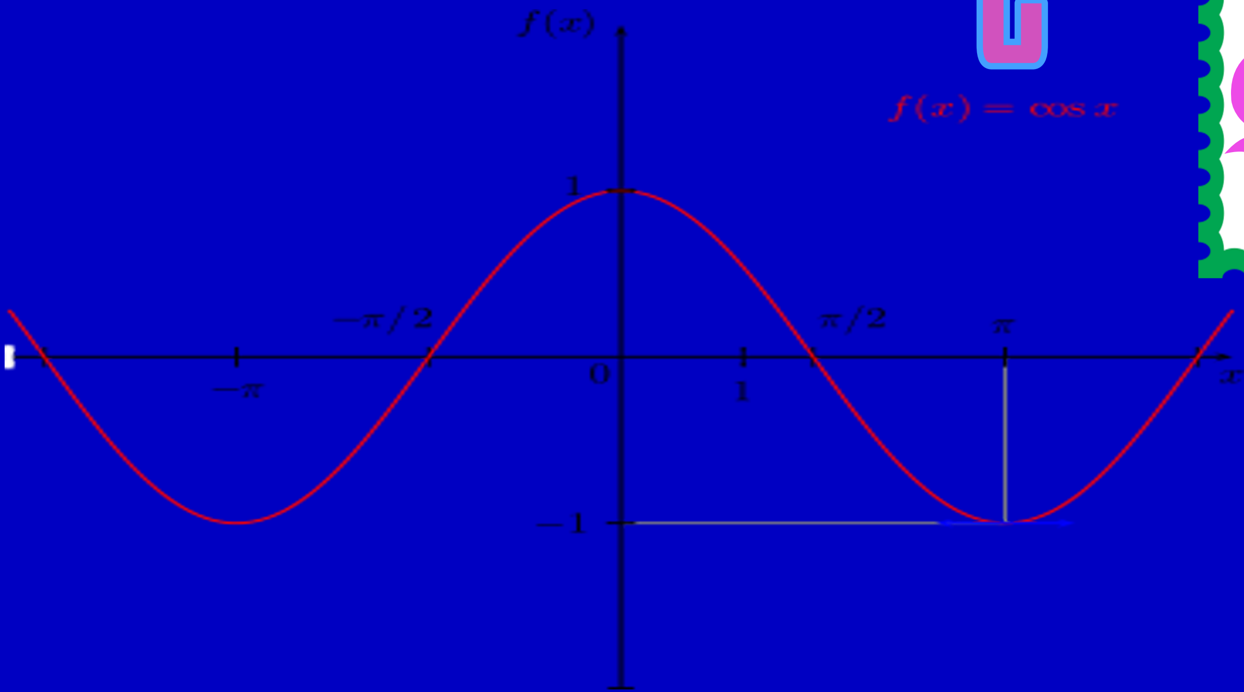
ដោយ ញ៉ិល សារ៉ាត់
បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា

សិក្សាអនុគមន៍និង ក្រាប

១២



☑ ភ្ជាប់ចេញប្រឡងបាក់ឌុប (២០០០ ដល់ ២០១៨)

លំហាត់និងចម្លើយអនុគមន៍និងក្រាបថ្នាក់ទី១២ធ្លាប់ចេញរួច
បាក់ឌុបពីឆ្នាំ ២០១០ ដល់ ២០១៨

លំហាត់

I. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$ កំណត់គ្រប់$x\neq -2$ និងមានខ្សែកោង C ។(២០១០)

a. គណនា $f'(x)$ ។ រកតម្លៃបរមានៃ f ។គណនាលីមីតនៃ f កាលណា x ខិតទៅរក $+\infty,-\infty$ ។ សង់តារាងអថេរភាព f ។

b. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនិងខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុច $x_0=1$ ។
គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងសមីការបន្ទាត់ប៉ះនិងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោងC ។

c. សង់ខ្សែកោង C បន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោង C និងអាស៊ីមតូតក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់តែមួយ ។
គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង C អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=1,x=2$ ។

II. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=x-1+2e^{-x}$ ហើយមានក្រាប C ។(២០១១)

a. រក $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត L_1 នៃក្រាប C ។ បង្ហាញថា f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=\ln 2$ ។

b. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។ រកសមីការបន្ទាត់ L_2 ដែលប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុច $A(0;1)$ ។

c. សង់បន្ទាត់ L_1,L_2 និងក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេតែមួយ ។ គេឲ្យ $\ln 2=0.7$

d. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយអាស៊ីមតូតទ្រេត L_1 ក្រាបC បន្ទាត់ឈរ$x=0$ និង$x=1$ ។

III. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\dfrac{2\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប C ។(២០១២)

a. រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$និង $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

b. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

c. សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ។ គេឲ្យ $e=2.7, \dfrac{2}{e}=0.7$

d. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេកបន្ទាត់ឈរ $x=1$និង$x=e$ ។

IV. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=2+\dfrac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប C ។(២០១៣)

a. រក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$និង $\lim_{x\to 0} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

b. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

c. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអាស៊ីមតូតដេក ។ សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូតក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ។
គេឲ្យ $e = 2.72, e^{0.5} = 1.65$ ។

d. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x = 1$និង$x = e^{0.5}$ ។

V. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $I = (0, +\infty)$ ដោយ $f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x^2}$ ។(២០១៤ លើកទី២)

1. h ជាអនុគមន៍កំណត់លើ I ដោយ $h(x) = -x + 1 - 2\ln x$ ។
គណនា $h(1)$ និងសិក្សាអថេរភាពនៃ $h(x)$ ដោយគេមិនតម្រូវគណនាលីមីតនៃ $h(x)$ ត្រង់ 0 និងត្រង់ $+\infty$ ឡើយ ។

2. a. គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ 0និងត្រង់ $+\infty$ ។

   b. គណនាដេរីវេ $f'(x)$នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

   c. បង្ហាញថានៅលើ $I, f'(x)$មានសញ្ញាដូច$h(x)$ ។

   d. ទាញរកអថេរភាពនៃ $f(x)$ លើ I និងសង់ក្រាប Cនៃ$f(x)$ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។

VI. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដោយ $f(x) = x - 5 + \dfrac{8\ln x}{x} + \dfrac{9}{x}$ និង C ជាក្រាបរបស់វា ។(២០១៤ លើកទី១)

1. a. រក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

   b. និង $\lim_{x\to 0} f(x)$

   c. ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ Δ ដែលមានសមីការ $y = x - 5$ ជាអាស៊ីតូតនៃខ្សែ Cនៅជិត $+\infty$ ។

   d. កំណត់អាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វ Δ និងខ្សែកោង C ។

2. a. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $(0, +\infty)$ គេបាន $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ ។

   b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍fដោយដឹងថាសមីការ$g(x) = 0$ មានចម្លើយ $x' = 1$និង $x'' = \alpha; (1 < \alpha)$ ។

VII. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$ ។
តាងដោយ C ជាក្រាបរបស់វា ។(២០១៤លើកទី១)

1. a. រក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

   b. បង្ហាញថាបន្ទាត់ D មានសមីការ $y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C ។

   c. តើខ្សែកោង C នៅលើឬក្រោមបន្ទាត់ D ចូរបញ្ជាក់ ។

d. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រប់ចំនួនពិត $x, f(x)=\dfrac{4e^x-xe^x-2}{e^x}$ ។

e. រក $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, (ប្រើលទ្ធផល $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$)

2. a. គណនា $f'(x)$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។ កំណត់តម្លៃពិតនៃអតិបរមារបស់ f ។

b. A ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង C ដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់ A ។

c. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ដែលគេតាងដោយ β នៅក្នុងចន្លោះ $[-1,0]$ ។
(បញ្ជាក់:២០១៨លើកទី១ចេញលំហាត់អនុគមន៍២លំហាត់)

VIII. »A: គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x^2+\ln x$ ។(២០១៥)

1. a. បង្ហាញថាអនុគមន៍ g កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។

b. គណនា $g(1)$ ។

2. a. ទាញលទ្ធផលពីសំនួរទី១ បញ្ជាក់ថា៖បើ$x>1$នោះ$x^2+\ln x\geq 0$
និងបើ$0<x\leq 1$នោះ$x^2+\ln x\leq 1$ ។

b. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2+\ln x-1$ កាលណា xនៅលើចន្លោះ$(0,+\infty)$ ។

»B:គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ$(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$ និងតាងដោយ C ក្រាបរបស់វាក្នុងតម្រុយ។

1. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ (យើងដឹងថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$)

2. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x^2}$ ។

3. ប្រើលទ្ធផលនៃសំនួរ A សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ fលើ$(0,+\infty)$ ។

4. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតនៅលើក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។

b. សិក្សាទីតាំងCធៀបនឹងΔ និងបញ្ជាក់ថាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ I រវាងក្រាប Cនិងបន្ទាត់Δ ។ សង់ Δនិងក្រាបC ។

IX. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$ ។(២០១៦)

a. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$និង$+\infty$

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបទៅនិងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=x+2$

c. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x, f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ ។

d. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

e. តើគេអាចថាយ៉ាងណាចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនិងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln 3$ ។

f. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសសូន្យមានសមីការ $y = \frac{1}{4}x + 1$

g. ដោយសន្មត់ថាចំពោះ I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C និងក្នុងតម្លៃប្រហែលនៃ $\ln 3 = 1.09$ ចូរសង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ប៉ះ d_1, d_2, d_3 នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

X. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x + \frac{1-3e^x}{1+e^x}$ ។ (២០១៧)

a. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x}$ និងគណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនិងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនិងបន្ទាត់ d_1 ។

b. គណនាលីមីត f ត្រង់ $+\infty$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ d_2 ដែលមានសមីការ $y = x-3$ អាស៊ីមតូតទៅនិងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។
សិក្សាទីតាំងក្រាប C ធៀបនិងបន្ទាត់ d_2 ។

c. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត $x, f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ។

d. សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូត d_1 និង d_2 របស់វា ។

XI. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(1, +\infty)$ ដោយ $f(x) = -x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ។ គេតាងដោយ (C) ក្រាបរបស់វា ។(២០១៨)

a. គណនាលីមីត f ត្រង់ 1 និងត្រង់ $+\infty$ ។

b. ស្រាយបញ្ជាក់ថានៅលើ $(1, +\infty)$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$ ។
សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(1, +\infty)$ ។

c. បង្ហាញថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = -x + 4$ អាស៊ីមតូតទៅនិងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។

d. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x លើ $(1, +\infty), \frac{x+1}{x-1} > 1$ និងទាញយកការប្រៀបធៀបទីតាំង (C) ធៀបនិង d_1 ។

e. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនៅលើ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនិងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\frac{5}{3}$ និងសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ d_2 នេះ ។

f. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត d_1 និងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។ ប្រើតម្លៃប្រហែល $\ln 3 = 1.1$ និងក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសចំណុច $(4,5,0)$

ដំណោះស្រាយ

I. a. គណនា $f'(x)$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$

$$\text{យើងបាន } f'(x)=\frac{(2x+3)(x+2)-(x^2+3x+6)}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{2x^2+4x+3x+6-x^2-3x-6}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

»រកតម្លៃបរមានៃ f

ដោយ $(x+2)^2>0$, គ្រប់ $x\neq -2$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $x(x+4)$

ឲ្យ $x(x+4)=0$

$\Leftrightarrow x=0, x=-4$

»តារាងសញ្ញា

x	-∞		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញាដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ $x=-4$ នោះ $f(x)$ មានអតិបរមាត្រង់ $x=-4$ នាំឲ្យ $f(-4)=\dfrac{(-4)^2+3(-4)+6}{-4+2}=\dfrac{16-12+6}{-2}=-5$

ហើយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ $x=0$ នោះ $f(x)$ មានអប្បបរមាត្រង់ $x=0$ នាំឲ្យ $f(0)=3$

»គណនាលីមីត f កាលណា x ខិតជិត $+\infty,-\infty$

» $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+6}{x+2}=+\infty$

» $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+6}{x+2}=-\infty$

»សង់តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

b. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុច $x_0 = 1$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោងមានរាង

$(D) : y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$

ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}$

$\Rightarrow f(1) = \dfrac{1 + 3 + 6}{1 + 2} = \dfrac{10}{3}$

ហើយ $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2}$

$\Rightarrow f'(1) = \dfrac{1 + 4}{(1 + 2)^2} = \dfrac{5}{9}$

នាំឲ្យយើងបាន $y = \dfrac{5}{9}(x - 1) + \dfrac{10}{3} = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{5}{9} + \dfrac{10}{3} = \dfrac{5}{9}x + \dfrac{25}{9}$

ដូចនេះ $(D) : y = \dfrac{5}{9}x + \dfrac{25}{9}$

គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងសមីការបន្ទាត់ប៉ះនិងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង

យើងមាន $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}$

$= x + 1 + \dfrac{4}{x + 2}$

ហើយ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4}{x + 2} = 0$

នោះ $(l) : y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C

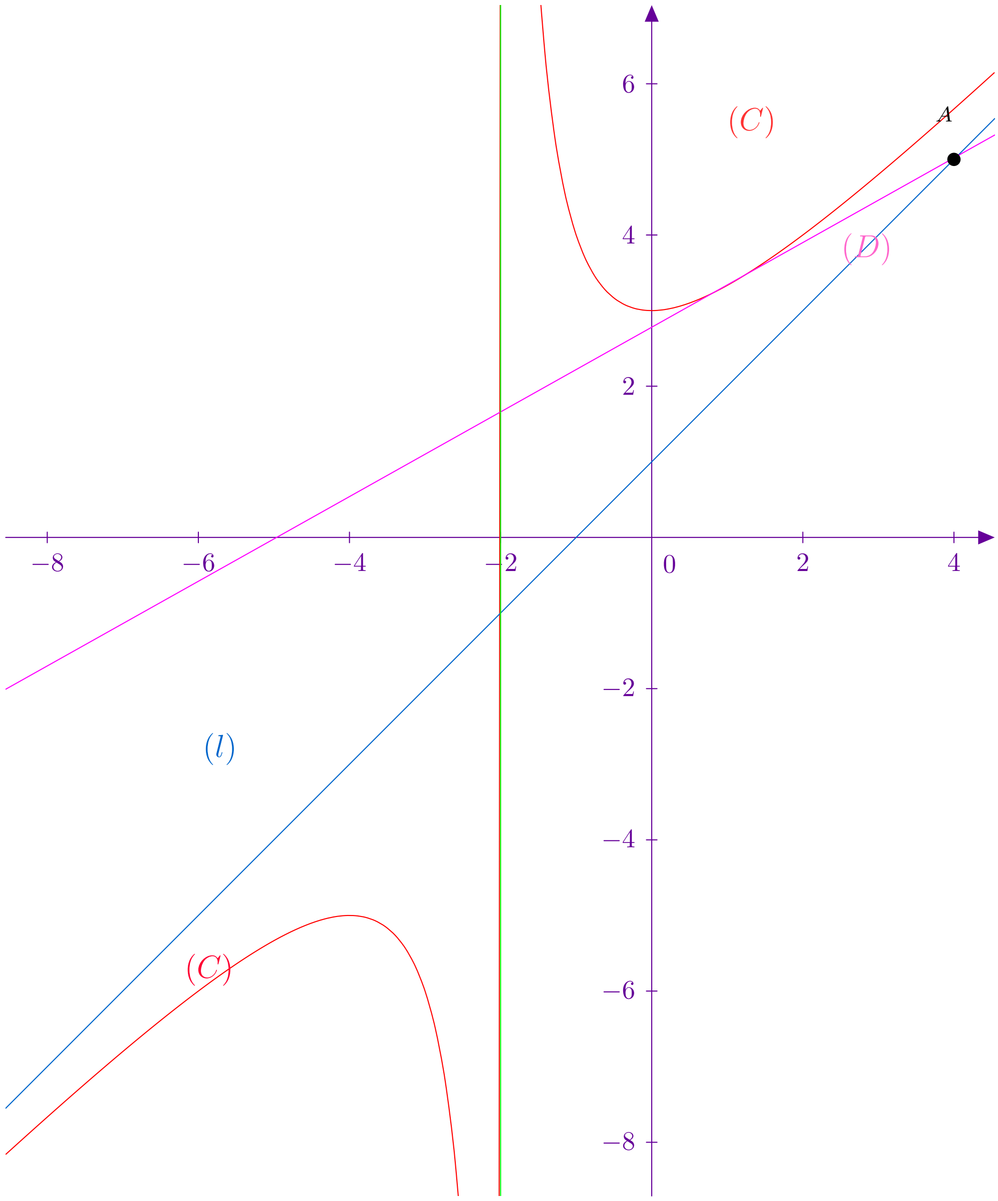
$$A = \begin{cases} y = \dfrac{5}{9}x + \dfrac{25}{9} \\ y = x + 1 \end{cases}$$

សមីការអាប់ស៊ីស

$$
\begin{aligned}
x+1 &= \frac{5}{9}x+\frac{25}{9} \\
9x+9 &= 5x+25 \\
4x &= 16 \\
\Rightarrow x &= 4 \\
\Rightarrow y &= 4+1=5
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $A(4;5)$

c. សង់ខ្សែកោង C បន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C



គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង C អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=1, x=2$

ផ្ទៃក្រឡាក្រោមខ្សែកោង $S = \int_1^2 f(x)dx$

$$= \int_1^2 (x+1+\frac{4}{x+2})dx$$

$$= [\frac{1}{2}x^2 + x + 4\ln(x+2)]_1^2$$

$$= 2+2+4\ln 4 - (\frac{1}{2}+1+4\ln 3)$$

$$= \frac{5}{2} + 4(2\ln 2 - \ln 3)$$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះ $S = \frac{5}{2} + 4(2\ln 2 - \ln 3)$ ឯកតាផ្ទៃ ។

$II.$ a. រក $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

យើងមាន $f(x) = x - 1 + 2e^{-x}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (x-1+2e^{-x})$

»ចំពោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1+2e^{-x}) = +\infty$

»ចំពោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1+2e^{-x}) = +\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

»រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត L_1 នៃខ្សែកោង C

យើងមាន $f(x) = x - 1 + 2e^{-x}$ ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

នោះ $y = x + 1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C

ដូចនេះ $(L_1) : y = x - 1$

»បង្ហាញថា f មានអប្បបរមាត្រង់ $x = \ln 2$

យើងមាន $f(x) = x - 1 + 2e^{-x}$

$\Rightarrow f'(x) = 1 - 2e^{-x}$

ឲ្យ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2e^{-x} = 0$

$$2e^{-x} = 1$$

$$\Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \ln 2$$

ឲ្យ $f'(x) > 0$

$$\Leftrightarrow 1 - 2e^{-x} > 0$$

$$e^{-x} < \frac{1}{2}$$

$$x > \ln 2$$

»តារាងសញ្ញា

x	-∞	$\ln 2$	+∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$

ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ $x=\ln 2$ នោះ $f(x)$ មានអប្បបរមាត្រង់ $x=\ln 2$

នោះ $f(\ln 2)=\ln 2-1+2e^{-\ln 2}=\ln 2-1+2e^{\ln\frac{1}{2}}=\ln 2-1+2(\frac{1}{2})=\ln 2$

$f(x)=\ln 2$

ដូចនេះ f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=\ln 2$ ។

b. សង់តារាងអថេរភាព f

x	-∞	$\ln 2$	+∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\ln 2$	↗ $+\infty$

»រកសមីការបន្ទាត់ L_2 ដែលប៉ះនិងក្រាប C ត្រង់ចំណុច $A(0;1)$

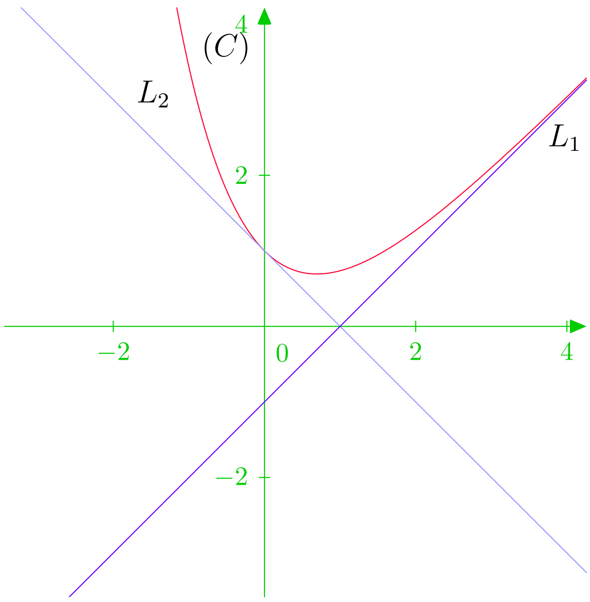
សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង

$(L_2): y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ ដោយ $f'(0)=1-2e^0=1-2=-1$

យើងបាន $(L_2): y=-(x-0)+1=x+1$

ដូចនេះ $(L_2): y=-x+1$

c. សង់បន្ទាត់ $L_1; L_2$ និងក្រាប C



d. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយអាស៊ីមតូតទ្រេត L_1 ក្រាប C បន្ទាត់ឈរ $x=0, x=1$

តាមរូបមន្ត
$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (f(x)-(L_1)dx \\ &= \int_0^1 (x-1+2e^{-x}-x+1)dx \\ &= 2\int_0^1 e^{-x}dx \\ &= -2[e^{-x}]_0^1 \\ &= -2(e^{-1}-e^0) \\ &= 2(\frac{1}{e}-1) \end{aligned}$$
$S=2(\frac{1}{e}-1)$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះ $S=2(\frac{1}{e}-1)$ ឯកតាផ្ទៃ ។

III. a. រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

យើងមាន $f(x)=1-\dfrac{2\ln x}{x}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{2\ln x}{x}) = 1$

» $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}(1-\dfrac{2\ln x}{x})$

តាង $t=\dfrac{1}{x}$

បើ $x\to0 \Rightarrow t\to+\infty$

នាំឲ្យយើងបាន
$$\begin{aligned} \lim_{x\to0}(1-\frac{2\ln x}{x}) &= \lim_{t\to+\infty}(1-2t\ln\frac{1}{t}) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1; \lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$ ។

»រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$ នោះ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ នោះ $y=1$ ជាអាស៊ីតូតដេក

ដូចនេះ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ និង $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C

b. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាព

យើងមាន $f(x)=1-\dfrac{2\ln x}{x}$

យើងបាន $f'(x)=\dfrac{-2(1-\ln x)}{x^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{-2(1-\ln x)}{x^2}$

»សង់តារាងអថេរភាព

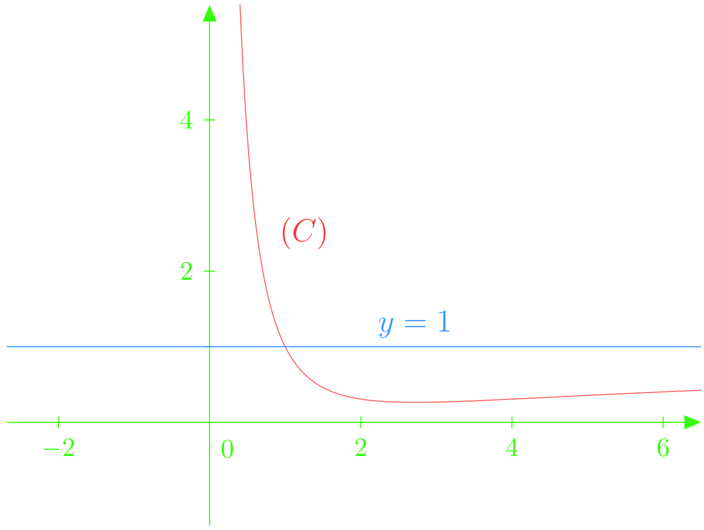
$$
\begin{aligned}
&\text{»ឲ្យ}\ f'(x) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \frac{-2(1-\ln x)}{x^2} = 0, x^2 > 0\ \text{គ្រប់}\ x \in \mathbb{R}\\
& -2(1-\ln x) = 0\\
& 1-\ln x = 0\\
& \ln x = 1\\
& x = e\\
&\text{»ឲ្យ}\ f'(x) > 0\\
\Leftrightarrow\ & \frac{-2(1-\ln x)}{x^2} > 0\\
& 1-\ln x < 0\\
& \ln x > 1\\
& x > e\\
&\text{»ឲ្យ}\ f'(x) < o\\
\Leftrightarrow\ & \frac{-2(1-\ln x)}{x^2} < 0\\
& 1-\ln x > 0\\
& \ln x < 1\\
& x < e
\end{aligned}
$$

» $f(e) = 1 - \frac{2}{e} = 1 - 0.7 = 0.3$

»តារាងអថេរភាព

x	0		$e = 2.7$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0.3	$\nearrow$	1

c. សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរមេនមួយ។



d. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x = 1$ និង $x = 2$ ដោយ $x \in [1; e]$ ក្រាប C ស្ថិតក្រោមបន្ទាត់ $y = 1$

$$\begin{aligned}
\text{គេបាន } S &= \int_1^e [1 - f(x)]dx \\
&= \int_1^e [1 - (1 - \frac{2\ln x}{x})]dx \\
&= 2\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx \\
&= 2\int_1^e (\ln x)' \ln x dx \\
&= 2[\frac{1}{2}\ln^2 x]_1^e \\
&= (\ln e)^2 - (\ln 1)^2 \\
&= 1 - 0 = 1 \text{ឯកតាផ្ទៃ}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $S = 1$ ឯកតាផ្ទៃ

$IV.$ a. រក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to 0} f(x)$

យើងបាន $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x^2}$

$$\text{យើងបាន} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2 + \frac{\ln x}{x^2}) = 2$$

$$» \lim_{x\to o} f(x) = \lim_{x\to 0}(2 + \frac{\ln x}{x^2})$$

តាង $t = \frac{1}{x}$

បើ $x \to 0$ នោះ $t \to +\infty$

នាំឲ្យយើងបាន $\lim_{x\to 0}(2 + \frac{\ln x}{x^2}) = \lim_{t\to+\infty}(2 - t^2 \ln t) = -\infty$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ និង $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

»រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C

ដោយ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ នោះ $y = 2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេក

ហើយ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ នោះ $x = 0$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

b. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x^2}$

$$\text{យើងបាន} \quad f'(x) = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

ដូចនេះ $f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$ ។

»សង់តារាងអថេរភាព

ដោយ $x > o$ គ្រប់ $x \in \mathbb{D}$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $1 - 2\ln x$

»ឲ្យ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\ln x = 0$

$$\ln x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} = 1.65$$

»ឲ្យ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x > 0$

$$\Rightarrow \ln x < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x < e^{\frac{1}{2}}$$

»ឲ្យ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x < 0$

$$\Rightarrow \ln x > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x > e^{\frac{1}{2}}$$

$\bullet f(e^{\frac{1}{2}}) = 2 + \dfrac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{e} = 2.18$

»តារាងអថេរភាព

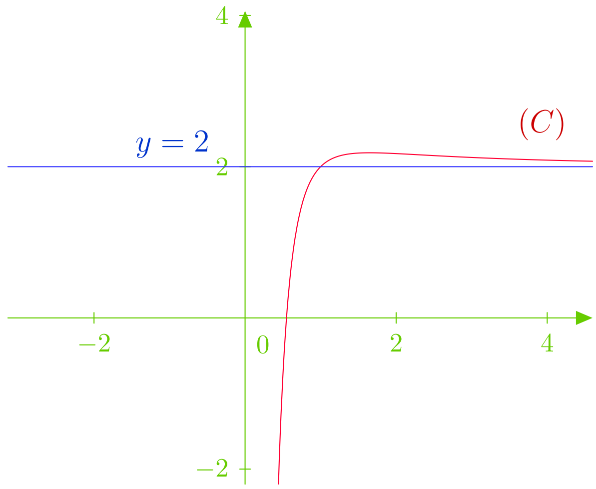
x	0		$\sqrt{e} = 1.65$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	2.18	$\searrow 2$	

c. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអាស៊ីមតូតដេក

តាង $A(x;y)$ ជាចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអាស៊ីមតូតដេក

$A = \begin{cases} y = 2 + \dfrac{\ln x}{x^2} \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ ដូចនេះ $A(1;2)$ ។

»សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូតក្នុងតម្រុយ



d. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ $x = 1$ និង $x = e^{0.5}$ ដោយ $x \in [1; e^{0.5}]$ ក្រាប C នៅលើបន្ទាត់ $y = 2$

$$\text{យើងបាន}\ S = \int_{e^{0.5}}^{1} [f(x) - 2]dx$$
$$= \int_{1}^{e0.5} \frac{1}{x^2} \ln x dx$$
$$= [-\frac{1}{x} \ln x]_1^{e^{0.5}} - \int_1^{e^{0.5}} \frac{1}{x}(-\frac{1}{x})dx$$
$$= -\frac{1}{e^{0.5}} \ln e^{0.5} - (\ln 1) + \int_1^{e^{0.5}} \frac{1}{x^2}dx$$
$$= -\frac{0.5}{e^{0.5}} - [\frac{1}{x}]_1^{e^{0.5}}$$
$$= -\frac{0.5}{e^{0.5}} - \frac{1}{e^{0.5}} + 1$$
$$= 0.09\text{ឯកតាផ្ទៃ}$$

ដូចនេះ $S = 0.09$ ឯកតាផ្ទៃ ។

V. 1. គណនា $h(1)$ និងសិក្សាអថេរភាពនៃ $h(x)$ ដោយគេមិនតម្រូវគណនាលីមីតនៃ $h(x)$ ត្រង់ 0 និងត្រង់ $+\infty$ ឡើយ

យើងមាន $h(x) = -x + 1 - 2\ln x$

$\Rightarrow h(1) = -1 + 1 - 1\ln 1 = 0$

ដូចនេះ $h(1) = 0$ ។

»សិក្សាអថេរភាពនៃ $h(x)$

• គណនាដេរីវេ $h'(x)$

យើងមាន $h(x) = -x + 1 - 2\ln x$

$\Rightarrow h'(x) = -1 - \frac{2}{x} = -\frac{x+2}{x} < 0$ គ្រប់ $x \in (0; +\infty)$

»តារាងអថេរភាព

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	$\|$	$-$		$-$	
$h(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\bullet h(x)=0$ ពេល $x=1$
$\bullet h(x)>0$ ពេល $x\in(0;1)$
$\bullet h(x)<0$ ពេល $x\in(1;+\infty)$

2. a. គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ 0 និងត្រង់ $+\infty$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$

$\bullet \lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{x+\ln x}{x^2})=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2})$

តាង $t=\dfrac{1}{x}$

បើ $x\to0\Rightarrow t\to+\infty$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2})=\lim\limits_{t\to+\infty}(t+t^2\ln\dfrac{1}{t})$

$$=\lim_{t\to+\infty}(t-t^2\ln t)$$
$$=\lim_{t\to+\infty}t(1-t\ln t)$$
$$=+\infty(1-\infty)$$
$$=-\infty$$

$\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x+\ln x}{x^2})=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2})=0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

b. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2}$

យើងបាន $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x+2x\ln x}{x^4}=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1+2\ln x}{x^3}=\dfrac{-x+1+2\ln x}{x^3}$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{-x+1+2\ln x}{x^3}$

c. បង្ហាញថានៅលើ $I;f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{-x+1+2\ln x}{x^3}=\dfrac{1}{x}(-x+1+2\ln x)=\dfrac{1}{x^3}h(x)$

ដោយ $\dfrac{1}{x^3}>0$ គ្រប់ $x\in(0;+\infty)$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាដូច $h(x)$

ដូចនេះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$ លើ I

d. ទាញយកអថេរភាពនៃ $f(x)$ លើ I

ដោយ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$ តាមតារាងអថេរភាពនៃ $h(x)$

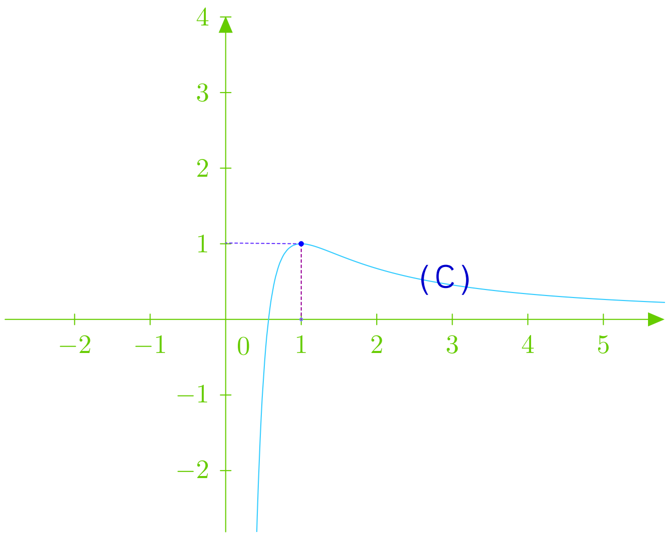
យើងបាន
- $f'(x)=0$ពេល $x=1$
- $f'(x)>0$ពេល $x\in(0;1)$
- $f'(x)<0$ពេល $x\in(1;+\infty)$
- $f(1)=1$

»តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$លើ $(0;+\infty)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow$	0

- $f(x)$ កើននៅចន្លោះ $(0;1)$
- $f(x)$ ចុះនៅចន្លោះ $(1;+\infty)$
- $f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=1;y=1$

»សង់ក្រាប Cនៃ $f(x)$ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់



VI. 1. a. រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

យើងមាន $f(x)=x-5+\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{9}{x}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5+\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{8}{x})=+\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

b. រក $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

- $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}(x-5+\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{9}{x})=\lim\limits_{x\to0}(x-5+\dfrac{8\ln x+9}{x})=-\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$ ។

c. ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ Δ ដែលមានសមីការ $y=x-5$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C នៅជិត $+\infty$

យើងមាន $f(x)=x-5+\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{9}{x}$ ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{9}{x})=0$

នោះ $y=x-5$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C

ដូចនេះ $(\Delta): y=x-5$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C ។

d. កំណត់អាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វ Δ និងខ្សែកោង C

តាង $A(x;y)$ ជាចំណុចប្រសព្វ Δ និងក្រាប C

$$A=\begin{cases} y=x-5+\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{9}{x} (1)\\ y=x-5 \end{cases}$$ យក $(1)-(2)$ យើងបាន

$$\frac{8\ln x}{x}+\frac{9}{x}=0$$
$$\frac{8\ln x}{x}=-\frac{9}{x}$$
$$\Rightarrow \ln x=-\frac{9}{8}$$
$$\Rightarrow x=e^{-\frac{9}{8}}=\frac{1}{e^{\frac{9}{8}}}=\frac{1}{e\sqrt[9]{e}}$$

ដូចនេះ អាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វ Δ និងក្រាប C គឺ $x=\dfrac{1}{e\sqrt[9]{e}}$

2. a. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $(0;+\infty)$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

យើងមាន $f(x)=x-5+\dfrac{8\ln x+9}{x}$

យើងបាន $f'(x)=1+\dfrac{8-8\ln x-9}{x^2}=\dfrac{x^2-8\ln x-1}{x^2}$

តាង $g(x)=x^2-8\ln x-1$

នាំឲ្យយើងបាន $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ដែល $g(x)=x^2-8\ln x-1$ ។

b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ដោយដឹងថាសមីការ $g(x)=0$ មានចម្លើយ $x'=1$ និង $x''=\alpha;\alpha>1$

ដោយ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ដែល $x^2>0$ គ្រប់ $x\in(0;+\infty)$

នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $g(x)$

»សិក្សាសញ្ញា $g(x)$

យើងមាន $g(x)=x^2-8\ln x-1$

យើងបាន $g'(x)=2x-\dfrac{8}{x}=\dfrac{2x^2-8}{x}$

ឲ្យ $g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^2-8}{x}=0$
$$\Rightarrow 2x^2-8=0$$
$$\Rightarrow x=\pm 2$$
$x=2$ ព្រោះ $x\in(0;+\infty)$

•$g(x)=0$ មានឫស $x'=1; x''=\alpha; \alpha>1$
គេបាន $g(1)=0; g(\alpha)=0$
•$g(2)=3-8\ln 2=-2.5$
•$g(e)=e^2-9<0; g(4)=15-16\ln 2>0$
គេបាន $2<e<\alpha<4$
គេបានតារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$ លើ $(0;+\infty)$ គឺ

x	0		1		2		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖		$-$		0		$+$		
$g(x)$	‖	↘	0	↘	-2.5	↗	0	↗	

តាមតារាងអថេរភាព យើងបាន
•$g(x)<0$ ពេល $x\in(1;\alpha)$
•$g(x)>0$ ពេល $x\in(0;1)\cup(\alpha;+\infty)$
នាំឲ្យយើងបាន
•$f'(x)<0$ ពេល $x\in(1;\alpha)$
•$f'(x)>$ ពេល $x\in(0;1)\cup(\alpha;+\infty)$
•$f'(1)=0; f'(\alpha)=0$
•$f(1)=1-5+0+9=5$
គេបាន តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ លើ $(0;+\infty)$ គឺ

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ -∞	↗	5	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

គេបាន
•$f(x)$ កើនលើចន្លោះ $x\in(0;1)\cup(\alpha;+\infty)$
•$f(x)$ ចុះលើចន្លោះ $x\in(1;\alpha)$
•$f(x)$ មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=1; y=5$
•$f(x)$ មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=\alpha; y=f(\alpha)$

$VII.$ 1. a. រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
យើងមាន $f(x)=4-x-2e^{-x}$

យើងបាន $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(4 - x - e^{-x}) = -\infty$
ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b. បង្ហាញថាបន្ទាត់ D មានសមីការ $y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C
យើងមាន $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$ ហើយ $\lim_{x\to+\infty}(2e^{-x}) = 0$
នោះ $y = 4 - x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C
ដូចនេះ $(D): y = 4 - x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C

c. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃខ្សែកោង C និងបន្ទាត់ (D)
យក $(C) - (D) = 4 - x - 2e^{-x} - 4 + x + 2e^{-x} = 8 > 0$
$\Leftrightarrow (C) - (D) > 0$
$\Leftrightarrow (C) > (D)$ មានន័យថា ក្រាប C នៅលើបន្ទាត់ D
ដូចនេះខ្សែកោង C នៅលើបន្ទាត់ D

d. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា គ្រប់ចំនួនពិត $x; f(x) = \dfrac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$
យើងមាន $f(x) = 4 - x - 2e{-}x = 4 - x - \dfrac{2}{e^x} = \dfrac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$ ពិត
ដូចនេះ $f(x) = \dfrac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$

e. រក $\lim_{x\to-\infty} f(x)$;(ប្រើលទ្ធផល $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$)
យើងមាន $f(x) = \dfrac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$
យើងបាន $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(\dfrac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}) = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x - 2}{e^x} = \lim_{x\to-\infty}(4 - \dfrac{2}{e^x}) = -\infty$
ដូចនេះ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2. a. គណនា $f'(x)$
យើងមាន $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$
យើងបាន $f('x) = -1 + 2e^{-x} = -1 + \dfrac{2}{e^x} = \dfrac{2 - e^x}{e^x}$
ដូចនេះ $f'(x) = \dfrac{2 - e^x}{e^x}$
• សិក្សាអថេរភាព និង រកតម្លៃអតិបរមានៃ $f(x)$
យើងមាន $f'(x) = \dfrac{2 - e^x}{e^x}$

»ឲ្យ $f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{2 - e^x}{e^x} = 0$
$\Rightarrow 2 - e^x = 0$
$e^x = 2$
$\Rightarrow x = \ln 2$

•$f(\ln x) = 3 - \ln x$
»តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$3-\ln 2$	↘ $-\infty$

$\bullet f(x)$ កើនលើចន្លោះ $x \in (0;\ln 2)$
$\bullet f(x)$ ចុះលើចន្លោះ $x \in (\ln 2;+\infty)$
$\bullet f(x)$ មានអតិបរមាត្រង់ $x=\ln 2; y = 3-\ln 2$

b. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់ A
ដោយ A ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង C មានអាប់ស៊ីស 0
យើងបាន $y_A = f(0) = 4-0-2e^0 = 4-2 = 2$
តាង (t) ជាសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $A(0;2)$
យើងបាន $(t): y = f'(x_A)(x-x_A)+y_A = f'(0)(x-0)+2$ ហើយ $f'(0)=2$
យើងបាន $(t): y = 2x+2$
ដូចនេះ $(t): y = 2x+2$

c. បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ដែលគេតាងដោយ β នៅក្នុងចន្លោះ $[-1;0]$
$\bullet f(-1) = 4+1-2e = 5-2e < 0$
$\bullet f(0) = 4+1-2 = 3 > 0$
យើងបាន $f(-1)\times f(0) < 0$
តាមទ្រឹស្តីបទកណ្តាលសមីការ $f(x)=0$ មានឫស β តែមួយគត់នៅចន្លោះ $[-1;0]$
ដូចនេះសមីការ $f(x)=0$ មានឫស β តែមួយគត់នៅចន្លោះ $[--1;0]$

$VIII.$ A. 1. a. បង្ហាញថាអនុគមន៍ g កើនដាច់ខាតលើ $(0;+\infty)$
យើងមាន $g(x) = x^2+\ln x$
យើងបាន $g'(x) = 2x+\dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2+1}{x} > 0$ គ្រប់ $x \in (0;+\infty)$
ដូចនេះអនុគមន៍ g កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $(0;+\infty)$

b. គណនា $g(1)$
$\bullet g(1) = 1+\ln 1 = 1$
ដូចនេះ $g(1) = 1$

2. a. ទាញលទ្ធផលពីសំនួរទី១ បញ្ជាក់ថា៖ បើ $x > 1$ នោះ $x^2+\ln x >\geq 0$ និងបើ $0 < x \leq 1$ នោះ $x^2+\ln x \leq 1$
ដោយ $g(1) = 1$ ហើយ g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $0;+\infty$
គេបាន

• បើ $x \geq 1$ នោះ $g(x) \geq 1 \Rightarrow x^2+\ln x \geq 0$
• បើ $0<x \leq$ នោះ $g(x) \leq 1 \Rightarrow x^2+\ln x \leq 1$

b. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2+\ln x-1$ កាលណា x នៅលើចន្លោះ $(0;+\infty)$
• ពេល $x>1; x^2+\ln x>1 \Leftrightarrow x^2+\ln x-1>0$
• ពេល $0<x<1; x^2+\ln x<1 \Leftrightarrow x^2+\ln x-1<0$
• ពេល $x=1; x^2+\ln x- =1 \Leftrightarrow x^2+\ln x-1=0$

B. 1. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ (យើងដឹងថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

យើងមាន $f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x+1-\frac{\ln x}{x})=0+1-(-\infty)$

និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1-\frac{\ln x}{x})=+\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$

យើងមាន $f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}$

យើងបាន $f'(x)=1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$ ពិត

ដូចនេះ $f'(x)=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$

3. ប្រើលទ្ធផលនៃសំនួរ A សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

ដោយ $f'(x)=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$ យកសញ្ញាតាម $x^2+\ln x-1$
• ពេល $x>1; f'(x)>0$
• ពេល $0<x<1; f'(x)<0$
• ពេល $x=1; f'(x)=0$

»សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $(0;+\infty)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

4. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតនៅលើក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

យើងមាន $f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}$ ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

នោះ $y=x+1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C

ដូចនេះ $(\Delta): y=x+1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C

b. សិក្សាទីតាំ C ធៀបនឹង Δ និងបញ្ជាក់ថាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ I រវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ Δ

យក $(C)-(\Delta)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}-x-1=\dfrac{\ln x}{x}$

តាង $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

»ឲ្យ $h(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x}=0$

$\ln x=0$

$\Rightarrow x=1$

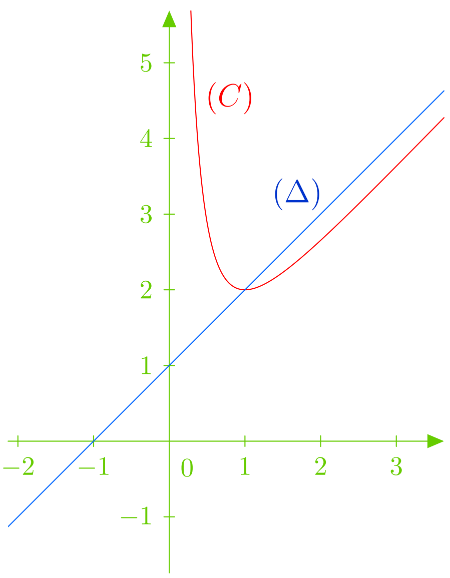
»តារាងសញ្ញានៃ $(C)-(\Delta)$

x	0		1		$+\infty$
$C-\Delta$	‖	$-$	0	$+$	

»តាមតារាងសញ្ញា

- ក្រាប C នៅក្រោមបន្ទាត់ D ពេល $x\in(0;1)$
- ក្រាប C នៅលើបន្ទាត់ D ពេល $x\in(1;+\infty)$

»សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ Δ



$IX.$ a. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

យើងបាន $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right)=+\infty$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបទៅនិងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=x+2$

យក $C-d_1=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}-x-2=-\dfrac{4e^x}{e^x+3}<0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ៖ ក្រាប C នៅលើបន្ទាត់ d_1 គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

c. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x;\ f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$

យើងមាន $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$

យើងបាន
$$\begin{aligned}f'(x)&=1-\frac{4e^x(e^x+3)-4e^{2x}}{(e^x+3)^2}\\&=\frac{(e^x+3)^2-4e^{2x}-12e^x+4e^{2x}}{(e^x+3)^2}\\&=\frac{e^{2x}+6e^x+9-12e^x}{(e^x+3)^2}\\&=\frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2}\\&=\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2\end{aligned}$$ ពិត

ដូចនេះ៖ $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ ។

d. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

ដោយ $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

- ឲ្យ $f'(x)=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2=0\Rightarrow x=\ln 3$
- តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

គេបានអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $x\in\mathbb{R}$

- តារាងអថេរភាពនៃ f
- $f(\ln 3)=\ln 3+2-\dfrac{4e^{\ln 3}}{e^{\ln 3}+3}=\ln 3-2\dfrac{4\times 3}{3+3}=\ln 3$

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

e. កំណត់បន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I មានអាប់ស៊ីសស្មើ $\ln 3$

គេបាន $d_2 : y = f'(\ln 3)(x - \ln 3) + f(\ln 3)$

ដោយ $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2 \Rightarrow f'(\ln 3) = \left(\frac{e^{\ln 3} - 3}{e^{\ln 3} + 2}\right)^2 = \left(\frac{3-3}{3+3}\right)^2 = 0$

នាំឲ្យគេបាន $d_2 : y = f(\ln 3) = \ln 3$ ជាបន្ទាត់ដេកស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ដូចនេះបន្ទាត់ $d_2 : y = \ln 3$ ។

f. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសសូន្យមានសមីការ $y = \frac{1}{4}x + 1$

គេបាន $d_3 : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

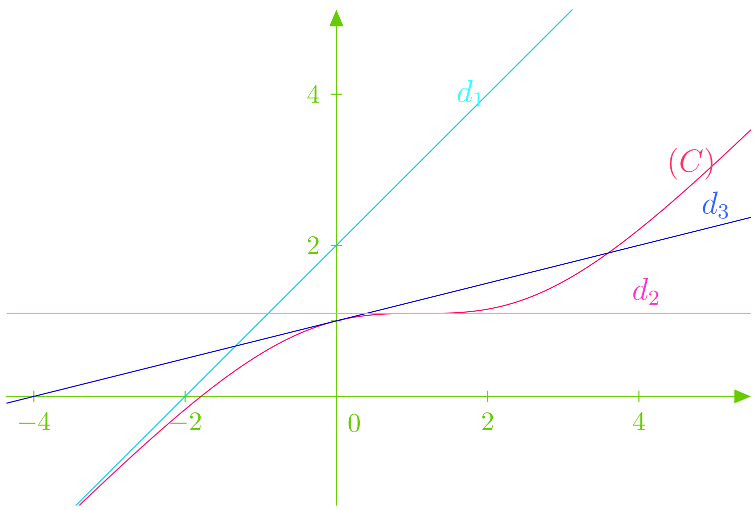
ដោយ $f'(o) = \left(\frac{1-3}{1+3}\right)^2 = \frac{1}{4}$

ហើយ $f(0) = 2 - \frac{4}{1+3} = 1$

នាំឲ្យគេបាន $d_3 : y = \frac{1}{4}x + 1$ (ពិត)

ដូចនេះ៖ $d_3 : y = \frac{1}{4}x + 1$ ។

• សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ប៉ះ $d_1; d_2; d_3$



X. a. បង្ហាញថា $f(x) = x - 1 - \frac{4e^x}{1+e^x}$

យើងបាន $f(x) = x + \frac{1-3e^x}{1+e^x} = x + \frac{1+e^x-4e^x}{1+e^x} = x + \frac{1-3e^x}{1+e^x}$ (ពិត)

ដូចនេះ $f(x)=x+\dfrac{1-3e^x}{1+e^x}$

• គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\dfrac{1-3e^x}{e^x+1})=-\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ។

• ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ $d_1:y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{4e^x}{1+e^x})=0$

នោះបន្ទាត់ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C

ដូចនេះបន្ទាត់ $d_1:y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C

• សិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប C និងបន្ទាត់ d_1

យក $C-d_1=x+1-\dfrac{4e^x}{1+e^x}-x-1=-\dfrac{4e^x}{1+e^x}<0$ គ្រប់ $\in\mathbb{R}$

ដូចនេះក្រាប C នៅក្រោមបន្ទាត់ d_1

b. គណនាលីមីត f ត្រង់ $+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1-\dfrac{4e^x}{1+e^x})=+\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ $d_2:y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

យើងមាន $f(x)=x+1-\dfrac{4e^x}{1+e^x}=x+1-\dfrac{4e^x+4-4}{1+e^x}=x-3+\dfrac{4}{1+e^x}$

ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{4}{1+e^x})=0$

នោះ $y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C

ដូចនេះបន្ទាត់ $d_2:y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C

• សិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប C និងបន្ទាត់ d_2

យក $C-d_2=x-3+\dfrac{4}{1+e^x}-x+3=\dfrac{4}{1+e^x}>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះក្រាប C នៅលើបន្ទាត់ d_2 គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

c. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត $x; f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

យើងមាន $f(x)=x-3+\dfrac{4}{1+e^x}$

យើងបាន $f'(x)=1-\dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{(e^x+1)^2-4e^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)}=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

ដូចនេះ $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

d. សិក្សាអថេរភាពនៃ f

ដោយ $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

•$f'(x)=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2\Rightarrow x=0$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

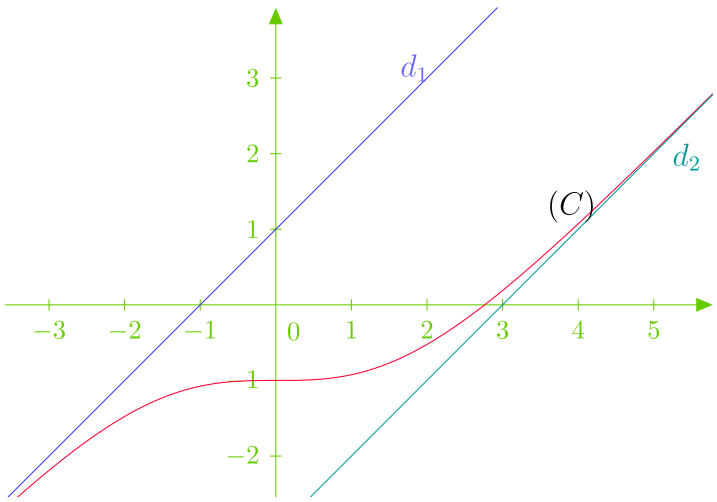
•$f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច

•$f(0) = 0$

• សង់តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូត $d_1; d_2$



s

XI. a. គណនាលីមីត f ត្រង់ 1និងត្រង់ $+\infty$

យើងមាន $f(x) = -x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

យើងបាន

• $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(-x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(-x + 1 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)) = -\infty$

ដូចនេះ៖ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

b. ស្រាយបំភ្លឺថានៅលើ $(1; +\infty)$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$

យើងមាន $f(x) = -x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -x + 4 + \ln(x+1) - \ln(x-1)$

$$\text{យើងបាន } f'(x) = -1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{-(x+1)(x-1) + x - 1 - x - 1}{(x+1)(x-1)}$$
$$= \frac{-(x^2-1) - 2}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} \text{ (ពិត)}$$

ដូចនេះ៖ $f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$ ។

• សិក្សាអថេរភាពនៃ f

ដោយ $f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x-1)(x+1)} < 0$ គ្រប់ $x \in (1; +\inf)$

នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ច

តារាងសញ្ញា

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$

• សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(1;+\infty)$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$
$f(x)$	$\|\|$	$+\infty \searrow -\infty$

c. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_1 : y = -x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$
យើងបាន $f(x) = -x+4+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = 0$
នោះបន្ទាត់ $y = -x+4$ ជាអាស៊ីមតូត
ដូចនេះបន្ទាត់ $d_1 : y = -x+4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

d. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x លើ $(1;+\infty)$; $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$ និងទាញយកការប្រៀបធៀបទីតាំង C ធៀប d_1
ចំពោះ $x \in (1;+\infty)$ នោះ $x+1 > x-1 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1} > 1$
ដូចនេះ $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$
• ទាញយកការប្រៀបធៀបទីតាំ (C) ធៀបបន្ទាត់ d_1

$$\begin{aligned}
\text{យើងបាន}\quad \frac{x+1}{x-1} &> 1\\
\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &> \ln 1\\
-x+4+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-(-x+4) &> 0\\
\Leftrightarrow C - d_1 &> 0
\end{aligned}$$

ដូចនេះក្រាប C នៅលើបន្ទាត់ d_1 គ្រប់ $x \in (1;+\infty)$

e. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចលើក្រាប (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\dfrac{5}{3}$ និងសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ d_2
តាង $A(x_A;y_A)$ ជាចំណុចបន្ទាត់ d_2 ប៉ះក្រាប C
•$f(x) = -x+4+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
$\Rightarrow f(x_A) = -x_A+4+\ln\left(\dfrac{x_A+1}{x_A-1}\right)$ (1)

ហើយ $f'(x) = -\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f'(x_A) &= -\frac{x_A^2+1}{x_A^2-1}\\
f'(x_A) &= -\frac{5}{3}\\
\Leftrightarrow -\frac{x_A^2+1}{x_A^2-1} &= -\frac{5}{3}\\
\Leftrightarrow 3(x_A^2+1) &= 5(x_A^2-1)\\
3x_A^2+3 &= 5x_A^2-5\\
2x_A^2 &= 8\\
\Rightarrow x_A &= \pm 2
\end{aligned}$$

$x_A = 2$ ព្រោះ $x \in (1;+\infty)$

តាម $(1) \Rightarrow y_A = -2+4+\ln\left(\dfrac{2+1}{2-1}\right) = 2+\ln 3$

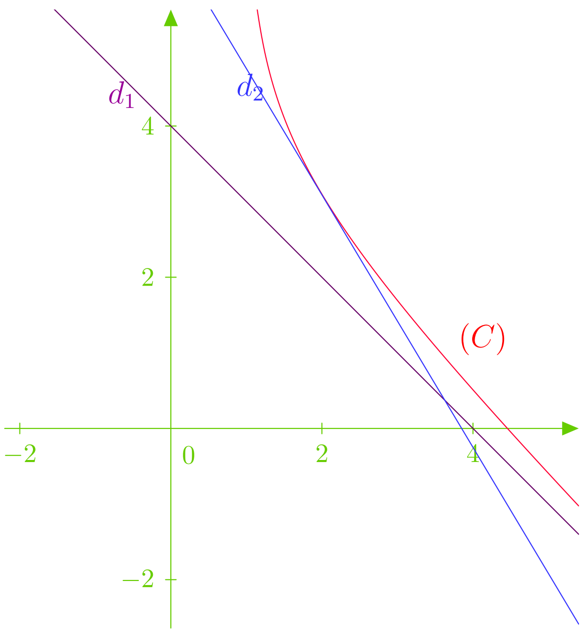
ដូចនេះ $A(2;2+\ln 3)$

• សរសេរសមីការបន្ទាត់ d_2

គេបាន $d_2 : y = -\dfrac{5}{3}(x-2)+2+\ln 3 = -\dfrac{5}{3}x+\ln 3+\dfrac{16}{3}$

ដូចនេះ $d_2 : y = -\dfrac{5}{3}x+\ln 3+\dfrac{16}{3}$ ។

f. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ $d_1; d_2$



FACEBOOK: SARATH NHIL

FACEBOOKPAGE: MATH KON KHMER

ល្ងង់មិនមែនជាកំហុសទេ

ប៉ុន្តែការមិនប្រឹងប្រែងរៀនទើបជាកំហុស!!!