វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ប្រលងអាហារូបករណ៍ទៅបរទេស

រៀបរៀងដោយ នូ ច័ន្ទណារិទ្ធិ

<u>វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ០១</u> **ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា**

ប្រលងអាហារូបករណ៍ទៅសិក្សានៅសាធារណរដ្ឋស៊ីង្ហបុរី

I. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f\left(x\right)=\ln\left(e^{x}+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$ ។

II. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម

$$\begin{cases}\sin x=\sqrt{2}\sin y\\ \tan x=\sqrt{3}\tan y\end{cases},0<x<\pi;0<y<\pi\text{។}$$

III. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}ax+by=c\\ dx+ey=f\end{cases}$ ដែល a,b,c,d,e,f ជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួមមិនសូន្យ ។

IV. តាង $x=1+i$ ជាឫសនៃសមីការ $x^{3}-3x^{2}+ax+b=0$ ។

ក. រកតម្លៃ a និង b ។

ខ. រកឫសផ្សេងទៀត ។

ដំណោះស្រាយ

I. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f\left(x\right)=\ln\left(e^{x}+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$

យើងមាន $f\left(x\right)=\ln\left(e^{x}+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$

$$f'(x)=\frac{\left(e^{x}+\sqrt{1+e^{2x}}\right)'}{e^{x}+\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$=\frac{2e^{x}\sqrt{1+e^{2x}}+2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}\left(e^{x}+\sqrt{1+e^{2x}}\right)}$$

$$= \frac{e^x + \frac{\left(1+e^{2x}\right)'}{2\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$= \frac{2e^x\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)}{2\sqrt{1+e^{2x}}\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)}$$

ដូចនេះ $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

II. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{2}\sin y \\ \tan x = \sqrt{3}\tan y \end{cases} ,0 < x < \pi ; 0 < y < \pi$$

ដោយ $0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ នោះ $\tan x \neq 0$ និង $\tan y \neq 0$

គេអាចសរសេរ $\frac{\sin x}{\tan x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sin y}{\tan y}$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos y$$

ដោយ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ គេបាន

$$\left(\sqrt{2}\sin y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos y\right)^2 = 1$$

$$2\sin^2 y + \frac{2}{3}\cos^2 y = 1$$

$$2\left(1-\cos^2 y\right) + \frac{2}{3}\cos^2 y = 1$$

$$2 - 2\cos^2 y + \frac{2}{3}\cos^2 y = 1$$

$\Leftrightarrow -6\cos^2 y + 2\cos^2 y = 3-6$

$\Leftrightarrow \cos^2 y = \dfrac{3}{4}$

នាំអោយ $\cos y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ដោយ $0 < y < \pi$ នោះ $y = \dfrac{\pi}{6}$ រឺ $y = \dfrac{5\pi}{6}$

-បើ $y = \dfrac{\pi}{6}$ នោះ $\begin{cases} \sin x = \sqrt{2}\sin y = \sqrt{2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

តែ $0 < x < \pi$ នោះ $x = \dfrac{\pi}{4}$

-បើ $y = \dfrac{5\pi}{6}$ នោះ $\begin{cases} \sin x = \sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ដោយ $0 < x < \pi$ នោះ $x = \dfrac{3\pi}{4}$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ $\left(x = \dfrac{\pi}{4}, y = \dfrac{\pi}{6}\right)$ និង $\left(x = \dfrac{5\pi}{6}, y = \dfrac{3\pi}{4}\right)$

III. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ ដែល a,b,c,d,e,f ជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួមមិនសូន្យ

ដោយ a,b,c,d,e,f ជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលតួនីមួយៗនិងផលសងរួមខុសពីសូន្យ នោះគេបាន :

$$b = a + r$$
$$c = a + 2r$$
$$d = a + 3r$$
$$e = a + 4r$$
$$f = a + 5r$$

ប្រព័ន្ធសមីការអាចសរសេរជា $\begin{cases} ax + (a+r)y = a + 2r \\ (a+3r)x + (a+4r)y = a + 5r \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + ay + ry = a + 2r & (1) \\ ax + 3rx + ay + 4ry = a + 5r & (2) \end{cases}$$

យក $(2) - (1) \Rightarrow 3rx + 3ry = 3r$

$$x + y = 1$$

យើងបាន $\begin{cases} ax + (a+r) = a + 2r \\ x + y = 1 \end{cases}$

នាំអោយ $ax + (a+r)(1-x) = a + 2r$

$$-rx = r$$
$$x = -1$$

នោះ $y = 1 - x = 1 - (-1) = 2$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ $(x = -1, y = 2)$

IV. ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b

យើងមាន $x = 1 + i$ ជាឫសនៃសមីការ $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$

$$\Rightarrow (1+i)^3 - 3(1+i)^2 + a(1+i) + b = 0$$

$$1 + 3i + 3i^2 + i^3 - 3 - 6i - 3i^2 + a + ai + b = 0$$

$$(a-4)i + a + b - 2 = 0$$

យើងទាញបាន $\begin{cases} a-4=0 \\ a+b-2=0 \end{cases}$

នាំអោយ $a=4, b=-2$

ដូចនេះ $a=4, b=-2$

ខ. រកឫសផ្សេងទៀត

សមីការ $x^3-3x^2+4x-2=0$ មានឫសមួយជាចំនួនកុំផ្លិច $x=1+i$

នោះវាមានឫសមួយទៀតជាចំនួនកុំផ្លិច $x=1-i$

ពហុធា x^3-3x^2+4x-2 ត្រូវចែកដាច់នឹង $\left[x-(1+i)\right]\left[x-(1-i)\right]=x^2-2x+2$

តាមប្រមាណវិធីចែកពហុធា $x^3-3x^2+4x-2=(x-1)\left(x^2-2x+2\right)$

សមីការអាចសរសេរ $(x-1)\left(x^2-2x+2\right)=0$

ដូចនេះ $x_1=1, x_2=1+i, x_3=1-i$

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ០២ ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា
ប្រលងអាហារូបករណ៍ទៅសិក្សានៅសាធារណរដ្ឋសឹង្ហបុរី

I. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$ ។(C) ជាខ្សែកោងតាងអោយអនុគមន៍ f ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

ខ. គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ចុងដែនកំណត់

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង ។

II. ថង់មួយមានប៊ូលខ្មៅ 5 និងស 2 ។ គេចាប់យកប៊ូលទាំង 7 ម្តងមួយៗដោយមិនដាក់ចូលវិញ។

ក. រកចំនួនរបៀបដែលអាចចាប់បាន ។

ខ. រកចំនួនរបៀបដែលប៊ូលទីមួយពណ៌ស

គ. រកចំនួនរបៀបដែលប៊ូលទីមួយពណ៌ខ្មៅ និងប៊ូលទីពីរពណ៌ស

ឃ. រកចំនួនរបៀបដែលប៊ូលពណ៌ខ្មៅទីមួយចាប់បាននៅលំដាប់ទី៣ ។

III. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ $]0;+\infty[$ ដែល $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ ។

១. សិក្សាអថេរភាពនៃ f

២. តាង (C) ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ f លើតំរុយអរតូណរមេ $(0;\vec{i};\vec{j})$ (មានឯកតា $4cm$)។

ក. ទាញថាក្រាប (C)មានអាសុីមតូតឈរ និង ដេក ។

ខ. កំណត់អាប់សុីសចំណុចប្រសព្វនៃក្រាប (C) នឹងអ័ក្ស $x'x$

គ. B ជាចំណុចមួយនៅលើក្រាប (C) ។ បន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) កាត់តាមគល់ O ។ កំណត់កូអរដោនេចំណុច B ។

IV. ១. គណនា $I=\displaystyle\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$ ។

២. គណនា $J=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

I. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

អនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$

ចំពោះ $4x^2+x+1$ មាន $\Delta=1^2-4\times4=-13<0$

ដោយ $a>0,\Delta<0$ នោះ $4x^2+x+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $D=\mathbb{R}$

ខ. គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ចុងដែនកំណត់

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x+1}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃ (C)

សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$

តាង $y = ax+b$

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = -2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+2x\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right)} = -\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ គឺ $y = -2x - \frac{1}{4}$

អាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$

តាង $y = cx + d$

$c = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ និង $d = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right] = \frac{1}{4}$

ដូចនេះ សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ គឺ $y = 2x + \frac{1}{4}$

II. ក. រកចំនួនរបៀបដែលអាចចាប់បាន

យើងមាន 7 របៀបសម្រាប់ជ្រើសរើសប៊ូលទី១

6 របៀបសម្រាប់ជ្រើសរើសប៊ូលទី២

5 របៀបសម្រាប់ជ្រើសរើសប៊ូលទី៣

…………………………………………..

1 របៀបសម្រាប់ជ្រើសរើសប៊ូលទី៧

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបដែលអាចចាប់បាន $7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=7!=5040$

ខ. រកចំនួនរបៀបដែលប៊ូលទី១ជាប៊ូលពណ៌ស

យើងមាន 2 របៀបក្នុងការចាប់បានប៊ូលទី១ ជាប៊ូលពណ៌ស

6 របៀបក្នុងការចាប់បានប៊ូលទី២

5 របៀបក្នុងការចាប់បានប៊ូលទី៣

…………………………………………

1 របៀបក្នុងការចាប់បានប៊ូលទី៧

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបដែលចាប់បានប៊ូលទី១ ជាប៊ូលពណ៌ស $2\times6\times5\times4\times3\times2\times1=2\times6!=1440$

គ. រកចំនួនរបៀបដែលប៊ូលទី១ ពណ៌ខ្មៅ និង ប៊ូលទី២ ពណ៌ស

យើងមាន 5 របៀបចាប់យកប៊ូលទី១ ពណ៌ខ្មៅ

2 របៀបចាប់យកប៊ូលទី២ ពណ៌ស

5 របៀបចាប់យកប៊ូលទី៣

4 របៀបចាប់យកប៊ូលទី៤

…………………………………

1 របៀបចាប់យកប៊ូលទី៧

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបដែលប៊ូលទី១ពណ៌ខ្មៅ និង ប៊ូលទី២ពណ៌ស

$5\times2\times5\times4\times3\times2\times1=10\times5!=1200$

ឃ. រកចំនួនរបៀបដែលប៊ូលពណ៌ខ្មៅទី១ ចាប់បាននៅលំដាប់ទី៣

យើងមាន 2 របៀបចាប់យកប៊ូលសទី១

1 ចាប់យកប៊ូលទី២ ពណ៌ស

5 របៀបចាប់យកប៊ូលទី៣ ពណ៌ខ្មៅ

………………………………………….

1 របៀបចាប់យកប៊ូលទី៧

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបដែលប៊ូលពណ៌ខ្មៅទី១ ចាប់បាននៅលំដាប់ទី៣

$2\times1\times5\times4\times3\times2\times1=2\times5!=240$

III. ១. សិក្សាអថេរភាពនៃ f

អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$

ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{\left(0+\dfrac{1}{x}\right)\cdot x-(1+\ln x)}{x^2}$

$$=\frac{-\ln x}{x^2}$$

ដោយ $x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាដូច $-\ln x$

$f'(x)>0$ កាលណា $-\ln x>0$ ឬ $x<1$

$f'(x)=0$ កាលណា $-\ln x=0$ ឬ $x=1$

$f'(x)<0$ កាលណា $-\ln x<0$ ឬ $x>1$

លីមីត

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

តារាងអថេរភាព

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

២. ក. ទាញថាក្រាប (C) មានអាស៊ីមតូតឈរ និង ដេក

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

ខ. កំណត់អាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) នឹងអ័ក្ស $x'x$

ខ្សែកោង (C) ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $x'x$ កាលណា $y=0$

$\Rightarrow \dfrac{1+\ln x}{x}=0$ ឬ $1+\ln x=0$

នាំអោយ $\ln x=-1=\ln e^{-1}$

ដូចនេះ $x=\dfrac{1}{e}$

គ. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B

តាង $B(x_B, y_B)$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច B ដែលមានអាប់ស៊ីស x_B កំណត់ដោយ :

$y=f'(x_B)(x-x_B)+y_B$

បន្ទាត់ប៉ះកាត់តាមគល់ $O(0,0)$ នោះ $0=f'(x_B)(0-x_B)+y_B$

$-\dfrac{1+\ln x_B}{x_B}=-\dfrac{\ln x_B}{x_B^2}(-x_B)$

$-1-\ln x_B=\ln x_B$

នាំអោយ $\ln x_B = -\frac{1}{2}$ ហើយ $x_B = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$y_B = f(x_B) = \frac{1+\ln e^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

ដូចនេះ $B\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$

IV. ក. គណនា $I = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

យើងបាន $I = \int_1^2 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{1}\right)$$

ដូចនេះ $I = \frac{29}{6}$

ខ. គណនា $J = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}\, dx$

ដោយ $1 + \sin x = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$= \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2$$

តែ $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)$

នាំអោយ $\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

នោះ $\sqrt{1+\sin x}=\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|$

$$\Rightarrow J=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

តាង $u=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$ នោះ $du=\frac{1}{2}dx$ ឬ $dx=2du$

$$x=0\Rightarrow u=-\frac{\pi}{4}$$

$$x=2\pi\Rightarrow u=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow J=2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\cos u|du$$

បើ $u\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ នោះ $\cos u\geq 0$

បើ $u\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ នោះ $\cos u\leq 0$

$$\Rightarrow J=2\sqrt{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u du-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos u du\right]$$

$$=2\sqrt{2}\left\{[\sin u]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-[\sin u]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\right\}$$

$$=2\sqrt{2}\left\{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\right\}$$

ដូចនេះៈ $J = 4\sqrt{2}$

<u>វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ០៣</u> ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា
ប្រលងអាហារូបករណ៍ទៅសិក្សានៅសាកលវិទ្យាល័យប៉េត្រូណាស់ ប្រទេសម៉ាឡេស៊ី

I. គណនាអាំងតេក្រាល

១) $\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$ ២) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

II. ១) គណនា $I = \int_1^e \ln x dx$ ។

២) បង្ហាញថាស្វ៊ែរផ្ចិត O កាំ R មានមាឌ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ។

III. ១) គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចូរគណនា

$A = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + (n-1)((n-1)!) + n(n!)$ ។

២) p និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $p \le n-2$ ចូរគណនា

$B = C(n-2;p) + 2C(n-2;p-1) + C(n-2;p-2)$ ។

IV. ១) កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីអោយអនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ដែល

$$\begin{cases} f(x) = 2ax & \text{បើ } x \in]-\infty;-1] \\ f(x) = \sin\frac{\pi}{4}x & \text{បើ } x \in]1;2[\\ f(x) = ax+b & \text{បើ } x \in [2;+\infty[\end{cases}$$ ។

២) គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

$f(x) = \frac{x^2}{\sin^2 2x}$ ។

ក. គណនា $\lim_{x\to 0} f(x)$ ។

ខ. កំណត់អនុគមន៍ g ដែលជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

I. ១) គណនា $\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$

តាង $t=\tan x$ នោះ $dt=\left(1+t^2\right)dx$ ឬ $dx=\frac{dt}{1+t^2}$

$$\frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x}=\frac{1+\frac{t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2}=\left(1+2t^2\right)\left(1+t^2\right)$$

$$\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x}dx=\int\left(1+2t^2\right)\left(1+t^2\right)\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\int\left(1+2t^2\right)dt=t+\frac{2}{3}t^3+c$$

ដូចនេះ $\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x}dx=\tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+c$

២) គណនា $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

តាង $t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow x=t^6$

$dx=6t^5dt$

យើងបាន $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}=\int\frac{6t^5dt}{t^2+t^3}=6\int\frac{t^3}{1+t}dt$

$$=6\int\frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}dt$$

$$=6\int\frac{t^2(t+1)-t(t+1)+(t+1)-1}{t+1}dt$$

$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|1+t|\right)+c$$

ដូចនេះ $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+c$

II. ១) គណនា $I=\int_1^e \ln x dx$

តាង $u=\ln x$ នោះ $du=\frac{1}{x}dx$

$dv=dx$ នោះ $v=x$

យើងបាន $I=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{dx}{x}$

$$=[x\ln x-x]_1^e$$

$$=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)$$

ដូចនេះ $I=1$

២) បង្ហាញថាមាឌស្វ៊ែរ $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

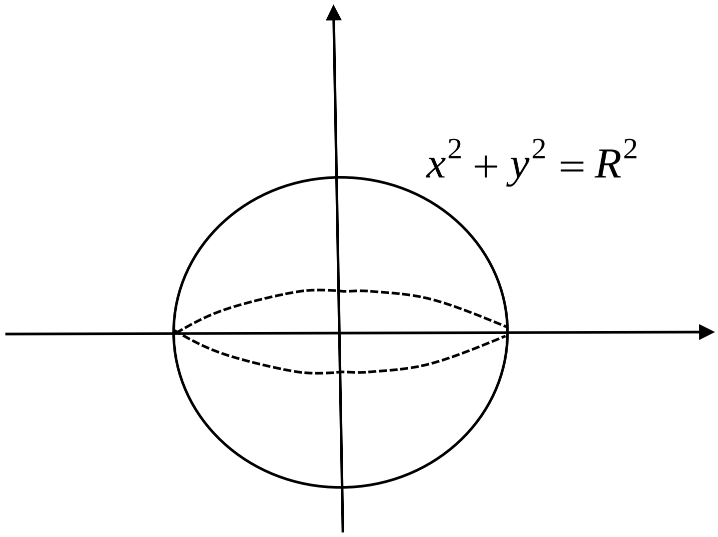
តាង $x^2+y^2=R^2$ ជារង្វង់ផ្ចិត O និង កាំ R

រង្វង់វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសបង្កើតបានជាស្វ៊ែរមួយ

មាឌដែលបានមកពីរង្វិលនៃរង្វង់ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសជាមាឌនៃស្វ៊ែរ

តាមរូបមន្ត $V=\pi\int_{-R}^{R} y^2dx$

ដោយ $x^2+y^2=R^2$ នោះ $y^2=R^2-x^2$



$$\Rightarrow V=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx$$

$$=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}$$

$$=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3$$

ដូចនេះ មាឌស្វ៊ែរ $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

III. ១) $\forall n\in N^*$ គណនា A

$$A=1(1!)+2(2!)+3(3!)+\cdots+(n-1)((n-1)!)+n(n!)$$

$$=(2-1)1!+(3-1)2!+\cdots+(n-1)((n-1)!)+(n+1-1)n!$$

$$=2\cdot1!-1!+3\cdot2!-2!+\cdots+n(n-1)!-(n-1)!+(n+1)n!-n!$$

$$=2!-1+3!-2!+\cdots+\mathrm{n}!-(n-1)!+(n+1)!-n!$$

ដូចនេះ $A=-1+(n+1)!$

២) គណនា B

យើងមាន $p\in\mathbb{N}^*,n\in N^*$ ហើយ $p\le n-2$

$$B=C(n-2;\mathrm{p})+2C(n-2;p-1)+C(n-2;p-2)$$

$$=\frac{(n-2)!}{p!(n-2-p)!}+2\cdot\frac{(n-2)!}{(p-1)!(n-1-p)!}+\frac{(n-2)!}{(p-2)!(n-p)!}$$

$$=\frac{(n-2)!}{p!(n-p)!}\left[(n-p-1)(n-p)+2p(n-p)+p(p-1)\right]$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)!}{p!(n-p)!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

ដូចនេះ $B=C(n;p)$

IV. ១) កំណត់ a និង b

តាមសម្មតិកម្ម f ជាប់លើចន្លោះ $]-\infty;-1[,]1;2[$ និង $]2;+\infty[$

ដើម្បីអោយ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ f ជាប់ត្រង់ $x=1$ និង ត្រង់ $x=2$

f ជាប់ត្រង់ $x=1$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}2ax^2=2a$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\sin\frac{\pi}{4}x=\sin\frac{\pi}{4}$$

នាំអោយ $2a=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ឬ $a=\frac{\sqrt{2}}{4}$

f ជាប់ត្រង់ $x=2$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=f(2)$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\sin\frac{\pi}{4}x=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}(ax+b)=2a+b$$

នាំអោយ $2a+b=\sin\frac{\pi}{2}=1$

នាំអោយ $b=1-2a=1-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $a=\frac{\sqrt{2}}{4},b=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

២) ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 2x}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x}{\sin 2x}\right)^2\times\dfrac{1}{4}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 2x}=\dfrac{1}{4}$

ខ. កំណត់អនុគមន៍ g

អនុគមន៍ g ជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$ គឺ $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sin^2 2x} & \text{បើ } x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{បើ } x=0\end{cases}$ ។

<u>វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ០៤</u> ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា ប្រលងអាហារូបករណ៍ទៅសិក្សានៅប្រទេសជប៉ុនឆ្នាំ ២០០៦

I. ដោះស្រាយវិសមីការ

១) $5^x+\dfrac{125}{5^x}-30\le 0$ ២) $\dfrac{\log_2(x+1)}{(x-1)}>0$

II. គណនាលីមីត

១) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4}}$

III. គណនាអាំងតេក្រាល

១) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$

២) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$

IV. គេអោយ $p(z)=z^3-3z^2+3z-7$ ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

១) គណនា $p(-1)$ ។

២) កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីអោយបាន $p(z)=(z+1)\left(z^2+az+b\right)$ ចំពោះគ្រប់ $z\in\mathbb{C}$ ។

V. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\ln x+xe}{x^2}$ កំណត់លើ $]0;+\infty[$ និង $g(x)=-2\ln x-xe+1$ កំណត់លើ $]0;+\infty[$ ។

១) បង្ហាញថា សមីការ $g(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ $\alpha\in\left]\dfrac{1}{2};1\right[$ (គេអោយ $\ln 2=0.7$)

២) បង្ហាញថា អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=\alpha$ ហើយបង្ហាញថាតម្លៃអតិបរមាធៀបនោះគឺ $f(\alpha)=\dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

I. ដោះស្រាយវិសមីការ

១) $5^x+\dfrac{125}{5^x}-30\le 0$

តាង $t=5^x>0$ វិសមីការអាចសរសេរជា

$$t+\frac{125}{t}-30\le 0$$

$$\Leftrightarrow t^2-30t+125\le 0$$

$$\Delta'=15^2-125=225-125=100$$

$$t_1=5, t_2=25$$

t	0	5		25		$+\infty$
$t^2-30t+125\le 0$	+	0	$-$	0	+	

តាមតារាង យើងបាន $5\le t\le 25$

នោះ $5 \le 5^x \le 5^2$

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x \in [1;2]$

២) ដោះស្រាយវិសមីការ $\dfrac{\log_2(x+1)}{x-1} > 0$

វិសមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases} x+1>0 \\ x-1 \ne 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x>-1 \\ x \ne 1 \end{cases}$

ដែលកំណត់ $D =]-1;+\infty[- \{1\}$

បើ $\log_2(x+1) \ge 0 \Leftrightarrow \log_2(x+1) \ge \log_2 1$

$\Leftrightarrow x+1 \ge 1$

$\Leftrightarrow x \ge 0$

x	-1	0	1	$+\infty$
$\log_2(x+1)$	$-$	0 $+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	0 $+$	
$\dfrac{\log_2(x+1)}{x-1} > 0$	$+$	0 $-$	$+$	

វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $E =]-1;0[\cup]1;+\infty[$

II. គណនាលីមីត

១) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2+2x-4}}$

តាង $L = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2+2x-4}}$

$$L=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-1-2x+1\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+2x-4}\right)}{\left(x+2-x^2-2x+4\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+2x-4}\right)}{-(x-2)(x+3)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+2x-4}\right)}{-(x+3)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x-1}\right)}$$

$$=-\frac{2(2+2)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)\times 5}=-\frac{4}{5\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $L=-\dfrac{4}{5\sqrt{3}}$

III. គណនាអាំងតេក្រាល

១) $A=\int\dfrac{1}{x^2-3x+2}dx$

យើងបាន $A=\int\dfrac{1}{x-2}dx-\int\dfrac{1}{x-1}dx$

ដូចនេះ $A=\ln|x-2|-\ln|x-1|+c$

២) $B=\int_1^e \ln x dx$

តាង $u=\ln x$ នោះ $du=\dfrac{1}{x}dx$

$dv=dx$ នោះ $v=x$

យើងបាន $I=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x\cdot\dfrac{dx}{x}$

$$=\left[x\ln x-x\right]_1^e$$
$$=\left(e\ln e-e\right)-\left(1\ln 1-1\right)$$

ដូចនេះ $I=1$

IV. ១) គណនា $p(-1)$

យើងមាន $p(z)=z^3-3z^2+3z+7$

នោះ $p(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7=0$

ដូចនេះ $p(-1)=0$

២) កំណត់ចំនួនពិត a និង b

ដោយ z^3-3z^2+3z+7 មានឫសមួយស្មើ -1 នោះ $p(z)$ ចែកដាច់នឹង $z+1$

យើងធ្វើប្រមាណវិធីចែកពហុធា យើងបាន $p(z)=(z+1)\left(z^2-4z+7\right)$

ដូចនេះ $a=-4, b=7$

V. ១) បង្ហាញថាសមីការ $g(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$

អនុគមន៍ $g(x)=-2\ln x-xe+1$ មានដែនកំណត់ $D_g=\left]0;+\infty\right[$

$g'(x)=-\frac{2}{x}-e<0$ ចំពោះ $\forall x\in D_g$

នោះ g ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=-2\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e+1=2,05$$

$$g(1)=-2\ln 1-e+1=-1.7$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right)\times g(1)<0$$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល សមីការ $g(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$

២) បង្ហាញថា f មានអតិបរមាធៀបមួយ និង $f(\alpha)=\dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{\ln x + xe}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{x+ex^2-2x\ln x-2x^2e}{x^4}=\frac{x(-2\ln x-xe+1)}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$$

ដោយ $x^3>0,\forall x\in D_g$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាដូច $g(x)$

ដោយ g ជាអនុគមន៍ចុះ និង $g(\alpha)=0$

យើងបាន $g(x)>0$ ចំពោះ $x\in\left]0;\alpha\right[$

$g(x)<0$ ចំពោះ $x\in\left]\alpha;+\infty\right[$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

តាមតារាងខាងលើ $f'(x)=0$ និងប្រែប្រួលសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x=\alpha$ នោះអនុគមន៍ f មាន អតិបរមាត្រង់ $x=\alpha$ ដែល $f(\alpha)=\dfrac{\ln\alpha+\alpha e}{\alpha^2}$

តែ α ជាឫសនៃសមីការ $g(x)=0$ នោះ $-2\ln\alpha-\alpha e+1=0$

នាំអោយ $\ln\alpha=\dfrac{1-\alpha e}{2}$

យើងបាន $f(\alpha)=\dfrac{\frac{1-\alpha e}{2}+\alpha e}{\alpha^2}=\dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$