេអាចថាប៉ាងណាចំពោះបួសជាចំនួនពិតនៃសមីការ $(m - 6)x^2 - 2(m + 2)x + m + 5 = 0$?

៧៣. (CHINA/2003) ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២ $x^2 + |x + 3| + |x - 3| - 24 = 0$ ។

៧៤. (CHINA/2005) ដោះស្រាយសមីការ $(m-2)x^2 - (m+3)x - 2m - 1 = 0$ ។

៧៥. (CMO/1988) រកតម្លៃនៃ b ដែលនាំឱ្យសមីការ $1988x^2 + bx + 8891 = 0$ និង $8891x^2 + bx + 1988 = 0$ មានបួសរួមគ្នាមួយ។

៧៦. (CHINA/2004) បើបួសធំជាងគេនៃសមីការ $(2003x)^2 - 2002 \times 2004x - 1 = 0$ គឺ m និង បួសតូចជាងគេនៃសមីការ $x^2 + 2002x - 2003 = 0$ គឺ n នោះ $m - n$ ស្មើនឹង :

(A). 2004

(B). 2003

(C). $\frac{2003}{2004}$

(D). $\frac{2002}{2003}$

៧៧. គេឱ្យ a ជាបួសនៃសមីការ $x^2 - 3x + 1 = 0$ ចូរគណនាតម្លៃនៃកន្សោម $P = \frac{2a^5 - 5a^4 + 2a^3 - 8a^2}{a^2 + 1}$

៧៨. គេឱ្យសមីការអញ្ញាត $x : (m^2 - 1)x^2 - 2(m + 2)x + 1 = 0$ មានបួសជាចំនួនពិតមួយយ៉ាងតិច។ រករង្វង់នៃ m ។

៧៩. រកតម្លៃ k ដែលនាំឱ្យសមីការ $x^2 - kx - 7 = 0$ និង $x^2 - 6x - (k + 1) = 0$ មានបួសរួមគ្នាមួយ និងរកបួសរួមនោះ រួចរកបួសដែលផ្សេងគ្នា។

៨០. (CHINA/1995) គេឱ្យ $a, b, c > 0$ និងសមីការដឺក្រេទី២ $(c + a)x^2 + 2bx + (c - a) = 0$ មានបួសខុប។ កំណត់ថាតើគេអាចបង្កើតបានត្រីកោណដែលមានរង្វាស់ជ្រុង a, b, c ឬទេ? បើអាច ចូរកំណត់ប្រភេទត្រីកោណនោះ។

៨១. បើសមីការអញ្ញាត $x : x^2 + 2(1 + a)x + (3a^2 + 4ab + 4b^2 + 2) = 0$ មានបួសជាចំនួនពិត។ រកតម្លៃនៃ a និង b ។

៨២. (CHINA/1997) a, b, c ជាចំនួនពិតដែល $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ ។

សមីការ $x^2 + (a + b + c)x + (a^2 + b^2 + c^2) = 0$

(A). មានបួសពីរជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

(C). មានបួសពីរជាចំនួនពិតដែលមានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា

(B). មានបួសពីរជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

(D). គ្មានបួសជាចំនួនពិត។

៨៣. (ASUMO/1990) Mr. Fat នឹងជ្រើសរើសបីចំនួនខុសពីសូន្យ ហើយ Mr. Tef នឹងរៀបចំចំនួនទាំងបីនោះឱ្យទៅជាមេគុណនៃសមីការដឺក្រេទី២

$$\square x^2 + \square x + \square = 0$$

Mr. Fat នឹងឈ្នះលើប្រធានប្រកួតសមីការនោះមានបួសជាចំនួនសនិទានពីរផ្សេងគ្នា។ តើនរណាជាអ្នកឈ្នះ?

៨៤. (CHNMOL/2003) គេឱ្យ a, b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា និងពីរសមីការដឺក្រេទី២

$$(a-1)x^2 - (a^2+2)x + (a^2+2a) = 0 \text{ និង } (b-1)x^2 - (b^2+2)x + (b^2+2b) = 0$$

$$\text{មានបួសរួមគ្នាមួយ។ រកតម្លៃនៃ } P = \frac{a^b + b^a}{a^{-b} + b^{-a}} \text{ ។}$$

៨៥. (CANADA) គេឱ្យ m ជាចំនួនពិត។ ដោះស្រាយសមីការអញ្ញាត $x : |x^2 - 1| + |x^2 - 4| = mx$

៨៦. (CHINA/1988) បើ p, q_1 និង q_2 ជាចំនួនពិតដែល $p = q_1 + q_2 + 1$ បង្ហាញថាយ៉ាងតិចមួយក្នុងចំណោមសមីការទាំងពីរខាងក្រោម :

$$x^2 + x + q_1 = 0 \text{ និង } x^2 + px + q_2 = 0$$

មានបួសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា។

៨៧. (CHINA/1997) គេឱ្យសមីការ $x^2 + (2a-1)x + a^2 = 0$ មានបួសពីរជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ហើយ a ជាចំនួនគត់។ បើ x_1 និង x_2 ជាបួសនៃសមីការ ។

$$\text{ចូរគណនាតម្លៃនៃកន្សោម } L = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \text{ ។}$$

៨៨. (CHNMOL/1996) គេមាន x_1 និង x_2 ជាបួសនៃសមីការ $x^2 + x - 3 = 0$ ។

$$\text{គណនាតម្លៃនៃកន្សោម } x_1^3 - 4x_2^2 + 19 \text{ ។}$$

៨៩. (CHINA/1996) គេឱ្យសមីការដឺក្រេទី២ $x^2 - px + q = 0$ មានបួសពីរជាចំនួនពិត α និង β ។

ក. រកសមីការដឺក្រេទី២ដែលមានបួស α^3 និង β^3 ។

ខ. បើសមីការថ្មីនោះនៅតែមានទម្រង់ $x^2 - px + q = 0$ ចូររកគ្រប់គូនៃ (p, q) ដែលអាចកើតមាន។

៩០. គេមានសមីការ $(x - a)(x - a - b) = 1$ ដែល a និង b ជាចំនួនថេរ។ បង្ហាញថាសមីការមានបួសពីរជាចំនួនពិត ដែលបួសមួយធំជាង a និងបួសមួយទៀតតូចជាង a ។

៩១. (CHNMOL/2000) គេឱ្យ m ជាចំនួនពិតមិនតូចជាង -1 ដែលសមីការអញ្ញាត x

$$x^2 + 2(m - 2)x + m^2 - 3m + 3 = 0$$

មានបួសពិតពីរផ្សេងគ្នា x_1 និង x_2 ។

ក. បើ $x_1^2 + x_2^2 = 6$ ចូររកតម្លៃនៃ m ។

ខ. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $\frac{mx_1^2}{1 - x_1} + \frac{mx_2^2}{1 - x_2}$ ។

៩២. (CHNMOL/1991) គេឱ្យសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2 + bx + c = 0$ គ្មានបួសជាចំនួនពិតទេ។ ប៉ុន្តែ Adam ដោះស្រាយសមីការនេះ បានបួសពីរគឺ 2 និង 4 ពីព្រោះតែគាត់បានសរសេរតម្លៃ a ខុស។ Ben ក៏ដោះស្រាយបានបួសពីរដែរគឺ -1 និង 4 ពីព្រោះតែគាត់បានសរសេរសញ្ញានៃមេគុណរបស់សមីការនេះខុសមួយកន្លែង ។ ចូររកតម្លៃនៃ $\frac{2b + 3c}{a}$ ។

៩៣. (CHINA/2003) គេឱ្យសមីការ $8x^2 + (m + 1)x + m - 7 = 0$ មានបួសពីរ ជាចំនួនអវិជ្ជមាន។ ចូររករង្វង់នៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

៩៤. (CHINA/2005) បើ a និង b ជាចំនួនពិតដែល $a^2 + 3a + 1 = 0$ និង $b^2 + 3b + 1 = 0$ ។ ចូររកតម្លៃនៃ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ។

៩៥. (CHINA/2005) បើ p និង q ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $2p^2 - 3p - 1 = 0$ និង $q^2 + 3q - 2 = 0$ ហើយ $pq \neq 1$ ។ ចូររកតម្លៃនៃ $\frac{pq + p + 1}{q}$ ។

៩៦. គេឱ្យ a, b, c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណ ΔABC , $a > b > c$, $2b = a + c$ និង b ជាចំនួនគត់ វិជ្ជមាន។ បើ $a^2 + b^2 + c^2 = 84$ ចូររកតម្លៃនៃ b ។
៩៧. (CHINA/1999) គេឱ្យ $2x^2 - 5x - a = 0$ ជាសមីការដឺក្រេទី២មានអញ្ញាត x ហើយ a ជា ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។ ប្រសិនបើសមាមាត្រនៃបូសទាំងពីរនៃសមីការគឺ $x_1 : x_2 = 2 : 3$ ។ ចូររកតម្លៃនៃ $x_2 - x_1$ ។
៩៨. (RUSMO/1989) គេឱ្យ $p + q = 198$ ។ រកបូសដែលជាចំនួនគត់នៃសមីការ $x^2 + px + q = 0$ ។
៩៩. (CHINA/1995) គេឱ្យផលបូកការេនៃបូសនៃសមីការ $2x^2 + ax - 2a + 1 = 0$ គឺ $7\frac{1}{4}$ ។ រកតម្លៃ a ។
១០០. គេឱ្យ α និង β ជាចំនួនពិត និងជាបូសនៃសមីការ $x^2 - 2x - 1 = 0$ ។ រកតម្លៃនៃ $5\alpha^4 + 12\beta^3$ ។

៥. ដំណោះស្រាយ

១. ដោះស្រាយសមីការខាង

ក. $(x - 1)^2 - 8(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)[(x - 1) - 8] = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 9) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 9$$

ដូចនេះ: សមីការមានចូស $x = 1$ ឬ $x = 9$

ខ. $\left(y + \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{49}{16} = 0 \Leftrightarrow \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 = -\frac{49}{16} \Leftrightarrow y + \frac{5}{8} = \pm\sqrt{-\frac{49}{16}}$
 $\Leftrightarrow y + \frac{5}{8} = \pm\frac{7}{4}i \Leftrightarrow y = -\frac{5}{8} \pm \frac{7}{4}i$

ដូចនេះ: សមីការមានចូស $y = -\frac{5}{8} \pm \frac{7}{4}i$ ។

គ. $5\sqrt{5}x^2 - 10x + \sqrt{5} = 0$

$$\text{តាម } \Delta' = (-5)^2 - 5\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 25 - 25 = 0$$

$$\text{គេបាន } x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

ដូចនេះ: សមីការមានចូស $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ។

ឃ. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{6} = 0$ តាម $\Delta' = \frac{1}{9} - \frac{5}{12} = -\frac{11}{36}$

$$\text{គេបាន } x = \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{-\frac{11}{36}}}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{11}}{6}i}{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{11}}{3}i$$

ដូចនេះ: សមីការមានចូស $x = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{11}}{3}i$ ។

ង. $3iy^2 - y + 2i = 0$ តាម $\Delta = (-1)^2 - 4(3i)(2i) = 1 - 24i^2 = 1 + 24 = 25$

$$\text{គេបាន } y = \frac{1 + \sqrt{25}}{6i} = \frac{6}{6i} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$y_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{6i} = \frac{-4}{6i} = \frac{-2}{3i} = \frac{-2i}{3i^2} = \frac{-2i}{-3} = \frac{2i}{3}$$

ដូចនេះ: សមីការមានចូស $y = -i$ ឬ $y = \frac{2i}{3}$ ។

២. $(x-1)^2 + 4(x-1)(x-3) - 2(2x-3) = 0$

$$(x^2 - 2x + 1) + 4(x^2 - 3x - x + 3) - 4x + 6 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 16x + 12 - 4x + 6 = 0$$

$$5x^2 - 22x + 19 = 0 \text{ តាម } \Delta' = 11^2 - 5 \times 19 = 121 - 95 = 26$$

$$\text{គេបាន } x = \frac{11 \pm \sqrt{26}}{5}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{សមីការមានចូល } x = \frac{11 \pm \sqrt{26}}{5} \text{ ។}}$

២. គេមាន α និង β ជាចូលនៃសមីការ $x^2 - x + 8 = 0$ នោះគេបាន

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 1 \text{ និង } \alpha\beta = \frac{c}{a} = 8$$

ក. គណនា $\alpha^2 + \beta^2$

$$\text{គេមាន } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2 \times 8 = 1 - 16 = -15$$

ដូចនេះ: $\boxed{\alpha^2 + \beta^2 = -15}$

ខ. គណនា $\alpha^3 + \beta^3$

$$\text{គេមាន } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$= 1 \times [(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta]$$

$$= -15 - 8 = -23$$

ដូចនេះ: $\boxed{\alpha^3 + \beta^3 = -23}$

គ. គណនា $\frac{\beta}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha}{1 + \beta^2}$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } \frac{\beta}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha}{1 + \beta^2} &= \frac{\beta(1 + \beta^2) + \alpha(1 + \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)} \\ &= \frac{\beta + \beta^3 + \alpha + \alpha^3}{1 + \beta^2 + \alpha^2 + \alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta) + (\alpha^3 + \beta^3)}{1 + (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha\beta)^2} \\ &= \frac{1 - 23}{1 - 15 + 8^2} = \frac{-22}{50} = -\frac{11}{25} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\frac{\beta}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha}{1 + \beta^2} = -\frac{11}{25}}$

ឃ. គណនា $\alpha^4 + \beta^4$

$$\text{គេបាន } \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = (-15)^2 - 2(8)^2 = 225 - 128 = 97$$

ដូចនេះ $\alpha^4 + \beta^4 = 97$

៣. ក. គេមាន $(x-8)(x-9) + (x-10)(x-12) = 0$

$$x^2 - 17x + 72 + x^2 - 22x + 120 = 0$$

$$2x^2 - 39x + 192 = 0 \text{ នាំឱ្យ } \alpha + \beta = \frac{39}{2} \text{ និង } \alpha\beta = \frac{192}{2} = 96$$

$$\text{គេបាន } 2(11-\alpha)(1-\beta) = 2(121-11\alpha-11\beta+\alpha\beta) = 2[121-11(\alpha+\beta)+\alpha\beta]$$

$$= 2\left(121 - 11 \cdot \frac{39}{2} + 96\right) = 5$$

ដូចនេះ $2(11-\alpha)(1-\beta) = 5$

ខ. គេមាន $x(x+1) + (x+1)(x+2) + (x+2)(x+3) + (x+3)(x+1) = 0$

$$x^2 + x + x^2 + 3x + 2 + x^2 + 5x + 6 + x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$4x^2 + 13x + 11 = 0 \text{ នាំឱ្យ } \alpha + \beta = -\frac{13}{4} \text{ និង } \alpha\beta = \frac{11}{4}$$

គេបាន

$$(\alpha+2)(\beta+2) = \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 = \alpha\beta + 2(\alpha+\beta) + 4 = \frac{11}{4} + 2 \times \frac{-13}{4} + 4 = \frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $(\alpha+2)(\beta+2) = \frac{1}{4}$

៤. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $x^2 - 7x + 12 = 0$ តាម $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 49 - 48 = 1$

$$\text{គេបាន } x_1 = \frac{7 + \sqrt{1}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{7 - \sqrt{1}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

ដូចនេះ សមីការមានចូល $x = 3$ ឬ $x = 4$ ។

ខ. $-x^2 + 4x + 5 = 0$ តាម $\Delta' = 4 + 5 = 9$

$$\text{គេបាន } x_1 = \frac{-2 + \sqrt{9}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{9}}{-1} = \frac{-5}{-1} = 5$$

ដូចនេះ សមីការមានចូល $x = -1$ ឬ $x = 5$

គ. $6x^2 - 5x + 1 = 0$ តាម $\Delta = 25 - 24 = 1$

$$\text{គេបាន } x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{សមីការមានប្រស } x = \frac{1}{3} \text{ ឬ } x = \frac{1}{2}}$$

$$\text{ឃ. } 3x^2 + 10x + 5 = 0 \text{ តាម } \Delta' = 25 - 15 = 10$$

$$\text{គេបាន } x = \frac{-5 \pm \sqrt{10}}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{សមីការមានប្រស } x = \frac{-5 \pm \sqrt{10}}{3}}$$

ង. បើ x_1, x_2 និង x_3 ជាប្រសនៃសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ នោះគេបាន

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 & (1) \\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0 & (2) \\ ax_3^2 + bx_3 + c = 0 & (3) \end{cases}$$

យក (1) - (2) និង (1) - (3) គេបាន

$$\begin{cases} a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0 & (4) \\ a(x_1^2 - x_3^2) + b(x_1 - x_3) = 0 & (5) \end{cases}$$

យក (4) \times (1) - (5) \times (1) គេបាន

$$a(x_1^2 - x_2^2)(x_1 - x_3) - a(x_1^2 - x_3^2)(x_1 - x_2) = 0$$

$$a[(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1 - x_3) - (x_1 - x_3)(x_1 + x_3)(x_1 - x_2)] = 0$$

$$a(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = 0 \quad (6)$$

ដោយ x_1, x_2 និង x_3 ជាចំនួនពិតខុសគ្នា នោះ $x_1 - x_2 \neq 0, x_1 - x_3 \neq 0, x_2 - x_3 \neq 0$

តាម (6) គេបាន $a = 0$

យក $a = 0$ ជំនួសក្នុង (4) គេបាន $b = 0$

យក $a = b = 0$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $c = 0$

ដូចនេះ $a = b = c = 0$

៦. កំណត់តម្លៃ a

សមីការ $(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x - a + a^2 = 0$ មានឫសលើសពីពីរកាលណា

$$a^2 - 3a + 2 = a^2 - 5a + 4 = -a + a^2 = 0 \quad (1)$$

- បើ $a^2 - 3a + 2 = 0 \iff a = 1 \vee a = 2$
- បើ $a^2 - 5a + 4 = 0 \iff a = 1 \vee a = 4$
- បើ $-a + a^2 = 0 \iff -a(1 - a) = 0 \iff a = 0 \vee a = 1$

តាម (1) គេបាន $a = 1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានឫសលើសពីពីរកាលណា } a = 1}$

៧. កំណត់តម្លៃ a

សមីការ $2x^2 - (a^3 + 8a - 1)x + a^2 - 4a = 0$ មានឫសដែលមានសញ្ញាផ្ទុយគ្នាលុះត្រាតែ

$$P < 0$$

$$\text{គេបាន } \frac{a^2 - 4a}{2} < 0 \iff a^2 - 4a < 0 \iff a(a - 4) < 0$$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$P < 0$		+	-	+

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានឫសដែលមានសញ្ញាផ្ទុយគ្នាលុះត្រាតែ } a \in (0, 4)}$ ។

៨. សមីការ $x^2 - ax + 1 = 0$ មិនមានឫសជាចំនួនពិតលុះត្រាតែ $\Delta < 0$

$$\text{គេបាន } a^2 - 4 < 0 \iff -2 < a < 2$$

ដូចនេះ $\boxed{a \in (-2, 2)}$

៩. រកតម្លៃ k

សមីការ $x^2 + 2(k-1)x + k+5 = 0$ (1) មានបួសជាចំនួនពិតលុះត្រាតែ

$$\Delta' \geq 0 \iff (k-1)^2 - (k+5) \geq 0 \iff k^2 - 2k + 1 - k - 5 \geq 0 \iff k^2 - 3k - 4 \geq 0$$

សមីការ $k^2 - 3k - 4 = 0$ មានបួស $k_1 = -1, k_2 = 4$

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$\Delta' \geq 0$	+	0	0	+

គេបាន សមីការមានបួសជាចំនួនពិតលុះត្រាតែ $k \in (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$ (2)

ចំពោះតម្លៃ k ខាងលើបួសនៃសមីការ (1) អាចវិជ្ជមានទាំងពីរ ឬអវិជ្ជមានទាំងពីរ ឬមានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា។

- រកតម្លៃ k ដែលនាំឱ្យសមីការ (1) មានបួសអវិជ្ជមានទាំងពីរ

$$\begin{cases} S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2(k-1) < 0 \\ k+5 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k > 1 \\ k > -5 \end{cases} \iff k > 1 \quad (3)$$

តាម (2) និង (3) នោះសមីការមានបួសពីរអវិជ្ជមានទាំងពីរលុះត្រាតែ $k \in [4, +\infty)$ (4)

តាម (2) និង (4) សមីការមានបួសពិតវិជ្ជមានមួយយ៉ាងតិចលុះត្រាតែ $k \in (-\infty, -1]$

ដូចនេះ $k \in (-\infty, -1]$

១០. ដោះស្រាយសមីការក្នុង \mathbb{R}

ក. $x^2 - |x| - 2 = 0$ (1)

- ចំពោះ $x \geq 0$ គេបាន $|x| = x$ នោះសមីការ (1) ក្លាយជា :

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ មានបួស } x_1 = -1, x_2 = 2 \text{ តែ } x \geq 0 \implies x = 2$$

- ចំពោះ $x \leq 0$ គេបាន $|x| = -x$ នោះសមីការ (1) ក្លាយជា :

$$x^2 + x - 2 = 0 \text{ មានបួស } x_1 = 1, x_2 = -2 \text{ តែ } x \leq 0 \implies x = -2$$

ដូចនេះ: សមីការមានប្រសូល $x = -2 \vee x = 2$

ខ. $x^2 + 5|x| + 4 = 0 \iff (|x|)^2 + 5|x| + 4 = 0$

តាង $t = |x|, t \geq 0$ គេបាន

$$t^2 + 5t + 4 = 0 \text{ មានប្រសូល } t = -1 \vee t = -4 \text{ តែ } t \geq 0$$

ដូចនេះ: សមីការគ្មានប្រសូល

គ. $2x^2 - |5x - 2| = 0 \quad (2)$

សិក្សាសញ្ញានៃទ្រង់ 5x - 2 គេបានតារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	$2/5$	$+\infty$
$5x - 2$	$-$	0	$+$

- បើ $x < \frac{2}{5}$ គេបាន $5x - 2 < 0 \implies |5x - 2| = -(5x - 2)$ នោះសមីការ (2)

ក្លាយជា :

$$2x^2 + 5x - 2 = 0 \text{ មានប្រសូល } x = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{4}$$

- បើ $x \geq \frac{2}{5}$ គេបាន $5x - 2 \geq 0 \implies |5x - 2| = 5x - 2$ នោះសមីការ (2) ក្លាយជា :

$$2x^2 - (5x - 2) = 0 \iff 2x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ មានប្រសូល } x = \frac{1}{2} \vee x = 2$$

ដូចនេះ: សមីការមានប្រសូល $x = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}, x = \frac{1}{2}, x = 2$

ឃ. $x^2 - |x - 1| = 0 \quad (3)$

- បើ $x \geq 1$ គេបាន $x - 1 \geq 0 \implies |x - 1| = x - 1$ នោះសមីការ (3) ក្លាយជា :

$$x^2 - (x - 1) = 0 \iff x^2 - x + 1 = 0 \text{ សមីការគ្មានប្រសូល}$$

- បើ $x < 1$ គេបាន $x - 1 < 0 \implies |x - 1| = -(x - 1)$ នោះសមីការ (3) ក្លាយជា :

$$x^2 + x - 1 = 0 \text{ សមីការមានប្រសូល } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ដូចនេះ: សមីការមានប្រសូល $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

ង. $|x^2 + x - 6| = x^2 + x - 6 \quad (4)$

គេបានសមីការ (4) មានប្រសូលគ្រប់ x ដែលធ្វើឱ្យផ្ទាំងសមីការ $x^2 + x - 6 \geq 0$

បើ $x^2 + x - 6 = 0$ មានចូស $x = -3 \vee x = 2$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x^2 + x - 6 \geq 0$	+	0	0	+

ដូចនេះ សមីការមានចូសគ្រប់ $x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

២. $|6x^2 - 5x + 1| = 5x - 6x^2 - 1 = -(6x^2 - 5x + 1) \quad (5)$

គេបានសមីការ (5) មានចម្លើយគ្រប់ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $6x^2 - 5x + 1 \leq 0$

បើ $6x^2 - 5x + 1 = 0$ មានចូស $x = \frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{2}$

x	∞	$1/3$	$1/2$	$+\infty$
$6x^2 - 5x + 1 \leq 0$	+	0	0	+

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយគ្រប់ $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

៣. $|x^2 + x| = x^2 + x \quad (6)$

គេបានចម្លើយនៃសមីការ (6) គឺគ្រប់ចំនួនពិត x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2 + x \geq 0$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x^2 + x \geq 0$	+	0	0	+

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយគ្រប់ $x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

៤. $|x^2 - x + 5| = x - x^2 - 5 = -(x^2 - x + 5) \quad (7)$

គេបានចម្លើយនៃសមីការ (7) គឺគ្រប់ចំនួនពិត x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2 - x + 5 \leq 0$

បើ $x^2 - x + 5 = 0$ តាម $\Delta = 1 - 20 = -19 < 0$ និង $a = 1 > 0$ នោះ $x^2 - x + 5 > 0$

គ្រប់ x

នោះសមីការ $x^2 - x + 5 \leq 0$ គ្មានចូស

ដូចនេះ សមីការគ្មានចម្លើយ

៥. $|x^2 - 1| = x + 3 \quad (8)$

ដោយ $|x^2 - 1| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ នោះគេបាន $x + 3 \geq 0 \iff x \geq -3$

- បើ $x \in [-3, -1] \cup [1, +\infty)$ គេបាន $x^2 - 1 \geq 0 \implies |x^2 - 1| = x^2 - 1$ នោះ

សមីការ (8) ក្លាយជា

$$x^2 - 1 = x + 3 \iff x^2 - x - 4 = 0 \text{ មានចូស } x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

- បើ $x \in (-1, 1)$ គេបាន $x^2 - 1 < 0 \implies |x^2 - 1| = -(x^2 - 1)$ នោះសមីការ (8)

ក្លាយជា :

$$-(x^2 - 1) = x + 3 \iff x^2 + x + 2 = 0 \text{ សមីការគ្មានចូស។}$$

ដូចនេះ សមីការមានចូស $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

ញ. $|x^2 - 1| = |x + 3|$

គេបានតារាងសញ្ញានៃ $x^2 - 1$ និង $x + 3$ គឺ :

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$		
$x^2 - 1$		+	+	0	-	0	+
$x + 3$		-	0	+	+	+	+

- បើ $x \in (-\infty, -3]$ គេបាន

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x + 3 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |x^2 - 1| = x^2 - 1 \\ |x + 3| = -(x + 3) \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } |x^2 - 1| = |x + 3| \iff x^2 - 1 = -(x + 3) \iff x^2 + x + 2 = 0$$

សមីការគ្មានចូស

- បើ $x \in [-3, -1] \cup [1, +\infty)$ គេបាន

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |x^2 - 1| = x^2 - 1 \\ |x + 3| = x + 3 \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } |x^2 - 1| = |x + 3| \iff x^2 - 1 = x + 3 \iff x^2 - x - 4 = 0$$

$$\text{មានចូស } x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

- បើ $x \in [-1, 1]$ គេបាន

$$\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |x^2 - 1| = -(x^2 - 1) \\ |x + 3| = x + 3 \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } |x^2 - 1| = |x + 3| \iff -(x^2 - 1) = x + 3 \iff x^2 + x + 2 = 0$$

សមីការគ្មានចូល

ដូចនេះ សមីការមានចូល $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

ជ. $|2x^2 - 1| = |x^2 - 2x - 3| \quad (9)$

សិក្សាសញ្ញានៃ $2x^2 - 1$ និង $x^2 - 2x - 3$

បើ $2x^2 - 1 = 0$ មានចូល $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

បើ $x^2 - 2x - 3 = 0$ មានចូល $x = -1 \vee x = 3$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	3	$+\infty$
$2x^2 - 1$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x^2 - 2x - 3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0

- បើ $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ គេបាន

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |2x^2 - 1| = 2x^2 - 1 \\ |x^2 - 2x - 3| = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

គេបានសមីការ (9) ក្លាយជា :

$$2x^2 - 1 = x^2 - 2x - 3 \iff x^2 + 2x + 2 = 0 \text{ សមីការគ្មានចូល}$$

- បើ $x \in [-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, 3]$ គេបាន

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |2x^2 - 1| = 2x^2 - 1 \\ |x^2 - 2x - 3| = -(x^2 - 2x - 3) \end{cases}$$

នោះសមីការ (9) ក្លាយជា :

$$2x^2 - 1 = -(x^2 - 2x - 3) \iff 3x^2 - 2x - 4 = 0 \text{ មានចូល } x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$$

- បើ $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ គេបាន

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |2x^2 - 1| = -(2x^2 - 1) \\ |x^2 - 2x - 3| = -(x^2 - 2x - 3) \end{cases}$$

គេបាន សមីការ (9) ក្លាយជា :

$$-(2x^2 - 1) = -(x^2 - 2x - 3) \iff x^2 + 2x + 2 = 0 \text{ សមីការគ្មានចូល}$$

ដូចនេះ: $\text{សមីការមានចូល } x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$

២. $|x^2 - 3|x| + 2| = x^2 - 2x \quad (10)$

ដោយ $|x^2 - 3|x| + 2| \geq 0$ គេបាន $x^2 - 2x \geq 0 \iff x \leq 0 \vee x \geq 2$

- បើ $x \leq 0$ គេបាន $|x| = -x$

នាំឱ្យ $|x^2 - 3|x| + 2| = |x^2 + 3x + 2|$

សិក្សាសញ្ញានៃ $x^2 + 3x + 2$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$		
$x^2 + 3x + 2$		+	0	-	0	+	

- បើ $x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 0]$ គេបាន $x^2 + 3x_2 \geq 0$

$$\implies |x^2 + 3x + 2| = x^2 + 3x + 2$$

នាំឱ្យសមីការ (10) ក្លាយជា

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 - 2x \iff 5x + 2 = 0 \iff x = -\frac{2}{5}$$

- បើ $x \in [-2, -1]$ គេបាន $x^2 + 3x + 2 \leq 0 \implies |x^2 + 3x + 2| = -(x^2 + 3x + 2)$

នាំឱ្យសមីការ (10) ក្លាយជា :

$$-(x^2 + 3x + 2) = x^2 - 2x \iff 2x^2 + x + 2 \text{ សមីការគ្មានចូល}$$

- បើ $x \geq 2$ គេបាន $|x| = x$

នាំឱ្យ $|x^2 - 3|x| + 2| = |x^2 - 3x + 2|$

សិក្សាសញ្ញានៃ $x^2 - 3x + 2$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$			0	+

បើ $x \geq 2$ គេបាន $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ នោះសមីការ (10) ក្លាយជា :

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x \iff x = 2$$

ដូចនេះ $\text{សមីការមានចូល } x = -\frac{2}{5}, x = 2$

១១. ដោះស្រាយសមីការ

គេមាន $(x^2 - x)^2 - 4(x^2 - x) - 12 = 0$ តាង $t = x^2 - x$

គេបាន $t^2 - 4t - 12 = 0$ មានចូល $t = -2, t = 6$

- បើ $t = -2$ គេបាន $x^2 - x = -2 \iff x^2 - x + 2 = 0$ មានចូល $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$
- បើ $t = 6$ គេបាន $x^2 - x = 6 \iff x^2 - x - 6 = 0$ មានចូល $x = -2, x = 3$

ដូចនេះ $\text{សមីការមានចូល } x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i, x = -2, x = 3$

១២. គេមាន α និង β ជាចូលនៃសមីការ $x^2 - 2(k - 3)x + 4k = 0$

គេបាន $\Delta' = (k - 3)^2 - 4k = k^2 - 6k + 9 - 4k = k^2 - 10k + 9$

$$S = -\frac{b}{a} = 2(k - 3)$$

$$P = \frac{c}{a} = 4k$$

ក. រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យសមីការមានចូលទាំងពីរវិជ្ជមាន

សមីការមានចូលទាំងពីរវិជ្ជមានលុះត្រាតែ

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k^2 - 10k + 9 \geq 0 \\ 2(k - 3) > 0 \\ 4k > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k \leq 1 \vee k \geq 9 \\ k > 3 \\ k > 0 \end{cases}$$



គេបាន $k \geq 9$

ដូចនេះ $\text{សមីការមានចូលទាំងពីរជាចំនួនវិជ្ជមានកាលណា } k \geq 9$

២. រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសទាំងពីរជាចំនួនអវិជ្ជមាន

សមីការមានបួសទាំងពីរជាចំនួនអវិជ្ជមានលុះត្រាតែ

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k^2 - 10k + 9 \geq 0 \\ 2(k - 3) < 0 \\ 4k > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k \leq 1 \vee k \geq 9 \\ k < 3 \\ k > 0 \end{cases}$$



គេបាន $0 < k \leq 1$

ដូចនេះ: សមីការមានបួសទាំងពីរជាចំនួនអវិជ្ជមានកាលណា $0 < k \leq 1$

១៣. ក. គេមានត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C

ផ្តល់ $AB = 2x + 3, AC = x - 2, BC = 2x - 1$ គេបាន

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x > 2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \iff x > 2$$

ចំពោះ $x > 2$ តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក័រ គេបាន

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

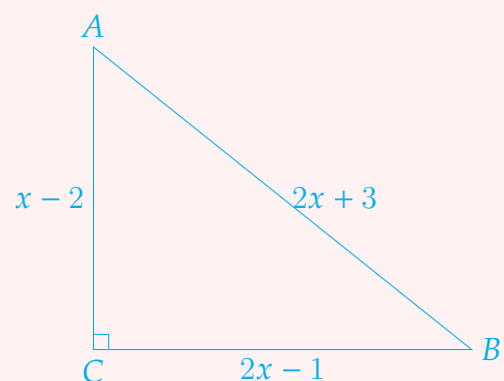
$$(x - 2)^2 + (2x - 1)^2 = (2x + 3)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 +$$

$$12x + 9$$

$$x^2 - 20x - 4 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } x^2 - 20x - 4 = 0, \quad x > 2$$



២. ដោះស្រាយសមីការ

គេមាន $x^2 - 20x - 4 = 0$, $x > 2$ តាម $\Delta' = (-10)^2 - (-4) = 100 + 4 = 104$

គេបាន $x = 10 \pm \sqrt{104} = 10 \pm 2\sqrt{26}$

តែ $x > 2$ នោះ $x = 10 + 2\sqrt{26}$

ដូចនេះ សមីការមានចូល $x = 10 + 2\sqrt{26}$

គ. រកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

គេបានផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC គឺ $S = \frac{1}{2}AC \times BC$

ដោយ $AC = x - 2 = 10 + 2\sqrt{26} - 2 = 8 + 2\sqrt{26}$

និង $BC = 2x - 1 = 2(10 + 2\sqrt{26}) - 1 = 19 + 4\sqrt{26}$

គេបាន $S = \frac{1}{2}(8 + 2\sqrt{26})(19 + 4\sqrt{26})$

$$= (4 + \sqrt{26})(19 + 4\sqrt{26})$$

$$= 76 + 16\sqrt{26} + 19\sqrt{26} + 104$$

$$= 180 + 35\sqrt{26}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC គឺ $180 + 35\sqrt{26}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា

១៤. គណនាទទឹងផ្លូវ

តាង x ជាទទឹងផ្លូវដែល $0 < x < 30$

គេបានផ្ទៃក្រឡានៃផ្លូវគឺ

$$S = 30x + 40x - x^2 = 70x - x^2$$

តាមសម្មតិកម្មគេមាន $S = 325m^2$

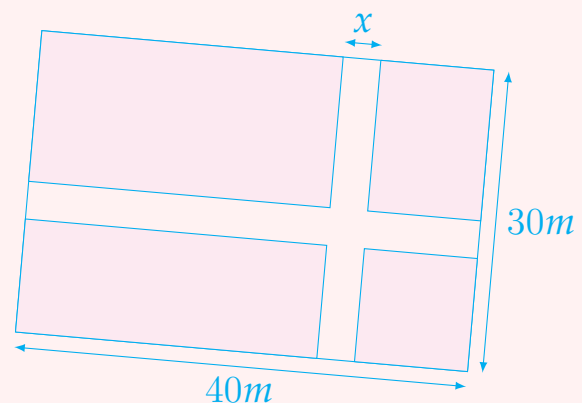
$$\text{នាំឱ្យ } 70x - x^2 = 325$$

$$\iff x^2 - 70x + 325 = 0$$

មានចម្លើយ $x_1 = 5, x_2 = 65$

តែ $0 < x < 30$ នាំឱ្យ $x = 5cm$ ។

ដូចនេះ ទទឹងផ្លូវនោះគឺ $5m$



១៥. ដោះស្រាយវិសមីការ

ក. $x^2 - 3x - 4 > 0$

សមីការ $x^2 - 3x - 4 = 0$ មានឫស $x_1 = -1, x_2 = 4$

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$x^2 - 3x - 4 > 0$	+	0	-	+

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$

ខ. $x^2 + 4x + 4 > 0$ សមីការ $x^2 + 4x + 4 = 0$ មាន $\Delta' = 4 - 4 = 0$

គេបាន $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = -2$

នាំឱ្យ $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 > 0$ គ្រប់ $x \neq -2$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

គ. $2x^2 - x + 5 \leq 0$

សមីការ $2x^2 - x + 5 = 0$ មាន $\Delta = 1 - 40 = -39 < 0$ ហើយ $a = 2 > 0$

នាំឱ្យ $2x^2 - x + 5 > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ វិសមីការគ្មានចម្លើយ

ឃ. $-4x^2 + x - 1 < 0$

សមីការ $-4x^2 + x - 1 = 0$ មាន $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$ ហើយ $a = -4 < 0$

នាំឱ្យ $-4x^2 + x - 1 < 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

១៦. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ និងវិសមីការ :

ក.
$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 & (1) \\ x - 2 < 0 & (2) \end{cases}$$

តាម (1) : $2x^2 - 5x + 2 = 0$ មានឫស $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$ (3)

តាម (2) គេមាន $x - 2 < 0 \iff x < 2$ (4)

តាម (3) និង (4) គេបាន $x = \frac{1}{2}$

$$\text{ខ.} \quad \begin{cases} -x^2 - 2x - 3 = 0 & (i) \\ x + 4 \geq 0 & (ii) \end{cases}$$

តាម (i) គេបាន $-x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x^2 + 2x + 3 = 0 \iff (x + 1)^2 + 2 > 0$

គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

នោះសមីការ (i) គ្មានចម្លើយ

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធនេះគ្មានចម្លើយ

$$\text{គ.} \quad \begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 & (i) \\ x - 4 < 0 & (ii) \end{cases}$$

តាម (i) គេបាន $x^2 - 9 \geq 0 \iff x^2 \geq 9 \iff x \leq -3 \vee x \geq 3 \quad (iii)$

តាម (ii) គេបាន $x - 4 < 0 \iff x < 4 \quad (iv)$

តាម (iii) និង (iv) គេបាន $x \leq -3 \vee 3 \leq x < 4$

ដូចនេះ $x \leq -3 \vee 3 \leq x < 4$

$$\text{ឃ.} \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 6 \geq 0 & (i) \\ x^2 - 25 \leq 0 & (ii) \end{cases}$$

តាម (i) គេបាន $x^2 - 6x + 6 \geq 0$ សមីការ $x^2 - 6x + 6 = 0$ មានចូល $x = 3 \pm \sqrt{3}$

នោះវិសមីការ (i) មានចម្លើយ $x \leq 3 - \sqrt{3} \vee x \geq 3 + \sqrt{3} \quad (iii)$

តាម (ii) គេបាន $x^2 - 25 \leq 0 \iff x^2 \leq 25 \iff -5 \leq x \leq 5 \quad (iv)$

តាម (iii) និង (iv) គេបាន $-5 \leq x \leq 3 - \sqrt{3} \vee 3 + \sqrt{3} \leq x \leq 5$

ដូចនេះ $-5 \leq x \leq 3 - \sqrt{3} \vee 3 + \sqrt{3} \leq x \leq 5$

$$\text{ង.} \quad \begin{cases} x^2 + 6x + 9 \leq 0 & (i) \\ 2x - 5 > 0 & (ii) \end{cases}$$

តាម (i) គេបាន $x^2 + 6x + 9 \leq 0 \iff (x + 3)^2 \leq 0 \iff x = -3 \quad (iii)$

តាម (ii) គេបាន $2x - 5 > 0 \iff x > \frac{5}{2} \quad (iv)$

តាម (iii) និង (iv) គេបាន ប្រព័ន្ធវិសមីការគ្មានចម្លើយ

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធវិសមីការគ្មានចម្លើយ

$$\text{២.} \quad \begin{cases} x^2 + x + 8 < 0 & (i) \\ x^2 + 6x + 5 = 0 & (ii) \end{cases}$$

តាម (ii) គេបាន $x^2 + 6x + 5 = 0$ មានឫស $x_1 = -1, x_2 = -5$

- យក $x = -1$ ជំនួសក្នុង (i) គេបាន $1^2 + 1 + 8 < 0 \iff 10 < 0$ (មិនពិត)
- យក $x = -5$ ជំនួសក្នុង (i) គេបាន $(-5)^2 + 5 + 8 < 0 \iff 38 < 0$ (មិនពិត)

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធនេះគ្មានចម្លើយ

$$\text{៣.} \quad \begin{cases} |x - 2| + |x - 3| = 1 & (i) \\ 813x - 974 \leq 163x^2 & (ii) \end{cases}$$

តាម (ii) គេបាន $813x - 974x \leq 163x^2 \iff 163x^2 - 813x + 974 \geq 0$

សមីការ $163x^2 - 813x + 974 = 0$ មានឫស $x_1 = \frac{487}{163}, x_2 = 2$

នោះវិសមីការមានចម្លើយ $x \leq 2 \vee x \geq \frac{487}{163}$

- បើ $x \leq 2 \iff x - 2 \leq 0$ គេបាន $|x - 2| = -(x - 2)$ និង $|x - 3| = -(x - 3)$

តាម (i) គេបាន $|x - 2| + |x - 3| = 1 \iff -(x - 2) - (x - 3) = 1 \iff x = 2$

- ករណី $x \geq \frac{487}{163}$

- បើ $\frac{487}{163} \leq x \leq 3$ គេបាន $|x - 2| = x - 2$ និង $|x - 3| = -(x - 3)$

តាម (i) គេបាន $x - 2 - (x - 3) = 1 \iff 1 = 1$ ពិតគ្រប់ $x \in \left[\frac{487}{163}, 3\right]$

- បើ $x > 3$ គេបាន $|x - 2| = x - 2$ និង $|x - 3| = x - 3$

តាម (i) គេបាន $x - 2 + x - 3 = 1 \iff x = 3$ មិនយកព្រោះ $x > 3$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធនេះមានចម្លើយ $x = 2, x \in \left[\frac{487}{163}, 3\right]$

១៧. ដោះស្រាយវិសមីការ

ក. $x^2 - |x| - 12 < 0 \iff |x|^2 - |x| - 12 < 0$ តាង $t = |x|, t \geq 0$

គេបាន $t^2 - t - 12 < 0$ សមីការ $t^2 - t - 12 = 0$ (i) មានចូស $t = -3, t = 4$

តែ $t \geq 0$ នាំឱ្យ $t = 4$ នោះវិសមីការ (i) មានចម្លើយ $0 \leq t < 4 \iff 0 \leq |x| < 4$

គេបាន $-4 < x < 4$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $x \in (-4, 4)$

ខ. $x^2 - 7|x| + 10 \geq 0 \iff |x|^2 - 7|x| + 10 \geq 0$ តាង $t = |x|, t \geq 0$ គេបាន

$t^2 - 7t + 10 \geq 0$ (ii) សមីការ $t^2 - 7t + 10 = 0$ មានចូស $t = 2, t = 5$

នោះវិសមីការ (ii) មានចម្លើយ $0 \leq t \leq 2, 5 \leq t$

- បើ $0 \leq t \leq 2 \iff 0 \leq |x| \leq 2 \iff -2 \leq x \leq 2$

គេបាន $x \in [-2, 2]$

- បើ $5 \leq t \iff 5 \leq |x| \iff x \leq -5 \vee x \geq 5$

គេបាន $x \in (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $x \in (-\infty, -5] \cup [-2, 2] \cup [5, +\infty)$

គ. $8x^2 + |-x| + 1 > 0 \iff 8x^2 + |x| + 1 > 0 \iff 8|x|^2 + |x| + 1 > 0$

តាង $t = |x|, t \geq 0$ គេបាន $8t^2 + t + 1 > 0$ (iii)

សមីការ $8t^2 + t + 1 = 0$ មាន $\Delta = 1 - 32 = -31 < 0$ និង $a = 8 > 0$

នោះវិសមីការ (iii) មានចម្លើយគ្រប់ $t \in \mathbb{R}$

តែ $t \geq 0$ នាំឱ្យវិសមីការ (iii) មានចម្លើយ $t \geq 0$

ចំពោះ $t \geq 0 \iff |x| \geq 0 \iff x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

ឃ. $-2x^2 - 3|x| + 4 \geq 0 \iff 2x^2 + 3|x| - 4 \leq 0 \iff 2|x|^2 + 3|x| - 4 \leq 0$

តាង $t = |x|, t \geq 0$ គេបាន $2t^2 + 3t - 4 \leq 0$ (iv)

សមីការ $2t^2 + 3t - 4 = 0$ មានចូស $t = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$ តែ $t \geq 0$

$$\text{នោះគេបាន } t = \frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$$

$$\text{នោះវិសមីការ (iv) មានចម្លើយ } 0 \leq t \leq \frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$$

$$\text{នាំឱ្យ } |x| \leq \frac{-3 + \sqrt{41}}{4} \iff -\frac{-3 + \sqrt{41}}{4} \leq x \leq \frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$$

$$\text{ដូចនេះ: វិសមីការមានចម្លើយ } x \in \left[-\frac{-3 + \sqrt{41}}{4}, \frac{-3 + \sqrt{41}}{4} \right]$$

១៨. ដោះស្រាយវិសមីការ

$$\text{ក. } 3x^2 - |10x - 3| > 0 \quad (1)$$

- បើ $10x - 3 \geq 0 \iff x \geq \frac{3}{10}$ គេបាន $|10x - 3| = 10x - 3$

$$\text{តាម (1) គេបាន } 3x^2 - (10x - 3) > 0 \iff 3x^2 - 10x + 3 > 0$$

$$\text{មានចម្លើយ } x < \frac{1}{3}, x > 3$$

$$\text{តែ } x \geq \frac{3}{10} \text{ នាំឱ្យ } x \in \left[\frac{3}{10}, \frac{1}{3} \right) \cup (3, +\infty) \quad (2)$$

- បើ $10x - 3 < 0 \iff x < \frac{3}{10}$ គេបាន $|10x - 3| = -(10x - 3)$

$$\text{តាម (1) គេបាន } 3x^2 + 10x - 3 > 0 \text{ មានចម្លើយ } x < \frac{-5 - \sqrt{34}}{3}, x > \frac{-3 + \sqrt{34}}{3}$$

$$\text{តែ } x < \frac{3}{10} \text{ នាំឱ្យ } x \in \left(-\infty, -\frac{5 + \sqrt{34}}{3} \right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{34}}{3}, \frac{3}{10} \right) \quad (3)$$

តាម (2) និង (3) គេបានវិសមីការ (1) មានចម្លើយ

$$x \in \left(-\infty, -\frac{5 + \sqrt{34}}{3} \right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{34}}{3}, \frac{1}{3} \right) \cup (3, +\infty)$$

$$\text{ខ. } x^2 \leq |x - 2| \iff x^2 - |x - 2| \leq 0 \quad (1)$$

- បើ $x \geq 2 \iff |x - 2| = x - 2$

$$\text{តាម (1) គេបាន } x^2 - (x - 2) \leq 0 \iff x^2 - x + 2 \leq 0 \quad (2)$$

$$\text{សមីការ } x^2 - x + 2 = 0 \text{ មាន } \Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \text{ ហើយ } a = 1 > 0$$

នោះវិសមីការ (2) គ្មានចម្លើយ នាំឱ្យវិសមីការ (1) គ្មានចម្លើយ។

- បើ $x < 2$ គេបាន $|x - 2| = -(x - 2)$

$$\text{(1) គេបាន } x^2 + x - 2 \leq 0 \text{ មានចម្លើយ } x \in [-2, 1]$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានចម្លើយ } x \in [-2, 1]}$

គ. $|x^2 + x - 20| \leq x^2 + x - 20 \quad ①$

វិសមីការ ① មានចម្លើយគ្រប់ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ $x^2 + x - 20 \geq 0 \quad ②$

សមីការ $x^2 + x - 20 = 0$ មានចម្លើយ $x = 4, x = -5$

នាំឱ្យវិសមីការ ② មានចម្លើយ $x \in (-\infty, -5] \cup [4, +\infty)$

ដូចនេះ $\boxed{\text{វិសមីការ ① មានចម្លើយ } x \in (-\infty, -5] \cup [4, +\infty)}$

ឃ. $|x - 2x^2| > 2x^2 - x \iff |2x^2 - x| > 2x^2 - 2 \quad ①$

វិសមីការ ① មានចម្លើយគ្រប់ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ $2x^2 - x < 0 \quad ②$

សមីការ $2x^2 - x = 0 \iff x(2x - 1) = 0$ មានចម្លើយ $x = 0, x = \frac{1}{2}$

នាំឱ្យវិសមីការ ② មានចម្លើយ $0 < x < \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{វិសមីការ ① មានចម្លើយ } x \in (0, \frac{1}{2})}$

ង. $|x^2 + 6x + 8| \leq -x^2 - 6x - 8 \iff |x^2 + 6x + 8| \leq -(x^2 + 6x + 8) \quad ①$

វិសមីការ ① មានចម្លើយគ្រប់ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ $x^2 + 6x + 8 \leq 0 \quad ②$

សមីការ $x^2 + 6x + 8 = 0$ មានចម្លើយ $x = -4, x = -2$ នាំឱ្យវិសមីការ ②

មានចម្លើយ $-4 \leq x \leq -2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{វិសមីការ ① មានចម្លើយ } x \in [-4, -2]}$

ច. $|x^2 - 6| > 4x + 1 \quad ①$

• បើ $x^2 - 6 \geq 0$ គេបាន $x \leq -\sqrt{6} \vee x \geq \sqrt{6}$ នាំឱ្យ $|x^2 - 6| = x^2 - 6$

តាម ① គេបាន $x^2 - 6 > 4x + 1 \iff x^2 - 4x - 7 > 0$

មានចម្លើយ $x < 2 - \sqrt{11}, x > 2 + \sqrt{11}$

តែ $x \leq -\sqrt{6} \vee x \geq \sqrt{6}$ គេបាន $x \leq -\sqrt{6}, x > 2 + \sqrt{11}$

ឬ $x \in (-\infty, -\sqrt{6}] \cup (2 + \sqrt{11}, +\infty) \quad ②$

• បើ $x^2 - 6 < 0 \iff -\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$ គេបាន $|x^2 - 6| = -(x^2 - 6)$

តាម ① គេបាន $-(x^2 - 6) > 4x + 1 \iff x^2 + 4x - 5 < 0$

មានចម្លើយ $-5 < x < 1$

តែ $-\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$ គេបាន $-\sqrt{6} < x < 1$ ឬ $x \in (-\sqrt{6}, 1)$ ③

តាម ② និង ③ គេបាន ① មានចម្លើយ $x \in (-\infty, 1) \cup (2 + \sqrt{11}, +\infty)$

៧. $|x - 3| > |x^2 - 3|$ ①

គេមានតារាងសញ្ញានៃ $x - 3$ និង $x^2 - 3$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$	
$x - 3$		-	-	-	0	+
$x^2 - 3$		+	0	-	0	+

• បើ $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$ គេបាន $|x - 3| = -(x - 3)$ និង $|x^2 - 3| = x^2 - 3$

តាម ① គេបាន $-(x - 3) < x^2 - 3 \iff x^2 + x - 6 < 0$ មានចម្លើយ $-3 < x < 2$

តាមលក្ខខណ្ឌគេបាន $x \in (-3, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$ ②

• បើ $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ គេបាន $|x - 3| = -(x - 3)$ និង $|x^2 - 3| = -(x^2 - 3)$

តាម ① គេបាន $-(x - 3) > -(x^2 - 3) \iff x^2 - x > 0$ មានចម្លើយ $x < 0, x > 1$

តាមលក្ខខណ្ឌគេបាន $x \in [-\sqrt{3}, 0) \cup (1, \sqrt{3}]$ ③

• បើ $x \geq 3$ គេបាន $|x - 3| = x - 3$ និង $|x^2 - 3| = x^2 - 3$

តាម ① គេបាន $x - 3 > x^2 - 3 \iff x^2 - x < 0$ មានចម្លើយ $0 < x < 1$

តាមលក្ខខណ្ឌគេបានវិសមីការគ្មានចម្លើយ ④។

ប្រជុំធាតុនៃ ②, ③ និង ④ គេបាន ① មានចម្លើយ $x \in (-3, 0) \cup (1, 2)$

១៩. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត c

គេមានវិសមីការ $x^2 + 7x + 9 > 8x + c \iff x^2 - x + 9 - c > 0$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិត

x កាលណា សមីការ $x^2 - x + 9 - c = 0$ មានឌីសក្រីមីណង់ $\Delta < 0$

គេបាន $1 - 4(9 - c) < 0 \iff 1 - 36 + 4c < 0 \iff c < \frac{35}{4}$

ដូចនេះ $c < \frac{35}{4}$

២០. រកគ្រប់ចំនួនគត់ដែលជាធាតុនៃសំណុំ $A \cap B$

គេមាន $A = \{x \mid 6x^2 - 7x - 5 > 0\}$ និង $B = \{x \mid x^2 - 2x - 8 < 0\}$

- ដោះស្រាយវិសមីការ $6x^2 - 7x - 5 > 0$

សមីការ $6x^2 - 7x - 5 = 0$ មានចូស $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{5}{3}$

នោះវិសមីការមានចម្លើយ $x < -\frac{1}{2}, x > \frac{5}{3}$

គេបាន $A = \{x \mid x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{5}{3}\}$

- ដោះស្រាយវិសមីការ $x^2 - 2x - 8 < 0$

សមីការ $x^2 - 2x - 8 = 0$ មានចូស $x = -2, x = 4$

នោះវិសមីការមានចម្លើយ $-2 < x < 4$

គេបាន $B = \{x \mid -2 < x < 4\}$

នាំឱ្យ $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} = \{x \mid -2 < x < -\frac{1}{2} \vee \frac{5}{3} < x < 4\}$

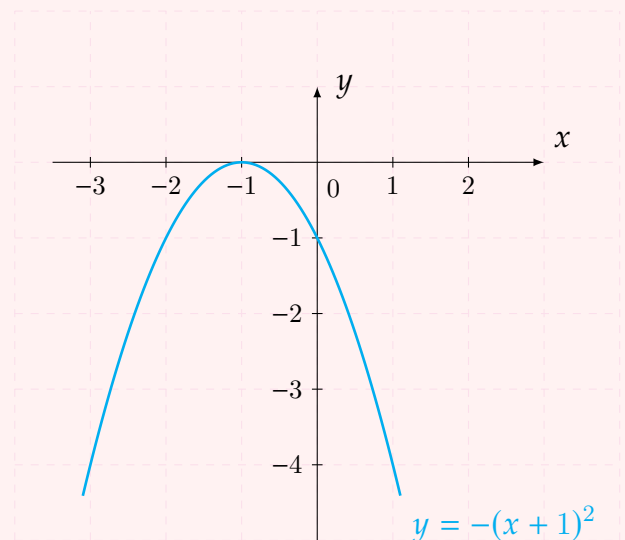
ដូចនេះ ចំនួនគត់ដែលជាធាតុនៃ $A \cap B$ មាន $-1, 2, 3$

២១. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y = -(x + 1)^2$

គេបានតារាងតម្លៃលេខ

x	-3	-2	-1	0	1
y	-4	-1	0	-1	-4

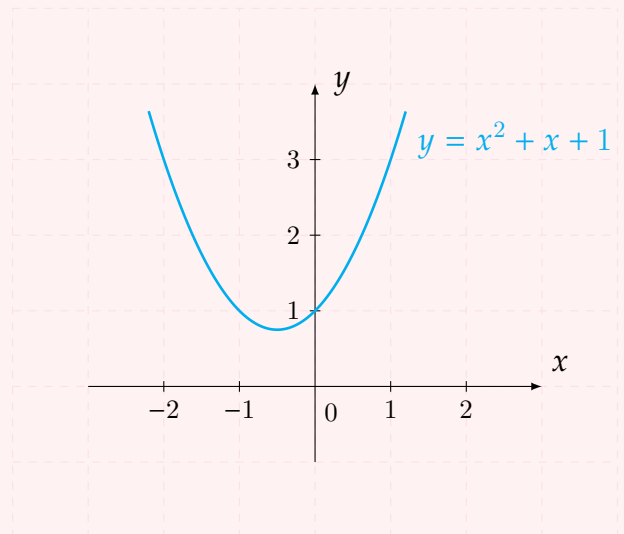


ខ. $y = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

ជា ប៉ារ៉ា ប៉ូល ដែល មាន កូអរដោនេ កំពូល
 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

គេបានតារាងតម្លៃលេខ

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
y	3	1	0	$\frac{3}{4}$	3



គ. $y = x^2 - 4|x| + 3$

- បើ $x \geq 0$ គេបាន $|x| = x$

$$y = x^2 - 4|x| + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$y = (x - 2)^2 - 1$$

ជា ប៉ារ៉ា ប៉ូល ដែល មាន កូអរដោនេ កំពូល
 $(2, -1)$

គេបានតារាងតម្លៃលេខ

x	0	1	2	3	4
y	3	0	-1	0	3

- បើ $x \leq 0$ គេបាន $|x| = -x$

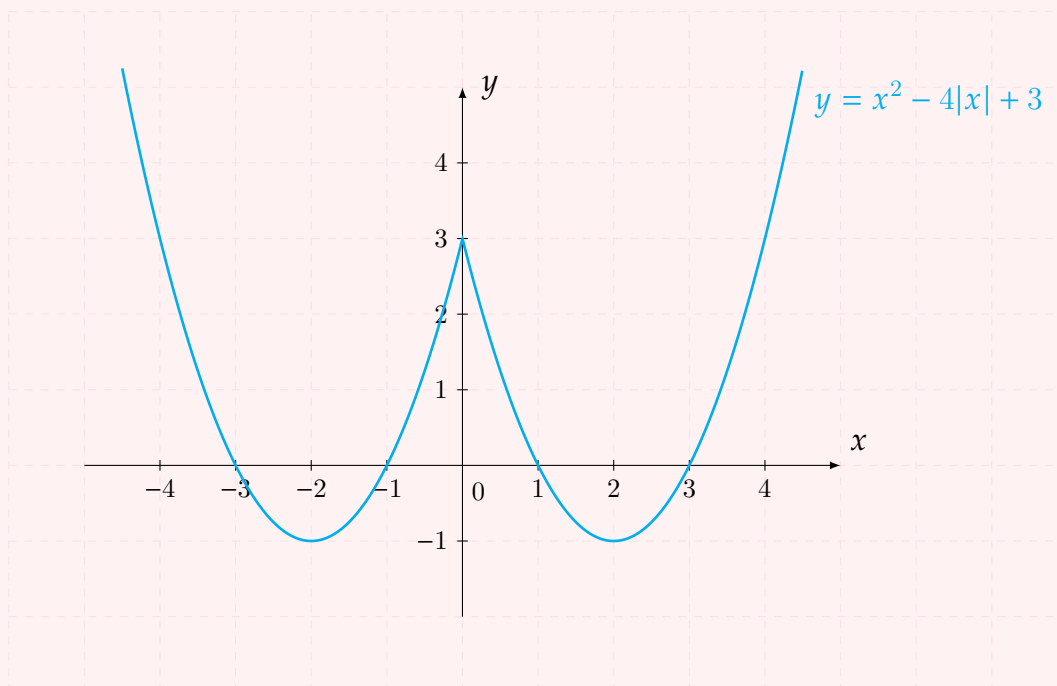
$$y = x^2 - 4|x| + 3 = x^2 + 4x + 3$$

$$y = (x + 2)^2 - 1$$

ជា ប៉ារ៉ា ប៉ូល ដែល មាន កូអរដោនេ កំពូល
 $(-2, -1)$

គេបានតារាងតម្លៃលេខ

x	-4	-3	-2	-1	0
y	3	0	-1	0	3



ឃ. $y = |x^2 - 4| - |x^2 - 9|$

គេមានតារាងសញ្ញានៃ $x^2 - 4$ និង $x^2 - 9$

x	$-\infty$	-3	-2	2	3	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	+	0	-	0	+
$x^2 - 9$	+	0	-	-	0	+

- បើ $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

$$|x^2 - 9| = -(x^2 - 9)$$

$$\text{គេបាន } |x^2 - 4| = x^2 - 4 \text{ និង}$$

$$\text{នាំឱ្យ } y = x^2 - 4 + x^2 - 9 = 2x^2 - 13$$

$$|x^2 - 9| = x^2 - 9$$

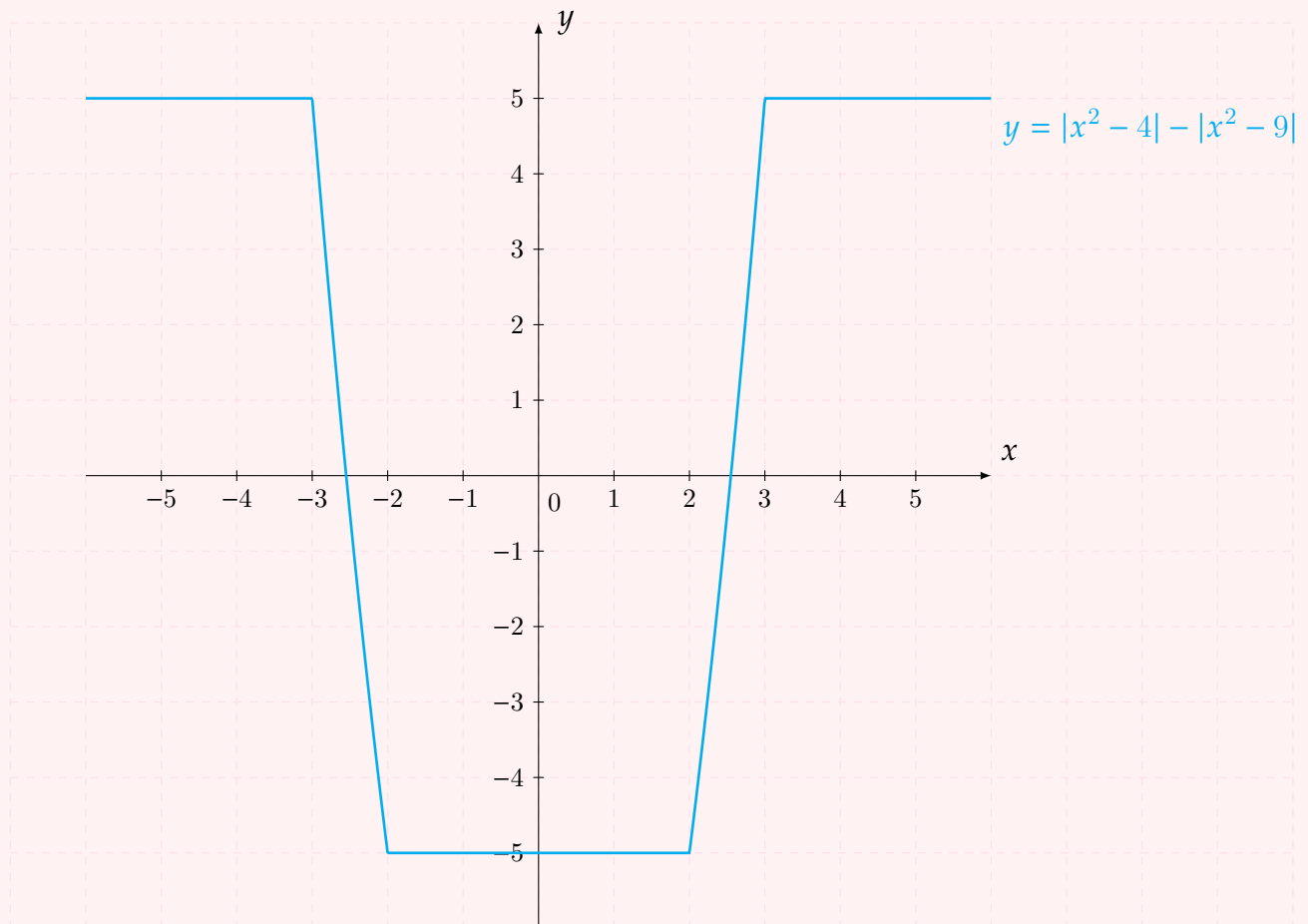
$$\text{នាំឱ្យ } y = x^2 - 4 - (x^2 - 9) = 5$$

- បើ $x \in [-2, 2]$

$$\text{គេបាន } |x^2 - 4| = -(x^2 - 4) \text{ និង}$$

$$|x^2 - 9| = -(x^2 - 9)$$

$$\text{នាំឱ្យ } y = -(x^2 - 4) + (x^2 - 9) = -5$$



២២. រកចំណុចបរមា និងតម្លៃបរមានៃអនុគមន៍

ក. $y = -x^2$

គេមាន $y = -x^2 \leq 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

នាំឱ្យអនុគមន៍ $y = -x^2$ មានតម្លៃអតិបរមាស្មើនឹង ០ ត្រង់ $x = 0$ ហើយគ្មានតម្លៃអប្បបរមាទេ។

ដូចនេះ $y_{max} = 0$ ត្រង់ $x = 0$

ខ. $y = (x - 1)^2$

គេមាន $y = (x - 1)^2 \geq 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

នាំឱ្យអនុគមន៍ $y = (x - 1)^2$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើនឹង ០ ត្រង់ $x = 1$ ហើយគ្មានតម្លៃអតិបរមាទេ។

ដូចនេះ $y_{min} = 0$ ត្រង់ $x = 1$

គ. $y = -(2 + x)^2$

គេមាន $y = -(2 + x)^2 \leq 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

នាំឱ្យអនុគមន៍ $y = -(2 + x)^2$ មានតម្លៃអតិបរមាស្មើនឹង ០ ត្រង់ $x = -2$ ហើយគ្មានតម្លៃអប្បបរមាទេ។

ដូចនេះ $y_{max} = 0$ ត្រង់ $x = -2$

ឃ. $y = x^2 + 2x + 100$

គេមាន $y = (x^2 + 2x + 1) + 99 = (x + 1)^2 + 99 \geq 99$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

នាំឱ្យអនុគមន៍ $y = x^2 + 2x + 100$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើនឹង ៩៩ ត្រង់ $x = -1$ ហើយគ្មានតម្លៃអតិបរមាទេ។

ដូចនេះ $y_{min} = 99$ ត្រង់ $x = -1$

ង. $y = -4x^2 + x - 5$

គេមាន $y = -(4x^2 - x) - 5 = -\left(4x^2 - x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) - 5 = -\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{79}{16}$

ដោយ $-\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 \leq 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

$$\text{គេបាន } y = -\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{79}{16} \leq \frac{79}{16}$$

នាំឱ្យអនុគមន៍ $y = -4x^2 + x - 5$ មានតម្លៃអតិបរមាស្មើនឹង $-\frac{79}{16}$ ត្រង់ $x = \frac{1}{8}$ ហើយ

គ្មានតម្លៃអប្បបរមា

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{y_{\max} = -\frac{79}{16} \text{ ត្រង់ } x = \frac{1}{8}}$$

២៣. កំណត់សញ្ញានៃ a, b, c និង $\Delta = b^2 - 4ac$

- ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

តាមក្រាបគេបាន

- ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផងទៅលើ នោះ $a > 0$

- ប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សអនេក្យសកំពូលវិជ្ជមាន

$$\text{នាំឱ្យ } -\frac{b}{2a} > 0 \iff b < 0 \text{ ព្រោះ } a > 0$$

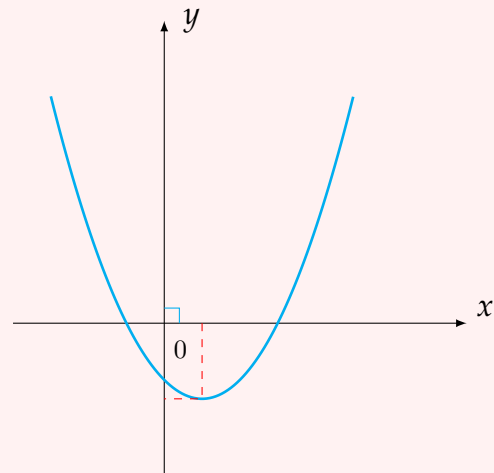
- ក្រាបកាត់អ័ក្សអនេក្យនៅត្រង់ចំណុចដែលមាន

អនេក្យវិជ្ជមាន គេបាន $f(0) < 0$

$$\iff c < 0$$

- ប៉ារ៉ាបូលកាត់អ័ក្សអនេក្យនៅត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា គេបាន $\Delta > 0$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{a > 0, b < 0, c < 0, \Delta > 0}$$



- ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

- ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតចុះក្រោម នោះ $a < 0$

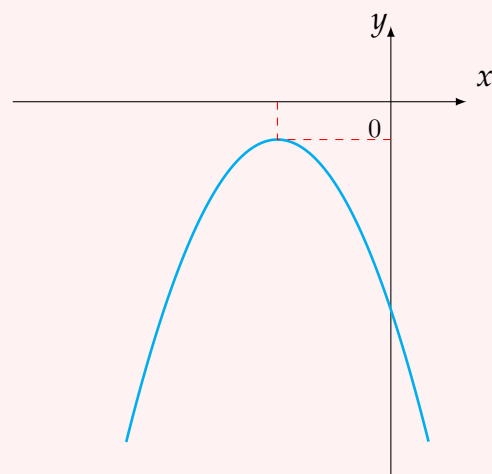
- អ័ក្សអនេក្យនៃកំពូលប៉ារ៉ាបូលអវិជ្ជមាន

$$\text{នាំឱ្យ } -\frac{b}{2a} < 0 \iff b < 0 \text{ ព្រោះ } a < 0$$

- ប៉ារ៉ាបូល កាត់ អ័ក្ស អនេក្យ នៅ ខាងក្រោម

អ័ក្សអនេក្យ

$$\text{គេបាន } f(0) < 0 \iff c < 0$$



○ ប៉ារ៉ាបូលមិនកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស គេបាន $\Delta < 0$

ដូចនេះ $a < 0, b < 0, c < 0, \Delta < 0$

២៨. កំណត់តម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍បើវាមានដែនកំណត់ភ្ជាប់ខាងក្រោម :

ក. $y = 3x - x^2 \quad (-1 \leq x \leq 2)$

តាង $f(x) = 3x - x^2$ និង $D = [-1, 2]$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f(x) &= 3x - x^2 = -(x^2 - 3x) = -\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) \\ &= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

ដោយប៉ារ៉ាបូលបែរអាពាធតចុះក្រោម

នាំឱ្យ f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = \frac{3}{2} \in D$ ស្មើនឹង $\frac{9}{4}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(-1) = -4$ និង $f(2) = 2$ នាំឱ្យ $y_{\min} = -4$

ដូចនេះ $y_{\max} = \frac{9}{4}$ និង $y_{\min} = -4$

ខ. $y = x^2 + 5x + 4 \quad (-3 \leq x \leq 0)$

តាង $f(x) = x^2 + 5x + 4$ និង $D = [-3, 0]$

$$\text{គេបាន } f(x) = x^2 + 5x + 4 = \left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + 4 - \frac{25}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

គេបានប៉ារ៉ាបូល f មានអាប់ស៊ីសកំពូល $x = -\frac{5}{2} \in D$ ហើយប៉ារ៉ាបូលបែរអាពាធតទៅលើ

នាំឱ្យ f មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើនឹង $-\frac{9}{4}$

ម្យ៉ាងទៀត $f(-3) = -2$ និង $f(0) = 4$ នាំឱ្យ $y_{\max} = 4$

ដូចនេះ $y_{\min} = -\frac{9}{4}$ និង $y_{\max} = 4$

គ. $y = 3x^2 - x + 5 \quad (1 \leq x \leq 2)$

តាង $f(x) = 3x^2 - x + 5$ និង $D = [1, 2]$ គេបាន

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - x + 5 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) + 5 \\ &= 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) + 5 - \frac{3}{36} = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{59}{12} \end{aligned}$$

គេបានប៉ារ៉ាបូល f បែរអាពាធតទៅលើ ហើយមានអាប់ស៊ីសកំពូល $x = \frac{1}{6} \notin D$ នោះកំពូល

នៃប៉ារ៉ាបូលមិនមែនជាចំណុចអប្បបរមាទេ។

គេមាន $f(1) = 7$ និង $f(2) = 15$ នាំឱ្យ $y_{\min} = 7$ និង $y_{\max} = 15$ ។

ដូចនេះ $y_{\min} = 7$ និង $y_{\max} = 15$

ឃ. $y = -4x^2 + 5x - 8$ ($2 \leq x \leq 3$)

តាង $f(x) = -4x^2 + 5x - 8$ និង $D = [2, 3]$ គេបាន

$$\begin{aligned} f(x) &= -4x^2 + 5x - 8 = -4\left(x^2 - \frac{5}{4}x\right) - 8 \\ &= -4\left(x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{64}\right) - 8 + \frac{25}{16} = -4\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{103}{16} \end{aligned}$$

គេបានប៉ារ៉ាបូល f បែររាងផ្ចិតចុះក្រោម ហើយមានអាប់ស៊ីសកំពូល $x = \frac{5}{8} \notin D$ នោះ

កំពូលនៃប៉ារ៉ាបូលមិនមែនជាចំណុចអតិបរមាទេ។

គេមាន $f(2) = -14$ និង $f(3) = -29$ នាំឱ្យ $y_{\min} = -29$, $y_{\max} = -14$

ដូចនេះ $y_{\min} = -29$, $y_{\max} = -14$

២៥. រកចំនួនចំណុចប្រសព្វ

គេមានប៉ារ៉ាបូល $y = x^2 + kx + 1$ និងបន្ទាត់ $y = 2x - 3$

ប៉ារ៉ាបូលប្រសព្វនឹងបន្ទាត់គេបានសមីការអាប់ស៊ីស

$$x^2 + kx + 1 = 2x - 3 \iff x^2 + (k - 2)x + 4 = 0 \quad ①$$

$$\Delta = (k - 2)^2 - 16 = (k + 2)(k - 6)$$

គេបានតារាងសញ្ញានៃ Δ

x	$-\infty$	-2	6	$+\infty$	
Δ	+	0	-	0	+

- បើ $k \in (-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$

គេបាន $\Delta > 0$ នោះសមីការ ① មានបួសពីរផ្សេងគ្នា មានន័យថាប៉ារ៉ាបូល និងបន្ទាត់ប្រសព្វគ្នា ត្រង់ពីរ។

- បើ $k \in (-2, 6)$

គេបាន $\Delta < 0$ នោះសមីការ ① គ្មានបួស មានន័យថាប៉ារ៉ាបូល និងបន្ទាត់មិនប្រសព្វគ្នាទេ។

- បើ $k \in \{-2, 6\}$

គេបាន $\Delta = 0$ នោះសមីការ ① មានឫសខុប មានន័យថាប៉ារ៉ាបូល និងបន្ទាត់ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច។

២៦. គេមាន $f(x) = x^2 - 4x + 3$ និង $g(x) = (x - 2)^2 - 1$

ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x គេបាន $f(x) = g(x)$

$$\text{គេមាន } g(x) = (x - 2)^2 - 1 = (x^2 - 4x + 4) - 1 = x^2 - 4x + 3 = f(x)$$

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ x គេបាន $f(x) = g(x)$

ខ. ទាញជាផលគុណកត្តានៃ $f(x)$

$$\text{គេមាន } f(x) = g(x) \text{ នាំឱ្យ}$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1 = [(x - 2) - 1][(x - 2) + 1] = (x - 3)(x - 1)$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$

២៧. គេមានសមីការ $2x^2 + mx + m^2 - 5 = 0$ ①

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ ① មានឫសទាំងពីរជាចំនួនពិតតូចជាង 1

$$\text{តាង } f(x) = 2x^2 + mx + m^2 - 5 \text{ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សស៊ីសកម្មលើ } -\frac{b}{2a} = -\frac{m}{4}$$

សមីការ (1) មានឫសទាំងពីរជាចំនួនពិតតូចជាង 1 កាលណា

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} < 1 \\ f(1) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m^2 - 8(m^2 - 5) \geq 0 \\ -\frac{m}{4} < 1 \\ 2 + m + m^2 - 5 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -7m^2 + 40 \geq 0 \\ m + 4 > 0 \\ m^2 + m - 3 > 0 \end{cases}$$

- បើ $-7m^2 + 40 = 0 \iff m = \pm \sqrt{\frac{40}{7}}$
- បើ $m + 4 = 0 \iff m = -4$
- បើ $m^2 + m - 3 = 0 \iff m = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

x	$-\infty$	-4	$-\sqrt{\frac{40}{7}}$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	$\sqrt{\frac{40}{7}}$	$+\infty$
$-7m^2 + 40 \geq 0$		-	-	0	+	+	+
$m + 4 > 0$		-	0	+	+	+	+
$m^2 + m - 3 > 0$		+	+	+	0	-	0
$\begin{cases} -7m^2 + 40 \geq 0 \\ m + 4 > 0 \\ m^2 + m - 3 > 0 \end{cases}$							

$$\text{ដូចនេះ: } m \in \left[-\sqrt{\frac{40}{7}}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \sqrt{\frac{40}{7}} \right]$$

២. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ ① មានបួសទាំងពីរចំណុច -1

សមីការ ① មានបួសទាំងពីរចំណុច -1 កាលណា

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > -1 \\ f(-1) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -7m^2 + 40 \geq 0 \\ -\frac{m}{4} > -1 \\ m^2 - m - 3 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\sqrt{\frac{40}{7}} \leq m \leq \sqrt{\frac{40}{7}} \\ m < 4 \\ m < \frac{1-\sqrt{13}}{2} \vee \frac{1+\sqrt{13}}{2} < m \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } m \in \left[-\sqrt{\frac{40}{7}}, \frac{1-\sqrt{13}}{2} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \sqrt{\frac{40}{7}} \right]$$

$$\text{ដូចនេះ: } m \in \left[-\sqrt{\frac{40}{7}}, \frac{1-\sqrt{13}}{2} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \sqrt{\frac{40}{7}} \right]$$

២៨. រកគ្រប់តម្លៃ k

គេមានសមីការ $x^2 - (k+1)x + k^2 + k - 8 = 0$ ① មានបួសមួយតូចជាង 2 និងបួសមួយធំជាង 2

$$\text{តាង } f(x) = x^2 - (k+1)x + k^2 + k - 8$$

សមីការ ① មានបួសពីរផ្សេងគ្នា នោះ $\Delta > 0$

ហើយបួសទាំងពីរនៅចន្លោះ 2 គេបាន $f(2) < 0$ (ប៉ុន្តែបួស f បែរភាពផ្ទុកទៅលើ)

$$\text{គេបាន } \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (k+1)^2 - 4(k^2 + k - 8) > 0 \\ 4 - 2(k+1) + k^2 + k - 8 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3k^2 - 2k + 33 > 0 \\ k^2 - k - 6 < 0 \end{cases}$$

- សមីការ $-3k^2 - 2k + 33 = 0$ មានចូស $k = -\frac{11}{3}, k = 3$
- សមីការ $k^2 - k - 6 = 0$ មានចូស $k = -2, k = 3$

គេបានតារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	$-\frac{11}{2}$	-2	3	$+\infty$
$-3k^2 - 2k + 33 > 0$		-	+	+	-
$k^2 - k - 6 < 0$		+	+	-	+

តាមតារាងសញ្ញា ប្រព័ន្ធវិសមីការមានចម្លើយ $k \in (-2, 3)$

ដូចនេះ $k \in (-2, 3)$

២៩. គេមានសមីការ $x^2 + 2(k - 3)x + 9 = 0$ ①

តាង $f(x) = x^2 + 2(k - 3)x + 9$ ជាប៉ារ៉ាបូលបែរឆ្វេងទៅលើ។

គេមាន x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) ជាចូសនៃសមីការ ① ដែល $-6 < x_1 < 1$ និង $-6 < x_2 < 1$

តាមលក្ខខណ្ឌនេះ គេបាន

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(-6) = 0 \\ f(1) = 0 \\ -6 < -\frac{b}{2a} < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (k-3)^2 - 9 > 0 \\ (-6)^2 + 2(k-3)(-6) + 9 > 0 \\ 1^2 + 2(k-3) + 9 > 0 \\ -6 < -(k-3) < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k(k-6) > 0 \\ 81 - 12k > 0 \\ 2k + 4 > 0 \\ -1 < k - 3 < 6 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} k < 0 \vee k > 6 \\ k < \frac{27}{4} \\ k > -2 \\ 2 < k < 9 \end{cases} \iff \begin{cases} k < 0 \vee k > 6 \\ k < \frac{27}{4} \\ 2 < k < 9 \end{cases} \iff \begin{cases} k < 0 \vee k > 6 \\ 2 < k < \frac{27}{4} \end{cases} \\
 & \iff 6 < k < \frac{27}{4} \\
 & \text{ដូចនេះ } k \in \left(6, \frac{27}{4}\right)
 \end{aligned}$$

៣០. រកតម្លៃ k

$$\text{គេមានសមីការ } (k-5)x^2 - 2kx + k-4 = 0 \quad (1)$$

$$\text{តាង } f(x) = (k-5)x^2 - 2kx + k-4 \quad (k \neq 5)$$

សមីការ (1) មានឫសមួយតូចជាង 1 និងឫសមួយទៀតធំជាង 2 គេបាន

- ករណី $k-5 < 0 \iff k < 5$ គេបានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ f បែរភាពផ្ទុះក្រោម គេបាន

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) > 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k^2 - (k-5)(k-4) > 0 \\ k-5-2k+k-4 > 0 \\ 4(k-5)-4k+k-4 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9k-20 > 0 \\ -9 > 0 \\ k-24 > 0 \end{cases} \quad \text{គ្មានចម្លើយ}$$

- ករណី $k-5 > 0 \iff k > 5$ គេបានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ f បែរភាពផ្ទុះឡើងលើ គេបាន

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9k-20 > 0 \\ -9 < 0 \\ k-24 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k > \frac{20}{9} \\ k < 24 \end{cases} \iff \frac{20}{9} < k < 24$$

តែ $k > 5$ គេបាន $5 < k < 24$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{k \in (5, 24)}$$

៣១. បង្ហាញថាមាន $x_0 \in (x_1, x_2)$ ដែល ដេរីវេ $f'(x) = 0$

$$\text{គេមាន } f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

$$\text{នោះដេរីវេនៃ } f \text{ គឺ } f'(x) = 2ax + b \text{ បើ } f'(x) = 0 \iff 2ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ ជារង្វាស់ស៊ីសកំពូលនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ } ax^2 + bx + c$$

$$\text{នាំឱ្យ } x_1 < -\frac{b}{2a} < x_2 \text{ តាង } x_0 = -\frac{b}{2a} \text{ គេបាន } x_1 < x_0 < x_2 \text{ ឬ } x_0 \in (x_1, x_2)$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{\text{មាន } x_0 \in (x_1, x_2) \text{ ដែល } f'(x) = 0}$$

៣២. គេមានសមីការ $x^2 - 2(m-1)x - 3 - m = 0, \quad (1)$

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការមានឫសជាចំនួនពិតគ្រប់ចំនួនពិត m

សមីការ ① មានបួសជាចំនួនពិតគ្រប់ចំនួនពិត m លុះត្រាតែ $\Delta' \geq 0$

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } \Delta' &= (m-1)^2 - (-3-m) = m^2 - 2m + 1 + 3 + m = m^2 - m + 4 \\ &= \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

ដូចនេះ សមីការមានបួសពិតគ្រប់ចំនួនពិត m

ខ. រកតម្លៃ m

គេមាន α និង β ជាបួសនៃសមីការ ①

$$\text{គេបាន } \alpha + \beta = -\frac{-2(m-1)}{1} = 2(m-1) \text{ និង } \alpha\beta = \frac{-3-m}{1} = -3-m$$

$$\text{គេមាន } \alpha^2 + \beta^2 \geq 10 \iff (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \geq 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } 4(m-1)^2 - 2(-3-m) \geq 10$$

$$4(m^2 - 2m + 1) + 6 + 2m \geq 10$$

$$4m^2 - 8m + 4 + 6 + 2m \geq 10$$

$$4m^2 - 6m \geq 0$$

$$2m(2m - 3) \geq 0 \iff m \leq 0 \vee m \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{m \leq 0 \vee m \geq \frac{3}{2}}$$

៣៣. គេមានសមីការ $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ ①

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការមានបួសពិតគ្រប់ចំនួនពិត m

សមីការ ① មានបួសពិតគ្រប់ចំនួនពិត m លុះត្រាតែ $\Delta' \geq 0$

$$\text{គេមាន } \Delta' = m^2 - (2m - 1) = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 \geq 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ សមីការមានបួសពិតគ្រប់ចំនួនពិត m

ខ. តាង $A = 2(\alpha^2 + \beta^2) - 5\alpha\beta$ ដែល α និង β ជាបួសនៃសមីការ ①

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A = 8m^2 - 18m + 9$

គេមាន α និង β ជាបួសនៃសមីការ ①

$$\text{នាំឱ្យ } \alpha + \beta = 2m \text{ និង } \alpha\beta = 2m - 1$$

$$\text{គេបាន } A = 2(\alpha^2 + \beta^2) - 5\alpha\beta$$

$$\begin{aligned}
&= 2[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] - 5\alpha\beta \\
&= 2(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta - 5\alpha\beta \\
&= 2(\alpha + \beta)^2 - 9\alpha\beta \\
&= 2(2m)^2 - 9(2m - 1) = 8m^2 - 18m + 9
\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $A = 8m^2 - 18m + 9$

2. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $A = 27$

$$\text{គេបាន } 8m^2 - 18m + 9 = 27 \iff 8m^2 - 18m - 18 = 0$$

$$\iff 4m^2 - 9m - 9 = 0$$

$$\text{តាម } \Delta = 81 + 144 = 225 = 15^2$$

$$\text{គេបាន } m = \frac{9 - 15}{8} = -\frac{3}{4} \text{ ឬ } m = \frac{9 + 15}{8} = 3$$

ដូចនេះ: $m = -\frac{3}{4} \vee m = 3$

3. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីសមីការមានបួសមួយស្តើពីរផងនៃបួសមួយទៀត

$$\text{ឧបមាថា } \alpha = 2\beta$$

$$\text{គេមាន } \alpha + \beta = 2m \iff (2\beta) + \beta = 2m \iff 3\beta = 2m \iff \beta = \frac{2m}{3}$$

តែ β ជាបួសនៃសមីការ ① គេបាន

$$\beta^2 - 2m\beta + 2m - 1 = 0 \iff \left(\frac{2m}{3}\right)^2 - 2m\left(\frac{2m}{3}\right) + 2m - 1 = 0$$

$$\frac{4m^2}{9} - \frac{4m^2}{3} + 2m - 1 = 0$$

$$4m^2 - 12m^2 + 18m - 9 = 0$$

$$-8m^2 + 18m - 9 = 0 \text{ តាម } \Delta' = 81 - 72 = 9$$

$$\text{គេបាន } m = \frac{-9 - 3}{-8} = \frac{3}{2} \text{ ឬ } m = \frac{-9 + 3}{-8} = \frac{3}{4}$$

ដូចនេះ: $m = \frac{3}{2} \vee m = \frac{3}{4}$

៣៤. គេមានសមីការដឺក្រេទី២ $(m - 1)x^2 + 2(m - 1)x - m = 0$ ①

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសខុប

ចំពោះ $m \neq 1$ សមីការ ① មានបួសខុបលុះត្រាតែ $\Delta' = 0$

$$\text{គេបាន } (m-1)^2 + m(m-1) = 0$$

$$(m-1)(m-1+m) = 0$$

$$(m-1)(2m-1) = 0 \text{ នាំឱ្យ } m-1 = 0 \vee 2m-1 = 0$$

$$\text{បើ } m-1 = 0 \iff m = 1 \text{ មិនយក ព្រោះ } m \neq 1$$

$$\text{បើ } 2m-1 = 0 \iff m = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{m = \frac{1}{2}}$$

២. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសពិតពីរផ្សេងគ្នាសង្ខេបតែអវិជ្ជមាន

សមីការ ① មានបួសពិតពីរផ្សេងគ្នាសង្ខេបតែអវិជ្ជមានលុះត្រាតែ

$$\begin{aligned} \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ (m-1)^2 + m(m-1) > 0 \\ -\frac{2(m-1)}{m-1} < 0 \\ \frac{-m}{m-1} > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} m \neq 1 \\ (m-1)(2m-1) > 0 \\ -2 < 0 \\ \frac{m}{m-1} < 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} m \neq 1 \\ (m-1)(2m-1) > 0 \\ \frac{m}{m-1} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

m	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
m		0			
$m-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2m-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(m-1)(2m-1) > 0$	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$\frac{m}{m-1}$	$+$	0	$-$	$-$	$+$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{m \in \left(0, \frac{1}{2}\right)}$$

៣៥. គេមានសមីការ $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$ ①

ក. បង្ហាញថាសមីការមានបួសពិតពីរជានិច្ចចំពោះគ្រប់តម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m

សមីការមានបួសពិតពីរលុះត្រាតែ $\Delta \geq 0$

$$\text{គេមាន } \Delta = (2m - 3)^2 - 4(m^2 - 3m) = 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 12m = 9 > 0$$

នោះសមីការ ① មានបួសពិតពីរផ្សេងគ្នាគឺ $\alpha = m - 3$ និង $\beta = m$

ដូចនេះ សមីការ ① មានបួសពិតពីរជានិច្ច

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួស α, β ដែល $1 < \alpha < \beta < 6$

គេមាន $\alpha = m - 3$ និង $\beta = m$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត m គេបាន $m - 3 < m$ នោះគេត្រូវកំណត់តម្លៃ m ដែលនាំឱ្យ

$$1 < m - 3 < m < 6 \iff 4 < m < 6$$

ដូចនេះ $4 < m < 6$

៣៦. គេមានសមីការ $x^2 + x + a = 0$ ① និង $x^2 + ax + 1 = 0$ ②

ក. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសពិតពីរសមមូលគ្នា

តាង R_1 និង R_2 ជាសំណុំបួសនៃសមីការ ① និង ② រៀងគ្នា

នោះគេត្រូវកំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ $R_1 = R_2$

• ករណី $R_1 = R_2 = \emptyset$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} \Delta_1 = 1 - 4a < 0 \\ \Delta_2 = a^2 - 4 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a > \frac{1}{4} \\ -2 < a < 2 \end{cases} \iff \frac{1}{4} < a < 2$$

• ករណី $R_1 = R_2 \neq \emptyset$

គេបាន សមីការ ① និង ② ត្រូវតែជាសមីការពីរស្មើគ្នា

$$\text{នោះ } x^2 + x + a = x^2 + ax + 1 \iff x(a - 1) - (a - 1) = 0$$

$$\iff (a - 1)(x - 1) = 0$$

• បើ $a = 1$ គេបាន $x^2 + x + 1 = 0 \iff R_1 = R_2 = \emptyset$ មិនពិតព្រោះ

$$R_1 = R_2 \neq \emptyset$$

○ បើ $x = 1$ គេបាន $1^2 + 1 + a = 0 \iff a = -2$

ចំពោះ $a = -2$ គេបានសមីការទាំងពីរគឺ

$$x^2 + x - 2 = 0 \iff R_1 = \{-2, 1\}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \iff R_2 = \{1\}$$

នាំឱ្យ $R_1 \neq R_2$ នោះករណីនេះមិនពិត។

ដូចនេះ: $\boxed{\text{សមីការទាំងពីរមានបួសពិតសមមូលគ្នាប៉ុន្មានត្រូវតែ } \frac{1}{4} < a < 2}$

២. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសពិតរួមគ្នាមួយយ៉ាងតិច

- ករណីសមីការទាំងពីរមានបួសពិតរួមគ្នាមួយ

តាង x_0 ជាបួសពិតរួមគ្នាមួយនៃសមីការទាំងពីរ គេបាន

$$\begin{cases} x_0^2 + x_0 + a = 0 & (i) \\ x_0^2 + ax_0 + 1 = 0 & (ii) \end{cases}$$

យក $(ii) - (i)$ គេបាន $(a - 1)(x_0 - 1) = 0 \iff a = 1 \vee x_0 = 1$

- បើ $a = 1$ សមីការទាំងពីរគ្មានបួសជាចំនួនពិត

- បើ $x_0 = 1$ គេបាន $a = -2$

- ករណីសមីការទាំងពីរមានបួសពិតទាំងពីររួមគ្នា នោះសមីការទាំងពីរត្រូវស្មើគ្នា

គេបាន $a = -2$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{សមីការមានបួសពិតរួមគ្នាមួយយ៉ាងតិចកាលណា } a = -2}$

៣៧. ក. បង្ហាញថា $(m^2 + m - 1)^2 + 4m^2 + 4m = (m^2 + m + 1)^2$

$$\text{គេមាន } (m^2 + m - 1)^2 + 4m^2 + 4m = m^4 + m^2 + 1 + 2m^3 - 2m^2 - 2m + 4m^2 + 4m$$

$$= m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m + 1$$

$$= (m^2)^2 + m^2 + 1 + 2m^2 \cdot m + 2m^2 \cdot 1 + 2m \cdot 1$$

$$= (m^2 + m + 1)^2$$

ដូចនេះ: $\boxed{(m^2 + m - 1)^2 + 4m^2 + 4m = (m^2 + m + 1)^2}$

២. រកលក្ខខណ្ឌ m

$$\text{គេមានសមីការ } mx^2 - (m^2 + m + 1)x + m + 1 = 0 \quad (1)$$

សមីការ (1) មានឫសពិតពីរផ្សេងគ្នា ហើយខុសពី -1 កាលណា :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ m(-1)^2 - (m^2 + m + 1)(-1) + m + 1 \neq 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} m \neq 0 \\ (m^2 + m + 1)^2 - 4m(m + 1) > 0 \\ m + m^2 + m + 1 + m + 1 \neq 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} m \neq 0 \\ (m^2 + m - 1)^2 > 0 \\ m^2 + 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ m \neq -1, m \neq -2 \end{cases} \\ & \text{ដូចនេះ: } m \in \mathbb{R} - \left\{ 0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, -1, -2 \right\} \end{aligned}$$

៣៨. បង្ហាញថា $(a - c)(a - d)(b - c)(b - d) = (p - q)^2$

គេមាន a, b ជាឫសនៃសមីការ $x^2 + px + 1 = 0$ នោះ $a + b = -p, ab = 1$

និង c, d ជាឫសនៃសមីការ $y^2 + qy + 1 = 0$ នោះ $c + d = -q, cd = 1$

$$\begin{aligned} \text{ពន្លាតកន្សោម } (a - c)(a - d)(b - c)(b - d) &= [(a - c)(b - c)][(a - d)(b - d)] \\ &= [ab - ac - bc + c^2][ab - ad - bd + d^2] \\ &= [ab - (a + b)c + c^2][ab - (a + b)d + d^2] \\ &= [1 - (-p)c + c^2][1 - (-p)d + d^2] \\ &= (1 + pc + c^2)(1 + pd + d^2) \\ &= 1 + pd + d^2 + pc + p^2cd + pcd^2 + c^2 + pc^2d + c^2d^2 \\ &= 1 + (pc + pd) + p^2(cd) + p(cd)d + p(cd)c + (cd)^2 + c^2 + d^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + p(c + d) + p^2 + pd + pc + 1 + c^2 + d^2 \\
&= 2 + p(-q) + p^2 + p(c + d) + (c + d)^2 - 2cd \\
&= 2 - pq + p^2 - pq + (-q)^2 - 2 \\
&= p^2 - 2pq + q^2 \\
&= (p - q)^2
\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $(a - c)(a - d)(b - c)(b - d) = (p - q)^2$

៣៩. បង្ហាញថា $(a - c)(b - c)(a + d)(b + d) = q^2 - p^2$

គេមាន a, b ជាឫសនៃសមីការ $x^2 + px + 1 = 0$ នោះ $a + b = -p, ab = 1$

និង c, d ជាឫសនៃសមីការ $x^2 + qx + 1 = 0$ នោះ $c + d = -q, cd = 1$

$$\begin{aligned}
&\text{គេបាន } (a - c)(b - c)(a + d)(b + d) = (ab - ac - bc + c^2)(ab + ad + bd + d^2) \\
&= [ab - c(a + b) + c^2][ab + d(a + b) + d^2] \\
&= (1 + pc + c^2)(1 - pd + d^2) \\
&= 1 - pd + d^2 + pc - p^2cd + pcd^2 + c^2 - pc^2d + c^2d^2 \\
&= 1 - pd + d^2 + pc - p^2 + pd + c^2 - pc + 1 \\
&= 2 + c^2 + d^2 - p^2 \\
&= 2 + (c + d)^2 - 2cd - p^2 \\
&= 2 + (-q)^2 - 2 - p^2 \\
&= q^2 - p^2
\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $(a - c)(a - d)(b - c)(b - d) = q^2 - p^2$

៤០. គេមានសមីការ $(m + 2)x^2 - (2m - 1)x - 3 + m = 0$ ①

ក. បង្ហាញថាសមីការមានឫសពិតគ្រប់ចំនួនពិត m

- ករណី $m = -2$ គេបានសមីការ①ក្លាយជាសមីការដឺក្រេទី១

$$5x - 5 = 0 \iff x = 1 \text{ ជាឫសនៃសមីការ}$$

- ករណី $m \neq -2$ គេបានឱសថគ្រឹមណាត់នៃសមីការ① គឺ

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (2m - 1)^2 - 4(m + 2)(-3 + m) \\
 &= 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 4m + 24 \\
 &= 25 > 0 \text{ គេបានសមីការមានឫសពិតពីរផ្សេងគ្នាគឺ} \\
 x_1 &= \frac{2m - 1 - 5}{2(m + 2)} = \frac{2m - 6}{2(m + 2)} = \frac{m - 3}{m + 2} \\
 x_2 &= \frac{2m - 1 + 5}{2(m + 2)} = \frac{2m + 4}{2m + 4} = 1
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{សមីការមានឫសពិតគ្រប់ចំនួនពិត } m}$

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសមួយស្មើពីរដងឬសមួយទៀត

ចំពោះតម្លៃ $m \neq -2$ គេត្រូវកំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $x_1 = 2x_2$ ឬ $x_2 = 2x_1$

- បើ $x_1 = 2x_2$ គេបាន $\frac{m - 3}{m + 2} = 2 \implies m - 3 = 2m + 4 \implies m = -7$
- បើ $x_2 = 2x_1$ គេបាន $1 = \frac{2(m - 3)}{m + 2} \implies m + 2 = 2m - 6 \implies m = 8$

ដូចនេះ: $\boxed{m = -7 \vee m = 8}$

៤១. គេមានសមីការ $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ ①

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសជាចំនួនពិត

សមីការ ① មានឫសជាចំនួនពិតកាលណា $\Delta' \geq 0$

គេបាន $4 - (m + 1) \geq 0 \iff m + 1 \leq 4 \iff m \leq 3$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{សមីការមានឫសជាចំនួនពិតកាលណា } m \leq 3}$

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសជាចំនួនពិត a និង b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2 + b^2 = 10$

សមីការមានឫសជាចំនួនពិតកាលណា $m \leq 3$

គេមាន a, b ជាឫសនៃសមីការ ① នោះ $a + b = 4, ab = m + 1$

គេបាន $a^2 + b^2 = 10$

$$(a + b)^2 - 2ab = 10$$

$$4^2 - 2(m + 1) = 10$$

$$16 - 2(m + 1) = 10$$

$$m + 1 = 2 \iff m = 1 \text{ ផ្ទៀងផ្ទាត់}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{m = 1}$$

៨២. គេមានសមីការ $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរ a និង b មិនអវិជ្ជមាន

គេបាន

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S = a + b \geq 0 \\ P = ab \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m^2 - m - 2 \geq 0 \\ 2m \geq 0 \\ m + 2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m \leq -1 \vee m \geq 2 \\ m \geq 0 \\ m \geq -2 \end{cases}$$

$$\iff m \geq 2$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{m \geq 2}$$

ខ. ចំពោះ $m \geq 2$ គណនាតម្លៃនៃ $E = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\text{ដោយ } a \geq 0, b \geq 0 \implies E \geq 0 \text{ នោះ } E = \sqrt{E^2}$$

$$\text{គេបាន } E^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (a + b) + 2\sqrt{ab} = (2m)^2 + 2\sqrt{m + 2}$$

$$= 4m^2 + 2\sqrt{m + 2}$$

$$\text{នាំឱ្យ } E = \sqrt{E^2} = \sqrt{4m^2 + 2\sqrt{m + 2}}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{E = \sqrt{4m^2 + 2\sqrt{m + 2}}}$$

៨៣. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត m គេមានសមីការ $3x^2 - mx + 2 = 0$ មានឫសជាចំនួនពិតពីរ a និង b

$$\text{គេបាន } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ 3ab = 2a - 2 \\ ab = \frac{2}{3} \\ a + b = \frac{m}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} m^2 - 24 \geq 0 \\ 3 \times \frac{2}{3} = 2a - 2 \\ ab = \frac{2}{3} \\ a + b = \frac{m}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} m \leq -2\sqrt{6} \vee m \geq 2\sqrt{6} \\ a = 2 \\ ab = \frac{2}{3} \\ a + b = \frac{m}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2\sqrt{6} \vee m \geq 2\sqrt{6} \\ a = 2 \\ b = \frac{1}{3} \\ m = 7 \end{cases} \Leftrightarrow m = 7$$

ដូចនេះ: $m = 7$

៨៨. គេមានសមីការ $x^2 - 2(m-1)x - m = 0$ ①

ក. បង្ហាញថាសមីការ ① មានបួសជាចំនួនពិតគ្រប់ចំនួនពិត m

គេមាន

$$\Delta' = (m-1)^2 + m = m^2 - 2m + 1 + m = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

គ្រប់ $m \in \mathbb{R}$

ដោយ $\Delta > 0$ នោះសមីការ ① មានបួសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នាជានិច្ច។

ដូចនេះ: សមីការ ① មានបួសជាចំនួនពិតជានិច្ចគ្រប់តម្លៃនៃចំនួនពិត m

ខ. ចំពោះ $m \neq 0$ បង្កើតសមីការដឺក្រេទី២ដែលមានបួស $a + \frac{1}{a}$ និង $b + \frac{1}{b}$

ដោយ a និង b ជាបួសនៃសមីការ ① គេបាន $a + b = 2(m-1)$, $ab = -m$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } S &= \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) = (a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = (a+b) + \frac{a+b}{ab} \\ &= 2(m-1) + \frac{2(m-1)}{-m} = 2(m-1) \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 2(m-1) \left(\frac{m-1}{m}\right) \\ &= \frac{2(m-1)^2}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right) = ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab} = ab + \frac{1}{ab} + \frac{a^2 + b^2}{ab} \\ &= -m + \frac{1}{-m} + \frac{(a+b)^2 - 2ab}{-m} = -m - \frac{1}{m} - \frac{4(m-1)^2 + 2m}{m} \\ &= \frac{-m^2 - 1 - 4m^2 + 8m - 4 - 2m}{m} \\ &= \frac{-5m^2 + 6m - 5}{m} \end{aligned}$$

$$\text{នោះសមីការដឺក្រេទី២នោះមានទម្រង់ } x^2 - \frac{2(m-1)^2}{m}x + \frac{-5m^2 + 6m - 5}{m} = 0$$

$$\text{ឬ } mx^2 - 2(m-1)^2x - 5m^2 + 6m - 5 = 0$$

ដូចនេះ $\text{សមីការដឺក្រេទី២នោះគឺ } mx^2 - 2(m-1)^2x - 5m^2 + 6m - 5 = 0, m \neq 0$

៤៥. កំណត់តម្លៃ m

គេមានសមីការ $3x^2 - 5x + m = 0$ មានប្រសព្វជាចំនួនពិត x_1 និង x_2 ដែល $x_1^2 - x_2^2 = \frac{5}{9}$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{5}{3} \\ x_1x_2 = \frac{m}{3} \\ x_1^2 - x_2^2 = \frac{5}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} 25 - 12m \geq 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{5}{3} \\ x_1x_2 = \frac{m}{3} \\ (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \frac{5}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} m \leq \frac{25}{12} & (i) \\ x_1 + x_2 = \frac{5}{3} & (ii) \\ x_1x_2 = \frac{m}{3} & (iii) \\ x_1 - x_2 = \frac{1}{3} & (iv) \end{cases}$$

យក (ii) + (iv) គេបាន $2x_1 = 2 \iff x_1 = 1 \iff x_2 = \frac{2}{3}$ (តាម (ii))

យកតម្លៃ x_1, x_2 ជំនួសក្នុង (iii) គេបាន $\frac{m}{3} = \frac{2}{3} \iff m = 2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ (i)

ដូចនេះ $m = 2$

៤៦. គេមានសមីការ $x^2 - 2(m+4)x + m^2 - 8 = 0$ មានប្រសព្វពីរជាចំនួនពិត a និង b

គេបាន $a + b = 2(m+4)$ និង $ab = m^2 - 8$

ហើយសមីការមានប្រសព្វពីរជាចំនួនពិតកាលណា

$$\Delta' \geq 0 \iff (m+4)^2 - (m^2 - 8) \geq 0 \iff m^2 + 8m + 16 - m^2 + 8 \geq 0$$

$$\iff m \geq -3$$

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $A = a + b - 3ab$ មានតម្លៃធំបំផុត

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } A &= a + b - 3ab = 2(m+4) - 3(m^2 - 8) \\ &= 2m + 8 - 3m^2 + 24 = -3m^2 + 2m + 32 \\ &= -3\left(m^2 - \frac{2}{3}m\right) + 32 \\ &= -3\left(m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) + 32 \\ &= -3\left(m - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{9} + 32 \\ &= -3\left(m - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{97}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{97}{3} - 3 \left(m - \frac{1}{3} \right)^2 \leq \frac{97}{3} \text{ ព្រោះ } -3 \left(m - \frac{1}{3} \right)^2 \leq 0$$

នាំឱ្យ A មានតម្លៃធំបំផុតស្មើ $\frac{97}{3}$ នៅពេលដែល $m = \frac{1}{3}$

ដូចនេះ $A = a + b - 3ab$ មានតម្លៃធំបំផុតនៅពេលដែល $m = \frac{1}{3}$

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $B = a^2 + b^2 - ab$ មានតម្លៃតូចបំផុត

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } B &= a^2 + b^2 - ab = (a + b)^2 - 2ab - ab = (a + b)^2 - 3ab \\ &= 4(m + 4)^2 - 3(m^2 - 8) \\ &= 4m^2 + 32m + 64 - 3m^2 + 24 \\ &= m^2 + 32m + 88 \\ &= (m^2 + 32m + 256) + 88 - 256 \\ &= (m + 16)^2 - 168 \geq -168 \text{ ព្រោះ } (m + 16)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

នាំឱ្យ B មានតម្លៃតូចបំផុតស្មើ -168 នៅពេលដែល $m = -32$

គេបានករណីនេះមិនអាចកើតឡើងព្រោះ $m \geq -3$

ដូចនេះ គ្មានតម្លៃ m ដែលនាំឱ្យ $B = a^2 + b^2 - ab$ មានតម្លៃតូចបំផុតទេ

គ. សរសេរទំនាក់ទំនង a, b ដែលគ្មាន m

$$\text{គេមាន } \begin{cases} a + b = 2(m + 4) & (i) \\ ab = m^2 - 8 & (ii) \end{cases}$$

តាម (i) គេបាន $a + b = 2(m + 4) \iff m = \frac{a + b}{2} - 4 \quad (iii)$

យក (iii) ជំនួសក្នុង (ii) គេបាន $ab = \left(\frac{a + b}{2} - 4 \right)^2 - 8$

ឬ $4ab = (a + b - 8)^2 - 32$

៤៧. គេមានសមីការ $x^2 - 4x - m^2 - 3m = 0 \quad (1)$

ក. បង្ហាញថាសមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិត a និង b ជានិច្ច

$$\text{គេមាន } \Delta' = 4 + m^2 + 3m = m^2 + 3m + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 4 = \left(m + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

នោះសមីការ ① មានឫសពីរជាចំនួនពិតជានិច្ច។

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិតជានិច្ច}}$

២. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត m ដើម្បីឱ្យ $a^2 + b^2 = 4(a + b)$

គេមាន a, b ជាឫសនៃសមីការ ① នោះ $a + b = 4, ab = -m^2 - 3m$

គេបាន $a^2 + b^2 = 4(a + b) \iff (a + b)^2 - 2ab = 4(a + b)$

ឬ $4^2 - 2(-m^2 - 3m) = 4 \times 4 \iff m^2 + 3m = 0 \iff m = 0 \vee m = -3$

ដូចនេះ $\boxed{m = -3 \text{ ឬ } m = 0}$

គ. បង្កើតសមីការដឺក្រេទី២ដែលមានអញ្ញាត y និង មានឫស y_1, y_2

គេមាន $y_1 + y_2 = a + b = 4$

ហើយ $\frac{y_1}{1 - y_2} + \frac{y_2}{1 - y_1} = 3 \iff y_1(1 - y_1) + y_2(1 - y_2) = 3(1 - y_1)(1 - y_2)$

$y_1 - y_1^2 + y_2 - y_2^2 = 3(1 - y_2 - y_1 + y_1y_2)$

$(y_1 + y_2) - [(y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2] = 3[1 - (y_1 + y_2) + y_1y_2]$

$4 - 16 + 2y_1y_2 = 3(1 - 4 + y_1y_2)$

$-12 + 2y_1y_2 = -9 + 3y_1y_2$

$y_1y_2 = -3$

នោះសមីការដឺក្រេទី២ដែលមានអញ្ញាត y ហើយមានឫស y_1, y_2 មានរាង $\boxed{y^2 - 4y - 3 = 0}$

៤៨. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a

គេមានសមីការ $x^2 + ax + 1 = 0$ ① មានឫសពីរជាចំនួនពិត α និង β គេបាន

$\Delta \geq 0 \iff a^2 - 4 \geq 0 \iff a \leq -2 \vee a \geq 2$ ហើយ $\alpha + \beta = -a$ និង $\alpha\beta = 1$

នាំឱ្យ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 > 7 \iff \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} > 7 \iff \alpha^4 + \beta^4 > 7\alpha^2\beta^2$

$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 > 7\alpha^2\beta^2$

$[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 > 9\alpha^2\beta^2$

គេបាន $(a^2 - 2)^2 > 9$ នាំឱ្យ $a^2 - 2 < -3$ ឬ $a^2 - 2 > 3$

- ករណី $a^2 - 2 < -3 \iff a^2 < -1$ គ្មានចម្លើយក្នុងសំណុំចំនួនពិត

ក្នុងករណីនេះគេបាន $a \in \emptyset$

• ករណី $a^2 - 2 > 3 \iff a^2 > 5 \iff a < -\sqrt{5} \vee a > \sqrt{5}$ ②

តាម ① និង ② គេបាន $a < -\sqrt{5} \vee a > \sqrt{5}$

ដូចនេះ $\boxed{a < -\sqrt{5} \text{ ឬ } a > \sqrt{5}}$

៨៩. គេមានសមីការ $2x^2 + 2(m+2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$ ①

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបួសពីរជាចំនួនពិត a និង b

សមីការមានបួសពីរជាចំនួនពិតកាលណា $\Delta' \geq 0$

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } \Delta' &= (m+2)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) \\ &= m^2 + 4m + 4 - 2m^2 - 8m - 6 \\ &= -m^2 - 4m - 2\end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \Delta' \geq 0 \iff -m^2 - 4m - 2 \geq 0 \iff m^2 + 4m + 2 \leq 0$$

$$(m+2)^2 - 2 \leq 0 \iff (m+2)^2 \leq 2 \iff |m+2| \leq \sqrt{2}$$

$$\iff -\sqrt{2} - 2 \leq m \leq \sqrt{2} - 2$$

ដូចនេះ $\boxed{-\sqrt{2} - 2 \leq m \leq \sqrt{2} - 2}$

ខ. គេមាន a និង b ជាបួសពិតនៃសមីការ ①

$$\text{គេបាន } a + b = -(m+2) \text{ និង } ab = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3)$$

$$\text{គេមាន } |a + b + 3ab| \leq |a + b| + 3|ab| \quad (\text{វិសមភាពត្រីកោណ}) \quad ②$$

$$\text{ដោយ } |a + b| = |-(m+2)| = |m+2| \leq \sqrt{2} \quad ③$$

$$3|ab| = 3 \left| \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3) \right| = \frac{3}{2} |(m+2)^2 - 1| \leq \frac{3}{2} |(\sqrt{2})^2 - 1| \leq \frac{3}{2} \quad ④$$

$$\text{តាម ③ និង ④ គេបាន ② ក្លាយជា } |a + b + 3ab| \leq \sqrt{2} + \frac{3}{2} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

ដូចនេះ $\boxed{|a + b + 3ab| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

៩០. គេមានសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

\Rightarrow លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ : បើបួសមួយស្មើពីរផងនៃបួសមួយទៀត បង្ហាញថា $9ac = 2b^2$

ឧបមាថាសមីការមានបួសពីរ α និង β ដែល $\alpha = 2\beta$

$$\text{គេបាន } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \iff 2\beta + \beta = -\frac{b}{a} \iff \beta = -\frac{b}{3a} \quad (1)$$

$$\text{និង } \alpha\beta = \frac{c}{a} \iff 2\beta \times \beta = \frac{c}{a} \iff \beta^2 = \frac{c}{2a} \quad (2)$$

$$\text{តាម (1) និង (2) គេបាន } \left(-\frac{b}{3a}\right)^2 = \frac{c}{2a} \iff \frac{b^2}{9a^2} = \frac{c}{2a} \iff 2b^2 = 9ac$$

\Leftarrow លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ : បើ $2b^2 = 9ac$ បង្ហាញថាបួសមួយនៃសមីការស្មើពីរផងនៃបួសមួយទៀត

$$\text{គេមាន } \Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \times \frac{2b^2}{9} = \frac{b^2}{9}$$

$$\text{គេបាន } \alpha = \frac{-b - \frac{b}{3}}{2a} = 2 \times \frac{-b}{3a} \text{ និង } \beta = \frac{-b + \frac{b}{3}}{2a} = \frac{-b}{3a}$$

នាំឱ្យ $\alpha = 2\beta$ មានន័យថាបួសមួយនៃសមីការស្មើពីរផងនៃបួសមួយទៀត។

៥.១. គេមានសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

\Rightarrow លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ : បើបួសមួយនៃសមីការស្មើពីរផងនៃបួសមួយទៀត បង្ហាញថា $kb^2 = (k+1)^2ac$

ឧបមាថាសមីការមានបួសពីរ α និង β ដែល $\alpha = k\beta$ ឬ $\beta = k\alpha$

$$\text{គេបាន } (\alpha - k\beta)(\beta - k\alpha) = 0$$

$$\alpha\beta - k\alpha^2 - k\beta^2 + k^2\alpha\beta = 0$$

$$k(\alpha^2 + \beta^2) - (k^2 + 1)\alpha\beta = 0$$

$$k[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] - (k^2 + 1)\alpha\beta = 0$$

$$k\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \times \frac{c}{a}\right] - (k^2 + 1) \times \frac{c}{a} = 0$$

$$k\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right) - \frac{c}{a}(k^2 + 1) = 0$$

$$k(b^2 - 2ac) - ac(k^2 + 1) = 0$$

$$kb^2 = (k^2 + 2k + 1)ac \iff kb^2 = (k+1)^2ac$$

\Leftarrow លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ : បើ $kb^2 = (k+1)^2ac$ បង្ហាញថាបួសមួយនៃសមីការស្មើពីរផងនៃបួសមួយទៀត

$$\text{តាម } \Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \times \frac{kb^2}{(k+1)^2} = \frac{(k-1)^2 b^2}{(k+1)^2}$$

$$\text{គេបាន } \alpha = \frac{-b + \frac{(k-1)b}{k+1}}{2a} = \frac{-2b}{2(k+1)a} = \frac{-b}{(k+1)a}$$

$$\beta = \frac{-b - \frac{(k-1)b}{k+1}}{2a} = \frac{-2kb}{2(k+1)a} = \frac{-kb}{(k+1)a}$$

នាំឱ្យ $\beta = 2\alpha$ មានន័យថាបូសមួយនៃសមីការស្មើពីរផងនៃបូសមួយទៀត។

៥២. បង្ហាញថាសមីការមានបូសជាចំនួនពិតជានិច្ច

$$\text{គេមាន } (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$$

$$(x^2 - ax - bx + ab) + (x^2 - bx - cx + bc) + (x^2 - ax - cx + ca) = 0$$

$$3x^2 - 2ax - 2bx - 2cx + ab + bc + ca = 0$$

$$3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0$$

$$\text{តាម } \Delta' = (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 3ab - 3bc - 3ca$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= \frac{1}{2}[(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)]$$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0 \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ: សមីការមានបូសជាចំនួនពិតជានិច្ចចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a, b និង c

៥៣. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b

$$\text{គេមានសមីការ } (2a+1)x^2 - (3a-1)x + 2 = 0 \quad ①$$

$$(b+1)x^2 - 2(b+1)x - 1 = 0 \quad ②$$

សមីការ ① និង ② មានបូសពីររួមគ្នាលុះត្រាតែសមីការទាំងពីរមានមេគុណខុសពីសូន្យ និង

សមាមាត្រគ្នា។

$$\text{គេបាន } \frac{2a+1}{b+1} = \frac{-(3a-1)}{-2(b+1)} = \frac{2}{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \begin{cases} \frac{2a+1}{b+1} = -2 \\ \frac{3a-1}{2(b+1)} = -2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2a+1 = -2b-2 \\ 3a-1 = -4b-4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+2b = -3 \\ 3a+4b = -3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -3 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \\ \text{ដូចនេះ } &\boxed{a = -3, b = \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

៥៤. រកគ្រប់ចំនួនពិត k

គេមានសមីការ $kx^2 - (1-2k)x + k-2 = 0$ មានឫសជាចំនួនសនិទាន

- បើ $k = 0$ ①

គេបាន $-x - 2 = 0 \iff x = -2$ នោះសមីការមានឫសជាចំនួនសនិទាន។

- បើ $k \neq 0$

$$\text{តាម } \Delta = (1-2k)^2 - 4k(k-2) = 1 - 4k + 4k^2 - 4k^2 + 8k = 4k + 1$$

$$\text{សមីការមានឫសជាចំនួនសនិទានកាលណា } \Delta \geq 0 \iff 4k + 1 \geq 0 \iff k \geq -\frac{1}{4}$$

$$\implies k \geq 1 \text{ ព្រោះ } k \text{ ជាចំនួនគត់ និងខុសពីសូន្យ}$$

$$\text{និង } \Delta = 4k + 1 \text{ ជាការេនៃចំនួនគត់ គេបាន } 4k + 1 = p^2, p \in \mathbb{Z}$$

$$\text{នាំឱ្យ } p \text{ ជាចំនួនសេស ព្រោះ } 4k + 1 \text{ ជាចំនួនសេស។}$$

$$\text{តាង } p = 2n + 1, n \in \mathbb{N} \text{ គេបាន } 4k + 1 = (2n + 1)^2 \iff k = n(n + 1) \quad \text{②}$$

តាម ① និង ② គេបាន $k = n(n + 1)$ ដែល n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{k = n(n + 1) \text{ ដែល } n \text{ ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន}}$$

៥៥. គេមាន $x^2 + ax + bc = 0$ ① និង $x^2 + bx + ac = 0$ ② ដែល $a \neq b \neq c \neq 0$

សមីការ ① និង ② មានឫសរួមគ្នាមួយ តាងឫសរួមគ្នានោះដោយ x_0 ។

$$\text{គេបាន } \begin{cases} x_0^2 + ax_0 + bc = 0 & \text{③} \\ x_0^2 + bx_0 + ac = 0 & \text{④} \end{cases}$$

$$\text{យក ③-④ គេបាន } (a-b)x_0 - (a-b)c = 0 \iff (a-b)(x_0 - c) = 0$$

$$\text{ដោយ } a \neq b \implies a-b \neq 0 \text{ នាំឱ្យ } x_0 - c = 0 \iff x_0 = c$$

គេបាន $x_0 = c$ ជាបូសនៃសមីការ ① នាំឱ្យ

$$c^2 + ac + bc = 0 \iff c(c + a + b) = 0 \iff c + a + b = 0 \iff a + b = -c$$

តាង x_1 និង x_2 ជាបូសនៃសមីការ ① និង ② រៀងគ្នា ដែល $x_0 \neq x_1 \neq x_2$

$$\text{គេបាន } x_0 + x_1 = -a \iff x_1 = -a - x_0 = -a - c$$

$$\text{និង } x_0 + x_2 = -b \iff x_2 = -b - x_0 = -b - c$$

$$\text{នាំឱ្យ } x_1 + x_2 = (-a - c) + (-b - c) = -(a + b) - 2c = -(-c) - 2c = -c$$

$$\text{និង } x_1 x_2 = (-a - c)(-b - c) = (a + c)(b + c) = ab + (a + b)c + c^2 = ab - c^2 + c^2 = ab$$

ដូចនេះ x_1 និង x_2 ជាបូសនៃសមីការ $x^2 + cx + ab = 0$ ។

៥៦. គេមានសមីការ $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ ① និង $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ ②

$$\text{ចំពោះសមីការ ① មាន } \Delta_1 = a_1^2 - 4b_1$$

$$\text{ចំពោះសមីការ ② មាន } \Delta_2 = a_2^2 - 4b_2$$

$$\text{គេបាន } \Delta_1 + \Delta_2 = a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2)$$

$$\text{តែ } a_1 a_2 \leq 2(b_1 + b_2) \implies -2a_1 a_2 \geq -4(b_1 + b_2)$$

$$\text{នាំឱ្យ } \Delta_1 + \Delta_2 \geq a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 = (a_1 - a_2)^2$$

$$\text{គេបាន } \Delta_1 + \Delta_2 \geq 0 \text{ មានន័យថា } \Delta_1 \geq 0 \text{ ឬ } \Delta_2 \geq 0$$

ដូចនេះ: យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោមសមីការទាំងពីរនេះមានបូសជាចំនួនពិត

៥៧. គេមានចំនួនពិត $a, b, c \neq 0$

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \implies \Delta'_1 = b^2 - ac$$

$$bx^2 + 2cx + a = 0 \implies \Delta'_2 = c^2 - ab$$

$$cx^2 + 2ax + b = 0 \implies \Delta'_3 = a^2 - bc$$

$$\text{គេបាន } \Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 = b^2 - ac + c^2 - ab + a^2 - bc$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\
&= \frac{1}{2}[(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)] \\
&= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0
\end{aligned}$$

នាំឱ្យ $\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 \geq 0$ នោះមានន័យថា $\Delta'_1 \geq 0$ ឬ $\Delta'_2 \geq 0$ ឬ $\Delta'_3 \geq 0$

ដូចនេះ យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោមសមីការទាំងបីនេះបួសជាចំនួនពិត

៥៨. • សមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ ① មានបួសពិតពីរផ្សេងគ្នា x_1 និង x_2 ដែល $x_1 > 0$

គេបាន $\Delta_1 = b^2 - 4ac$ និង $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

• សមីការ $ct^2 + bt + a = 0$ ② មាន $\Delta_2 = b^2 - 4ac = \Delta_1$

នាំឱ្យសមីការ ② ក៏មានបួសពិតពីរផ្សេងគ្នា t_1 និង t_2 ដែល $t_1 > 0$

គេបាន $t_1 t_2 = \frac{a}{c}$

ដោយ x_1 ជាបួសនៃ ① គេបាន $ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \implies a + b \cdot \left(\frac{1}{x_1}\right) + c \cdot \left(\frac{1}{x_1}\right)^2 = 0$

ឬ $c \cdot \left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{1}{x_1}\right) + a = 0$ នាំឱ្យ $t_1 = \frac{1}{x_1}$ ជាបួសវិជ្ជមាននៃសមីការ ②

គេបាន $x_1 + t_1 = x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2$ (តាមវិសមភាពកូស៊ី)

៥៩. គេមានសមីការ $3x^2 + 17x - 14 = 0$ មានបួស a និង b នាំឱ្យ $a + b = -\frac{17}{3}$ និង $ab = -\frac{14}{3}$

$$\begin{aligned}
\text{គេបាន } P &= \frac{3a^2 + 5ab + 3b^2}{6a^2b + 6ab^2} = \frac{3(a^2 + b^2) + 5ab}{6ab(a+b)} = \frac{3(a+b)^2 - ab}{6ab(a+b)} \\
&= \frac{3\left(-\frac{17}{3}\right)^2 - \left(-\frac{14}{3}\right)}{6\left(-\frac{14}{3}\right)\left(-\frac{17}{3}\right)} = \frac{303}{476}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $P = \frac{303}{476}$

៦០. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b

គេមានសមីការ $x^2 + ax + b = 0$ មានបួសពិតពីរ a និង b

$$\text{គេបាន } \begin{cases} a + b = -a & (1) \\ ab = b & (2) \end{cases}$$

បើ $b = 0$ តាម (1) គេបាន $a = 0$

បើ $b \neq 0$ តាម (2) គេបាន $ab = b \implies a = 1$ នោះតាម (1) គេបាន $b = -2$

ដូចនេះ $\boxed{a = b = 0 \text{ ឬ } a = 1, b = -2}$

៦១. គេមានសមីការ $x^2 + ax + b = 0$ មាន $\Delta_1 = a^2 - 4b$

និងសមីការ $x^2 - cx - d = 0$ មាន $\Delta_2 = c^2 + 4d$

គេបាន $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + c^2 + 4(d - b) \implies 2(\Delta_1 + \Delta_2) = 2(a^2 + c^2) + 8(d - b)$ ①

គេមាន $a(a - c) + c(c - a) + 8(d - b) > 0$

$$a^2 - ac + c^2 - ac + 8(d - b) > 0$$

$$8(d - b) > 2ac - (a^2 + c^2) \quad ②$$

តាម ① និង ② គេបាន $2(\Delta_1 + \Delta_2) > 2(a^2 + c^2) + 2ac - (a^2 + c^2) = (a + c)^2$

នាំឱ្យ $2(\Delta_1 + \Delta_2) > 0 \implies \Delta_1 + \Delta_2 > 0$ នោះគេបាន $\Delta_1 > 0$ ឬ $\Delta_2 > 0$ មានន័យថា

ក្នុងចំណោមសមីការទាំងពីរនេះ យ៉ាងហោចណាស់មានមួយដែលមានឫសជាចំនួនពិត។

៦២. គេមានសមីការ $x^2 + px - 1 = 0$ មានឫសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា x_1 និង x_2

គេបាន $x_1 + x_2 = -p$ និង $x_1 x_2 = -1$

យើងនឹងស្រាយតាមវិធានអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

គេបាន $x_1^n + x_2^n$ និង $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ ជាចំនួនគត់ និងបឋមរវាងគ្នា។

- បើ $n = 1$ ស្រាយថា $x_1 + x_2$ និង $x_1^2 + x_2^2$ ជាចំនួនគត់បឋមរវាងគ្នា គេមាន $x_1 + x_2 = -p$

ជាចំនួនគត់ ព្រោះ p ជាចំនួនសេស

និង $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-p)^2 - 2(-1) = p^2 + 2$ ជាចំនួនគត់

តាង $d = \gcd(x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2)$ គេបាន $d = \gcd(p, p^2 + 2)$

$$\text{នាំឱ្យ} \begin{cases} d|p \\ d|p^2 + 2 \end{cases} \implies d|2 \implies d = 1 \text{ ឬ } d = 2$$

តែ p ជាចំនួនសេស នាំឱ្យ $d = 1$ នោះគេបាន $x_1 + x_2$ និង $x_1^2 + x_2^2$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា។

- ឧបមាថាពិតជានៃ $n = k$ គឺ $x_1^k + x_2^k$ និង $x_1^{k+1} + x_2^{k+1}$ ជាចំនួនគត់ និងបឋមរវាងគ្នា។

- យើងនឹងស្រាយថាពិតជា $n = k + 1$ គឺ $x_1^{k+1} + x_2^{k+1}$ និង $x_1^{k+2} + x_2^{k+2}$ ជាចំនួនគត់ និងបឋមរវាងគ្នា។

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } (x_1^{k+1} + x_2^{k+1})(x_1 + x_2) &= x_1^{k+2} + x_2 x_1^{k+1} + x_1 x_2^{k+1} + x_2^{k+2} \\ &= (x_1^{k+2} + x_2^{k+2}) + x_1 x_2 (x_1^k + x_2^k) \end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } x_1^{k+2} + x_2^{k+2} = (x_1^{k+1} + x_2^{k+1})(x_1 + x_2) + (x_1^k + x_2^k)$$

ដោយ $x_1 + x_2, x_1^k + x_2^k$ និង $x_1^{k+1} + x_2^{k+1}$ ជាចំនួនគត់ នាំឱ្យ $x_1^{k+2} + x_2^{k+2}$ ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ

តាង $d = \gcd(x_1^{k+1} + x_2^{k+1}, x_1^{k+2} + x_2^{k+2})$ គេបាន $d | x_1^{k+1} + x_2^{k+1}$ និង $d | x_1^{k+2} + x_2^{k+2}$

$$\text{ដោយ } x_1^{k+2} + x_2^{k+2} = (x_1^{k+1} + x_2^{k+1})(x_1 + x_2) + (x_1^k + x_2^k)$$

$$\text{គេមាន } \begin{cases} d | x_1^{k+1} + x_2^{k+1} \\ d | x_1^{k+2} + x_2^{k+2} \end{cases} \implies d | x_1^k + x_2^k$$

តែ $x_1^k + x_2^k$ និង $x_1^{k+1} + x_2^{k+2}$ បឋមរវាងគ្នា នោះ $d = 1$

គេបាន $x_1^{k+1} + x_2^{k+1}$ និង $x_1^{k+2} + x_2^{k+2}$ ជាចំនួនគត់ និងបឋមរវាងគ្នា។

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គេបាន $x_1^n + x_2^n$ និង $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ ជាចំនួនគត់ និងបឋមរវាងគ្នា

៦៣. គេមានសមីការ $x^2 - ax - \frac{1}{2a^2} = 0$ មានឫសជាចំនួនពិតពីរ x_1 និង x_2

$$\text{គេបាន } x_1 + x_2 = a \text{ និង } x_1 x_2 = -\frac{1}{2a^2}$$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } x_1^4 + x_2^4 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - 2(x_1 x_2)^2 \\ &= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{4a^4} \\ &= a^4 + 2 + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{2a^4} \\ &= 2 + \left(a^4 + \frac{1}{2a^4}\right) \geq 2 + \sqrt{a^4 \cdot \frac{1}{2a^4}} = 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$$

៦៤. ដោះស្រាយសមីការ $2006x^2 + 2007x + 1 = 0$

$$\text{គេសង្កេតឃើញថា } a - b + c = 0 \text{ នោះសមីការមានឫស } x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{1}{2006}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានចូល } x = -1 \vee x = -\frac{1}{2006}}$

៦៥. ដោះស្រាយសមីការអញ្ញាត x

ក. $(a^2 - 1)x + a(x^2 - 1) = a^2(x^2 - x + 1)$

$$a^2x - x + ax^2 - a = a^2x^2 - a^2x + a^2$$

$$a^2x^2 - a^2x + a^2 - a^2x + x - ax^2 + a = 0$$

$$(a^2 - a)x^2 - (2a^2 - 1)x + a^2 + a = 0$$

$$a(a - 1)x^2 - (2a^2 - 1)x + a(a + 1) = 0 \quad ①$$

- បើ $a(a - 1) = 0 \iff a = 0 \vee a = 1$

$a = 0$ គេបាន ① មានចូល $\boxed{x = 0}$

$a = 1$ គេបាន ① មានចូល $\boxed{x = 2}$

- បើ $a(a - 1) \neq 0 \iff a \neq 0, a \neq 1$

$$\Delta = (2a^2 - 1)^2 - 4a^2(a - 1)(a + 1) = 4a^4 - 4a^2 + 1 - 4a^4 + 4a^2 = 1$$

$$\text{គេបាន } x_1 = \frac{2a^2 - 1 + 1}{2a(a - 1)} = \frac{a}{a - 1} \text{ ឬ } x_2 = \frac{2a^2 - 1 - 1}{2a(a - 1)} = \frac{a + 1}{a}$$

ខ. $x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2 = 0$

$$\Delta' = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$$

$$\text{នាំឱ្យ } x_1 = a^2 + b^2 - 2ab = \boxed{(a - b)^2}, x_2 = a^2 + b^2 + 2ab = \boxed{(a + b)^2}$$

៦៦. គេមានសមីការ $(x - 19)(x - 97) = p$ មានចូលជាចំនួនពិត r_1 និង r_2

$$\text{គេបាន } (x - 19)(x - 97) - p = 0$$

$$(x - 19)(x - 97) - p = (x - r_1)(x - r_2) \text{ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត } x$$

$$(x - r_1)(x - r_2) + p = (x - 19)(x - 97) \text{ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត } x$$

$$\text{នាំឱ្យប្រសិនបើសមីការ } (x - r_1)(x - r_2) + p = 0 \text{ គឺ } 19 \text{ ឬ } 97$$

$$\text{នាំឱ្យប្រសិនបើសមីការ } (x - r_1)(x - r_2) = -p \text{ គឺ } 19 \text{ ឬ } 97$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រសិនបើចំនុចនៃសមីការ } (x - r_1)(x - r_2) = -p \text{ គឺ } 19}$

៦៧. គេមានសមីការ $x^2 - 3|x| - 2 = 0$ មានចូលតូចជាងគេគឺ a

$$\text{ដោយ } x^2 - 3|x| - 2 = 0 \iff |x|^2 - 3|x| - 2 = 0$$

$$\text{តាង } t = |x|, t \geq 0 \text{ គេបាន } t^2 - 3t - 2 = 0 \text{ មានចូល } t = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{តែ } t \geq 0 \implies t = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{នាំឱ្យ } |x| = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \iff x = -\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{ដោយ } -\frac{3 + \sqrt{17}}{2} < \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \implies a = -\frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{គេបាន } -\frac{1}{a} = \frac{2}{3 + \sqrt{17}} = \frac{2(\sqrt{17} - 3)}{17 - 9} = \frac{\sqrt{17} - 3}{4}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{-\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{17} - 3}{4}}$$

៦៨. គេមាន a ជាចូលនៃសមីការ $x^2 - x - 3 = 0$

$$\text{គេបាន } a^2 - a - 3 = 0 \iff a^2 - a = 3$$

$$\text{ម្យ៉ាងទៀត } a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1) = (a + 1)(3 + 1) = 4(a + 1)$$

$$a^5 - a^4 - a^3 + a^2 = a^4(a - 1) - a^2(a - 1)$$

$$= (a - 1)(a^4 - a^2)$$

$$= a^2(a - 1)(a^2 - 1)$$

$$= a^2(a - 1)^2(a + 1)$$

$$= (a^2 - a)^2(a + 1)$$

$$= 3^2(a + 1) = 9(a + 1)$$

$$\text{គេបាន } \frac{a^3 + 1}{a^5 - a^4 - a^3 + a^2} = \frac{4(a + 1)}{9(a + 1)} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

៦៩. រកតម្លៃនៃ a និង b

$$\text{គេមានសមីការ } x^2 - (2a + b)x + (2a^2 + b^2 - b + \frac{1}{2}) = 0 \text{ មានចូលជាចំនួនពិត}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \Delta \geq 0 \iff (2a + b)^2 - 4(2a^2 + b^2 - b + \frac{1}{2}) \geq 0$$

$$4a^2 + 4ab + b^2 - 8a^2 - 4b^2 + 4b - 2 \geq 0$$

$$-4a^2 - 3b^2 + 4ab + 4b - 2 \geq 0$$

$$4a^2 + 3b^2 - 4ab - 4b + 2 \leq 0$$

$$(4a^2 - 4ab + b^2) + 2(b^2 - 2b + 1) \leq 0$$

$$(2a - b)^2 + 2(b - 1)^2 \leq 0 \text{ គេបាន } a = \frac{1}{2}, b = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{a = \frac{1}{2}, b = 1}$

៧០. សមីការ $x^2 - ax + 3 - b = 0$ មានឫសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា នោះ $\Delta_1 = a^2 - 4(3 - b) > 0$ ①

សមីការ $x^2 + (6 - a)x + 6 - b = 0$ មានឫសឌុប នោះ $\Delta_2 = (6 - a)^2 - 4(6 - b) = 0$ ②

សមីការ $x^2 + (4 - a)x + 5 - b = 0$ គ្មានឫសជាចំនួនពិត នោះ $\Delta_3 = (4 - a)^2 - 4(5 - b) < 0$ ③

តាម ①, ②, ③ គេបាន

$$a^2 + 4b - 12 > 0 \quad ④$$

$$a^2 - 12a + 12 + 4b = 0 \quad ⑤$$

$$a^2 - 8a - 4 + 4b < 0 \quad ⑥$$

តាម ⑤ គេបាន $a^2 + 4b = 12a - 12$ ⑦

យក ⑦ ជំនួសក្នុង ④ គេបាន $12a - 12 - 12 > 0 \iff a > 2$ ⑧

យក ⑦ ជំនួសក្នុង ⑥ គេបាន $12a - 12 - 8a - 4 < 0 \iff a < 4$ ⑨

តាម ⑧ និង ⑨ គេបាន $2 < a < 4$

តាម ⑤ គេបាន $4b = -a^2 + 12a - 12 = 24 - (6 - a)^2$ ដោយ $2 < a < 4$ គេបាន

$$24 - (6 - 2)^2 < 4b < 24 - (6 - 4)^2 \iff 2 < b < 5$$

នោះរង្វង់នៃចំនួនពិត a និង b គឺ $2 < a < 4, 2 < b < 5$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្លើយត្រឹមត្រូវគឺ (A)}}$

៧១. គេមានសមីការ $c^2x^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2 = 0$ មិនមានឫសជាចំនួនពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត

វិជ្ជមាន a, b, c

គេបាន $\Delta = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 < 0$

$$(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) < 0$$

$$[a^2 - (b + c)^2][a^2 - (b - c)^2] < 0$$

$$\text{ដោយ } b - c < b + c \implies a^2 - (b + c)^2 < a^2 - (b - c)^2$$

$$\text{នាំឱ្យ } a^2 - (b + c)^2 < 0 \text{ និង } a^2 - (b - c)^2 > 0$$

ចំពោះ $a^2 - (b + c)^2 < 0 \iff a^2 < (b + c)^2 \implies a < b + c$ ព្រោះ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

$$\begin{aligned} \text{ចំពោះ } a^2 - (b - c)^2 > 0 \text{ គេបាន } (b - c)^2 < a^2 &\implies -a < b - c < a \\ \implies c < a + b \wedge b < a + c \end{aligned}$$

ហេតុនេះគេបាន $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$ មានន័យថាអង្កត់ដែលមានប្រវែង a, b, c អាចបង្កើតបានត្រីកោណមួយ។

៧២. គេមានសមីការ $mx^2 - 2(m + 2)x + m + 5 = 0$ ①

សមីការ ① មិនមានឫសជាចំនួនពិតកាលណា $m \neq 0$ ហើយ $\Delta' < 0$

$$\text{គេបាន } (m + 2)^2 - m(m + 5) = -m + 4 < 0 \implies m > 4$$

$$\text{ម្យ៉ាងទៀតសមីការ } (m - 6)x^2 - 2(m + 2)x + m + 5 = 0 \quad \text{②}$$

- ករណី $m = 6$ សមីការ ② ក្លាយជា $-16x + 11 = 0$ មានឫស $x = \frac{11}{16}$

- ករណី $m \neq 6$ សមីការ ② មាន

$$\Delta' = (m + 2)^2 - (m - 6)(m + 5) = m^2 + 4m + 4 - m^2 + m + 30$$

$$\text{គេបាន } \Delta' = 5m + 34 > 0 \text{ ព្រោះ } m > 4, m \neq 6$$

នាំឱ្យសមីការ ② មានឫសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា។

៧៣. ដោះស្រាយសមីការជីក្រេទី២ $x^2 + |x + 3| + |x - 3| - 24 = 0$ ①

- ករណី $m \leq -3$ គេបាន $|x + 3| = -(x + 3), |x - 3| = -(x - 3)$

$$\begin{aligned} \text{សមីការ ① ក្លាយជា } x^2 - (x + 3) - (x - 3) - 24 &= 0 \iff x^2 - 2x - 24 = 0 \text{ មាន} \\ \text{ឫស } x &= -4 \vee x = 6 \end{aligned}$$

$$\text{តែ } x \leq -3 \text{ នោះ } x = -4$$

- ករណី $-3 < x \leq 3$ គេបាន $|x + 3| = x + 3, |x - 3| = -(x - 3)$

$$\text{សមីការ ① ក្លាយជា } x^2 + (x + 3) - (x - 3) - 24 = 0 \iff x^2 - 18 = 0$$

មានបួស $x = \pm 3\sqrt{2}$ តែ $-3 < x \leq 3$ នោះក្នុងករណីនេះ សមីការគ្មានបួសជាចំនួនពិត។

- ករណី $3 < x$ គេបាន $|x + 3| = x + 3, |x - 3| = x - 3$

សមីការ ① ក្លាយជា $x^2 + (x + 3) + (x - 3) - 24 = 0 \iff x^2 + 2x - 24 = 0$

មានបួស $x = -6 \vee x = 4$ តែ $x > 3$ នោះ $x = 4$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានបួស } x = -4, x = 4}$

៧៤. ដោះស្រាយសមីការ $(m - 2)x^2 - (m + 3)x - 2m - 1 = 0$ ①

- ករណី $m = 2$ គេបានសមីការ ① ក្លាយជា $-5x - 5 = 0$ មានបួស $x = -1$
- ករណី $m \neq 2$ គេបាន $\Delta = (m+3)^2 + 4(m-2)(2m-1) = 9m^2 - 6m + 1 = (3m-1)^2$
មានបួស $x_1 = \frac{m+3-3m+1}{2(m-2)} = -1$, $x_2 = \frac{m+3+3m-1}{2(m-2)} = \frac{2m+1}{m-2}$

៧៥. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត b

គេមានសមីការ $1988x^2 + bx + 8891 = 0$ ① និង $8891x^2 + bx + 1988 = 0$ ② មានបួសរួមគ្នាមួយ

តាង x_0 ជាបួសរួមគ្នានៃសមីការទាំងពីរ គេបាន

$$1988x_0^2 + bx_0 + 8891 = 8891x_0^2 + bx_0 + 1988$$

$$\implies (8891 - 1988)x_0^2 = (8891 - 1988) \implies x_0 = \pm 1$$

ចំពោះ $x_0 = \pm 1$ តាម ① គេបាន $1988(\pm 1)^2 + b(\pm 1) + 8891 = 0 \iff 10879 \pm b = 0$

$$\iff \pm b = -10879 \iff b = \mp 10879$$

ដូចនេះ $\boxed{b = -10879, b = 10879}$

៧៦. សមីការ $(2003x)^2 - 2002 \times 2004x - 1 = 0$ ① មានបួសធំតាងដោយ m

សមីការ $x^2 + 2002x - 2003 = 0$ ② មានបួសតូចតាងដោយ n

$$\begin{aligned} \text{តាម ① គេបាន } \Delta_1 &= (2002 \times 2004)^2 + 4 \times 2003^2 = [(2003-1)(2003+1)]^2 + 4 \times 2003^2 \\ &= (2003^2 - 1)^2 + 4 \times 2003^2 \\ &= 2003^4 - 2 \times 2003^2 + 1 + 4 \times 2003^2 \end{aligned}$$

$$= 2003^4 + 2 \times 2003^2 + 1$$

$$= (2003^2 + 1)^2$$

$$\text{គេបាន } x_1 = \frac{2002 \times 2004 - 2003^2 - 1}{2 \times 2003^2} = \frac{2003^2 - 1 - 2003^2 - 1}{2 \times 2003^2} = -\frac{1}{2003^2}$$

$$x_2 = \frac{2002 \times 2004 + 2003^2 + 1}{2 \times 2003^2} = \frac{2003^2 - 1 + 2003^2 + 1}{2 \times 2003^2} = 1$$

$$\text{ដោយ } x_1 < x_2 \implies m = x_2 = 1$$

$$\text{តាម ② ដោយ } a + b + c = 1 + 2002 - 2003 = 0 \implies x_3 = 1, x_4 = \frac{c}{a} = -2003$$

$$\text{ដោយ } x_4 < x_3 \implies n = x_4 = -2003$$

$$\text{គេបាន } m - n = 1 - (-2003) = 2004$$

ដូចនេះ: ចម្លើយត្រឹមត្រូវគឺ (A)

៧៧. គេមាន a ជាបួសនៃសមីការ $x^2 - 3x + 1 = 0 \implies a^2 - 3a + 1 = 0 \implies a^2 + 1 = 3a$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } P &= \frac{2a^5 - 5a^4 + 2a^3 - 8a^2}{a^2 + 1} = \frac{2a^3(a^2 + 1) - 5a^2(a^2 + 1) - 3a^2}{a^2 + 1} \\ &= \frac{2a^3(3a) - 5a^2(3a) - 3a^2}{3a} = \frac{6a^4 - 15a^3 - 3a^2}{3a} \\ &= \frac{3a^2(2a^2 - 5a - 1)}{3a} = a(2a^2 - 5a - 1) \\ &= a[2(a^2 + 1) - 5a - 3] = a(6a - 5a - 1) = a(a - 3) = a^2 - 3a = \boxed{-1} \end{aligned}$$

៧៨. រករង្វង់នៃចំនួនពិត m

$$\text{គេមានសមីការ } (m^2 - 1)x^2 - 2(m + 2)x + 1 = 0 \quad \text{①}$$

• បើ $m^2 - 1 = 0 \iff m = \pm 1$ គេបានសមីការ ① មានបួសមួយជាចំនួនពិត ។

• បើ $m^2 - 1 \neq 0 \iff m \neq \pm 1$

$$\text{គេមាន } \Delta' = (m + 2)^2 - (m^2 - 1) = m^2 + 4m + 4 - m^2 + 1 = 4m + 5$$

សមីការ ① មានបួសជាចំនួនពិតមួយយ៉ាងតិច

$$\text{គេបាន } \Delta' \geq 0 \iff 4m + 5 \geq 0 \iff m \geq -\frac{5}{4}$$

$$\text{នាំឱ្យ } m \geq -\frac{5}{4} \text{ និង } m \neq \pm 1$$

ដូចនេះ: $m \geq -\frac{5}{4}$

៧៩. បើ x_0 ជាឫសរួមគ្នានៃសមីការ $x^2 - kx - 7 = 0$ និង $x^2 - 6x - (k + 1) = 0$

$$\text{គេបាន } x_0^2 - kx_0 - 7 = x_0^2 - 6x_0 - (k + 1) \iff (k - 6)(x_0 - 1) = 0$$

$$\text{គេបាន } k \neq 6 \implies x_0 = 1$$

ចំពោះ $x_0 = 1$ គេបាន $1 - k - 7 = 0 \iff k = -6$ នោះគេបានសមីការទាំងពីរក្លាយជា

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\text{មានឫស } x_0 = 1, x_1 = -7$$

$$\text{មានឫស } x_0 = 1, x_2 = 5$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{k = -6, x_0 = 1, x_1 = -7, x_2 = 5}$$

៨០. គេមានសមីការ $(c + a)x^2 + 2bx + (c - a) = 0$ ដែល $a, b, c > 0$

សមីការមានឫសឌុប នោះ $\Delta' = 0$

$$\text{គេបាន } b^2 - (c + a)(c - a) = 0 \iff b^2 - c^2 + a^2 = 0 \iff a^2 + b^2 = c^2$$

$$\text{គេបាន } c^2 = a^2 + b^2 < a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 \implies c < a + b$$

នាំឱ្យ គេអាចបង្កើតបានត្រីកោណដែលមានរង្វាស់ជ្រុង a, b, c ហើយតាមពីតាក្រីកោណនេះជា
ត្រីកោណកែងដែលមាន c ជារង្វាស់ជ្រុងអ៊ីប៉ូតេនុស។

៨១. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b

គេមានសមីការ $x^2 + 2(1 + a)x + (3a^2 + 4ab + 4b^2 + 2) = 0$ មានឫសជាចំនួនពិត នាំឱ្យ

$$\Delta' \geq 0$$

$$\text{គេបាន } (1 + a)^2 - (3a^2 + 4ab + 4b^2 + 2) \geq 0$$

$$1 + 2a + a^2 - 3a^2 - 4ab - 4b^2 - 2 \geq 0$$

$$-2a^2 - 4b^2 + 2a - 4ab - 1 \geq 0$$

$$2a^2 + 4b^2 - 2a + 4ab + 1 \leq 0$$

$$(a^2 - 2a + 1) + (a^2 + 4ab + 4b^2) \leq 0$$

$$(a - 1)^2 + (a + 2b)^2 \leq 0 \implies \begin{cases} a - 1 = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{a = 1, b = -\frac{1}{2}}$$

៨២. គេមានសមីការ $x^2 + (a + b + c)x + (a^2 + b^2 + c^2) = 0$ ①

$$\begin{aligned} \Delta &= (a + b + c)^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 4a^2 - 4b^2 - 4c^2 \\ &= 2ab + 2bc + 2ca - 3a^2 - 3b^2 - 3c^2 \\ &= -(a^2 - 2ab + b^2) - (b^2 - 2bc + c^2) - (c^2 - 2ca + a^2) - a^2 - b^2 - c^2 \\ &= -[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a^2 + b^2 + c^2)] < 0 \end{aligned}$$

$$\text{ព្រោះ } (a - b)^2 \geq 0, (b - c)^2 \geq 0, (c - a)^2 \geq 0, a^2 + b^2 + c^2 > 0$$

នាំឱ្យសមីការ ① គ្មានឫសជាចំនួនពិត។

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ចម្លើយត្រឹមត្រូវគឺ (D)}}$$

៨៣. Mr. Fat នឹងឈ្នះល្បែងនេះ ដោយគាត់គ្រាន់តែរើសយកសំណុំនៃបីចំនួនសនិទានមិនសូន្យ a, b, c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a + b + c = 0$ ។

$$\text{តាង } A, B, C \in \{a, b, c\} \text{ ដែល } A \neq B \neq C \text{ និងតាង } f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$\text{នាំឱ្យ } f(1) = A + B + C = a + b + c = 0 \text{ នោះសមីការមានឫស } x_1 = 1 \text{ និង } x_2 = \frac{C}{A} \neq 1$$

៨៤. គេមាន a, b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នា

$$\begin{aligned} \text{សមីការ } (a - 1)x^2 - (a^2 + 2)x + (a^2 + 2a) &= 0 \quad \text{① និង សមីការ } (b - 1)x^2 - (b^2 + \\ 2)x + (b^2 + 2b) &= 0 \quad \text{② មាន ឫសស្របគ្នាមួយ។} \end{aligned}$$

តាង x_0 ជាឫសស្របគ្នានៃសមីការទាំងពីរ។

$$\text{បើ } a = 1 \text{ តាម ① គេបាន } -3x + 3 = 0 \iff x_0 = 1$$

$$\text{ចំពោះ } x_0 = 1 \text{ តាម ② គេបាន } b - 1 - b^2 - 2 + b^2 + 2b = 0 \iff b = 1$$

ករណីនេះមិនពិតព្រោះតាមលក្ខខណ្ឌ $a \neq b$

$$\text{ហេតុនេះគេបាន } a > 1, b > 1, a \neq b \text{ និង } x_0 \neq 1$$

ដោយ x_0 ជាឫសស្របគ្នានៃសមីការ ① និង ② គេបាន

$$\begin{cases} (a-1)x_0^2 - (a^2+2)x_0 + (a^2+2a) = 0 & \textcircled{3} \\ (b-1)x_0^2 - (b^2+2)x_0 + (b^2+2b) = 0 & \textcircled{4} \end{cases}$$

យក $\textcircled{4} \times (a-1) - \textcircled{3} \times (b-1)$ គេបាន

$$(a^2+2)(b-1)x_0 - (b^2+2)(a-1)x_0 - (a^2+2a)(b-1) + (b^2+2b)(a-1) = 0$$

$$(a^2+2)(b-1)(x_0-1) - (b^2+2)(a-1)(x_0-1) = 0$$

$$(x_0-1)[(a^2+2)(b-1) - (b^2+2)(a-1)] = 0$$

$$(x_0-1)(a^2b - a^2 + 2b - 2 - ab^2 + b^2 - 2a + 2) = 0$$

$$(x_0-1)[(a^2b - ab^2) - (a^2 - b^2) - (2a - 2b)] = 0$$

$$(x_0-1)[ab(a-b) - (a-b)(a+b) - 2(a-b)] = 0$$

$$(x_0-1)(a-b)(ab - a - b - 2) = 0$$

$$\text{ដោយ } x_0 \neq 1 \implies x_0 - 1 \neq 0 \text{ និង } a \neq b \implies a - b \neq 0$$

$$\text{គេបាន } ab - a - b - 2 = 0 \iff ab = a + b + 2$$

- បើ $1 < a < b$ គេបាន $a = 1 + \frac{a}{b} + \frac{2}{b} < 3$ ដោយ a ជាចំនួនគត់

$$\text{នាំឱ្យ } a = 2 \implies b = \frac{a+2}{a-1} = 4$$

- បើ $1 < b < a$ ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $a = 4, b = 2$

ចំពោះតម្លៃនៃ a និង b ទាំងពីរករណីខាងលើគេបាន

$$P = \frac{a^b + b^a}{a^{-b} + b^{-a}} = \frac{a^b + b^a}{\frac{1}{a^b} + \frac{1}{b^a}} = a^b b^a \cdot \frac{a^b + b^a}{b^a + a^b} = a^b b^a = 256$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{P = 256}$$

៨៥. ដោះស្រាយសមីការ $|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = mx$ ①

គេបានតារាងសញ្ញានៃ $x^2 - 1$ និង $x^2 - 4$

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 1$	+	+	0	-	0	+	
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0	+

ដោយ $|x^2 - 1| + |x^2 - 4| > 0 \implies m$ និង x មានសញ្ញាដូចគ្នា

(i). បើ $m > 0 \implies x > 0$ គេបាន

- ករណី $0 < x \leq 1$ គេបាន $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1), |x^2 - 4| = -(x^2 - 4)$

នោះសមីការ ① ក្លាយជា

$$-(x^2 - 1) - (x^2 - 4) = mx \iff 2x^2 + mx - 5 = 0$$

$$\text{មានចូស } x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 40}}{4}$$

$$\text{តែ } 0 < x \leq 1 \implies x = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 40}}{4} \leq 1$$

$$\implies -m + \sqrt{m^2 + 40} \leq 4 \implies m^2 + 40 \leq m^2 + 8m + 16 \implies m \geq 3$$

$$\text{ករណីនេះ គេបាន } x = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 40}}{4} \text{ ដែល } m \geq 3$$

- ករណី $1 \leq x \leq 2$ គេបាន $|x^2 - 1| = x^2 - 1, |x^2 - 4| = -(x^2 - 4)$

នោះសមីការ ① ក្លាយជា

$$x^2 - 1 - (x^2 - 4) = mx \iff mx = 3 \iff x = \frac{3}{m}$$

$$\text{តែ } 1 \leq x \leq 2 \implies 1 \leq \frac{3}{m} \leq 2 \implies \frac{3}{2} \leq m \leq 3$$

$$\text{ករណីនេះ គេបាន } x = \frac{3}{m} \text{ ដែល } \frac{3}{2} \leq m \leq 3$$

- ករណី $x \geq 2$ គេបាន $|x^2 - 1| = x^2 - 1, |x^2 - 4| = x^2 - 4$ នោះសមីការ ①

ក្លាយជា

$$x^2 - 1 + x^2 - 4 = mx \iff 2x^2 - mx - 5 = 0 \text{ មានចូស } x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 40}}{4}$$

$$\text{តែ } x \geq 2 \implies x = \frac{m + \sqrt{m^2 + 40}}{4} \geq 2$$

$$\implies m + \sqrt{m^2 + 40} \geq 8 \implies m^2 + 40 \geq 64 - 16m + m^2 \implies m \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{ករណីនេះ គេបាន } x = \frac{m + \sqrt{m^2 + 40}}{4} \text{ ដែល } m \geq \frac{3}{2}$$

នាំឱ្យ ករណីទី (i) នេះគេបាន

$$x = \begin{cases} \frac{3}{m} \text{ ឬ } \frac{m + \sqrt{m^2 + 40}}{4} & \text{បើ } \frac{3}{2} \leq m \leq 3 \\ \frac{-m + \sqrt{m^2 + 40}}{4} \text{ ឬ } \frac{m + \sqrt{m^2 + 40}}{4} & \text{បើ } m \geq 3 \end{cases}$$

(ii). បើ $m < 0 \implies x < 0$

- ករណី $-1 \leq x < 0$ គេបាន $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1), |x^2 - 4| = -(x^2 - 4)$

នោះសមីការ ① ក្លាយជា

$$-(x^2 - 1) - (x^2 - 4) = mx \iff 2x^2 + mx - 5 = 0$$

$$\text{មានច្រើន } x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 40}}{4}$$

$$\text{តែ } -1 \leq x < 0 \implies x = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 40}}{4} \geq -1$$

$$\implies m + \sqrt{m^2 + 40} \leq 4 \implies m^2 + 40 \leq m^2 - 8m + 16 \implies m \leq -3$$

$$\text{ករណីនេះ គេបាន } x = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 40}}{4} \text{ ដែល } m \leq -3$$

- ករណី $-2 \leq x \leq -1$ គេបាន $|x^2 - 1| = x^2 - 1, |x^2 - 4| = -(x^2 - 4)$ នោះ

សមីការ ① ក្លាយជា

$$x^2 - 1 - (x^2 - 4) = mx \iff mx = 3 \iff x = \frac{3}{m}$$

$$\text{តែ } -2 \leq x \leq -1 \implies -2 \leq \frac{3}{m} \leq -1 \implies -3 \leq m \leq -\frac{3}{2}$$

$$\text{ករណីនេះ គេបាន } x = \frac{3}{m} \text{ ដែល } -3 \leq m \leq -\frac{3}{2}$$

- ករណី $x \leq -2$ គេបាន $|x^2 - 1| = x^2 - 1, |x^2 - 4| = x^2 - 4$

នោះសមីការ ① ក្លាយជា

$$x^2 - 1 + x^2 - 4 = mx \iff 2x^2 - mx - 5 = 0 \text{ មានច្រើន } x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 40}}{4}$$

$$\text{តែ } x \leq -2 \implies x = \frac{m - \sqrt{m^2 + 40}}{4} \leq -2$$

$$\implies m - \sqrt{m^2 + 40} \leq -8 \implies m^2 + 16m + 64 \leq m^2 + 40 \implies m \leq -\frac{3}{2}$$

$$\text{ករណីនេះ គេបាន } x = \frac{m - \sqrt{m^2 + 40}}{4} \text{ ដែល } m \leq -\frac{3}{2}$$

នាំឱ្យ ករណីទី (i) នេះគេបាន

$$x = \begin{cases} -\frac{3}{m} \text{ ឬ } \frac{m - \sqrt{m^2 + 40}}{4} & \text{បើ } -3 \leq m \leq -\frac{3}{2} \\ \frac{-m - \sqrt{m^2 + 40}}{4} \text{ ឬ } \frac{m - \sqrt{m^2 + 40}}{4} & \text{បើ } m \leq -3 \end{cases}$$

សរុបទាំងពីរករណីនេះ គេបានសមីការមានបួស

$$x = \begin{cases} \frac{3}{m} \text{ ឬ } \frac{m + \sqrt{m^2 + 40}}{4} & \text{ចំពោះ } \frac{3}{2} \leq m \leq 3 \\ \frac{-m + \sqrt{m^2 + 40}}{4} \text{ ឬ } \frac{m + \sqrt{m^2 + 40}}{4} & \text{ចំពោះ } m \geq 3 \\ -\frac{3}{m} \text{ ឬ } \frac{m - \sqrt{m^2 + 40}}{4} & \text{ចំពោះ } -3 \leq m \leq -\frac{3}{2} \\ \frac{-m - \sqrt{m^2 + 40}}{4} \text{ ឬ } \frac{m - \sqrt{m^2 + 40}}{4} & \text{ចំពោះ } m \leq -3 \end{cases}$$

ហើយសមីការគ្មានបួសចំពោះតម្លៃផ្សេងទៀតនៃ m ។

៨៦. សមីការ $x^2 + x + q_1 = 0$ មាន $\Delta_1 = 1 - 4q_1$

សមីការ $x^2 + px + q_2 = 0$ មាន $\Delta_2 = p^2 - 4q_2$

គេបាន $\Delta_1 + \Delta_2 = 1 - 4q_1 + p^2 - 4q_2$

$$= p^2 + 1 - 4q_1 - 4q_2$$

$$= p^2 + 1 - 4(q_1 + q_2)$$

$$= p^2 + 1 - 4(p - 1) \quad \text{ព្រោះ } p = q_1 + q_2 + 1$$

$$= p^2 + 1 - 4p + 4$$

$$= (p^2 - 4p + 4) + 1$$

$$= (p - 2)^2 + 1 > 0$$

នាំឱ្យ $\Delta_1 > 0$ ឬ $\Delta_2 > 0$ មានន័យថាយ៉ាងតិចមួយក្នុងចំណោមសមីការទាំងពីរមានបួសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា។

៨៧. គេមានសមីការ $x^2 + (2a - 1)x + a^2 = 0$ មានបួសពីរ x_1 និង x_2 ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

គេបាន $x_1 + x_2 = 1 - 2a, x_1 x_2 = a^2$

ដោយសមីការមានបួសពីរជាចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះ $-(2a - 1) \geq 0 \iff a \leq \frac{1}{2}$ តែ a ជា

ចំនួនគត់ នោះ $a \leq 0$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } L &= |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \sqrt{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\sqrt{x_1x_2}} \\ &= \sqrt{1 - 2a - 2\sqrt{a^2}} = \sqrt{1 - 2a - 2|a|} = \sqrt{1 - 2a + 2a} = 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{L = 1}$

៨៨. គេមានសមីការ $x^2 + x - 3 = 0$ មានបួស x_1 និង x_2

គេបាន $x_1 + x_2 = -1$ និង $x_1x_2 = -3$

តាង $A = x_1^3 - 4x_2^2 + 19$ និង $B = x_2^3 - 4x_1^2 + 19$ គេបាន

$$\begin{aligned} A + B &= (x_1^3 + x_2^3) - 4(x_1^2 + x_2^2) + 38 \\ &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] - 4[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + 38 \\ &= -(1 + 9) - 4(1 + 6) + 38 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= (x_1^3 - x_2^3) - 4(x_1^2 - x_2^2) \\ &= (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] - 4(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \\ &= (x_1 - x_2)(1 + 3) - 4(x_1 - x_2) = 0 \end{aligned}$$

គេបាន $2A = (A - B) + (A + B) = 0 \iff A = 0$

ដូចនេះ $\boxed{x_1^3 - 4x_2^2 + 19 = 0}$

៨៩. គេមានសមីការ $x^2 - px + q = 0$ មានបួសពីរ α និង β ជាចំនួនពិត

គេបាន $\alpha + \beta = p$ និង $\alpha\beta = q$

ក. រកសមីការដឺក្រេទី២ដែលមានបួស α^3 និង β^3

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } S &= \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = (\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta] = \\ &= p(p^2 - 3q) \end{aligned}$$

$$P = \alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3 = q^3$$

ដូចនេះ សមីការដឺក្រេទី២ដែលមានបួស α^3 និង β^3 មានទម្រង់ $x^2 - p(p^2 - 3q)x + q^3 = 0$

ខ. រកគ្រប់គូនៃ (p, q)

បើសមីការផ្ទៃដែលបង្កើតបានមានទម្រង់ដូចសមីការដើម នោះគេបាន

$$\begin{cases} p(p^2 - 3q) = p \\ q^3 = q \end{cases} \iff \begin{cases} p(p^2 - 3q - 1) = 0 & ① \\ q(q - 1)(q + 1) = 0 & ② \end{cases}$$

តាម ② គេបាន $q = -1, q = 0$, ឬ $q = 1$

- បើ $q = -1$ តាម ① គេបាន $p = 0$
- បើ $q = 0$ តាម ① គេបាន $p = 0, p = -1$ ឬ $p = 1$
- បើ $q = 1$ តាម ① គេបាន $p = 0, p = -2$ ឬ $p = 2$

ចំពោះតម្លៃនៃ (p, q) ទាំង៧គូនេះ គេបាន ៧ សមីការគឺ

$$x^2 - 1 = 0; x^2 = 0; x^2 + x = 0; x^2 + 1 = 0; x^2 - x = 0; x^2 + 2x + 1 = 0; x^2 - 2x + 1 = 0$$

តែក្នុងចំណោមសមីការទាំងនេះ សមីការ $x^2 + 1 = 0$ គ្មានប្រសជាចំនួនពិត ហើយសមីការទាំង៦ដែលនៅសល់ជាសមីការដែលផ្ទៀងផ្ទាត់តាមលក្ខខណ្ឌ។

ដូចនេះ គូបម្លើយនៃ (p, q) គឺ $(0, -1), (0, 0), (-1, 0), (1, 0), (-2, 1), (2, 1)$

៩០. គេមានសមីការ $(x - a)(x - a - b) = 1$ ①

$$\text{តាង } y = x - a \text{ គេបាន } y(y - b) = 1 \iff y^2 - by - 1 = 0$$

តាមទ្រឹស្តីបទ វ្យែត (Viete Theorem) គេបានផលគុណបូសស្ទើរ -1 មានន័យថាសមីការមានបូសពីរដែលមានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា។ ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\Delta = b^2 + 4 > 0$ នោះសមីការ $y^2 - by - 1 = 0$ មានបូសពីរផ្សេងគ្នា α និង β ដែល $\alpha < \beta$ ជាចំនួនពិត ។

នាំឱ្យសមីការ ① ក៏មានបូសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតដែរ ដែលតាងដោយ x_1 និង x_2 ។

$$\text{គេបាន } y_1 = \alpha \implies x_1 - a = \alpha \implies x_1 = a + \alpha < a \text{ ព្រោះ } \alpha < 0$$

$$y_2 = \beta \implies x_2 - a = \beta \implies x_2 = a + \beta > a \text{ ព្រោះ } \beta > 0$$

ដូចនេះ សមីការ ① មានបូសពីរជាចំនួនពិតដែលបូសមួយធំជាង a និងបូសមួយទៀតតូចជាង a

៩១. គេមានសមីការ $x^2 + 2(m - 2)x + m^2 - 3m + 3 = 0$ ① ដែល $m \geq -1$

$$\text{សមីការមានបូសពិតពីរផ្សេងគ្នា នាំឱ្យ } \Delta' > 0 \iff m^2 - 4m + 4 - m^2 + 3m - 3 >$$

$$0 \iff -1 \leq m < 1$$

ម្យ៉ាងទៀត តាមទ្រឹស្តីបទវ៉ែត គេបាន $x_1 + x_2 = -2(m - 2) = -2m + 4$ និង $x_1 x_2 = m^2 - 3m + 3$

ក. រកតម្លៃ m

$$\text{គេមាន } x_1^2 + x_2^2 = 6 \iff (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6$$

$$(-2m + 4)^2 - 2(m^2 - 3m + 3) = 6$$

$$4m^2 - 16m + 16 - 2m^2 + 6m - 6 = 6$$

$$2m^2 - 10m + 4 = 0 \iff m^2 - 5m + 2 = 0$$

$$\text{មានបួស } m = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ តែ } -1 \leq m < 1 \implies m = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } m = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$$

ខ. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $\frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2}$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } \frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2} &= m \left(\frac{x_1^2}{1-x_1} + \frac{x_2^2}{1-x_2} \right) \\ &= m \left(\frac{x_1^2(1-x_2) + x_2^2(1-x_1)}{(1-x_1)(1-x_2)} \right) \\ &= m \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2}{1-x_1-x_2+x_1 x_2} \right) \\ &= m \left[\frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1 x_2 - x_1 x_2(x_1+x_2)}{1-(x_1+x_2)+x_1 x_2} \right] \\ &= m \left[\frac{(-2m+4)^2 - 2(m^2-3m+3) - (m^2-3m+3)(-2m+4)}{1-(-2m+4)+m^2-3m+3} \right] \\ &= m \left[\frac{2m^3 - 8m^2 + 8m - 2}{m^2 - m} \right] \\ &= 2(m^2 - 3m + 1) \\ &= 2 \left(m - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{5}{2} \leq \left(-1 - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{5}{2} = 10 \text{ ព្រោះ } -1 \leq m < 1 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: តម្លៃអតិបរមានៃ } \frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2} \text{ គឺ } 10$$

៧២. រកតម្លៃនៃ $\frac{2b+3c}{a}$

ឧបមាថា Adam សរសេរមេគុណ a ដោយចំនួនខុសគឺ a'

គេបាន $-\frac{b}{a'} = 6, \frac{c}{a'} = 8 \implies -\frac{b}{c} = \frac{3}{4}$ នាំឱ្យ b និង c មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា។

តាមលក្ខណៈរបស់ Ben គេបាន $\left|\frac{b}{a}\right| = 3, \left|\frac{c}{a}\right| = 4$

តែសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ គ្មានឫសជាចំនួនពិត នោះ $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \implies ac > 0$

នាំឱ្យ $\frac{c}{a} = 4 \implies \frac{b}{a} = -3$

គេបាន $\frac{2b+3c}{a} = 2 \cdot \frac{b}{a} + 3 \cdot \frac{c}{a} = 2(-3) + 3(4) = 6$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\frac{2b+3c}{a} = 6}$$

៩៣. រករង្វង់នៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m

គេមានសមីការ $8x^2 + (m+1)x + m-7 = 0$ មានឫសពីរ x_1 និង x_2 ជាចំនួនអវិជ្ជមាន។

$$\text{គេបាន } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S = x_1 + x_2 < 0 \\ P = x_1 x_2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (m+1)^2 - 32(m-7) \geq 0 \\ -\frac{m+1}{8} < 0 \\ \frac{m-7}{8} > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} m^2 - 30m + 224 \geq 0 \\ m+1 > 0 \\ m-7 > 0 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការនេះ គេបាន $7 < m \leq 14$ ឬ $m \geq 16$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{7 < m \leq 14 \text{ ឬ } m \geq 16}$$

៩៤. គេមាន a និង b ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2 + 3a + 1 = 0$ និង $b^2 + 3b + 1 = 0$

នាំឱ្យ a និង b ជាឫសនៃសមីការ $x^2 + 3x + 1 = 0$ នោះ $a+b = -3, ab = 1$

$$\text{គេបាន } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} = 9 - 2 = 7$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 7}$$

៩៥. គេមាន p និង q ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $2p^2 - 3p - 1 = 0$ និង $q^2 + 3q - 2 = 0$

ដោយ $q^2 + 3q - 2 = 0$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង q^2

$$\text{គេបាន } 1 + \frac{3}{q} - \frac{2}{q^2} = 0 \iff 2\left(\frac{1}{q}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{q}\right) - 1 = 0$$

នាំឱ្យ p និង $\frac{1}{q}$ ជាបូសនៃសមីការ $2x^2 - 3x - 1 = 0$

ដោយ $pq \neq 1 \implies p \neq \frac{1}{q}$ តាមទ្រឹស្តីបទផ្សេង គេបាន $p + \frac{1}{q} = \frac{3}{2}, \frac{p}{q} = -\frac{1}{2}$

$$\text{គេបាន } \frac{pq + p + 1}{q} = p + \frac{p}{q} + \frac{1}{q} = p + \frac{1}{q} + \frac{p}{q} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\frac{pq + p + 1}{q} = 1}$$

៩៦. រកតម្លៃនៃ b

គេមាន a, b, c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC នោះ $a, b, c > 0$ ហើយ $a > b > c$

$$\implies a > b > c > 0$$

$$\text{និង } a + c = 2b, a^2 + b^2 + c^2 = 84$$

$$\text{គេបាន } ac = \frac{1}{2} [(a + c)^2 - (a^2 + c^2)] = \frac{1}{2} (4b^2 - 84 + b^2) = \frac{1}{2} (5b^2 - 84)$$

$$\text{គេបាន } a \text{ និង } c \text{ ជាបូសនៃសមីការ } x^2 - 2bx + \frac{1}{2}(5b^2 - 84) = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } \Delta = 4b^2 - 2(5b^2 - 84) = 4b^2 - 10b^2 + 168 = -6b^2 + 168 > 0 \text{ ព្រោះសមីការ}$$

មានបូស a និង c

$$\text{គេបាន } b^2 < \frac{168}{6} = 28 \implies b \leq 5 \text{ ព្រោះ } b \text{ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន}$$

$$\text{តែ } ac > 0 \implies \frac{1}{2}(5b^2 - 84) > 0 \implies b^2 > \frac{84}{5} \implies b \geq 5$$

$$\text{គេបាន } 5 \leq b \leq 5 \implies b = 5$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{b = 5}$$

៩៧. គេមានសមីការ $2x^2 - 5x - a = 0$ មានបូស x_1 និង x_2 ដែល $x_1 : x_2 = 2 : 3$

$$\text{តាង } x_1 = 2k, x_2 = 3k \text{ គេបាន } x_1 : x_2 = 2 : 3$$

$$\iff k = \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_1 + x_2}{2 + 3} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\text{នាំឱ្យ } x_2 - x_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{x_2 - x_1 = \frac{1}{2}}$$

៩៨. រកបូសដែលជាចំនួនគត់នៃសមីការ $x^2 + px + q = 0$

តាង a និង b ជាបូសនៃសមីការដែល $a \leq b$ គេបាន $a + b = -p$ និង $ab = q$

ដោយ $198 = p + q$ នាំឱ្យ $198 = -(a + b) + ab = (a - 1)(b - 1) - 1$

គេបាន $(a - 1)(b - 1) = 199 = 1 \cdot 199 = (-199) \cdot (-1)$

ដោយ $a \leq b$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a - 1 = 1 \\ b - 1 = 199 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a - 1 = -199 \\ b - 1 = -1 \end{cases}$

ដូចនេះ $(a, b) = (2, 200)$ ឬ $(-198, 0)$

៩៩. រកតម្លៃ a

សមីការ $2x^2 + ax - 2a + 1 = 0$ មានបូសពិតពីរ α និង β

តាមសម្មតិកម្មគេបាន $\alpha^2 + \beta^2 = 7\frac{1}{4} = \frac{29}{4}$

ម្យ៉ាងទៀត តាមទ្រឹស្តីបទវ៉ែត គេបាន $\alpha + \beta = -\frac{a}{2}$ និង $\alpha\beta = \frac{1 - 2a}{2}$

គេមាន $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$

សមមូល $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} + 2\left(\frac{1 - 2a}{2}\right)$

គេបាន $a^2 + 8a - 33 = 0 \implies (a - 3)(a + 11) = 0 \implies a = 3 \vee a = -11$

ដោយសមីការមានបូសពិតពីរនោះ $\Delta = a^2 + 16a - 8 \geq 0$

នាំឱ្យ $a \leq \frac{-16 - \sqrt{288}}{2} < -11 \vee a \geq \frac{-16 + \sqrt{288}}{2} > 0$

ដូចនេះ $a = 3$

១០០. រកតម្លៃនៃ $5\alpha^4 + 12\beta^3$

គេមាន α និង β ជាបូសពិតនៃសមីការ $x^2 - 2x - 1 = 0$

គេបាន $\alpha^2 = 2\alpha + 1 \implies \alpha^4 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 12\alpha + 5$

$\beta^2 = 2\beta + 1 \implies \beta^3 = 2\beta^2 + \beta = 5\beta + 2$

ម្យ៉ាងទៀតតាមទ្រឹស្តីបទវ៉ែត គេបាន $\alpha + \beta = 2$ និង $\alpha\beta = -1$

គេបាន $5\alpha^4 + 12\beta^3 = 5(12\alpha + 5) + 12(5\beta + 2) = 60(\alpha + \beta) + 49 = 120 + 49 = 169$

ដូចនេះ $5\alpha^4 + 12\beta^3 = 169$

៦. លំហាត់ស្រាវជ្រាវ

១. សមីការ $x^2 + px + q = 0$ ដែល $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}$ មានឫសជាចំនួនសនិទាន។
បង្ហាញថាឫសទាំងនោះជាចំនួនចំនួនគត់។
២. បង្ហាញថាសមីការ $x^2 + (2m + 1)x + 2n + 1 = 0$ មិនមានឫសជាចំនួនសនិទាន
បើ $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ ។
៣. កម្មករពីរនាក់ជួសជុលផ្ទះមួយ។ កម្មករទី១ ធ្វើបានពាក់កណ្តាល រួចឱ្យកម្មករទី២ បង្កើនកិច្ចការដែល
នៅសល់។ កិច្ចការនេះបានចប់ក្នុងរយៈពេល $12h\ 30mn$ តែបើកម្មករទាំងពីរធ្វើការរួមគ្នានោះគេ
អាចបញ្ចប់កិច្ចការនេះក្នុងរយៈពេល $6h$ ។ តើកម្មករនីមួយៗ ត្រូវចំណាយពេលប៉ុន្មានម៉ោងដើម្បី
ជួសជុលផ្ទះនោះ។
៤. ក្រុមហ៊ុនមួយផលិតវិទ្យុលក់ក្នុងតម្លៃ \$10 ក្នុងមួយគ្រឿង។ ម្ចាស់ក្រុមហ៊ុនប៉ាន់ស្មានថា បើគេលក់
តម្លៃ \$ x ក្នុងមួយគ្រឿងនោះឆ្ងៀរនឹងទិញប្រហែល $80 - x$ វិទ្យុក្នុងមួយខែ។
 - ក. រកតម្លៃចំនួនថេរ A និង B បើប្រាក់ចំណេញរបស់ក្រុមហ៊ុនឱ្យដោយកន្សោម $-x^2 + Ax + B$
 - ខ. កំណត់តម្លៃវិទ្យុ បើគេលក់បានចំណេញ \$1000 ។
 - គ. តើប្រាក់ចំណេញអាចឡើងដល់ \$2000 ឬទេ?
៥. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = x^2 + 4 x + 3$	ង. $y = x^2 - 3 x + 2 $
ខ. $y = 2 - x - x^2$	ច. $y = - x^2 - x - 6 $
គ. $y = x^2 + x $	ឆ. $y = x (x - 2)$
ឃ. $y = - x^2 - 2x $	ជ. $y = (3 - x) x + 1 $
៦. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោមតាមក្រាប :

ក. $x(x - 2) < 3$

ឃ. $4x(x - 1) \leq 3$

ខ. $x^2 + 5x - 6 < 0$

ង. $(1 - x)^2 \geq 17 - 2x$

គ. $2x^2 - 7x + 3 \geq 0$

ច. $(x + 2)^2 < x(4 - x) + 40$

៧. គេមាន $f(x) = x^2 - 2x - 5$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេកំពូលនៃប៉ារ៉ាបូល រួចទាញជាទម្រង់ $f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$ ។

ខ. សង់ប៉ារ៉ាបូលក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ រួចបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

៨. គេមានអនុគមន៍ $f(x) = x^2 + 3x - 1$ និង $g(x) = 4 - x^2$ ។

ក. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f និង g ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេតែមួយ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $f(x) = g(x)$ រួចមកស្រាយតាមបែកក្រាហ្វិក។

គ. ដោះស្រាយវិសមីការ $f(x) \leq g(x)$ តាមក្រាប។

៩. អនុគមន៍ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ។ ចំពោះ $x \in [x_1, x_2]$ ដែល $f(x_1) = f(x_2) = A$, $x_1 \neq x_2$ បង្ហាញថាមាន $x_0 \in (x_1, x_2)$ ដែលនាំឱ្យដេរីវេនៃ $f(x)$ ស្មើសូន្យ។

១០. គេមានសមីការ $x^2 + mx + 2 = 0$ និង $x^2 + 2x + m = 0$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការទាំងពីរមានយ៉ាងតិចមួយចំណុចពិតមួយរួមគ្នា។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសំណុំចម្លើយនៃសមីការទាំងពីរសមមូលគ្នា។

គ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $(x^2 + mx + 2)(x^2 + 2x + m) = 0$ មានមូល ៤ ផ្សេងគ្នា។

១១. ចំពោះតម្លៃណានៃចំនួនគត់ p ដែលសមីការដឺក្រេទី២ ខាងក្រោមមានមូលរួមគ្នា :

$3x^2 - 4x + p - 2 = 0$ និង $x^2 - 2px + 5 = 0$ ។

១២. គេមានសមីការ $x^2 - (m - 1)x - m^2 + m - 2 = 0$ ① ។

ក. បង្ហាញថាសមីការមានមូលពីរជាចំនួនពិតដែលមានសញ្ញាផ្ទុយគ្នាជានិច្ចចំពោះគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $L = x_1^2 + x_2^2$ មានតម្លៃតូចបំផុត (x_1 និង x_2 ជាបូសនៃសមីការ ①)។

១៣. គេមានសមីការ $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 3 - m = 0$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានបូស a, b ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2 + b^2 = a + b$ ។

ខ. រចចូរបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាង a និង b ដែលមិនអាស្រ័យ m ។

គ. ចូរបង្កើតសមីការដឺក្រេទី២ដែលមានបូស $\frac{a-1}{a+1}$ និង $\frac{b-1}{b+1}$ ។

១៤. គេមានសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2 + bx + c = 0$ និង $px^2 + qx + r = 0$ មានបូសយ៉ាងតិចមួយ រួមគ្នា។

បង្ហាញថា $(pc - ar)^2 = (pb - aq)(cq - rb)$ ។

១៥. គេមានសមីការដឺក្រេទី២ $x^2 - mx - 1 = 0$ មានបូសជាចំនួនពិត x_1 និង x_2 ។ រកតម្លៃនៃ ចំនួនពិត m ដើម្បីឱ្យកន្សោម $L = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$ មានតម្លៃធំបំផុត រួចរកតម្លៃធំបំផុត នោះ។

១៦. គេមានសមីការដឺក្រេទី២ $x^2 + 2(a+3)x + 4(a+3) = 0$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានបូសឌុប រួចរកបូសឌុបនោះ។

ខ. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានបូសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា ហើយធំជាង -1 ។

១៧. គេមានសមីការ $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ (1) ។

ក. ដោះស្រាយ និងពិភាក្សាសមីការ (1) តាមតម្លៃនៃចំនួនពិត m ។

ខ. បើសមីការ (1) មានបូស x_1 និង x_2 រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $|x_1 - x_2| \geq 2$ ។

១៨. ដោះស្រាយសមីការ $|x^2 - 3x - 4| = |x - 2| - 1$ ក្នុង \mathbb{R} ។

១៩. (CHINA/1993) α និង β ជាចំនួនពិត និងជាបូសនៃសមីការ $x^2 - px + q = 0$ ។ រកចំនួននៃគូ (p, q) ដែលសមីការដឺក្រេទី២មានបូស α^2 និង β^2 នៅតែមានទម្រង់ $x^2 - px + q = 0$ ។

២០. (CHINA/1997) គេឱ្យ α និង β ជាចំនួនពិត និងជាឫសនៃសមីការ $x^2 + 19x - 97 = 0$ និង $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} = -\frac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា។ រកតម្លៃនៃ $m+n$ ។
២១. (CHINA/1997) គេឱ្យ a, b ជាចំនួនគត់ដែល $a > b$ និង α, β ជាឫសនៃសមីការ $3x^2 + 3(a+b)x + 4ab = 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\alpha(\alpha+1) + \beta(\beta+1) = (\alpha+1)(\beta+1)$ ។ ចូររកគ្រប់គូនៃចំនួនគត់ (a, b) ។
២២. (CHNMOL/1999) គេឱ្យចំនួនពិត s, t ផ្ទៀងផ្ទាត់ $19s^2 + 99s + 1 = 0, t^2 + 99t + 19 = 0$ និង $st \neq 1$ ។ ចូររកតម្លៃនៃ $\frac{st + 4s + 1}{t}$ ។
២៣. (USSR) បង្ហាញថាបើ α និង β ជាឫសនៃសមីការ $x^2 + px + 1 = 0$ និង γ និង δ ជាឫសនៃសមីការ $x^2 + qx + 1 = 0$ នោះ $(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \gamma) = q^2 - p^2$ ។
២៤. (CHINA/1998) គេឱ្យ α និង β ជាឫសនៃសមីការ $x^2 - 7x + 8 = 0$ ដែល $\alpha > \beta$ ។ ចូរគណនាតម្លៃនៃ $\frac{2}{\alpha} + 3\beta^2$ ដោយមិនដោះស្រាយសមីការ។
២៥. គេឱ្យ $a = 8 - b$ និង $c^2 = ab - 16$ បង្ហាញថា $a = b$ ។
២៦. (USSR) តាង α និង β ជាឫសនៃសមីការ $x^2 + px + q = 0$ ហើយ γ និង δ ជាឫសនៃសមីការ $x^2 + Px + Q = 0$ សរសេរផលគុណ $(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta)$ ជាអនុគមន៍នៃមេគុណនៃសមីការដែលគេឱ្យ។
២៧. (ASUMO/1986) បើឫសនៃសមីការដឺក្រេទី២ $x^2 + ax + b + 1 = 0$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។ បង្ហាញថា $a^2 + b^2$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។
២៨. (CHINA/1999) ដោះស្រាយសមីការ $\frac{13x - x^2}{x + 1} \left(x + \frac{13 - x}{x + 1} \right) = 42$ ។
២៩. (CHINA/2004) a, b, c ជាចំនួនពិតខុសគ្នា និងខុសពីសូន្យ។ បង្ហាញថាសមីការទាំងបីខាងក្រោម $ax^2 + 2bx + c = 0, bx^2 + 2cx + a = 0$ និង $cx^2 + 2ax + b = 0$ នេះមិនអាចមានឫសទាំងពីរជាចំនួនពិតរួមគ្នាទេ។

៣០. (SSSMO(J)/2008) តាង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $n^2 + 19n + 48$ ជាការប្រាកដ។ ចូររកតម្លៃនៃ n ។

៣១. (SSSMO(J)/2009) រកតម្លៃតូចបំផុតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ដែលនាំឱ្យសមីការ

$$x^2 + 2(m + 5)x + (100m + 9) = 0 \text{ មានបូសជាចំនួនគត់។}$$

៣២. (CHNMOL/2005) គេមាន p, q ជាពីរចំនួនគត់ និងជាបូសនៃសមីការ

$$x^2 - \frac{p^2 + 11}{9}x + \frac{15}{4}(p + q) + 16 = 0 \text{ រកតម្លៃនៃ } p \text{ និង } q \text{ ។}$$

៣៣. (SSSMO/2003) តាង p ជាចំនួនបឋមដែលនាំឱ្យសមីការ $x^2 - px - 580p = 0$ មានបូសពីរជាចំនួនគត់។ ចូររកតម្លៃនៃ p ។

៣៤. (SSSMO/2006) តាង p ជាចំនួនគត់មួយដែលនាំឱ្យបូសទាំងពីរនៃសមីការ

$$5x^2 - 5px + (66p - 1) = 0 \text{ ជាចំនួនគត់។ ចូររកតម្លៃនៃ } p \text{ ។}$$

៣៥. (RUSMO/1991) រកគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ p, q ដែលនាំឱ្យសមីការ $x^2 - pqx + p + q = 0$ មានបូសទាំងពីរជាចំនួនគត់។

៣៦. ដោះស្រាយវិសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2 - (a + 1)x + 1 < 0$ ដែល a ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

៣៧. គេឱ្យចម្លើយនៃវិសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2 + bx + c > 0$ គឺ $1 < x < 2$ ។

$$\text{រកសំណុំចម្លើយនៃវិសមីការ } cx^2 + bx + a < 0 \text{ ។}$$

៣៨. គេឱ្យអនុគមន៍ដឺក្រេទី២ $f(x) = x^2 - 2ax + 6 \geq a$ ចំពោះ $-2 \leq x \leq 2$ ។ ចូររករង្វង់នៃចំនួនថេរ a ។

៣៩. គេឱ្យវិសមីការ $\frac{1}{8}(2a - a^2) \leq x^2 - 3x + 2 \leq 3 - a^2$ ពិតចំពោះគ្រប់ $x \in [0, 2]$ ។ ចូររករង្វង់នៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ a ។

៤០. គេឱ្យ

$$(i). a > 0$$

(ii). $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ ចំពោះ $-1 \leq x \leq 1$

(iii). $ax + b$ មានតម្លៃធំបំផុតស្មើនឹង 2 ពេលដែល $-1 \leq x \leq 1$ ។

ចូររកតម្លៃនៃចំនួនថេរ a, b, c ។

៤១. (CHINA/1997) គេឱ្យ α និង β ជាចំនួនពិត និងជាឫសនៃសមីការ $x^2 + 19x - 97 = 0$ និង $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} = -\frac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា។ រកតម្លៃនៃ $m+n$ ។

៤២. គេមានអនុគមន៍ដឺក្រេទី២ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ដែល $a, b, c \in \mathbb{R}$ និង $a \neq 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

(i). ចំពោះ $x \in \mathbb{R}$, $f(x-4) = f(2-x)$ និង $f(x) \geq x$

(ii). ចំពោះ $x \in (0, 2)$, $f(x) \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$

(iii). តម្លៃតូចបំផុតនៃ $f(x)$ លើ \mathbb{R} គឺ 0 ។

រកតម្លៃធំបំផុតនៃ m ($m > 1$) ដែលមាន $t \in \mathbb{R}$, $f(x+t) \leq x$ ពិតគ្រប់ $x \in [1, m]$ ។

៤៣. តាង θ ជាមុំស្រួច ដែលសមីការ $x^2 + 4x \cos \theta + \cot \theta = 0$ (x ជាអន្តរាគមន៍) មានឫសឌុប។ ចូររករង្វាស់នៃមុំ θ ។

៤៤. គេមាន α និង β ជាឫសពិតផ្សេងគ្នានៃសមីការ $4x^2 - 4tx - 1 = 0$ ($t \in \mathbb{R}$) ។

$[\alpha, \beta]$ ជាដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x) = \frac{2x-t}{x^2+1}$ ។

ក. រក $g(t) = \max f(x) - \min f(x)$

ខ. បង្ហាញថា គ្រប់ $u_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ($i = 1, 2, 3$) បើ $\sin u_1 + \sin u_2 + \sin u_3 = 1$ នោះ $\frac{1}{g(\tan u_1)} + \frac{1}{g(\tan u_2)} + \frac{1}{g(\tan u_3)} < \frac{3}{4}\sqrt{6}$ ។

៤៥. គេមាន $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $(0, +\infty)$ ។ បើ $f(2a^2 + a + 1) < f(3a^2 - 4a + 1)$ ចូររករង្វង់នៃ a ។

ឯកសារយោង

- [1] ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា, សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០, បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១៨
- [2] A. I. PRILEPKO, D.Sc., Problem Book in High-School Mathematics, Published 1985.
- [3] Xu Jiagu, Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses Vol. 2, Published 2010.
- [4] Xiong Bin & Lee Peng Yee (editors), Mathematical Olympiad in China Problems and Solutions, Published 2007