មេរៀនទី ១: ស្វ៊ីតចំនួនពិត

១.១ និយមន័យ

និយមន័យ: ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពីសំណុំនៃចំនួនគត់$\mathbb{N}$ទៅចំនួនពិត $\mathbb{R}$។ ជាទូទៅគេប្រើអក្សរ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ សម្រាប់តាងឲ្យតួនៃស្វ៊ីតដែល a_1 ជាតួទី១ a_2 ជាតួទី២ រហូតដល់ a_n ជាតួទី n ។

ឧទាហរណ៍១. គេមានអនុគមន៍ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ , n \to f(n) = 2n+3$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត។

ឧទាហរណ៍២. សរសេរគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតរាប់អស់ $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}, 1 \le n \le 4$។

ចម្លើយ:

ជំនួសចំនួនគត់ធម្មជាតិពី 1ដល់ 4 ក្នុង a_n គេបាន:

$$a_1 = \frac{-1}{3},\ a_2 = \frac{1}{5},\ a_3 = \frac{(-1)^3}{7} = \frac{-1}{7},\ a_4 = \frac{(-1)^4}{9} = \frac{1}{9}$$

ដូចនេះ បួនតួនៃស្វ៊ីតគឺ $-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ ។

១.២ តួទី n នៃស្វ៊ីត

តាមធម្មតាគេច្រើនស្គាល់តួដំបូង និងតួបន្ទាប់នៃស្វ៊ីត។ ដើម្បីសរសេររូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតគេពិនិត្យមើលតួនិមួយៗនៃស្វ៊ីតរួចរកមើលលំនាំគំរូរបស់វា។ តួនិមួយៗជាអនុគមន៍នៃចំនួនតួ។

ឧទាហរណ៍៣. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត

ក. $2,4,6,8,10,....$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$

ខ. $3,5,7,9,11,....$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$

គ. $2,4,8,16,......$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$

ឃ. $-1,1,3,5,.....$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$

ចម្លើយ:

ក. គេសង្កេតឃើញថា:

$$a_1 = 2 = 2\times 1, a_2 = 4 = 2\times 2, a_3 = 6 = 2\times 3$$
$$a_4 = 8 = 2\times 4, a_5 = 10 = 2\times 5, ..., a_n = 2n$$

ដូចនេះ គេបានតួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $a_n = 2n$

ខ. គេសង្កេតឃើញថា:

$$a_1 = 3 = 2\times 1+1, a_2 = 5 = 2\times 2+1, a_3 = 7 = 2\times 3+1$$
$$a_4 = 9 = 2\times 4+1, a_5 = 11 = 2\times 5+1, ..., a_n = 2n+1$$

ដូចនេះ គេបានតួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $a_n = 2n+1$

គ. គេសង្កេតឃើញថា:

$$a_1 = 2 = 2^1, a_2 = 4 = 2^2, a_3 = 8 = 2^3, a_4 = 16 = 2^4 ...., a_n = 2^n$$

ដូចនេះ គេបានតួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $a_n = 2^n$ ។

ឃ. គេសង្កេតឃើញថា: $a_1 = -1 = 2\times 1-3, a_2 = 1 = 2\times 2-3, a_3 = 3 = 2\times 3-3$

$$a_4 = 5 = 2\times 4-3, ..., a_n = 2n-3$$

ដូចនេះ គេបានតួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $a_n = 2n-3$ ។

១.៣ អថេរភាពនៃស្វ៊ីត(ស្វ៊ីតកើន ស្វ៊ីតចុះ និងស្វ៊ីតម៉ូណូតូន)

និយមន័យ.

- ស្វ៊ីត(a_n)ជាស្វ៊ីតកើន លុះត្រាតែគ្រប់ចំនួនគត់ $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}>a_n$
- ស្វ៊ីត(a_n)ជាស្វ៊ីតចុះ លុះត្រាតែគ្រប់ចំនួនគត់ $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}<a_n$
- ស្វ៊ីត(a_n)ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកាលណា (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ឬជាស្វ៊ីតកើន ឬជាស្វ៊ីតថេរ។

ឧទាហរណ៍៤.

ក. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ដែល$a_n=3n+1$ជាស្វ៊ីតកើន

ខ. បង្ហាញថាស្វ៊ីត$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ដែល$b_n=12-n$ ជាស្វ៊ីតចុះ

គ. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ដែល$c_n=\dfrac{n}{n+1}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ឃ. តើស្វ៊ីតខាងក្រោមមួយណាជាស្វ៊ីតកើន មួយណាជាស្វ៊ីតចុះ?

(i) $(a_n)_{n\geq 5}$ដែល $a_n=\dfrac{3n}{2}$ (ii) $(a_n)_{n\geq 3}$ ដែល $a_n=\dfrac{2}{n}$

ង. តើស្វ៊ីតខាងក្រោមមួយណាជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន?

$i.\ a_n=\dfrac{1}{n},n\geq 1$ $ii.\ a_n=\dfrac{2^n}{n},n\geq 1$ $iii.\ a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n},n\geq 1$

ចម្លើយ:

ក. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n=3n+1$ ជាស្វ៊ីតកើន

គេមាន $a_n=3n+1, a_{n+1}=3(n+1)+1=3n+4$ នោះ

គេបាន $a_{n+1}-a_n=3n+4-(3n+1)=3>0$ នាំឲ្យ $a_{n+1}>a_n$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (a_n)ជាស្វ៊ីតកើន

ខ. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $b_n=12-n$ ជាស្វ៊ីតចុះ

គេមាន $b_n=12-n, b_{n+1}=12-(n+1)=11-n$ នោះ

គេបាន $b_{n+1}-b_n=11-n-(12-n)=-1<0$ នាំឲ្យ $b_{n+1}<b_n$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (b_n)ជាស្វ៊ីតចុះ

គ. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល$c_n=\dfrac{n}{n+1}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

របៀបទី១. គេមាន $c_n=\dfrac{n}{n+1}\Rightarrow c_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}$ នោះ ចំពោះ $\forall n\geq 1$ គេបាន

$$c_{n+1}-c_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0$$ នោះ $c_{n+1}>c_n$

ដូចនេះ (c_n)ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកើន ។

របៀបទី២. គេមាន $c_n=\dfrac{n}{n+1}\Rightarrow c_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}$ នោះ ចំពោះ$\forall n\geq 1$ គេបាន

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}=\frac{n+1}{n+2}\times\frac{n+1}{n}=\frac{n^2+2n+1}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n(n+2)}>1$$

(ព្រោះ $\forall n\geq 1, n^2+2n>0$)

នោះ $c_{n+1}>c_n$, ដូចនេះ (c_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកើន ។

ឃ. តើស្វ៊ីតខាងក្រោមមួយណាជាស្វ៊ីតកើន មួយណាជាស្វ៊ីតចុះ

(i) $(a_n)_{n\geq 5}$ដែល $a_n = \frac{3n}{2}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ព្រោះ $a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)}{2} - \frac{3n}{2} = \frac{3n+3-3n}{2} = \frac{3}{2} > 0$

មានន័យថា $a_{n+1} > a_n$

(ii) $(a_n)_{n\geq 3}$ដែល $a_n = \frac{2}{n}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

ព្រោះ $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{2n-2n-2}{n(n+1)} = -\frac{2}{n^2+n} < 0$

មានន័យថា $a_{n+1} < a_n$

ង. តើស្វ៊ីតខាងក្រោមមួយណាជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ?

i. $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$

គេមាន $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ នោះ

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

នាំឲ្យ $a_{n+1} < a_n$ ចំពោះ $n \geq 1$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (a_n)ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ។

ii. $a_n = \frac{2^n}{n}, n \geq 1$

គេមាន $a_n = \frac{2^n}{n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$ នោះ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1} \geq 1, \forall n \geq 1$$

នាំឲ្យ $a_{n+1} > a_n$ ចំពោះ $n \geq 1$

ដូចនេះ (a_n)ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

iii. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, n \geq 1$

គេមាន $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$

នោះ $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n}} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \times \frac{n}{(-1)^{n+1}} = -\frac{n}{n+1} < 1$$

នាំឲ្យ $a_{n+1} < a_n$, ដូចនេះ (a_n)ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ។

១.៤ ស្វ៊ីតទាល់

និយមន័យ.

- ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម លុះត្រាតែមានចំនួនពិត N ដែលចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \geq N$ ។ ចំនួន N ហៅថាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត។
- ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ លុះត្រាតែមានចំនួនពិត M ដែលចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \leq M$ ។ ចំនួន M ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត។
- ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ លុះត្រាតែស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើផង និងទាល់ក្រោមផង។

ឧទាហរណ៍៥.

ក. រកគោលលើនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

i. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 3-2^n$

ii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \frac{2}{n}$

iii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \frac{n}{4n-1}$

iv. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_1 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$ បើ $n \geq 2$

ខ. រកគោលក្រោមនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

i. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 2n-1$

ii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 1+\frac{n}{3}$

iii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = n+2$

iv. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 2n+1$

គ. រកគោលលើ និងគោលក្រោមនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

i. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 3+\frac{1}{n}$

ii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \frac{n}{2n+1}$

<u>ចម្លើយ:</u>

ក. រកគោលលើនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

i. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 3-2^n$

គេមាន $a_1 = 1 > a_2 = -1 > a_3 = -5 > a_4 = -13 > ....$

គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់លើដែលមាន $M = 1$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត ។

ii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \frac{n}{4n-1}$

គេមាន $a_1 = \frac{1}{3} > a_2 = \frac{2}{7} > a_3 = \frac{3}{11} > a_4 = \frac{4}{15}, ...$

គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់លើដែលមាន $M = \frac{1}{3}$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត ។

iii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{2}{n}$

គេមាន $a_1 = 2 > a_2 = 1 > a_3 = \dfrac{2}{3} > a_4 = \dfrac{1}{2} > .....$

គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់លើដែលមាន $M = 2$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត

iv. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_1 = 1, a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2}, n \ge 2$

គេមាន $a_1 = 1 > a_2 = \dfrac{a_1}{2} = \dfrac{1}{2} > a_3 = \dfrac{a_2}{2} = \dfrac{1}{4} > ....$

គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់លើដែលមាន $M = 1$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត។

ខ. រកគោលក្រោមនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

i. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 2n-1$

គេមាន $a_1 = 1 < a_2 = 3 < a_3 = 5 < a_4 = 7 < .....$

គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមដែលមាន $N = 1$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត។

ii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 1 + \dfrac{n}{3}$

គេមាន $a_1 = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3} < a_2 = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3} < a_3 = 1 + \dfrac{3}{3} = 2 < ..$

គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ដែលមាន $N = \dfrac{4}{3}$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត។

iii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = n+2$

គេមាន $a_1 = 3 < a_2 = 4 < a_3 = 5 < a_4 = 6 < .....$

គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមដែលមាន $N = 3$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត។

iv. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 2n+1$

គេមាន $a_1 = 3 < a_2 = 5 < a_3 = 7 < a_4 = 9 < .....$

គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ដែលមាន $N = 3$ ជាគោលក្រោម នៃស្វ៊ីត។

គ. រកគោលលើ និងគោលក្រោមនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

i. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 3 + \dfrac{1}{n}$

គេមាន $a_1 = 3 + \dfrac{1}{1} = 4 > a_2 = 3 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2} > a_3 = \dfrac{10}{3} > ....$

នោះគេបាន (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើដែលមាន $M = 4$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត។

ម៉្យាងទៀត តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n): $a_n = 3 + \dfrac{1}{n}$ កាលណា n ខិតជិតអនន្តនោះស្វ៊ីត $a_n = 3 + \dfrac{1}{n}$ ខិតជិត 3

គេបាន $N = 3$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ដូចនេះ 4 ជាគោលលើនៃស្វ៊ីតនិង 3 គោលក្រោមនៃស្វ៊ីត។

ii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$

គេមាន $a_1 = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3} < a_2 = \dfrac{2}{4+1} = \dfrac{2}{5} < a_3 = \dfrac{3}{6+1} = \dfrac{3}{7} < \ .... < a_n = \dfrac{n}{2n+1} < ....$

នោះគេបាន (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមដែលមាន $N = \dfrac{1}{3}$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត (a_n)

ម្យ៉ាងទៀតបើ n ខិតជិតអនន្តនោះស្វ៊ីត $a_n=\dfrac{n}{2n+1}$ ខិតជិត $\dfrac{1}{2}$ ដែល $M=\dfrac{1}{2}$ ជាគោលលើនៃ (a_n) ។

ដូចនេះ $\dfrac{1}{3}$ ជាគោលក្រោមនិង $\dfrac{1}{2}$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $1,4,7,10,13,...$ ខ. $4,16,64,256,...$ គ. $1,-1,1,-1,1,-1,...$

ឃ. $\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{8},\dfrac{7}{16},...$ ង. $9,99,999,9999,...$ ច. $1,4,27,256,...$

ឆ. $1,8,27,64,125,...$ ជ. $1,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{16},...$ ឈ. $-2,4,-8,16,...$

ញ. $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},...$ ដ. $-5,-1,3,7,11,...$ ឋ. $-2,1,4,7,10,...$

ឌ. $2,6,10,14,18,...$ ឍ. $\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{9}{4},\dfrac{16}{5},...$ ណ. $23,20,17,14,11,...$

2. ចូរសិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីតចំនួនពិត$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ដែលអោយខាងក្រោម៖

ក. $a_n=\dfrac{n^2+1}{2n+1}$ ខ. $a_n=\dfrac{2^n}{n+2}$ គ. $a_n=n^2+2n+3$

ឃ. $a_n=\dfrac{2n-3}{n+2}$ ង. $a_n=\dfrac{n+2}{2n+3}$ ច. $a_n=2^n-3^n$

ឆ. $a_n=\dfrac{4n-1}{2n+3}$ ជ. $a_n=\dfrac{3n-n^2}{n+14}$ ឈ. $a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$

ញ. $a_n=\dfrac{n^2-n+1}{2^n}$ ដ. $a_n=\dfrac{2n-1}{2^n}$ ឋ. $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

ឌ. $a_n=\dfrac{2n^2-n+1}{n+2}$ ឍ. $a_n=1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}$ ។

3. តើស្វ៊ីតខាងក្រោម មួយណាជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន?

ក. $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ ខ. $a_n=\dfrac{3^n}{n+3}$ គ. $a_n=3^n+1$

ឃ. $a_n=\dfrac{\sqrt{n}+n}{\sqrt{n}+1}$ ង. $a_n=(-1)^n\dfrac{n-1}{3n+2}$ ច. $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

ឆ. $a_n=(\pi-3)^n$ ជ. $a_n=n+\sqrt{n}$ ឈ. $a_n=\dfrac{2-n}{\sqrt{n}}$

ញ. $a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ ដ. $a_n=\dfrac{n^2}{n+1}$ ឋ. $a_n=2^n+\sqrt{n+2}$ ។

4. ក្នុងចំណោមស្វ៊ីតខាងក្រោម មួយណាជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ស្វ៊ីតទាល់លើនិងជាស្វ៊ីតទាល់រួចរកគោលនៃស្វ៊ីត

ក. $a_n=2n^2-n-1$ ខ. $a_n=-n^3+1$ គ. $a_n=\dfrac{n^2+2}{2n+1}$

ឃ. $a_n=\dfrac{4n+1}{n+2}$ ង. $a_n=\dfrac{2n^2-3}{n+4}$ ច. $a_n=\dfrac{3n+5}{n^3-n+2}$

ឆ. $a_n=\dfrac{2n^2-1}{2n}$ ជ. $a_n=\dfrac{3n-2}{6}$ ឈ. $a_n=\dfrac{n^2-n+1}{2n+1}$ ។

5. គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិត $a_n = \sqrt{4n+1} - 3n$ ។ កំណត់តួទី២ តួទី៦ និង តួទី១២នៃស្វ៊ីត (a_n) ។ តើស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតកើន ឬស្វ៊ីតចុះ ? តើស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ ទាល់ក្រោម ឬជាស្វ៊ីតទាល់ ? រួចរកគោលនៃស្វ៊ីត។
6. គេអោយ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ $a_1 = a_2 = a_3$ ហើយ $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}, \forall n \geq 4$ ។ តើស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតកើន ឬ ចុះ ?
7. តើស្វ៊ីត $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $b_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនដែរឬទេ ?
8. បណ្តាស្វ៊ីតខាងក្រោមនេះ តើស្វ៊ីតណាខ្លះជាស្វ៊ីតទាល់លើស្វ៊ីតទាល់ក្រោមនិងជាស្វ៊ីតទាល់ ? រួចរកគោលនៃស្វ៊ីតនិមួយៗ

   ក. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 1 - 3n$

   ខ. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $b_n = 4n - 1$

   គ. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $c_n = \frac{1}{n^2}$
9. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $c_n = \frac{3n^2 + n - 1}{n^2 - n + 3}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ និងរកគោលនៃស្វ៊ីត។

មេរៀនទី២: ស្វ៊ីតនព្វន្ត

២.១ និយមន័យ

និយមន័យ: ស្វ៊ីតនព្វន្តគឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី1) ស្មើនឹងតួមុខវាថែម ចំនួនថេរមួយ ហៅថា ផលសងរួម កំណត់ដោយ d ។ គេបាន ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតតួទី n នោះ $\boxed{u_n = u_{n-1} + d}$ $(n \in \mathbb{N})$ ។

សម្គាល់: បើ $d > 0$ នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន $d < 0$ នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

២.២ តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, ..., u_{n-1}, u_n$ ដែល u_1 ជាតួទី1 , u_n ជាតួទី n , n ជាចំនួនតួ, d ជាផលសងរួម នោះ តួទី n នៃស្វ៊ីតកំណត់ដោយ :

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d}$$

- **តួមានចម្ងាយស្មើគ្នាពីតួចុង**

គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត:

$$\underbrace{u_1, u_2, u_3, ..., u_p}_{p}, ..., \underbrace{u_{n-p+1}, ..., u_{n-2}, u_{n-3}, u_n}_{p}$$

គេបាន $\boxed{u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = u_3 + u_{n-2} = ... = u_p + u_{n-p+1}}$

- **បើ a, b, c ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត**

គេបាន $\boxed{b = \frac{a+c}{2}}$ b ហៅថាមធ្យមនព្វន្តនៃ a និង c ។

សំគាល់ : យើងតាងស្វ៊ីតនព្វន្ត $\{u_n\} = u_n$ ជាតួទីn

- $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើនបើសិនគ្រប់ចំនួនគត់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន $u_n \le u_{n+1}$
- $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះបើសិនគ្រប់ចំនួនគត់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន $u_n \ge u_{n+1}$
  - ករណី $u_n > 0$ យើងសិក្សា:

    ១. បើ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1 \Rightarrow u_n$ ជាស្វ៊ីតកើន

    ២. បើ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le 1 \Rightarrow u_n$ ជាស្វ៊ីតចុះ

២.៥ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, ..., u_{n-1}, u_n$ ដែល u_1 ជាតួទី1 , u_n ជាតួទី n ,n ជាចំនួនតួ, d ជាផលសងរួមនោះ $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1} + u_n$ គេបាន

$$\boxed{S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}}$$

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយនៃស៊ីតនព្វន្ត

1. សរសេរស៊ីតនព្វន្ត $\{u_n\}$ មួយដែល $u_1 = 1$ និង $d = 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត: $u_n = u_1 + (n-1)d$

គេបាន $u_n = 1 + (n-1)2 = 2n-1$

ដូចនេះ: $\boxed{u_n = 2n-1}$

2. សរសេរស៊ីតនព្វន្ត $\{u_n\}$ មួយដែល $u_1 = 2$ និង $d = -2$ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរស៊ីតនព្វន្ត

តាមរូបមន្ត: $u_n = u_1 + (n-1)d$

គេបាន $u_n = 2 + (n-1)(-2) = -2n+4$

ដូចនេះ: $\boxed{u_n = -2n+4}$

3. គណនាផលបូក 5 ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូង $1+2+3+4+5$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត: $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

គេបាន $S_5 = \frac{5}{2}(1+5) = 15$

ដូចនេះ: $\boxed{1+2+3+4+5=15}$

4. គណនាផលបូក 15ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូង $1+2+3+...+15$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

គេបាន $S_{15} = \frac{15}{2}(1+15) = 120$

ដូចនេះ: $\boxed{1+2+3+...+15=120}$

5. គណនាផលបូក n ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូង $1+2+3+...+n$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

គេបាន $S_n = \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n(1+n)}{2}$

ដូចនេះ: $\boxed{S_n = \frac{n(1+n)}{2}}$

6. គណនាផលបូក n ចំនួនគត់សេសមិនសូន្យគឺ $1+3+5+7+...+u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

ដោយ $u_n = u_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)(2) = 2n-1$

គេបាន $S_n = \frac{n}{2}(1+2n-1) = n^2$

ដូចនេះ $\boxed{1+3+5+7+...+u_n = n^2}$

7. សរសេរស្វ៊ីតនព្វន្តមាន3តួដែលផលគុណតួទាំង 3 ស្មើ 910 និង ផលបូកនៃតួទាំង3ស្មើ 30។

ដំណោះស្រាយ

តាង u_1, u_2 និង u_3 ជាតួទាំង 3 នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន

$$\begin{cases} u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 910 & (1) \\ u_1 + u_2 + u_3 = 30 & (2) \end{cases}$$ តែ $2u_2 = u_1 + u_3$ (មធ្យមនព្វន្ត)

តាម $(2) \Rightarrow u_2 = 10$ យកទៅជំនួសក្នុង (1) ឱ្យ $u_1 \cdot u_3 = 91$

គេបាន $\begin{cases} u_1 \cdot u_3 = 91 = 13 \times 7 \\ u_1 + u_3 = 20 = 13 + 7 \end{cases}$

នាំឱ្យ $u_1 = 13$ និង $u_3 = 7$ ឬ $u_1 = 7$ និង $u_3 = 13$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ីតនព្វន្តគឺ } 7,10,13 \text{ ឬ } 13,10,7}$

8. រកស្វ៊ីតនព្វន្តប្រសិនបើផលបូក n តួដំបូងស្មើនឹងបីដងការេនៃ ចំនួនតួរបស់ស្វ៊ីត ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right]$ នាំឱ្យ $S_{n-1} = \frac{n-1}{2}\left[2u_1 + (n-2)d\right]$

គេបាន:

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right] - \frac{n-1}{2}\left[2u_1 + (n-2)d\right] \\ &= \frac{2nu_1 + n(n-1)d}{2} - \frac{2(n-1)u_1 - (n-1)(n-2)d}{2} \\ &= u_1 + (n-1)d = u_n \qquad (1) \end{aligned}$$

តាមបំរាប់ $S_n = 3n^2 \quad \Rightarrow S_{n-1} = 3(n-1)^2$

នាំឱ្យ $S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 3(n-1)^2 = 6n - 3 \qquad (2)$

ផ្ទឹម(1) និង (2) គេបាន $\boxed{u_n = 6n - 3}$

ដូចនេះ ស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_n = 6n - 3$

9. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n = 2^{-2n}$ នោះ $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ។

ដំណោះស្រាយ

$\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះលុះត្រាតែ $u_{n+1} < u_n$ $, \forall n \in \mathbb{N}$ គេមាន $u_n = 2^{-n}$ នាំឱ្យ $u_{n+1} = 2^{-(n+1)}$

គេបាន:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{-(n+1)} - 2^{-n} = 2^{-n} \cdot 2^{-1} - 2^{-n} \\ &= 2^{-n}(\frac{1}{2} - 1) = -\frac{1}{2} \cdot 2^{-n} < 0 \end{aligned}$$

នាំឱ្យ $u_{n+1} < u_n$

ដូចនេះ $\boxed{\{u_n\} \text{ ជាស្វ៊ីតចុះ}}$

10. គេមានស៊ីត n តួ, $u_n = \dfrac{3n-1}{5n+2}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\{u_n\}$ ជាស៊ីតកើន។

ដំណោះស្រាយ

$\{u_n\}$ ជាស៊ីតកើនលុះត្រាតែ $u_{n+1} \geq u_n \ ,\forall n \in \mathbb{N}$

គេមាន $u_n = \dfrac{3n-1}{5n+2}$ នាំឱ្យ $u_{n+1} = \dfrac{3n+2}{5n+7}$ គេបាន:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n+2}{5n+7} - \frac{3n-1}{5n+2}$$

$$= \frac{15n^2+6n+10n+4-15n^2+5n-21n+7}{(5n+7)(5n+2)}$$

$$= \frac{11}{(5n+7)(5n+2)} \geq 0$$ នាំឱ្យ $u_{n+1} \geq u_n$

ដូចនេះ $\boxed{\{u_n\} \text{ ជាស៊ីតកើន}}$

11. ក. គណនា y បើ $x+y+z=18$ ដោយ x, y, z ជាស៊ីតនព្វន្ត។

ខ. រកតម្លៃ d ដើម្បីឱ្យ $\frac{z}{x} \in \mathbb{N}$ គណនា x និង z ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា y

ដោយ x, y, z ជាស៊ីតនព្វន្ត នាំឱ្យ $2y = x+z$ នោះ $x+y+z = 3y = 18$

ដូចនេះ $\boxed{y=6}$

ខ. រកតម្លៃ d នង គណនា x និង z

ដោយ x, y, z ជាស៊ីតនព្វន្ត នោះ $x = y-d \ , \ z = y+d$

នាំឱ្យ $\dfrac{z}{x} = \dfrac{y+d}{y-d}$

$$\frac{z}{x} = \frac{6+d}{6-d} = \frac{12-(6-d)}{6-d} = \frac{12}{6-d} - 1$$

ដើម្បីឱ្យ $\frac{z}{x} \in \mathbb{N}$ លុះត្រាតែ $\frac{12}{6-d} \in \mathbb{N}$ នាំឱ្យ $6-d$ ជាតួចែកនៃ 12 ដែល $d \neq 6$

$6-d = \{1,2,3,4\}$ នោះ $d = \{2,3,4,5\}$

ចំពោះ $d = 2 \Rightarrow x = 4, z = 8$

$d = 3 \Rightarrow x = 3, z = 9$

$d = 4 \Rightarrow x = 2, z = 10$

$d = 5 \Rightarrow x = 1, z = 11$

ដូចនេះ តម្លៃ (d, x, y) គឺ $(2,4,8);(3,3,9);(4,2,10);(5,1,11)$

12. តើស៊ីតខាងក្រោមនេះជាស៊ីតនព្វន្តឬទេ? បើវាជាស៊ីតនព្វន្ត ចូរបង្ហាញផលសងរួមរបស់វា:

ក. $u_n = 4n-5$ ខ. $u_n = 7-3n$

គ. $u_n = 2n^2+1$ ឃ. $u_n = \dfrac{5n-3}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ប្រភេទនៃស្វ៊ីត (u_n)

ដោយ $u_n = 4n-5$ នាំឱ្យ $u_{n+1} = 4(n+1)-5 = 4n-1$

គេបាន

$$u_{n+1} - u_n = 4n-1-4n+5 = 4$$

ដូចនេះ $u_n = 4n-5$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $d = 4$

ខ. កំណត់ប្រភេទនៃស្វ៊ីត (u_n)

ដោយ $u_n = 7-3n$ នាំឱ្យ $u_{n+1} = 7-3(n+1) = -3n+4$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = -3n+4-7+3n = -3$ ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ $u_n = 7-3n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $d = -3$

គ. កំណត់ប្រភេទនៃស្វ៊ីត (u_n)

ដោយ $u_n = 2n^2+1$ នាំឱ្យ $u_{n+1} = 2(n+1)^2+1 = 2n^2+4n+2+1 = 2n^2+4n+3$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = 2n^2+4n+3-2n^2-1 = 4n+2$ ជាចំនួនអាស្រ័យ n

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 2n^2+1 \text{ មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត}}$

ឃ. កំណត់ប្រភេទនៃស្វ៊ីត (u_n)

ដោយ $u_n = \dfrac{5n-3}{2}$ នាំឱ្យ $u_{n+1} = \dfrac{5(n+1)-3}{2} = \dfrac{5n+2}{2}$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5n+2}{2} - \dfrac{5n-3}{2} = \dfrac{5}{2}$ ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{5n-3}{2}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $d = \dfrac{5}{2}$

13. ក. តើតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត $-5, -2, 1, 4, \ldots$ ដែលមាន តម្លៃស្មើ 52 ?

ខ. គេឱ្យស៊េរី $5+8+11+14+\cdots$ តើគេត្រូវបូកប៉ុន្មានតួនៃស៊េរី នេះដើម្បីឱ្យផលបូកវាមានតម្លៃ 670 ?

ដំណោះស្រាយ

ក. រកតួនៃស្វ៊ីតដែលមានតម្លៃស្មើ 52

យក $u_n = 52$ តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$

ដោយ $u_1 = -5$, $d = u_2 - u_1 = -2+5 = 3$

នាំឱ្យ $52 = -5 + (n-1)(3)$

$52 = -5 + 3n - 3$

$3n = 60 \Rightarrow n = 20$

ដូចនេះ តួទី 20 មានតម្លៃស្មើ 52

ខ. រកចំនួនតួនៃស្វ៊ីតដើម្បីឱ្យផលបូកវាស្មើ 670

យក $S_n = 670$

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{n}{2}(u_1 + u_n) = \dfrac{n}{2}\left[(2u_1 + (n-1)d\right]$

ដោយ $u_1 = 5$, $d = u_2 - u_1 = 8-5 = 3$

នាំឱ្យ $670 = \dfrac{n}{2}\left[(2\times 5 + (n-1)(3)\right]$

$$670=\frac{n}{2}(3n+7)$$
$$1340=3n^2+7n$$
$$3n^2+7n-1340=0$$
$$\Delta=(7)^2-4(3)(-1340)=127^2$$

នាំឱ្យ $n=\frac{-7-127}{6}<0$ មិនយក

នោះ $n=\frac{-7+127}{6}=20$

ដូចនេះ $\boxed{\text{គេត្រូវបូកស្វ៊ីតនេះចំនួន20តួ}}$

14. គណនា u_1 និង ផលសងរួម d នៃស្វ៊ីតនព្វន្តដោយដឹងថា:

ក. $\begin{cases}u_2+u_5-u_3=10\\u_1+u_6=17\end{cases}$ ខ. $\begin{cases}u_5-u_3=-4\\u_2\cdot u_4=-3\end{cases}$ គ. $\begin{cases}u_3+u_5=4\\S_{12}=192\end{cases}$

ឃ. $\begin{cases}u_1+u_7=4\\u_3^2+u_7^2=122\end{cases}$ ង. $\begin{cases}S_5=35\\u_4\cdot u_5=130\end{cases}$

<u>ដំណោះស្រាយ:</u>

គណនា u_1 និង d

ក. $\begin{cases}u_2+u_5-u_3=10\\u_1+u_6=17\end{cases}$

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1+(n-1)d$ នាំឱ្យ

$$\begin{cases}u_1+d+u_1+4d-u_1-2d=10\\u_1+u_1+5d=17\end{cases}$$
$$\begin{cases}u_1+3d=10\,(1)\times(-2)\\2u_1+5d=17\,(2)\end{cases}$$
$$\begin{cases}-2u_1-6d=-20\\2u_1+5d=17\end{cases}$$
$$d=3$$

យក $d=3$ ទៅជំនួសក្នុង (1) នាំឱ្យ $u_1+9=10$ នាំឱ្យ $u_1=1$

ដូចនេះ $\boxed{u_1=1 \text{ និង } d=3}$

ខ. $\begin{cases}u_5-u_3=-4\\u_2\cdot u_4=-3\end{cases}$

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1+(n-1)d$ នាំឱ្យ

$$\begin{cases}u_1+4d-u_1-2d=-4\\(u_1+d)(u_1+3d)=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2d=-4\\u_1^2+3du_1+du_1+3d^2=-3\end{cases}$$
$$\begin{cases}d=-2\ \ (1)\\u_1^2-8u_1+12=-3\ \ (2)\end{cases}$$

តាម (2) គេបាន

$$u_1^2 - 8u_1 + 15 = 0$$
$$u_1^2 - 5u_1 - 3u_1 + 15$$
$$u_1(u_1 - 5) - 3(u_1 - 5) = 0$$
$$(u_1 - 5)(u_1 - 3) = 0$$

នាំឱ្យ $u_1 = 5$ ឬ $u_1 = 3$

ដូចនេះ $\boxed{u_1 = 5 \text{ ឬ } u_1 = 3 \text{ និង } d = -2}$

គ. $\begin{cases} u_3 + u_5 = 4 \\ S_{12} = 192 \end{cases}$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$ និង $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ គេបាន

$$\begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d \\ \frac{12}{2}(u_1 + u_{12}) = 129 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 4 \\ 2(u_1 + u_1 + 11d) = 43 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 + 3d = 2\,(1) \times (-4) \\ 4u_1 + 22d = 43(2) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -4u_1 - 12d = -8 \\ 4u_1 + 22d = 43 \end{cases}$$

$$10d = 35 \Rightarrow d = \frac{7}{2}$$

យក $d = \frac{7}{2}$ ទៅជំនួសក្នុង (1) នាំឱ្យ $u_1 + 3(\frac{7}{2}) = 2$ នោះ $u_1 = 2 - \frac{21}{2} = -\frac{17}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{u_1 = -\frac{17}{2} \text{ និង } d = \frac{7}{2}}$

ឃ. $\begin{cases} u_1 + u_7 = 4 \\ u_3^2 + u_7^2 = 122 \end{cases}$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$

នាំឱ្យ

$$\begin{cases} u_1 + u_1 + d = 4 \\ (u_1 + 2d)^2 + (u_1 + 6d)^2 = 122 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2u_1 + 6d = 4 \\ u_1^2 + 4du_1 + 4d^2 + u_1^2 + 12du_1 + 36d^2 = 122 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 + 3d = 2 \\ 2u_1^2 + 16du_1 + 40d^2 = 122 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2 - 3d\,(1) \\ u_1^2 + 8du_1 + 20d^2 = 61(2) \end{cases}$$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) នាំឱ្យ

$$(2-3d)^2 + 8d(2-3d) + 20d^2 = 61$$
$$4 - 12d + 9d^2 + 16d - 24d^2 + 20d^2 = 61$$
$$5d^2 + 4d - 57 = 0$$

នាំឱ្យ $\Delta' = 2^2 - -5(-57) = 17^2$

នោះ $d = \frac{-2-17}{5} = \frac{-19}{5}$ ឬ $d = \frac{-2+17}{5} = 3$

យក $d=\frac{-19}{5}$ ទៅជំនួសក្នុង (1) នាំឱ្យ

$$u_1=2-3(-\frac{19}{5})=\frac{10+57}{5}=\frac{67}{5}$$

យក $d=3$ ទៅជំនួសក្នុង (1) នាំឱ្យ

$$u_1=2-3(3)=-7$$

ដូចនេះ $\boxed{u_1=\frac{67}{5} \text{ និង } d=\frac{-19}{5} \text{ ឬ } u_1=-7 \text{ និង } d=3}$

ង. $\begin{cases} S_5=35 \\ u_4\cdot u_5=130 \end{cases}$

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1+(n-1)d$, $S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$

នាំឱ្យ

$$S_5=\frac{5}{2}(u_1+u_5)=\frac{5}{2}(u_1+u_1+4d)$$

$$5u_1+10d=35$$

$$u_1+2d=7\Rightarrow u_1=7-2d \ (1)$$

$$u_4\cdot u_5=(u_1+3d)(u_1+4d)=u_1^2+7u_1d+12d^2$$

$$u_1^2+7u_1d+12d^2=130$$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) នាំឱ្យ

$$(7-2d)^2+7d(7-2d)+12d^2=130$$

$$49-28d+4d^2+49d-14d^2+12d^2=130$$

$$2d^2+21d-81=0$$

$$\Delta=(21)^2-4(2)(-81)=1089=33^2$$

នាំឱ្យ $d=\frac{-21-33}{4}=\frac{-27}{4}$ ឬ $d=\frac{-21+33}{4}=\frac{12}{4}=3$

- ចំពោះ $d=\frac{-27}{4}$ យកទៅជំនួសក្នុង (1)

នាំឱ្យ $u_1=7-2(-\frac{27}{2})=34$

- ចំពោះ $d=3$ យកទៅជំនួសក្នុង (1)

នាំឱ្យ $u_1=7-2(3)=1$

ដូចនេះ $\boxed{u_1=34 \text{ និង } d=\frac{-27}{4} \text{ ឬ } u_1=1 \text{ និង } d=3}$

15. ក. គណនា a,b,c និង d នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដោយដឹងថា $a+b+c+d=22$ និង $a^2+b^2+c^2+d^2=166$ ។

ខ. គេមានបួនចំនួនបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។ ដោយដឹងថាផលបូកពីរតួដំបូងស្មើនឹង 60 ហើយផលគុណពីរតួទៀតស្មើនឹង 75 ។ រកចំនួននោះ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. គណនា a,b,c ,និង d

យក r ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន $a, b=a+r, c=a+2r, d=a+3r$

តាមបំរាប់ $a+b+c+d=22$ នាំឱ្យ:

$a+(a+r)+(a+2r)+(a+3r)=22$

$$4a+6r=2$$

$$2a+3r=11 \Rightarrow 2a=11-3r \, (1)$$

ហើយ $a^2+b^2+c^2+d^2=166$ នាំឱ្យ:

$$a^2+(a+r)^2+(a+2r)^2+(a+3r)^2=166$$

$$a^2+a^2+2ar+r^2+a^2+4ar+4r^2+a^2+6ar+9r^2=166$$

$$4a^2+12ar+14r^2=166$$

$$(2a)^2+6r(2a)+14r^2=166 \quad (2)$$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) នាំឱ្យ

$$(11-3r)^2+6r(11-3r)+14r^2=166$$

$$121-66r+9r^2+66r-18r^2+14r^2=166$$

$$5r^2=166-121=45$$

$$r^2=9 \Rightarrow r=\pm 3$$

- ចំពោះ $r=3$ តាម (1) នាំឱ្យ $2a=11-3(3)=2$

ដូចនេះ $a=1, b=4, c=7; d=10$

- ចំពោះ $r=-3$ តាម (1) នាំឱ្យ $2a=11-3(-3)=20$

ដូចនេះ $\boxed{a=10, b=7, c=4; d=1}$

ខ. គណនាចំនួនទាំងបួន

តាង a, b, c, និង d ចំនួនដែលត្រូវរក

នាំឱ្យ $b=a+r, c=a+2r, d=a+3r$

តាមបំរាប់ $a+b=60$ និង $c\times d=75$

នាំឱ្យ $a+a+2r=60 \Rightarrow 2a+r=60$

$r=60-2a \quad (1)$ និង $(a+2r)(a+3r)=75$

$a^2+5ar+6r^2=75 \; (2)$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2)

គេបាន $a^2+5a(60-2a)+6(60-2a)^2=75$

$$a^2+300a-10a^2+6(3600-240a+4a^2)=75$$

$$-9a^2+300a+21600-1440a+24a^2=75$$

$$15a^2-1140a+21525=0$$

$$a^2-76a+1435=0$$

$$\Delta^{'}=(-38)^2-(1435)=1444-1435=3^2$$

$a=38-3=35,\ a=38+3=41$

. ចំពោះ $a=35 \Rightarrow r=60-2\times 35=-10$

ដូចនេះ $\boxed{a=-10, b=25, c=15, d=5}$

. ចំពោះ $a=41\Rightarrow r=60-2\times 41=-22$

ដូចនេះ $\boxed{a=41, b=19, c=-3, d=-25}$

16. កំណត់តួទីមួយ និង ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដោយដឹងថាផលបូក n តួដំបូងស្មើនឹង $\frac{n^2}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទីមួយ និង ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមាន $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n=\frac{n^2}{2}$

. បើ $n=1\Rightarrow S_1=u_1=\frac{1}{2}$

. បើ $n=2\Rightarrow S_2=u_1+u_2=\frac{4}{2}=2$

នាំឱ្យ $u_2=2-u_1=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{u_1=\frac{1}{2} \text{ និង } d=1}$

17. គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានផលបូក n តួដំបូង ស្មើនឹងការេនៃចំនួនតួ។

ក. គណនា តួទី១ និងផលសងរួមនៃស្វ៊ីត។

ខ. គណនា តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត។

គ. សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីត។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា តួទី១ និងផលសងរួមនៃស្វ៊ីត

គេមាន $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n=n^2$

បើ $n=1\Rightarrow S_1=u_1=1$

$n=2\Rightarrow S_2=u_1+u_2=4$

នាំឱ្យ $u_2=4-u_1=4-1=3$ និង $d=u_2-u_1=3-1=2$

ដូចនេះ $\boxed{u_1=1 \text{ និង } d=2}$

ខ. គណនា តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1+(n-1)d$

ដោយ $u_1=1$ និង $d=2$ នាំឱ្យ $u_n=1+(n-1)(2)=2n-1$

ដូចនេះ $u_n=2n-1$

គ) សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីត

គេមាន $u_1=1$ និង $d=2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតគឺ: } 1, 3, 5, 7, 9}$

18. គណនា a, b, c និង d នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដោយដឹងថាផលសងរួមវាស្មើនឹង4 ហើយផលគុណតួ $a\cdot b\cdot c\cdot d=585$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា a, b, c និង d នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

តាង $2m = d = 4$ នាំឱ្យ $m = 2$

គេបាន :

$$a = x - 3m$$
$$b = x - m$$
$$c = x + m$$
$$d = x + 3m$$

តាមបំរាប់ $a.b.c.d = 585$

$$(x-3m)(x-m)(x+m)(x+3m) = 585$$
$$\left(x^2 - 9m^2\right)\left(x^2 - m^2\right) = 585$$
$$x^4 - 40x^2 - 441 = 0$$

តាង $u = x^2$ សមីការខាងលើទៅជា $u^2 - 40u - 441 = 0$

$\Delta' = (-20)^2 + 441 = 841 = 29^2$

$u = 20 - 29 = -9 < 0$ មិនយក

$u = 20 + 29 = 49$

គេបាន $x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm 7$,

. ចំពោះ $x = 7 \Rightarrow a = 1$

ដូចនេះ $a = 1, b = 5, c = 9, d = 13$

. ចំពោះ $x = -7 \Rightarrow a = -13$

ដូចនេះ $\boxed{a = -13, b = -9, c = -5, d = -1}$

19. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានផលសងរួម d និងតួទីមួយ u_1 ។ គណនា d ក្នុងករណី:

ក. $S_n = 176$ និង $u_n = 31$ ។

ខ. ផលធៀបរវាងតួទី 8 និង តួទី3 ស្មើ 4 ។

គ. ផលដកការេនៃតួទី10 និងតួទី 7 ស្មើនឹង 3 ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គណនា d ក្នុងករណី:

ក. $S_n = 176$ និង $u_n = 31$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$, $S_n = \dfrac{n}{2}(u_1 + u_n)$

គេបាន $\dfrac{n}{2}(u_1 + u_n) = 176$

$$\frac{n}{2}(1 + 31) = 176$$

$$n = \frac{176}{16} = 11$$

តាម $u_n = u_1 + (n-1)d$

នាំឱ្យ $31 = 1 + (11-1)d$

$$10d = 30 \Rightarrow d = 3$$

ដូចនេះ $\boxed{d = 3}$

ខ. ផលធៀបរវាងតួទី 8 និង តួទី3 ស្មើ 4 , គេមាន $\frac{u_8}{u_3}=4$

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1+(n-1)d$

នាំឱ្យ $u_8=u_1+7d=1+7d$

$u_3=u_1+2d=1+2d$

គេបាន $\frac{1+7d}{1+2d}=4$

$1+7d=4(1+2d)$

$1+7d=4+8d$

ដូចនេះ $d=3$

គ. ផលដកការេនៃតួទី10 និងតួទី 7 ស្មើនឹង 3

គេមាន $u_{10}{}^2-u_7{}^2=3$

$u_{10}=1+9d$

$u_7=1+6d$

នាំឱ្យ $(1+9d)^2-(1+6d)^2=3$

$1+18d+81d^2-1-12d-36d^2=3$

$45d^2+6d=3$

$15d^2+2d-1=0$

$\Delta^{'}=1+15=4^2$

នាំឱ្យ $d=\frac{-1-4}{15}=\frac{-1}{3}$ ឬ $d=\frac{-1+4}{15}=\frac{1}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{d=\frac{-1}{3} \text{ ឬ } d=\frac{1}{5}}$

20. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃមួយចំនួន $u_1,u_2,u_3,...,u_n$ ដែល $u_1+u_2+u_3+...+u_n=an^2+bn$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$

ក) ចូរស្រាយថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។

ខ) គណនា u_1 និង d ជាអនុគមន៍នៃ a និង b។

ដំណោះស្រាយ

ក) ចូរស្រាយថា $u_1,u_2,u_3,...,u_n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមាន $u_1+u_2+u_3+...+u_n=an^2+bn$

បើ $n=1\Rightarrow u_1=a+b$

$n=2\Rightarrow u_1+u_2=4a+2b\Rightarrow u_2=3a+b$

$n=3\Rightarrow u_1+u_2+u_3=9a+3b\Rightarrow u_3=5a+b$

$n=4\Rightarrow u_1+u_2+u_3+u_4=16a+4b\Rightarrow u_4=7a+b$

នាំឱ្យ $u_4-u_3=u_3-u_2=u_2-u_1=2a$ ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{(u_n) \text{ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត}}$

ខ. គណនា u_1 និង d ជាអនុគមន៍នៃ a និង b

តាមសម្រាយខាងលើ $\boxed{u_1=a+b \text{ និង } d=2a}$

21. ក. គណនា a , b , c នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដោយដឹងថា $a+b+c=171$ និង $a^2+b^2+c^2=9845$ ។

ខ. គណនា x, y, z ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដោយដឹងថា $x+y+z=36$ និង $x.y.z=1428$ ។

គ. គណនា a, b, c នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដោយដឹងថា $a+b+c=24$ និង $a^4+b^4+c^4=15392$ ។

ឃ. គណនា x, y, z ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដោយដឹងថា $x+y+z=-9$ និង $x.y.z=48$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. គណនា a, b, c នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត យក d ជាផលសងរួម គេបាន :

$b=a+d, c=b+d$

$a^2+b^2+c^2=9845$

$a^2+c^2=9845-(57)^2=6596$

$c=b+d=57+d$

$a=b-d=57-d$

$(57-d)^2+(57+d)=6596$

$(57)^2-114d+d^2+(57)^2+114d+d^2=6596$

$2d^2+3249+3249=6596$

$2d=6596-6498=98$

$d^2=49 \Rightarrow d=\pm 7$

តាមបំរាប់ $a+b+c=171$ ដោយ $2b=a+c$ (មធ្យមនព្វន្ត)

នាំឱ្យ $b=\dfrac{171}{3}=57$ ហើយ $a^2+b^2+c^2=9845$

នាំឱ្យ $a^2+c^2=9845-(57)^2=6596$

ដោយ $c=b+d=57+d$ និង $a=b-d=57-d$

នាំឱ្យ $(57-d)^2+(57+d)=6596$

$(57)^2-114d+d^2+(57)^2+114d+d^2=6596$

$2d^2+3249+3249=6596$

$2d=6596-6498=98$

$d^2=49 \Rightarrow d=\pm 7$

. ចំពោះ $d=7 \Rightarrow a=50$, $b=57, c=64$,

. ចំពោះ $d=-7 \Rightarrow a=64$, $b=57, c=50$

ដូចនេះ $\boxed{a=50, b=57, c=64 \text{ ឬ } a=64, b=57, c=50}$

ខ. គណនា x, y, z ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមាន x, y, z ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នាំឱ្យ $2y=x+y$ (មធ្យមនព្វន្ត)

តាមបំរាប់ $x+y+z=36$ និង $x.y.z=1428$

នាំឱ្យ $3y=36 \Rightarrow y=12$

គេបាន $\begin{cases} x+z=36-12=24=7+17 \\ x.z=\dfrac{1428}{12}=119=7\times 17 \end{cases}$

នាំឱ្យ $x=7$ និង $z=17$ ឬ $x=17$ និង $z=7$

ដូចនេះ $\boxed{x=7, y=12, z=17 \text{ ឬ } x=17, y=12, z=7}$

គ. គណនា a,b,c នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមាន $a+b+c=24$ ដោយ $2b=a+c$ (មធ្យមនព្វន្ត)

នាំឱ្យ $3b=24\Rightarrow b=8$ នោះ $a+c=16\Rightarrow c=16-a$ (1)

ហើយ $a^4+b^4+c^4=15392$ នាំឱ្យ $a^4+c^4=15392-8^4=15392-4096$

$$a^4+c^4=11296(2)$$

យក(1) ជំនួសក្នុង (2)

នាំឱ្យ $a^4+(16-a)^4=11296$ តែ $a=b-d=8-d$

នាំឱ្យ $(8-d)^4+(8+d)^4=11296$

$8^4-4(8)^3d+6(8)^2d^2-4(8)d^3+d^4+(8)^4+4(8)^3d+$

$6(8)^2d^2+4(8)d^3+d^4=11296$

$2(8)^4+2(6)(8)^2d^2+2d^4=11296$

$d^4+6(8)^2d^2+8^4=5648$

$d^4+384d^2-1552=0$

$\Delta^{'}=(192)^2+1552=196^2$

នាំឱ្យ $d^2=-192-196<0$ មិនយក

$d^2=-192+196=4$

នាំឱ្យ $d=\pm 2$

. ចំពោះ $d=2\Rightarrow a=8-2=6, c=16-6=10$

. ចំពោះ $d=-2\Rightarrow a=8+2=10, c=16-10=6$

ដូចនេះ $\boxed{a=6,b=8,c=10 \text{ ឬ } a=10,b=8,c=6}$

ឃ) គណនា x,y,z ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមាន $\begin{cases} x+y+z=-9 \\ x\cdot y\cdot z=48 \end{cases}$ ដោយ $2y=x+z\Rightarrow y=-3$

នាំឱ្យ $\begin{cases} x+z=-6=2-8 \\ x\cdot z=-16=2\times(-8) \end{cases}$

នាំឱ្យ $x=2, z-8$ ឬ $x=-8, z=2$

ដូចនេះ $x=2, y=-3, z=-8$ ឬ $x=-8, y=-3, z=2$

22. ក. បញ្ចូល 6 ចំនួនជាស្វ៊ីតនព្វន្តទៅក្នុងចន្លោះ 6 និង 34 ។

ខ. រក 9 ចំនួនដែលជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលគេស្គាល់ $S=189$ និង $u_1=5$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បញ្ចូល 6 ចំនួនជាស្វ៊ីតនព្វន្តទៅក្នុងចន្លោះ 6 និង34

គេមាន $u_1=6$ និង $u_8=34$

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1+(n-1)d$

នាំឱ្យ $u_8=u_1+7d$

$$34=6+7d$$

$$7d=28\Rightarrow d=4$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{6 តួនៅចន្លោះនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះគឺ}\,10,14,18,22,26,30}$

ខ. រក 9 ចំនួនដែលជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលគេស្គាល់ $S=189$ និង $u_1=5$

គេមាន $S_9=189$ និង $u_1=5$

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)=\frac{n}{2}[2u_1+(n-1)d]$

នាំឱ្យ $S_9=\frac{9}{2}(2u_1+8d)=9(u_1+4d)$

$189=9(5+4d)$

$189=45+36d\Rightarrow d=\frac{144}{36}=4$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំនួនទាំង9 គឺ:}\,5,9,13,17,21,25,29,33,37}$

23. ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមាន100តួ ដែលមានផលបូក -16350 និងតួចុងក្រោយស្មើ -312 ។ គណនាតួទីមួយ និង ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនេះ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គណនាតួទីមួយ និង ផលសងរួម

គេមាន $S_{100}=-16350$ និង $u_{100}=-312$

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$ នាំឱ្យ

$$S_{100}=\frac{100}{2}(u_1+u_{100})$$

$$-16350=50(u_1-312)$$

$$(u_1-312)=-327$$

$$u_1=-327+312=-15$$

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1+(n-1)d$ នាំឱ្យ

$$u_{100}=u_1+99d$$

$$-312=-15+99d$$

$$99d=-297\Rightarrow d=-3$$

ដូចនេះ $\boxed{u_1=-15,d=-3}$

មេរៀនទី៣ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

៣.១ និយមន័យ

- ស្វ៊ីតធរណីមាត្រជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលរៀបតាមលំដាប់ហើយតួនីមួយៗ(ក្រៅពីតួទី១)ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់របស់វាគុណនឹងចំនួនថេរ $q \neq 0$ ដែល q ហៅថាផលធៀបរួម។
- តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ $u_n = q \times u_{n-1}$

៣.២ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$u_2 = u_1 \times q$, $u_3 = u_2 \times q = u_1 \times q^2$,...

ដូចនេះ $\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$

❖ **ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួដើម និងតួចុង**

គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$$\underbrace{u_1, u_2, u_3, ..., u_p}_{p \text{ តួ}}, ..., \underbrace{u_{n-p+1}, ..., u_{n-2}, u_{n-3}, u_n}_{p \text{ តួ}}$$

នោះ u_3 និង u_{n-2} , u_p និង u_{n-p+1} ជាតួស្មើចម្ងាយពីតួដើម u_1 និងតួចុង u_n គេបាន

$$\boxed{u_1 \times u_n = u_p \times u_{n-p+1}}$$

៣.៣ ផលបូក n តួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

❖ **ករណីមានចំនួនតួរាប់អស់**

គេមាន $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1} + u_n$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{u_1\left(q^n - 1\right)}{q-1} = \frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}} \quad (q \neq 1)$$

❖ **ករណីមានចំនួនតួរាប់មិនអស់**

គេមាន $s_n = \dfrac{u_1\left(q^n-1\right)}{q-1} = \dfrac{u_1 q^n}{q-1} + \dfrac{u_1}{1-q}$

កាលណា $|q| < 1$ បើ $n \to +\infty \Rightarrow q^n \to 0$

ដូចនេះ $\boxed{s_\infty = \dfrac{u_1}{1-q}}$

៣.៤ ផលគុណ n តួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $u_1, u_2, u_3, ..., u_{n-1}, u_n$ នាំឱ្យ

$$\begin{cases} p = u_1 \times u_2 \times u_3 \times ... \times u_{n-1} \times u_n & (1) \\ p = u_n \times u_{n-1} \times ... \times u_2 \times u_1 & (2) \end{cases}$$

យក (1) គុណ (2)

$$p^2 = \left(u_1 \times u_n\right)\left(u_2 \times u_{n-1}\right)...\left(u_{n-1} \times u_2\right)\left(u_n \times u_1\right)$$
$$= \left(u_1 \times u_n\right)\left(u_1 \times u_n\right)...\left(u_n \times u_1\right)\left(u_n \times u_1\right)$$
$$p^2 = \left(u_1 \times u_n\right)^n$$

នាំឱ្យ $\boxed{p=\sqrt{(u_1\times u_n)^n}}$

សំគាល់

- (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ជាចំនួនថេរមិនអាស្រ័យ n ចំនួនថេរនេះហៅថាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីត (u_n) ។
- បីចំនួនពិតតគ្នា a,b,c បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធណីមាត្រ នោះ $b^2=a\times c$ ឬ $b=\sqrt{a\times c}$ គេថា b ជាមធ្យមធរណីមាត្រនៃ a និង c ។

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

1. សរសេរ 5តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $U_n=6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ រួចបង្ហាញថាវាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

+សរសេរ 5 តួដំបូង

គេមាន $u_n=6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

បើ:

$n=1 \Rightarrow u_1=6\left(\frac{1}{2}\right)^0=6$

$n=2 \Rightarrow u_2=6\left(\frac{1}{2}\right)=3$

$n=3 \Rightarrow u_3=6\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$

$n=4 \Rightarrow u_4=6\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{4}$

$n=5 \Rightarrow u_5=6\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$

ដូចនេះ ប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះគឺ $6,3,\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{8}$

+បង្ហាញថាវាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $u_n=6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ នាំឱ្យ $u_{n+1}=6\left(\frac{1}{2}\right)^n$

គេបាន $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{6\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\frac{1}{2}$ ថេរ

ដូចនេះ $u_n=6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន ផលធៀបរួម $q=\frac{1}{2}$

2. រកតួទី n និងតួទី8 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនីមួយៗខាងក្រោម :

$a.\,200,40,8,\ldots$ $b.\,64,-32,,16,\ldots$ $c.\,-5,15,-45,\ldots$ $d.\,a^7,-a^6,a^5$

ដំណោះស្រាយ

រក u_n និង u_8 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$a.\ 200, 40, 8, \ldots$

គេមាន $u_1 = 200, u_2 = 40$ នាំឱ្យ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$

+តួទី n $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

$$u_n = 200\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$$

$$= 1000\left(\frac{1}{5}\right)^n = 10^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 10^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n}$

+តួទី 8 $u_8 = 10^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^8 = \frac{10^3}{5^8} = \frac{10^3}{5^3} \times \frac{1}{5^5}$

$= 2^3 \times \frac{1}{5^5} = \frac{8}{5^5}$ ដូចនេះ $\boxed{u_8 = \frac{8}{5^5}}$

$b.\ 64, -32, 16, \ldots$

គេមាន $u_1 = 64, u_2 = -32$ នាំឱ្យ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$

+តួទី n: $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 64 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^6}{2^{n-1}} \times (-1)^{n-1}$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 2^{7-n}(-1)^{n-1}}$

+តួទី 8 $u_8 = 2^{7-n}(-1)^{8-1} = 2^{-1}(-1)^7 = -\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{u_8 = -\frac{1}{2}}$

$c.\ -5, 15, -45, \ldots$

គេមាន $u_1 = -5, u_2 = 15$ នាំឱ្យ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{15}{-5} = -3$

+តួទី n គឺ $u_n = u_1 \times q^{n-1} = (-5)(-3)^{n-1}$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = (-5)(-3)^{n-1}}$

+តួទី 8 គឺ $u_8 = (-5)(-3)^7 = 417715$

$d.\ a^7, -a^6, a^5, \ldots$

គេមាន $u_1 = a^7, u_2 = -a^6$

នាំឱ្យ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-a^6}{a^7} = -\frac{1}{a}$ $, a^7 \neq 0$

+តួទី $n: u_n = u_1 \times q^{n-1} = a^7\left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1} = \frac{a^7}{a^{n-1}}(-1)^{n-1} = a^{8-n}(-1)^{n-1}$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = a^{8-n}(-1)^{n-1}}$

+តួទី $8: u_8 = a^{8-8}(-1)^{8-1} = -1$

ដូចនេះ $\boxed{u_8 = -1}$

3. រកចំនួនតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម :

$a.\ 2, 4, 8, ..., 2048$ $\quad$ $b.\ 81, 27, 9, ..., \frac{1}{81}$

$c. 5, 10, 20, ..., 5\times 2^n$ $\quad$ $d. 3, 6, 12, ..., 3\times 2^{n+3}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកចំនួនតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$a.\ 2, 4, 8, ..., 2048$

យក $u_n = 2048$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $u_1 = 2 \quad , q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2$

នាំឱ្យ $2048 = 2\times 2^{n-1} = 2^n$

$2^{11} = 2^n \Rightarrow n = 11$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ីត } 2,\ 4,\ 8, ..., 2048 \text{ មាន } 11 \text{ តួ}}$

$b.\ 81, 27, 9, ..., \frac{1}{81}$

យក $u_n = \frac{1}{81}$ តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $u_1 = 81 \quad , \ q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$

នាំឱ្យ $\frac{1}{81} = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 27\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^7 \Rightarrow n = 7$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ីត } 81\ ,\ 27\ ,\ 9, ..., \frac{1}{8} \text{ មាន } 7 \text{ តួ}}$

$c. 5, 10, 20, ..., 5\times 2^n$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $u_1 = 5 \ , \ q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{5} = 2$ នាំឱ្យ $u_n = 5\times 2^{n-1}$

$\Rightarrow u_{n+1} = 5\times 2^n$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ីត } 5,\ 10, 20, ...,\ 5\times 2^n \text{ មាន } (n+1) \text{ តួ}}$

$d.3,6,12,...,3\times 2^{n+3}$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $u_1 = 3$, $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{3} = 2$ នាំឱ្យ $u_n = 3\times 2^{n-1}$

$\Rightarrow u_{n+4} = 3\times 2^{n+3}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ីត } 3,\ 6,\ 12,...,3\times 2^{n+3} \text{ មាន } (n+4) \text{ តួ}}$

4. តើគេត្រូវថែមប៉ុន្មានទៅលើចំនួន $3,24,94$ ដើម្បីអោយបាន 3 តួ តៗគ្នាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាចំនួនដែលត្រូវថែម

តាង a ជាចំនួនដែលត្រូវថែម

គេបាន $3+a$, $24+a$, $94+a$

ដើម្បីឱ្យវាជាស្វ៊ីតធរណីមត្រលុះត្រាតែ $(24+a)^2 = (3+a)(94+a)$ (មធ្យមធរណីមាត្រ)

$576+48a+a^2 = 282+97a+a^2$

$49a = 294$

$a = \frac{294}{49} = 6$

ដូចនេះ $\boxed{\text{គេត្រូវថែម } 6 \text{ លើចំនួនទាំង } 3}$

5. គេមានចំនួន a , 28 , b ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនិង $a+b=119$ គណនា a និង b ។

ដំណោះស្រាយ:

គេមាន $\begin{cases} a+b=119=7+112 \\ a\times b = 28^2 = 784 = 7\times 112 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=7 \text{ និង } b=112 \quad \text{ឬ } a=112 \text{ និង } b=7}$

6. រកតួទីមួយ u_1 និងផលធៀបរួម q នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម :

ក. $u_4 = 192$ និង $u_8 = 3072$ ខ. $u_3 = 18$ និង $u_7 = 1458$

គ. $u_2 + u_3 = 9$ និង $u_7 = 8u_4$ ឃ. $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

ដំណោះស្រាយ

រក u_1 និង q

ក. $u_4 = 192$ និង $u_8 = 3072$

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

នាំឱ្យ $u_4 = u_1\times q^3 \Leftrightarrow 192 = u_1 \times q^3 \quad (1)$

$u_8 = u_1 \times q^7 \Leftrightarrow 3072 = u_1\times q^7 \quad (2)$

យក (2) ចែក (1) នាំឱ្យ $\frac{q^7}{q^3} = \frac{3072}{192}$

$q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2$

ចំពោះ: $q=2$ តាម $(1)\Rightarrow u_1=\frac{192}{8}=24$

$q=-2$ តាម $(1)\Rightarrow u_1=\frac{192}{-8}=-24$

ដូចនេះ $\boxed{u_1=24 \text{ និង } q=2 \text{ ឬ } u_1=-24 \text{ និង } q=-2}$

ខ. $u_3=18$ និង $u_7=1458$

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1\times q^{n-1}$

នាំឱ្យ $u_3=u_1\times q^2 \Rightarrow 18=u_1\times q^2 \ (1)$

$u_7=u_1\times q^6 \Rightarrow 1458=u_1\times q^6 \ (2)$

យក (2)ចែក (1) នាំឱ្យ $q^4=\frac{1458}{18}=81$

$\Rightarrow q=\pm 3$

ចំពោះ: $q=3$ តាម $(1)\Rightarrow u_1=\frac{18}{9}=2$

$q=-3$តាម$(1)\Rightarrow u_1=\frac{18}{9}=2$

ដូចនេះ $\boxed{u_1=2 \text{ និង } q=3 \text{ ឬ } u_1=2 \text{ និង } q=-3}$

គ. $u_2+u_3=9$ និង $u_7=8u_4$

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1\times q^{n-1}$

នាំឱ្យ $u_1\times q+u_1\times q^2=9\Rightarrow u_1\left(q+q^2\right)=9 \ (1)$

$u_1\times q^6=8u_1q^3\Rightarrow q^3=8\Rightarrow q=2 \ (2)$

យកទៅជំនួសក្នុង (1)នាំឱ្យ $u_1(2+4)=9\Rightarrow u_1=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{u_1=\frac{3}{2} \text{ និង } q=2}$

ឃ. $u_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

យើងមាន:

$$u_1=\left(-\frac{1}{3}\right)^1=-\frac{1}{3}$$

$$u_2=\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

នាំឱ្យ $q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{1/9}{-1/3}=-\frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{u_1=-\frac{1}{3}}\ \boxed{q=-\frac{1}{3}}$

7. គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ a,b,c,d,e មានផលធៀបរួមធំជាង1ហើយជាចំនួនបឋមរវាងគ្នានិងតួទី1។ កំណត់ស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងលើដើម្បីឱ្យបាន $6a^2=e-b$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ដោយ a,b,c,d,e ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេបាន $b=a\times q\ ,c=a\times q^2\ ,d=a\times q^3\ ,e=a\times q^4$

ដោយ $6a^2=e-b$

នោះ $6a^2=aq^4-aq=aq\left(q^3-1\right)\quad ,\dfrac{6a}{q}=\left(q^3-1\right)\ (1)$

ដោយ $q\in \mathbb{N}\Rightarrow q^3\in \mathbb{N}\Rightarrow q^3-1\in \mathbb{N}$

នាំឱ្យ $\dfrac{6a}{q}$ ជាចំនួនចែកដាច់

តែ a និង q ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

នាំឱ្យ $\dfrac{a}{q}$ ចែកមិនដាច់ , គេបាន $\dfrac{6}{q}$ ជាចំនួនចែកដាច់

នាំឱ្យ $q=2\ ,q=3\ ,q=6$

. ចំពោះ $q=2$ តាម $(1)\Rightarrow a=\dfrac{q\left(q^3-1\right)}{6}=\dfrac{2\left(2^3-1\right)}{6}=\dfrac{7}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ីតនោះគឺ } \dfrac{7}{3},\dfrac{14}{3},\dfrac{28}{3},\dfrac{56}{3},\dfrac{112}{3}}$

. ចំពោះ $q=3$ តាម $(1)\Rightarrow a=\dfrac{q\left(q^3-1\right)}{6}=\dfrac{3\left(3^3-1\right)}{6}=\dfrac{26}{2}=13$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ីតនោះគឺ } 13,39,117,351,1053}$

. ចំពោះ $q=6$ តាម $(1)\Rightarrow a=\dfrac{q\left(q^3-1\right)}{6}=\dfrac{6\left(6^3-1\right)}{6}=215$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ីតនោះគឺ } 215,1290,7740,46440,278640}$

8. គេឱ្យបីចំនួនបង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។ រកចំនួនទាំងបីនោះ

ក. បើផលបូកចំនួនទាំងបីស្មើ 104 ហើយផលគុណចំនួនទាំងបីស្មើ 13824។

ខ.បើផលបូកចំនួនទាំងបីស្មើ 13 និង ផលគុណចំនួនទាំងបី ស្មើ -64 ។

គ.បើផលបូកចំនួនទាំងបីស្មើ 28 និងផលគុណចំនួនទាំងបី ស្មើ512 ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនទាំងបីនេះ

តាង u_1,u_2,u_3 ជាចំនួនដែលត្រូវរក

ក. តាមបំរាប់

$\begin{cases}u_1+u_2+u_3=104\\ u_1\times u_2\times u_3=13824\end{cases}$, តាមរូបមន្ត $u_n=u_1\times q^{n-1}$

នាំឱ្យ $\begin{cases}u_1+u_1q+u_1q^2=104\\ u_1\times u_1q\times u_1q^2=13824\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(1+q+q^2\right)=104 & (1)\\ u_1q=\sqrt[3]{13824}=24 & (2)\end{cases}$

យក (1) ចែក (2) គេបាន $\dfrac{1+q+q^2}{q}=\dfrac{104}{24}=\dfrac{13}{3}$

$$3q^2+3q+3=13q$$
$$3q^2-10q+3=0$$

$\Delta' = (-5)^2-9=16=4^2$

$q=\frac{5-4}{3}=\frac{1}{3}\quad ,q=\frac{5+4}{3}=3$

. ចំពោះ $q=\frac{1}{3}$ តាម $(2)\Rightarrow u_1=72\ ,u_2=24\ ,u_3=8$

. ចំពោះ $q=3$ តាម $(2)\Rightarrow u_1=8\ ,u_2=24\ ,u_3=72$

ខ. តាមបំរាប់

$$\begin{cases}u_1+u_2+u_3=13\\ u_1\times u_2\times u_3=-64\end{cases}$$

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1\times q^{n-1}$ នាំឱ្យ

$$\begin{cases}u_1+u_1q+u_1q^2=13\\ u_1\times u_1q\times u_1q^2=-64\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(1+q+q^2\right)=13 & (1)\\ u_1q=\sqrt[3]{-64}=-4 & (2)\end{cases}$$

យក (1) ចែក (2) គេបាន $\frac{1+q+q^2}{q}=-\frac{13}{4}$

$$-4-3q-4q^2=13q$$
$$4q^2+17q+4=0$$
$$\Delta'=(17)^2-64=289-64=225=15^2$$
$$q=\frac{-17-15}{8}=-4\quad ,q=\frac{-17+15}{8}=-\frac{1}{4}$$

. ចំពោះ $q=-4$ តាម $(2)\Rightarrow u_1=-1\ ,u_2=4\ ,u_3=-16$

. ចំពោះ $q=-\frac{1}{4}$ តាម$(2)\Rightarrow u_1=-16\ ,u_2=4\ ,u_3=-1$

គ. តាមបំរាប់

$$\begin{cases}u_1+u_2+u_3=28\\ u_1\times u_2\times u_3=512\end{cases},$$

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1\times q^{n-1}$ នាំឱ្យ

$$\begin{cases}u_1+u_1q+u_1q^2=28\\ u_1\times u_1q\times u_1q^2=512\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(1+q+q^2\right)=28 & (1)\\ u_1q=\sqrt[3]{512}=8 & (2)\end{cases}$$

យក (1) ចែក (2) គេបាន $\frac{1+q+q^2}{q}=\frac{28}{8}=\frac{7}{2}$

$$2+2q+2q^2=7q$$
$$2q^2-5q+2=0$$
$$\Delta=(-5)^2-16=9=3^2$$
$$q=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}\quad ,q=\frac{5+3}{4}=2$$

. ចំពោះ $q=\frac{1}{2}$ តាម $(2)\Rightarrow u_1=16\ ,u_2=8\ ,u_3=4$

. ចំពោះ $q=2$ តាម $(2)\Rightarrow u_1=4\,,u_2=8\,,u_3=16$

9. គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន 7 តួ។សរសេរស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះ បើគេដឹងថាផលបូកបីតួខាងដើមស្មើ 2 ហើយផលបូក 3 តួខាងចុងស្មើ 1250 ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន 7 តួ

យក $u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលត្រូវរក

តាមបំរាប់ $s_1=u_1+u_2+u_3=u_1+u_1q+u_1q^2$

$=u_1\left(1+q+q^2\right)=2 \quad (1)$

$s_2=u_5+u_6+u_7=u_1q^4+u_1q^5+u_1q^6$

$=u_1q^4\left(1+q+q^2\right)=1250 \quad (2)$

យក (2) ចែក (1) $\Rightarrow q^4=\frac{1250}{2}=625 \;\; ,q=\pm 5$

.ចំពោះ $q=5$ តាម $(1)\Rightarrow u_1=\frac{2}{31}$

ដូចនេះ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ $\frac{2}{31},\frac{10}{31}\frac{50}{31},\frac{250}{31},\frac{1250}{31},\frac{6250}{31},\frac{31250}{31}$

.ចំពោះ $q=-5$ តាម $(1)\Rightarrow u_1=\frac{2}{21}$

ដូចនេះ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ $\boxed{\frac{2}{21},-\frac{10}{21},\frac{50}{21},-\frac{250}{21},\frac{1250}{21},-\frac{6250}{21},\frac{31250}{21}}$

10. គេមានចំនួន $x\;,2x+6$ និង $4x+36$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ចូរកំណត់តម្លៃ x ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $x\;,2x+6$ និង $4x+36$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នាំឱ្យ $(2x+6)^2=x(4x+36)$ (មធ្យមធរណីមាត្រ)

$4x^2+24x+36=4x^2+36x$

$12x=36$

ដូចនេះ $\boxed{x=3}$

11. គេឲ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (u_n) មួយដែលមានតួទី៣ $u_3=\frac{4}{3}$ និងតួទី៦ $u_6=-\frac{32}{81}$ ។ រកតួទី 8 និងផលបូកប្រាំបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n) ។

ដំណោះស្រាយ :

- រក u_8

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1q^{n-1}$

តាមបំរាប់ $u_3=\frac{4}{3} \;\Rightarrow u_1q^2=\frac{4}{3} \;\; (1)$ និង $u_6=-\frac{32}{81} \;\Rightarrow u_1q^5=-\frac{32}{81} \;\; (2)$

យក (2) ចែកនឹង $(1)\Rightarrow q^3=-\frac{32}{81}\times\frac{3}{4}=-\frac{8}{27} \quad\Rightarrow\quad q=-\frac{2}{3}$

យក $q=-\frac{2}{3}$ ទៅជំនួសក្នុង (1) គេបាន $u_1=3 \Rightarrow \;\; u_8=u_1q^7=3\left(-\frac{2}{7}\right)^7=-\frac{128}{729}$

ដូចនេះ $u_8=-\frac{128}{729}$

- រក S_8

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{u_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$ ជំនួស $n=8$ ចូលក្នុងរូបមន្តនេះ គេបាន

$$S_8=\frac{3\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^8-1\right]}{-\frac{2}{3}-1}=\frac{3\left(\frac{256}{3^8}-1\right)}{-\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{3^2\left(\frac{256}{3^8}-1\right)}{-5}=\frac{\frac{256}{729}-9}{-5}$$

$$=\frac{256-6561}{729(-5)}=\frac{1261}{729}$$

ដូចនេះ $S_8=\frac{1261}{729}$

12. គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម q ។ តួទាំងអស់សុទ្ធតែវិជ្ជមាន u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 ។
ក. គេយក $u_3=x$ ចូរគណនាផលបូក $S_1=u_1+u_5$ និង $S_2=u_2+u_4$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។
ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ${S_2}^2=xs_1+2x^2$ ។
គ. គណនា x និង q ដើម្បីឱ្យ $S_2=20$, $S_1=\frac{164}{3}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. គណនា $S_1=u_1+u_5$ ជាអនុគមន៍នៃ x

គេមាន $u_3=u_1q^2 \Rightarrow u_1=\frac{u_3}{q^2}=\frac{x}{q^2}$ និង $u_5=u_1q^4=\frac{x}{q^2}\times q^4=xq^2$

នាំឱ្យ $S_1=\frac{x}{q^2}+xq^2=\frac{x+xq^4}{q^2}=x\left(\frac{1+q^4}{q^2}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{S_1=x\left(\frac{1+q^4}{q^2}\right)}$

- គណនា $S_2=u_2+u_4$

គេមាន $u_2=\frac{u_3}{q}=\frac{x}{q}$ និង $u_4=u_3q=xq$ គេបាន

$$S_2=\frac{x}{q}+xq=x\left(\frac{1+q^2}{q}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{S_2=x\left(\frac{1+q^2}{q}\right)}$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ${S_2}^2=xS_1+2x^2$

គេមាន

$$S_2=x\left(\frac{1+q^2}{q}\right) \Rightarrow {S_2}^2=x^2\left(\frac{1+q^2}{q}\right)^2=x^2\left(\frac{1+2q^2+q^4}{q^2}\right)$$

$$=\frac{x^2+2x^2q^2+x^2q^4}{q^2}=\frac{x^2+x^2q^4}{q^2}+\frac{2x^2q^2}{q^2}$$

$$=x^2\left(\frac{1+q^4}{q}\right)+2x^2=x\cdot x\left(\frac{1+q^4}{q}\right)+2x^2$$

តែ $S_1=x\left(\frac{1+q^4}{q^2}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{S_2{}^2=xS_1+2x^2}$

គ. គណនា x និង q

គេមាន $s_2{}^2=xs_1+2x^2$ ដោយ $s_2=20$, $s_1=\frac{164}{3}$ គេបាន ៖

$$(20)^2=x\left(\frac{164}{3}\right)+2x^2$$

$$400=\frac{164}{3}x+2x^2$$

$$6x^2+164x-1200=0$$

$$3x^2+82x-600=0$$

$$\Delta'=(41)^2-3(-600)$$

$$=1681+1800=3481=59^2$$

នាំឱ្យ $x=\frac{-41-59}{3}<0$ មិនយក នោះគេបាន $x=\frac{-41+59}{3}=6$

ដូចនេះ $\boxed{x=6}$

ម៉្យាងទៀត គេមាន $s_2=x\left(\frac{1+q^2}{q}\right)$ ដោយ $s_2=20$, $x=6$

នាំឱ្យ

$$20=\frac{6+6q^2}{q}$$

$$6q^2-20q-6=0$$

$$3q^2-10q+3=0$$

$$\Delta'=(-5)^2-3(3)=16=4^2$$

នាំឱ្យ $q=\frac{5-4}{3}=\frac{1}{3}$, $q=\frac{5+4}{3}=3$

ដូចនេះ $\boxed{q=\frac{1}{3}\ ,q=3}$

13. រកពីរចំនួនខុសគ្នា x និង y ដែល $x,y,10$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តហើយ $y,x,10$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

រកពីរចំនួន x និង y

គេមាន $x,y,10$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត គេបាន $y=\frac{x+10}{2}$ (1) (មធ្យមនព្វន្ត)

និង $y, x, 10$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គេបាន $x^2 = 10y$ (2) (មធ្យមធរណីមាត្រ)

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន

$$x^2 = 10\left(\frac{x+10}{2}\right)$$
$$x^2 - 5x - 50 = 0$$
$$\Delta = (-5)^2 - 4(-50) = 225 = 15^2$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{5+15}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{5-15}{2}$$

- ចំពោះ $x = 10$ តាម $(1) \Rightarrow y = 10$ មិនយក ព្រោះ $x \neq y$
- ចំពោះ $x = -5$ តាម $(1) \Rightarrow y = \frac{5}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{x = -5 \text{ និង } y = \frac{5}{2}}$

14. រកផលបូក n តួដំបូង s_n និង s_8 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានតួទី n , $u_n = 2^{n-3}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

- គណនា S_n

គេមាន $u_n = 2^{n-3} \Rightarrow u_1 = 2^{1-3} = \frac{1}{4}$ នាំឱ្យ $u_{n+1} = 2^{n-2}$

គេបាន $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n-2}}{2^{n-3}} = 2$ នាំឱ្យ u_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន $u_1 = \frac{1}{4}$ និង $q = 2$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{u_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$ គេបាន

$$S_n = \frac{\frac{1}{4}\left(2^n - 1\right)}{2-1} = \frac{1}{4}\left(2^n - 1\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 2^{n-2} - \frac{1}{4}}$

- គណនា S_8

ជំនួស $n = 8$ ក្នុងរូបមន្តខាងលើគេបាន $S_8 = 2^6 - \frac{1}{4} = \frac{64\times 4 - 1}{4} = \frac{255}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{S_8 = \frac{255}{4}}$

15. ក. គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $2, 6, 18\ldots$ តើចំនួន 486 ជាតួទីប៉ុន្មាន? រួចគណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតនេះត្រឹមតួដែលស្មើ 486 ដំបូង ។

ខ. គេឲ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $3, 9, 27, \ldots$ ។ គណនា u_8 និង S_7 ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. រកតួដែលមានតម្លៃស្មើ 486

យក $u_n = 486$ តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 q^{n-1}$ ដោយ $u_1 = 2$, $q = 3$

$$486 = 2(3)^{n-1}$$
$$486 = \frac{2}{3}(3)^n$$

គេបាន

$$3^n = \frac{486\times 3}{2} = 729 = 3^6 \quad \Rightarrow \quad n = 6$$

ដូចនេះ $\boxed{u_6 = 486}$

- គណនា S_6

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{u_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$

ជំនួស $n = 6$ ក្នុងរូបមន្ត គេបាន $S_6 = \frac{u_1(q^6-1)}{q-1} = \frac{2(3^6-1)}{3-1} = 728$

ដូចនេះ $S_6 = 728$

ខ. គណនា u_8 និង u_7

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 q^{n-1}$ គេបាន $u_8 = u_1 q^7$ ដោយ $u_1 = 3\ , q = 3$

$$\Rightarrow u_8 = 3\times 3^7 = 3^8 = \underline{6561|}$$

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{u_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$ នោះគេបាន $S_7 = \dfrac{3\left(3^7-1\right)}{3-1} = \dfrac{3^8-3}{2} = \underline{3279|}$

16. ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រមួយស្មើ $3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$ ចូរកំណត់ តួទី១ តួទី២ និង ផលធៀបរួម នៃស៊ីតនេះ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់តួទី១ តួទី២ និង ផលធៀបរួមនៃស៊ីត

គេមាន $S_n = 3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$ ចំពោះ $n = 1\,,2$ គេបាន ៖

$$S_1 = u_1 = 3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^1\right] = 3\left(1-\frac{1}{3}\right) = 2 \quad \text{និង} \quad S_2 = u_1 + u_2 = 3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = 3\left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{8}{3}$$

នាំឱ្យ $u_2 = \frac{8}{3} - u_1 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$ និង $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{u_1 = 2, u_2 = \frac{2}{3} \text{ និង } q = \frac{1}{3}}$

17. ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រមួយស្មើ $\frac{1}{3} - \frac{2^n}{3^{n+1}}$ ។ ចូររកតួទី១ តួទី២ និង ផលធៀបរួមនៃស៊ីតនេះ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ធ្វើតាមគំរូខាងលើ

ដូចនេះ $\boxed{u_1 = \frac{1}{9}, u_2 = \frac{2}{27} \text{ និង } q = \frac{2}{3}}$

18. គេមានស៊ីតធរណីមាត្រមួយតាងដោយ $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ មានផលធៀបរួម q បើយើងសរសេរបញ្ច្រាស់ $u_n, u_{n-1}, \ldots, u_3, u_2, u_1$ ។ តើស៊ីតនៃចំនួននេះជាស៊ីតអ្វី ?

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងមាន $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម q

គេបាន $u_1,u_1q,u_1q^2,...,u_1q^{n-2},u_1q^{n-1}$ យើងសរសេរបញ្ច្រាស់មកវិញ $u_1q^{n-1},u_1q^{n-2},...,u_1q^2,u_1q,u_1$

គេបាន $q^{'}=\frac{u_1q^{n-2}}{u_1q^{n-1}}=...=\frac{u_1q}{u_1q^2}=\frac{u_1}{u_1q}=\frac{1}{q}$

ដូចនេះ $u_1q^{n-1},u_1q^{n-2},...,u_1q^2,u_1q,u_1$ ឬ $u_n,u_{n-1},...,u_3,u_2,u_1$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q^{'}=\frac{1}{q}$ ។

19. រកបីចំនួនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្របើគេថែម 24 លើតួទី២ នោះវាក្លាយជាស្វ៊ីតនព្វន្ត បើគេថែម 432 លើតួទី៣ វានឹងក្លាយជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

រកបីចំនួនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យក x,y,z ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គេបាន $y^2=x\cdot z$ (1) (មធ្យមធរណីមាត្រ)

តាមបំរាប់ : $x,y+24,z$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត និង $x,y,z+432$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នោះគេទាញបាន $2(y+24)=x+z$ (2) និង $(y+24)^2=x(z+432)=xz+432x$ (3)

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន

$$(y+24)^2=y^2+432x$$
$$y^2+48y+576-y^2=432x$$
$$24(2y+24)=432x$$
$$2y+24=18x$$
$$y+12=9x$$
$$y=9x-12 \quad (4)$$

តាម (2) នាំឱ្យ $z=2y+48-x=2(9x-12)+48-x=17x+24$ (5)

តាម (1) នាំឱ្យ $(9x-12)^2=x(17x+24)$

$$81x^2-216x+144-17x^2-24x=0$$
$$64x^2-240x+144=0$$
$$4x^2-15x+9=0$$
$$\Delta=(-15)^2-4(4)(9)=81=9^2$$
$$\Rightarrow x=\frac{15-9}{8}=\frac{3}{4} \quad \text{ឬ} \quad x=\frac{15+9}{8}=3$$

- ចំពោះ $x=\frac{3}{4}$ យកទៅជំនួសក្នុង (4) និង (5)

នាំឱ្យ(4) $y=9\left(\frac{3}{4}\right)-12=\frac{-21}{4}$

នាំឱ្យ(5) $z=17\left(\frac{3}{4}\right)+24=\frac{147}{4}$

- ចំពោះ $x=3$ យកទៅជំនួសក្នុង (4) និង (5)

នាំឱ្យ(4) $y=9(3)-12=15$

នាំឱ្យ(5) $z=17(3)+24=75$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ីតធរណីមាត្រនោះគឺ } \frac{3}{4},-\frac{21}{4},\frac{147}{4} \text{ ឬ } 3,15,75}$

20. ផលគុណបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយស្មើ 216 ហើយផលបូកបីតួដំបូងស្មើនឹង 21 ។ រកបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះដោយដឹងថា ផលធៀបរួមវាខុសពី 2 ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

រកបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីត

យក u_1, u_2, u_3 និង $q \neq 2$

តាមបំរាប់ $\begin{cases} u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 216 & (1) \\ u_1 + u_2 + u_3 = 21 & (2) \end{cases}$

$$\begin{cases} u_1 \cdot u_1 q \cdot u_1 q^2 = 216 \\ u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {u_1}^3 q^3 = 216 & (1) \\ u_1(1+q+q^2) = 21 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 q = 6 \ \ (1) \\ u_1(1+q+q^2) = 21(2) \end{cases}$$

យក (2) ចែក (1) គេបាន $\dfrac{1+q+q^2}{q} = \dfrac{21}{6}$

$$6 + 6q + 6q^2 = 21q$$

$$6q^2 - 15q + 6 = 0$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(2) = 9 = 3^2$$

នាំឱ្យ $q = \dfrac{5+3}{4} = 2$ (មិនយក) ឬ $q = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$

- ចំពោះ $q = \dfrac{1}{2}$ ជំនួសក្នុង (1) នាំឱ្យ $u_1 = 12$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំនួនទាំងបីនេះគឺ } 12, 6, 3}$

មេរៀនទី ៤ ផលបូកនៃស្វ៊ីត

៤.១ និមិត្តសញ្ញាផលបូក

និមិត្តសញ្ញា ផលបូកមួយដែលគេប្រើ ដើម្បីបង្ហាញពីផលបូកគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត ត្រូវបានគេហៅ **ស៊ិចម៉ា** ($\sum = sigma$) ។ អក្សរធំក្រិច ($\sum = sigma$) ត្រូវបានគេប្រើដើម្បីបង្ហាញពីផលបូក ជាឧទាហរណ៍ផលបូក 4តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $a_n = n^3$ ។

- គេកំណត់សរសេរ : $\sum_{n=1}^{4} n^3$ ។
- $\sum_{n=1}^{4} n^3$ គេអានថាផលបូកចាប់ពី $n = 1$ ដល់ $n = 4$ នៃ n ។
- $\sum_{n=1}^{4} n^3 = (1)^3 + (2)^3 + (3)^3 + (4)^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$

៤.២ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត

កន្សោមផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n): $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ គេកំណត់សរសេរដោយ:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k) = u_1 + u_2 + ... + u_n$$

<u>លក្ខណៈ</u>

$a./ \quad \sum_{k=1}^{n} (\lambda) = \lambda + \lambda + \lambda + ... + \lambda = n\lambda$

$b./ \quad \sum_{k=1}^{n} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} (u_k)$

$c./ \quad \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k - w_k) = \sum_{k=1}^{n} (u_k) + \sum_{k=1}^{n} (v_k) - \sum_{k=1}^{n} (w_k)$

$d./ \quad \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (u_k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n} (u_k \cdot v_k) + \sum_{k=1}^{n} (v_k)^2$

លំហាត់គំរូ ១ : សរសេរផលបូកខាងក្រោម ដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\sum$

1./ $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ 2./ $3 + 6 + 9 + \ldots + 90$ 3./ $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{50}$

<u>ចម្លើយ</u> សរសេរផលបូកខាងក្រោមដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\sum$

1./ $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

ដោយតួនៃស្វ៊ីតនេះមាន $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, ..., n^3$ គេអាចសរសេរផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_k)

តាម $\sum$ (ស៊ិចម៉ា)គឺ: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k)$

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \sum_{k=1}^{n} (k)^3$$

ដូច្នេះ $\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \sum_{k=1}^{n} (k)^3}$

2./ $3+6+9+.....+90$

ដោយតួនៃស្វ៊ីតនេះមាន $3,6,9,.....,90$ គេអាចសរសេរផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_k)

តាម $\sum$ (ស៊ិចម៉ា)គឺ $S_n=u_1+u_2+u_3+.....+u_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k)$

$$S_n=3+6+9+.....+90=\sum_{k=1}^{30}3k$$

ដូច្នេះ $\boxed{3+6+9+.....+90=\sum_{k=1}^{30}3k}$

3./ $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{54}-\frac{1}{55}$

ដោយតួនៃស្វ៊ីតនេះមាន $\frac{1}{2}=\frac{(-1)^2}{2}$, $-\frac{1}{3}=\frac{(-1)^3}{3}$, $\frac{1}{4}=\frac{(-1)^4}{4}$, $-\frac{1}{5}=\frac{(-1)^5}{5}$

, ... , $\frac{1}{54}=\frac{(-1)^{54}}{54}$, $\frac{(-1)^{55}}{55}$

គេអាចសរសេរផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_k) តាម $\sum$ (ស៊ិចម៉ា)គឺ

$$S_n=u_1+u_2+u_3+.....+u_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k)$$

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{54}-\frac{1}{55}$$

$$=\frac{(-1)^2}{2}+\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^4}{4}+\frac{(-1)^5}{5}+.....+\frac{(-1)^{54}}{54}+\frac{(-1)^{55}}{55}=\sum_{k=2}^{55}\frac{(-1)^k}{k}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{54}-\frac{1}{55}=\sum_{k=2}^{55}\frac{(-1)^k}{k}}$

លំហាត់គំរូ ២ : សរសេរគ្រប់តួទាំងអស់នៃផលបូក ដោយមិនប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\sum$ និងគណនាផលបូកនោះ :

1./ $\sum_{k=1}^{7}5$ 2./ $\sum_{n=2}^{10}(3n+1)$ 3./ $\sum_{n=3}^{15}(5n-1)$

ចម្លើយ : សរសេរគ្រប់តួទាំងអស់នៃផលបូក ដោយមិនប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\sum$ និងគណនាផលបូកនោះ

1./ $\sum_{k=1}^{7}5$ តាមលក្ខណៈផលបូកតួនៃស្វ៊ីត $\sum_{k=1}^{n}\lambda=\underbrace{\lambda+\lambda+\lambda+......+\lambda}_{n}=n\lambda$

ដោយ $\sum_{k=1}^{7}5=\underbrace{5+5+5+5+5+5+5}_{7-1+1}=7\times5=35$

ដូច្នេះ $\boxed{\sum_{k=1}^{7}5=5+5+5+5+5+5+5=35}$

2./ $\sum_{k=2}^{10}(3k+1)$ តាមលក្ខណៈផលបូកតួនៃស្វ៊ីត $\sum_{k=1}^{n}\lambda=\underbrace{\lambda+\lambda+\lambda+......+\lambda}_{n}=n\lambda$

ដោយ $\sum_{k=2}^{10}(3k+1)=\underbrace{7+10+13+16+19+22+25+28+31}_{10-2+1=9}=171$

ដូច្នេះ: $\boxed{\sum_{k=2}^{10}(3k+1)=7+10+13+16+19+22+25+28+31=171}$

3./ $\sum_{n=3}^{9}(5n-1)=\underbrace{14+19+24+29+34+39+44}_{9-3+1=7}=203$

ដូច្នេះ: $\boxed{\sum_{n=3}^{9}(5n-1)=14+19+24+29+34+39+44=203}$

<u>សំគាល់</u> : ដើម្បីរកចំនួនតួក្នុងការពន្លាតពី $\sum$ គេត្រូវ : យកគោលលើនៃ $\sum$ ដកគោលក្រោមនៃ $\sum$ រួចបូកថែម១ ។

<u>ឧទាហរណ៍</u> : $\sum_{k=p}^{n}(u_k)=u_p+u_{p-1}+u_{p+2}+....+u_n$ គឺ $n-p+1$ ជាចំនួនតួនៃការពន្លាតពី $\sum$ ។

<u>លំហាត់អនុវត្តន៍</u> :

ក. សរសេរផលបូក ដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\sum$

1./ $1+2+3+4+5+6$

2./ $1+2+3+4+5+\ldots+100$

3./ $1-2+3-4+5-6$

4./ $1+3+5+7+9+\ldots+101$

5./ $2+4+6+8+\ldots+102$

6./ $4+4+4+4+4$

7./ $8+8+8+8+8$

8./ $4+8+12+16+20$

9./ $3+6+9+12+15$

10./ $3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+\ldots+3\cdot20$

11./ $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}$

12./ $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}$

13./ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$

14./ $1-3+5-7+9-......+101$

15./ $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}+....-\frac{99}{100}$

16./ $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+......+\frac{n}{n+1}$

17./ $-2+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{4}-....+\frac{(-1)^n(n+1)}{n}$

18./ $1+2+2^2+2^3+2^4$

19./ $1^2+2^2+3^2+....+n^2$

20./ $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+......+n(n+1)$

21./ $15+24+35+....+(n^2-1)$

22./ $1^4+2^4+3^4+......+n^4$

23./ $2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+....+(n-1)\cdot n$

24./ $1^2\cdot2+2^2\cdot3+3^2\cdot4+......+n^2(n+1)$

25./ $1+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$

26./ $\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{7\pi}{8}$

27./ $a_1-a_2+a_3-a_4+a_5$

28./ $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$

29./ $-b_0+b_1-b_2+b_3-b_4+b_5$

30./ $a_0+a_1x+a_2x^2+......+a_nx^n$

31./ $x+x^2+x^3+x^4+x^5$

32./ $y^2+y^4+y^6+y^8+y^{10}$

33./ $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{n(n+1)}$

34./ $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{(n-2)(n-1)}$

35./ $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

ខ. សរសេរគ្រប់តួទាំងអស់នៃផលបូក ដោយមិនប្រើ និមិត្តសញ្ញា $\sum$

1./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(k+1)(k+2)}$, 2./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{(3k-1)(3k+2)}$

3./ $\sum_{k=-2}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, 4./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$

5./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$, 6./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}$

7./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$, 8./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

9./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$, 10./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$

11./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$, 12./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$

13./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$, 14./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-2)(5k+3)}$

15./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{4^k+1}$, 16./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-1}{5^k+1}$ 17./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$

18./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-1)(5k+4)(5k+9)}$ 19./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$

20./ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-4)(5k+1)(5k+6)}$

គ. គណនាផលបូកពីទម្រង់ $\sum$

1./ $\sum_{k=2}^{7}8$, 2./ $\sum_{k=-2}^{5}6$, 3./ $\sum_{k=3}^{8}n^3$, 4./ $\sum_{i=1}^{4}(3i^2)$

$5./\ \sum_{i=1}^{4}\left(2i^2\right)$, $6./\ \sum_{j=0}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^j$, $7./\ \sum_{j=0}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^j$, $8./\ \sum_{i=1}^{6}5$

$15./\ \sum_{k=1}^{5}k^2$, $16./\ \sum_{j=1}^{3}(j+1)(j+2)$, $17./\ \sum_{j=1}^{3}j(j+2)$

$18./\ \sum_{k=1}^{7}(-1)^k$, $19./\ \sum_{k=0}^{5}(-1)^{k+1}$, $20./\ \sum_{k=1}^{5}2^k$

$21./\ \sum_{k=1}^{9}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$, $22./\ \sum_{k=1}^{5}\frac{k+3}{k}$, $23./\ \sum_{k=1}^{6}k(k+2)$

$24./\ \sum_{k=1}^{6}\frac{k}{k+3}$, $25./\ \sum_{k=1}^{5}\frac{k+1}{k^2}$, $26./\ \sum_{k=1}^{7}\frac{(-1)^{k-1}}{k(2k-1)}$

$27./\ \sum_{k=5}^{9}\frac{2k+3}{3k-2}$, $28./\ \sum_{k=4}^{8}\frac{2+(-1)^k}{k}$, $29./\ \sum_{k=4}^{7}(-1)^k\cdot k^3$

$30./\ \sum_{k=5}^{8}(-1)^k\cdot\frac{1}{10^k}$, $31./\ \sum_{k=1}^{6}\frac{k}{2k-1}$, $32./\ \sum_{k=2}^{7}\frac{(-1)^k}{3k-1}$

❖ គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់

$S=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+.....+a_nb_n$ ដែល (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត មានផលសងរួម d និង (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានផលធៀបរួម q ។

របៀបដោះស្រាយ :

គណនា $S=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+.....+a_nb_n$ ដើម្បីគណនាផលបូក នេះ គេត្រូវគណនា S_n-qS_n រួចទាញរក S_n ។

ឧទាហរណ៍ ១: គណនាផលបូក $S_n=\frac{2}{3}+\frac{4}{3^2}+\frac{6}{3^3}+....+\frac{2n}{3^n}$

<u>ដំណោះស្រាយ :</u>

ពិនិត្យ 2 , 4 , 6 , ... $2n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d=2$ហើយ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{3^3}$, ... , $\frac{1}{3^n}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q=\frac{1}{3}$ គេមាន

$$S_n=\frac{2}{3}+\frac{4}{3^2}+\frac{6}{3^3}+....+\frac{2n}{3^n}$$

$$\frac{1}{3}S_n=\frac{2}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\frac{6}{3^4}+....+\frac{2(n-1)}{3^n}+\frac{2n}{3^{n+1}}$$

$$S_n-\frac{1}{3}S_n=\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{3^2}-\frac{2}{3^2}\right)+\left(\frac{6}{3^3}-\frac{4}{3^3}\right)+....+\left(\frac{2n-2(n-1)}{3^n}\right)-\frac{2n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3}S_n=\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+....+\frac{2}{3^n}-\frac{2n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3}S_n=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+....+\frac{1}{3^n}\right)-\frac{2n}{3^{n+1}} \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3}S_n=2\cdot\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3}S_n=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{2n}{3^{n+1}} \qquad \Rightarrow S_n=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{2n}{3^{n+1}}\right]$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $n=1 \Rightarrow S_1=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^1-\frac{2n}{3^{1+1}}\right]$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{9-3-2}{9}\right)=\frac{2}{3} \quad (\text{ ពិត })$$

ដូច្នេះ $\boxed{S_n=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{2n}{3^{n+1}}\right]}$

ឧទាហរណ៍ ២: គណនាផលបូក $S_n=\frac{3}{2}+\frac{8}{8}+\frac{13}{32}+\frac{18}{128}+....+\frac{5n-2}{2\cdot 4^{n-1}}$

ដំណោះស្រាយ

ពិនិត្យ 3 , 8 , 13 , ... $5n-2$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d=5$ ហើយ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{128}$ ..... , $\frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}$

ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q=\frac{1}{4}$

គេមាន $S_n=\frac{3}{2}+\frac{8}{8}+\frac{13}{32}+\frac{18}{128}+....+\frac{5n-2}{2\cdot 4^{n-1}}$ នោះគេបាន

$$\frac{1}{4}S_n=\frac{3}{8}+\frac{8}{32}+\frac{13}{128}+....+\frac{5(n-1)-2}{2\cdot 4^{n-1}}+\frac{5n-2}{2\cdot 4^n}$$

$$S_n-\frac{1}{4}S_n=\frac{3}{2}+\left(\frac{8}{8}-\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{13}{32}-\frac{8}{32}\right)+\left(\frac{18}{128}-\frac{13}{128}\right)+.....$$

$$....+\left(\frac{5n-2}{2\cdot 4^{n-1}}-\frac{5n-5-2}{2\cdot 4^{n-1}}\right)-\frac{5n-2}{2\cdot 4^n} \quad \frac{3}{4}S_n=\frac{3}{2}+\frac{5}{8}+\frac{5}{32}+\frac{5}{128}+....+\frac{5}{2\cdot 4^{n-1}}-\frac{5n-2}{2\cdot 4^n}$$

$$\frac{3}{4}S_n=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+....+\frac{1}{4^{n-1}}\right)-\frac{5n-2}{2\cdot 4^n}$$

$$\frac{3}{4}S_n=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\left[\frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right]-\frac{5n-2}{2\cdot 4^n}$$

$$\frac{3}{4}S_n=\frac{3}{2}+\frac{5}{6}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)-\frac{5n-2}{2\cdot 4^n} \quad \Rightarrow S_n=\frac{4}{3}\left[\frac{3}{2}+\frac{5}{6}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)-\frac{5n-2}{2\cdot 4^n}\right]$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{2}{3}\left[3+\frac{5}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)-\frac{5n-2}{4^n}\right]$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $n=1 \Rightarrow S_n=\frac{2}{3}\left[3+\frac{5}{3}\left(1-\frac{1}{4^{1-1}}\right)-\frac{5\times 1-2}{4^1}\right]=\frac{2}{3}\left(3-\frac{3}{4}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{9}{4}=\frac{3}{2}$ (ពិត)

ដូច្នេះ $\boxed{S_n=\frac{2}{3}\left[3+\frac{5}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)-\frac{5n-2}{4^n}\right]}$

លំហាត់គំរូ ១ : គណនាផលបូក $S_n = 2\cdot 4+3\cdot 4^2+4\cdot 4^3+....+(n+1)4^n$

ដំណោះស្រាយ :

ពិនិត្យ 2 , 3 , 4 , ... $(n+1)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមាន ផលសងរួម $d=1$ ហើយ 4 , 4^2 , 4^3 , ... , 4^n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q=4$

គេមាន $S_n = 2\cdot 4+3\cdot 4^2+4\cdot 4^3+....+(n+1)4^n$

$$4S_n = 2\cdot 4^2+3\cdot 4^3+4\cdot 4^4+....+n\cdot 4^n+(n+1)4^{n+1}$$

$$S_n-4S_n = 2\cdot 4+(3-2)4^2+(4-3)4^3+....+\left[(n+1)-n\right]4^n-(n+1)4^{n+1}$$

$$-3S_n = 8+4^2+4^3+....+4^n-(n+1)4^{n+1}$$

$$-3S_n = 8+16\times\frac{4^{n-1}-1}{4-1}-(n+1)4^{n+1}$$

$$S_n = -\frac{1}{3}\left[8+\frac{16}{3}\left(4^{n-1}-1\right)-(n+1)4^{n+1}\right]$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $n=1 \Rightarrow S_n = -\frac{1}{3}\left(8-2\times 4^2\right) = -\frac{1}{3}(-24) = 8$ (ពិត)

ដូច្នេះ $\boxed{S_n = -\frac{1}{3}\left[8+\frac{16}{3}\left(4^{n-1}-1\right)-(n+1)4^{n+1}\right]}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាផលបូក

1./ $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 8+7\cdot 16+....+(2n-1)\cdot 2^n$

2./ $4\cdot 3+5\cdot 9+6\cdot 27+7\cdot 81+....+(n+3)\cdot 3^n$

3./ $\frac{7}{2}+\frac{9}{4}+\frac{11}{8}+\frac{13}{16}+....+\frac{2n+5}{2^n}$

4./ $5\cdot 6+7\cdot 36+9\cdot 216+....+(2n+3)6^n$

5./ $4\cdot 2+9\cdot 4+14\cdot 8+....+(5n-6)2^{n-1}$ $(n\geq 2)$

6./ $1\cdot 3+3\cdot 9+5\cdot 27+....+(2n-5)3^{n-2}$ $(n\geq 4)$

7./ $4\cdot 3+7\cdot 9+10\cdot 27+....+(3n+1)3^n$

8./ $1\cdot 5+5\cdot 25+9\cdot 25+....+(4n-3)5^n$

9./ $\frac{5}{3}+\frac{7}{9}+\frac{9}{27}+....+\frac{2n+3}{3^n}$

10./ $\frac{4}{4}+\frac{10}{16}+\frac{16}{64}+....+\frac{2(3n-4)}{4^{n-1}}$ $(n\geq 2)$

ចម្លើយ :

1./ $S_n = 6+(4n-6)2^n$

2./ $S_n = -6-\frac{9}{4}\left(3^{n-1}-1\right)+\left(\frac{n+3}{2}\right)3^{n+1}$

3./ $S_n = 7+\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)-\frac{2n+5}{2^n}$

4./ $S_n = -6-\frac{72}{25}\left(6^{n-1}-1\right)+\frac{2n+3}{5}\cdot 6^{n+1}$

5./ $S_n = -8-20\left(2^{n-2}-1\right)+(5n-6)\cdot 2^n$ $(n\geq 2)$

6./ $S_n = -\frac{3}{2}-\frac{9}{2}\left(3^{n-3}-1\right)+\frac{(2n-5)}{2}\cdot 3^{n-1}$ $(n\geq 4)$

7./ $S_n = -6-\frac{27}{4}\left(3^{n-1}-1\right)+\frac{(3n+1)}{2}\cdot 3^{n+1}$

8./ $S_n = -\frac{5}{4}-\frac{25}{4}\left(5^{n-1}-1\right)+\frac{(4n-3)}{4}\cdot 5^{n+1}$

9./ $S_n = \frac{5}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)-\frac{2n+3}{2\cdot 3^n}$

10./ $S_n = \frac{4}{3}\left[1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4^{n-2}}\right)-\frac{2(3n-4)}{4^n}\right]$ $(n\geq 2)$

❖ គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់

$$S=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}\cdots a_{n+p}}=\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_{1+p}}+\frac{1}{a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots a_{2+p}}+\dots\dots\dots+\frac{1}{a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdots a_{3+p}}+\dots+\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}\cdots a_{n+p}}$$

របៀបដោះស្រាយ

គណនាផលបូក $S=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}\cdots a_{n+p}}=\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}\cdots a_{n+p-1}}-\frac{1}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdots a_{n+p}}\right)$

ដែល $r=a_{n+p}-a_n$

លំហាត់គំរូ ១ : គណនាផលបូក $S_n=\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 19}+\dots+\frac{1}{(6n-5)(6n+1)}$

ដំណោះស្រាយ : គណនាផលបូក $S_n=\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 19}+\dots+\frac{1}{(6n-5)(6n+1)}$

ដោយ: $u_n=\frac{1}{(6n-5)(6n+1)}=\frac{1}{(6n+1)-(6n-5)}\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n+1}\right)$

$$u_n=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n+1}\right)$$

$$S_n=\sum_{n=1}^{n}u_n=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{19}+\dots+\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n+1}\right)$$

នាំឲ្យ $S_n=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6n+1}\right)=\frac{n}{6n+1}$

ដូច្នេះ $\boxed{S_n=\frac{n}{6n+1}}$

លំហាត់គំរូ ២ : គណនាផលបូក $S_n=\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$

ដំណោះស្រាយ : គណនាផលបូក $S_n=\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$

គេមាន $u_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$

$$=\frac{1}{(3n+4)-(3n-2)}\left[\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}-\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right]$$

$$S_n=\sum_{n=1}^{n}u_n=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{n}\left[\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}-\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{1\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 7}-\frac{1}{7\cdot 10}+\frac{1}{7\cdot 10}-\frac{1}{10\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}-\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{1\cdot 4}-\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right]$$

$$S_n=\frac{9n^2+15n}{24(3n+1)(3n+4)}$$

ដូច្នេះ $\boxed{S_n=\frac{9n^2+15n}{24(3n+1)(3n+4)}}$

លំហាត់គំរូ ៣ : គណនាផលបូក $S_n=\frac{6}{5\cdot 11}+\frac{8}{11\cdot 19}+\frac{10}{19\cdot 29}+\ldots+\frac{2n+4}{(n^2+3n+1)(n^2+5n+5)}$

ដំណោះស្រាយ :

គណនាផលបូក $S_n=\frac{6}{5\cdot 11}+\frac{8}{11\cdot 19}+\frac{10}{19\cdot 29}+\ldots.+\frac{2n+4}{(n^2+3n+1)(n^2+5n+5)}$

គេមាន $u_n=\frac{2n+4}{(n^2+3n+1)(n^2+5n+5)}=\frac{(n^2+5n+5)-(n^2+3n+1)}{(n^2+3n+1)(n^2+5n+5)}$

$$u_n=\left(\frac{1}{n^2+3n+1}-\frac{1}{n^2+5n+5}\right)$$

$$S_n=\sum_{n=1}^{n}u_n=\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2+3n+1}-\frac{1}{n^2+5n+5}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{19}+\ldots..+\frac{1}{n^2+3n+1}-\frac{1}{n^2+5n+5}\right)$$

$$S_n=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{n^2+5n+5}\right)=\frac{n^2+5n}{5(n^2+5n+5)}$$

ដូច្នេះ $\boxed{S_n=\frac{n^2+5n}{5(n^2+5n+5)}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាផលបូក

1./ $\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}$

2./ $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}$

3./ $\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(2n+3)\cdot(2n-5)}$

4./ $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$

5./ $\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$

6./ $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}$

7./ $\frac{1}{3\cdot7}+\frac{1}{7\cdot11}+\frac{1}{11\cdot15}+\ldots+\frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+3)}$ 8./ $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}$

9./ $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$ 10./ $\frac{1}{3\cdot8}+\frac{1}{8\cdot13}+\frac{1}{13\cdot18}+\ldots+\frac{1}{(5n-2)\cdot(5n+3)}$

11./ $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{5\cdot7\cdot9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)}$

12./ $\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{5\cdot7\cdot9}+\frac{1}{7\cdot9\cdot11}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)\cdot(2n+5)}$

13./ $\frac{1}{4\cdot9\cdot14}+\frac{1}{9\cdot14\cdot19}+\frac{1}{14\cdot19\cdot24}+\ldots+\frac{1}{(5n-1)\cdot(5n+4)\cdot(5n+9)}$

14./ $\frac{1}{1\cdot6\cdot11}+\frac{1}{6\cdot11\cdot16}+\frac{1}{11\cdot16\cdot21}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)\cdot(5n+1)\cdot(5n+6)}$

15./ $\frac{1}{2\cdot5\cdot8}+\frac{1}{5\cdot8\cdot11}+\frac{1}{8\cdot11\cdot14}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+5)}$

16./ $\frac{1}{2\cdot9\cdot16}+\frac{1}{9\cdot16\cdot23}+\frac{1}{16\cdot23\cdot30}+\ldots+\frac{1}{(7n-5)\cdot(7n+1)\cdot(7n+8)}$

17./ $\frac{1}{1\cdot8\cdot15}+\frac{1}{8\cdot15\cdot22}+\frac{1}{15\cdot22\cdot29}+\ldots+\frac{1}{(7n-6)\cdot(7n+1)\cdot(7n+8)}$

18./ $\frac{1}{5\cdot12\cdot19}+\frac{1}{12\cdot19\cdot28}+\frac{1}{19\cdot28\cdot33}+\ldots+\frac{1}{(7n-2)\cdot(7n+5)\cdot(7n+12)}$

19./ $\frac{1}{5\cdot11\cdot17}+\frac{1}{11\cdot17\cdot23}+\frac{1}{17\cdot23\cdot29}+\ldots+\frac{1}{(6n-1)\cdot(6n+5)\cdot(6n+11)}$ ។

❖ របៀបស្រាយបញ្ជាក់ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើន (វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា)

លទ្ធផលជាច្រើនក្នុងគណិតវិទ្យាត្រូវបានគេអះអាងថាពិតគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន។ ហេតុផលទាំងនេះត្រូវបានគេយកមកពិនិត្យចាប់តាំងពី $n=1$, 2 , 3 , ... ។

<u>របៀបដោះស្រាយ</u>

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)=E(n)$; $n\in\mathbb{N}$ ដោយធ្វើតាមវិចារកំណើន គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម :

- **ជំហាន ១ :**
  - តួ $u_1=P(1)=E(1)$ ពិត
  - តួ $u_2=P(2)=E(2)$ ពិត
  - តួ $u_3=P(3)=E(3)$ ពិត

  ……………………………………
- **ជំហាន ២ :**
  - ឧបមាថា វាពិតដល់តួទី k គឺ $u_k=E(k)$ ពិត

- **ជំហាន ៣ :**
  - យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ឲ្យឃើញថា វាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $u_{k+1}=E(k+1)$ ពិត
  - ដោយសន្មត់ថាយក $u_k=E(k)$ ជាសម្មតិកម្ម
  - បើសិនជាយើងស្រាយបញ្ជាក់ឃើញថា $u_{k+1}=E(k+1)$ ពិត
  - នាំឲ្យយើងសន្និដ្ឋានថា $u_n=E(n)$; $\forall n\in\mathbb{N}$

លំហាត់គំរូ ១ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $1+2+3+......+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

<u>ដំណោះស្រាយ:</u>

ស្រាយបញ្ជាក់ថា$1+2+3+......+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

ជំហានទី ១ : បង្ហាញថាវាពិត ចំពោះ $n=1$, $n=2$, $n=3$

- ចំពោះ $n=1$ នាំឲ្យ $u_1=1=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$
- ចំពោះ $n=2$ នាំឲ្យ $u_2=1+2=\dfrac{2(2+1)}{2}=3$
- ចំពោះ $n=3$ នាំឲ្យ $u_3=1+2+3=\dfrac{3(3+1)}{2}=6$

ជំហានទី ២ : ឧបមាថាវាពិត ចំពោះ $n=k$ គេបាន $1+2+3+......+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

ជំហានទី ៣ : យើងនឹងស្រាយថា វាពិតរហូតដល់តួទី $n=k+1$

$$1+2+3+......+k+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ដោយ $$1+2+3+......+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

នាំឲ្យ $$1+2+3+......+k+k+1=\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$
$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ ពិត

ដូច្នេះ $$\boxed{1+2+3+......+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

លំហាត់គំរូ ២ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $1\times2+2\times3+3\times4+......+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

<u>ដំណោះស្រាយ :</u> ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1\times2+2\times3+3\times4+......+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

. **ជំហានទី ១** : បង្ហាញថាវាពិត ចំពោះ $n=1$, $n=2$, $n=3$

- ចំពោះ $n=1$ នាំឲ្យ $1\times 2=\frac{1}{3}\times 1\times(1+1)(1+2)=2$

$2=2$ (ពិត)

- ចំពោះ $n=2$ នាំឲ្យ $1\times 2+2\times 3=\frac{1}{3}\times 2\times(2+1)(2+2)=\frac{24}{3}=8$

$8=8$ (ពិត)

- ចំពោះ $n=3$ នាំឲ្យ $1\times 2+2\times 3+3\times 4=\frac{1}{3}\times 3\times(3+1)(3+2)$

$20=20$ (ពិត)

ជំហានទី ២ : ឧបមាថាវាពិត ចំពោះ $n=k$ គេបាន:

$1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

ជំហានទី ៣ : យើងនឹងស្រាយថា វាពិតរហូតដល់តួទី $n=k+1$

យើងបាន:

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+k(k+1)+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{1}{3}(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[(k+1)+2\right] \text{ (ពិត)}$$

ដោយ $1\times 2+2\times 3+3\times 4+......+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ នាំឲ្យ

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+......+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{1}{3}\left[k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)\right]$$
$$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$=\frac{1}{3}(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[(k+1)+2\right] \text{ (ពិត)}$$

ដូច្នេះ $$\boxed{1\times 2+2\times 3+3\times 4+......+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$$

លំហាត់គំរូ ៣ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $1^3+2^3+3^3+......+n^3=(1+2+3+....+n)^2$

<u>ដំណោះស្រាយ :</u> ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1^3+2^3+3^3+......+n^3=(1+2+3+....+n)^2$

ជំហានទី ១ : បង្ហាញថាវាពិត ចំពោះ $n=1$, $n=2$, $n=3$

- ចំពោះ $n=1$ នាំឲ្យ $1^3=1^2$ (ពិត)
- ចំពោះ $n=2$ នាំឲ្យ $1^3+2^3=(1+2)^2$

$9=9$ (ពិត)

- ចំពោះ $n=3$ នាំឲ្យ $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$

$36=36$ (ពិត)

ជំហានទី ២ : ឧបមាថាវាពិត ចំពោះ $n=k$

គេបាន $1^3+2^3+3^3+......+k^3=(1+2+3+....+k)^2$ (ពិត)

ជំហានទី ៣ : យើងនឹងស្រាយថា វាពិតរហូតដល់តួទី $n=k+1$

$1^3+2^3+3^3+......+k^3+(k+1)^3=(1+2+3+....+k+k+1)^2$

ដោយ $1^3+2^3+3^3+......+k^3=(1+2+3+....+k)^2$ នាំឲ្យ

$$1^3+2^3+3^3+....+k^3+(k+1)^3=(1+2+3+....+k)^2+(k+1)^3$$
$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)$$
$$=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$
$$=(1+2+3+....+k+k+1)^2 \text{ (ពិត)}$$

ដូច្នេះ $$\boxed{1^3+2^3+3^3+......+k^3=(1+2+3+....+k)^2}$$

<u>លំហាត់អនុវត្តន៍:</u>

ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមភាពខាងក្រោម ដោយប្រើវិចារ អនុមានរួមគណិតវិទ្យា:

1./ $4+7+10+......+(3n+1)=\frac{n(3n+5)}{2}$

2./ $2+4+6+......+2n=n(n+1)$

3./ $3+6+9+......+3n=\frac{3n(n+1)}{2}$

4./ $2+4+8+......+2^n=2^{n+1}-2$

5./ $1+3+5+......+(2n-1)^2=n^2$

6./ $1^2+2^2+3^2+....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

7./ $1^3+2^3+3^3+....+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

8./ $1^4+2^4+3^4+......+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

9./ $5\cdot 6+5\cdot 6^2+5\cdot 6^3+......+5\cdot 6^n=6(6^n-1)$

10./ $5+10+15+......+5n=\frac{5n(n+1)}{2}$

11./ $3+3^2+3^3+......+3^n=\frac{3(3^n-1)}{2}$

12./ $7\cdot 8+7\cdot 8^2+7\cdot 8^3+......+7\cdot 8^n=8(8^n-1)$

13./ $(n+1)(n+2).....(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot .....\cdot(2n-1)$

14./ $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+.....+n(3n+1)=n(n+1)^2$

15./ $1\cdot 2+2\cdot 3+.....+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, $n\geq 2$

16./ $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+...+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

17./ $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+.....+(n-1)n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$, $n\geq 2$

18./ $1^2-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

19./ $1+3+6+10+...+\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

20./ $2+7+14+......+\left(n^2+2n-1\right)=\dfrac{n\left(2n^2+9n+1\right)}{6}$

21./ $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+......+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{(n+1)}$

22./ $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+......+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$

23./ $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+......+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$

24./ $\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 7}+......+\dfrac{1}{(n+3)(n+3)}=\dfrac{n}{4(n+4)}$

25./ $\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\dfrac{2}{2\cdot 5\cdot 7}+\dfrac{3}{5\cdot 7\cdot 9}+...+\dfrac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$

26./ $\dfrac{7}{1\cdot 8}+\dfrac{7}{8\cdot 15}+\dfrac{7}{15\cdot 22}+...+\dfrac{7}{(7n-6)(7n+1)}+\dfrac{1}{7n+1}=1$

27./ $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)...\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$

28./ $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}$

29./ $1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{4}+\dfrac{15}{8}+...+\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}=2^{1-n}+2(n-1)$

30./ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+...+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$

31./ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^n}+...+1-\dfrac{1}{2^n}$

32./ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+....+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}$

33./ $\dfrac{4}{5}+\dfrac{4}{5^2}+\dfrac{4}{5^3}+....+\dfrac{4}{5^n}=1-\dfrac{1}{5^n}$

34./ $x^{2n}+x^{2n-1}\cdot y+.....+x\cdot y^{2n-1}+y^{2n}=\dfrac{x^{2n+1}-y^{2n+1}}{x-y}$

35./ $x^{2n-1}+x^{2n-2}\cdot y+.....+x\cdot y^{2n-2}+y^{2n-1}=\dfrac{x^{2n}-y^{2n}}{x-y}$

36./ $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+......+\dfrac{n}{n!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

37./ n^3+2n ចែកដាច់នឹង 3 ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$

មេរៀនទី ៥: ការកំណត់តួទី n

៥.១ ផលសងតួនៃស្វ៊ីត

ក. ផលសងតួនៃស្វ៊ីតលំដាប់១

គេមានស្វ៊ីត (a_n) : a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n ដែល $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_2$, $b_3 = a_4 - a_3$, ... , $b_n = a_{n+1} - a_n$ គេបានស្វ៊ីត (b_n) : b_1 , b_2 , b_3 , ... , b_n ដែលស្វ៊ីត (b_n) គេហៅថា ផលសងតួនៃស្វ៊ីតលំដាប់១ នៃ (a_n)។

របៀបដោះស្រាយ : ដើម្បីរកតួទី n តាមផលសងតួនៃស្វ៊ីត លំដាប់ ១ នៃ (a_n) គេត្រូវ :

បើគេមានស្វ៊ីត (a_n) : a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n គេបាន :

$$+\begin{cases} a_2 - a_1 = b_1 \\ a_3 - a_2 = b_2 \\ a_4 - a_3 = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n - a_{n-1} = b_{n-1} \end{cases}$$

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1}$$

ចំពោះ $n \geq 2$; $a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \Rightarrow a_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k + a_1$

ដូច្នេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $\boxed{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$

ឧទាហរណ៍ ១ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $3 , 4 , 6 , 9 , 13 , \ldots$

តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត

ពិនិត្យមើល :

$$+\begin{cases} a_2 - a_1 = 4 - 3 = 1 \\ a_3 - a_2 = 6 - 4 = 2 \\ a_4 - a_3 = 9 - 6 = 3 \\ a_5 - a_4 = 13 - 9 = 4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n - a_{n-1} = n - 1 \end{cases}$$

$$a_n - a_1 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1)$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + \frac{n-1}{2}(1 + n - 1) = 3 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^2 - n + 6}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{a_n = \frac{n^2 - n + 6}{2}}$

. **ផ្ទៀងផ្ទាត់** : ចំពោះ $n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{6}{2} = 3$ (ពិត)

លំហាត់គំរូ ១ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $2, 3, 5, 8, 12, ...$

ដំណោះស្រាយ

តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត

ពិនិត្យមើល :

$$+\begin{cases} a_2 - a_1 = 3 - 2 = 1 \\ a_3 - a_2 = 5 - 3 = 2 \\ a_4 - a_3 = 8 - 5 = 3 \\ a_5 - a_4 = 12 - 8 = 4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n - a_{n-1} = n - 1 \end{cases}$$

$$a_n - a_1 = (1 + 2 + 3 + ... + n - 1)$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + \frac{n-1}{2}(1 + n - 1) = 2 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^2 - n + 4}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{a_n = \frac{n^2 - n + 4}{2}}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : ចំពោះ $n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{4}{2} = 2$ (ពិត)

ចំពោះ $n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{2^2 - 2 + 4}{2} = 3$ (ពិត)

ចំពោះ $n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{3^2 - 3 + 4}{2} = 5$ (ពិត)

លំហាត់អនុវត្តន៍ :

រកតួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម :

1./ $2, 5, 11, 20, 32, 47, ...$

2./ $2, 8, 17, 29, 44, 64, ...$

3./ $2, 6, 14, 26, 42, 62, ...$

4./ $3, 1, -3, -9, -17, -27, ...$

5./ $1, -2, -8, -17, -29, -44, ...$

6./ $-3, 1, 9, 21, 37, 57, ...$

7./ $1, 6, 13, 22, 33, 46, ...$

8./ $-2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 3, \frac{11}{2}, ...$

9./ $5, \frac{9}{2}, 5, \frac{13}{2}, 9, \frac{25}{2}, ...$

10./ $4, \frac{10}{3}, 3, 3, \frac{10}{3}, 4, ...$

<u>ចម្លើយ</u>

1./ $a_n = \dfrac{3n^2-3n+4}{2}$; 2./ $a_n = \dfrac{3n^2+3n-2}{2}$

3./ $a_n = 2n^2-2n+2$; 4./ $a_n = -n^2+n+3$

5./ $a_n = \dfrac{-3n^2+3n+2}{2}$; 6./ $a_n = 2n^2-2n-3$

7./ $a_n = n^2+2n-2$; 8./ $a_n = \dfrac{n^2-n-8}{4}$

9./ $a_n = \dfrac{n^2-4n+13}{2}$; 10./ $a_n = \dfrac{n^2-7n+30}{6}$

ខ. ផលសងតួនៃស្វ៊ីតលំដាប់២

គេមានស្វ៊ីត (a_n) : a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n តាងស្វ៊ីត(b_n)
កំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$, $(n = 1, 2, 3,....)$ ហៅថាផលសងលំដាប់១ ដែលមានតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)
កំណត់ដោយ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ចំពោះ $n \geq 2$ (ព្រោះថា បើ $n=1$ គេមិនអាចគណនា $\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ទេ) ។
បើសិនជាស្វ៊ីត(b_n)នៅតែមិនអាចរកតួទី n បានទៀតនោះ យើងត្រូវធ្វើផលសងចំពោះតួបន្តបន្ទាប់នៃស្វ៊ីត (b_n)

តាងស្វ៊ីត(c_n)ជាផលសងតួលំដាប់២នៃស្វ៊ីត(a_n) ដែល $c_n = b_{n+1} - b_n$, $(n = 1, 2, 3,....)$
ដូចគ្នាដែរ ចំពោះ $n \geq 2$ $b_n = b_1 + c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_{n-1}$, $(n = 1, 2, 3,....)$

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$$

នោះគេបាន:

$$a_n = a_1 + b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$$

ជាទូទៅ: បើគេមិនអាចគណនារកតួទី n នៃស្វ៊ីត(a_n)តាមផលសងលំដាប់២បាន នោះគេនឹងបន្តធ្វើហូតដល់ផលសងលំដាប់ n តាងដោយ $a_n = a_1C_n^0 + b_1C_n^1 + c_1C_n^2 + ... + x_1C_n^n$ ។

ឧទាហរណ៍ ១ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $4, 18, 48, 100, 180, 294,....$

<u>ដំណោះស្រាយ :</u>

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $4, 18, 48, 100, 180, 294,....$
គេមានស្វ៊ីត (a_n): $4, 18, 48, 100, 180, 294, ...$
តាងស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់ទី១ នៃស្វ៊ីត (a_n)ដែលកំណត់ដោយ : $b_n = a_{n+1} - a_n$; $(n = 1,2,3,....)$
គេបាន (b_n): $14, 30, 52, 80, 114, ...$
តាងស្វ៊ីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់ទី១ នៃស្វ៊ីត (b_n)(ព្រោះមិនទាន់អាចកំណត់ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត(b_n)បាន
ស្វ៊ីត (c_n) កំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n$ (c_n): $16, 22, 28, 34, ...$ នាំឲ្យ (c_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត
មានផលសងរួម $d = 6$ និង តួទី១គឺ $c_1 = 16$
$\Rightarrow c_n = 16 + (n-1)6 = 6n + 10$ នោះ:

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = 14 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k + 10)$$

ចំពោះ $n\geq 2$ គេបាន

$$\Rightarrow b_n = 14+6\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}10$$
$$=14+6\frac{n(n-1)}{2}+10(n-1)$$
$$b_n = 14+3n^2-3n+10n-10=3n^2+7n+4$$

$n=1 \quad \Rightarrow b_1 = 14$ (ពិត)

ដូច្នេះ $b_n = 3n^2+7n+4$

ចំពោះ $n\geq 2$ គេបាន $a_n = a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

$$a_n = 4+\sum_{k=1}^{n-1}\left(3k^2+7k+4\right)$$
$$=4+3\sum_{k=1}^{n-1}k^2+7\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}4$$
$$=4+3\times\frac{1}{6}\times n(n-1)(2n-1)+\frac{7}{2}n(n-1)+4n-4$$
$$=\frac{n\left(2n^2-n-2n+1\right)+7n^2-7n+8n}{2}$$
$$=\frac{2n^3-3n^2+n+7n^2-7n+8n}{2}$$
$$=\frac{2n^3+4n^2+2n}{2}=n^3+2n^2+n$$

ដូច្នេះ $\boxed{a_n = n^3+2n^2+n}$

<u>លំហាត់អនុវត្តន៍</u> :

កំណត់តួទី n នៃស៊ីត

1./ $0, 12, 10, 0, -12, -20, \ldots.$

2./ $1, 2, 6, 15, 31, 56, \ldots..$

<u>ចម្លើយ</u> :

1./ $a_n = n^3-13n^2+44n-32$

2./ $a_n = \frac{1}{6}\left(2n^3-3n^2+n+6\right)$

៥.២ ទំនាក់ទំនងកំណើន

ក. ទម្រង់ $u_{n+1} = au_n + b$, $, u_1 = c$ $, n\in\mathbb{N}$

<u>របៀបដោះស្រាយ</u> (ផ្តើមពីស៊ីតជំនួយ នាំបង្កើតស៊ីតធរណីមាត្រ ឈានទៅរកតួទី n)

របៀបទី១:

- តាងស៊ីតជំនួយ : $r_n = pn+q$ នាំឲ្យ $r_{n+1} = p(n+1)+q \qquad (*)$
- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង u_n និង u_{n+1}

  នោះ $u_{n+1} = au_n + b$

  គេបាន $r_{n+1} = ar_n + b$

$$p(n+1)+q=a(pn+q)+b$$
$$pn+p+q=apn+aq+b$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} p=ap \\ p+q=aq+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=0 \\ q=\dfrac{b}{1-a} \end{cases}$

- យក $p=0$ និង $q=\dfrac{b}{1-a}$ ជំនួសក្នុង $(*)$

នោះ $r_{n+1}=p(n+1)+q$ នាំឲ្យ $r_{n+1}=\dfrac{b}{1-a}$

- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $u_{n+1}-r_{n+1}=au_n+b-\dfrac{b}{1-a}$

$$u_{n+1}-\frac{b}{1-a}=au_n+b-\frac{b}{1-a}$$
$$u_{n+1}-\frac{b}{1-a}=au_n+\frac{b-ab-b}{1-a}$$
$$u_{n+1}-\frac{b}{1-a}=au_n-\frac{ab}{1-a}$$
$$\left(u_{n+1}-\frac{b}{1-a}\right)=a\left(u_n-\frac{b}{1-a}\right) \qquad (**)$$

- តាង $v_n=u_n-\dfrac{b}{1-a}$ នោះ $v_{n+1}=u_{n+1}-\dfrac{b}{1-a}$ នោះ គេបាន :

$(**)$: $\left(u_{n+1}-\dfrac{b}{1-a}\right)=a\left(u_n-\dfrac{b}{1-a}\right)$

$$v_{n+1}=av_n$$

នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=a$ និងតួទី១ $v_1=u_1-\dfrac{b}{1-a}=c-\dfrac{b}{1-a}$

តាមរូបមន្ត : តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (v_n) គឺ $v_n=\left(c-\dfrac{b}{1-a}\right)a^{n-1}$

ដោយ $v_n=u_n-\dfrac{b}{1-a}$ នាំឲ្យ $u_n=v_n+\dfrac{b}{1-a}=\left(c-\dfrac{b}{1-a}\right)a^{n-1}+\dfrac{b}{1-a}$

ដូច្នេះ $u_n=\left(c-\frac{b}{1-a}\right)a^{n-1}+\frac{b}{1-a}$, $n\in\mathbb{N}$,

របៀបទី២:

- រកឫសនៃសមីការ $r=ar+b$ (ហៅថាសមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីត)បន្ទាប់មកយកស្វ៊ីតខាងលើដកអង្គទាំងសងខាងនឹង r
- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n=u_n-r$ រួចត្រូវបង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ
- រកឲ្យឃើញនូវតួ v_n បន្ទាប់មកគេទាញរក $u_n=v_n+r$

របៀបទី៣:

- ចម្លើយទូទៅនៃសមីការស្វីតគឺ: $a_n = a_n^{*} + a_n^{**}\,(1)$
- a_n^{*} ជាចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែន $u_{n+1} = au_n \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$ នោះគេបាន $a_n^{*} = \lambda a^n\,,\lambda \in \mathbb{N}$
- a_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការស្វីត $u_{n+1} = au_n + b$ តាមសមីការសម្គាល់ $r = ar + b \Rightarrow r = \frac{b}{1-a}$ នោះគេបាន $a_n^{**} = r$
- យក $a_n^{*} \,\&\, a_n^{**}$ ទៅជួសក្នុង(1) ដើម្បីទាញរក λ ។

លំហាត់គំរូ ១: គណនាតួទី n នៃស្វីត : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

<u>**ដំណោះស្រាយ :**</u>

<u>**របៀបទី១**</u>

- តាងស្វីតជំនួយ : $r_n = pn + q$ នាំឲ្យ $r_{n+1} = p(n+1) + q \qquad (*)$
- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង u_n និង u_{n+1}
  នោះ $u_{n+1} = 3u_n + 1$
  គេបាន $r_{n+1} = 3r_n + 1$

$$p(n+1) + q = 3(pn+q) + 1$$
$$pn + p + q = 3pn + 3q + 1$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} p = 3p \\ p + q = 3q + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ q = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

- យក $p = 0$ និង $q = -\frac{1}{2}$ ជំនួសក្នុង $(*)$
  នោះ $(*)$: $r_{n+1} = p(n+1) + q$ នាំឲ្យ $r_{n+1} = -\frac{1}{2}$
- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}
  គេបាន $u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2}$
  $u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + \frac{3}{2}$
  $u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) \qquad (**)$
- តាង $v_n = u_n + \frac{1}{2}$ នោះ $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2}$ នោះ
  គេបាន $(**)$: $\left(u_{n+1} + \frac{1}{2}\right) = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right)$

$$v_{n+1} = 3v_n$$

នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$ និងតួទី១ $v_1 = u_1 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

តាមរូបមន្ត : តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (v_n) គឺ $v_n = \frac{5}{2}3^{n-1}$

នាំឲ្យ $u_n = v_n - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}3^{n-1} - \frac{1}{2}$

ដូច្នេះ $u_n = \frac{5}{2} \times 3^{n-1} - \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

<u>របៀបទី២</u>

- សមីការសម្គាល់ $r = 3r + 1 \Rightarrow r = -\frac{1}{2}$

  ពិនិត្យមើល:

$$a_{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 3a_n + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(a_n + \frac{1}{2}\right), (1)$$

- តាង $b_n = a_n + \frac{1}{2} \Rightarrow b_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{2}, (2)$

  តាម (1) គេបាន $b_{n+1} = 3b_n \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = 3$

នោះគេថា (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន $q = 3$ និងតួទី១គឺ $b_1 = a_1 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

យើងបាន $b_n = q^{n-1}b_1 = \frac{5}{2} \times 3^{n-1}$ យក (b_n) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន: $a_n = \frac{5}{2} \times 3^{n-1} - \frac{1}{2}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $a_n = \frac{5}{2}3^{n-1} - \frac{1}{2}$ ។

<u>របៀបទី៣</u>

- ចម្លើយទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ $a_n = a_n^* + a_n^{**}$
- a_n^* ជាចម្លើយអូម៉ូសែននៃស្វ៊ីត $a_{n+1} = 3a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ នោះ $a_n^* = \lambda 3^n , \lambda \in \mathbb{N}$
- a_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃស្វ៊ីត $a_{n+1} = 3a_n + 1$ សមីការសម្គាល់ $r = 3r + 1 \Rightarrow r = -\frac{1}{2}$ នោះ $a_n^{**} = -\frac{1}{2}$
- ចម្លើយទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ $a_n = \lambda 3^n - \frac{1}{2}$

បើ $n = 1$ នោះ $a_1 = \lambda 3^1 - \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{6}$ យើងបាន $a_n = \frac{5}{6}3^n - \frac{1}{2} = \frac{5}{2\times 3}3^n - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}3^{n-1} - \frac{1}{2}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $a_n = \frac{5}{2}3^{n-1} - \frac{1}{2}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយ : បើ $n = 1$ នាំឲ្យ $u_1 = \frac{5}{2} \times 3^{1-1} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$ ពិត

លំហាត់គំរូ ២ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត : $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 5a_n + 6 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

<u>ដំណោះស្រាយ :</u>

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ : $r_n = pn + q$ នាំឲ្យ $r_{n+1} = p(n+1) + q$ $(*)$
- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង a_n និង a_{n+1}

  នោះ $a_{n+1} = 5a_n + 6$

គេបាន $r_{n+1} = 5r_n + 6$

$$p(n+1) + q = 5(pn+q) + 6$$
$$pn + p + q = 5pn + 5q + 6$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} p = 5p \\ p + q = 5q + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ q = \dfrac{6}{1-5} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

- យក $p = 0$ និង $q = -\dfrac{3}{2}$ ជំនួសក្នុង $(*)$

នោះ $(*)$: $r_{n+1} = p(n+1) + q$ នាំឲ្យ $r_{n+1} = -\dfrac{3}{2}$

- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $a_{n+1} + \dfrac{3}{2} = 5a_n + 6 + \dfrac{3}{2}$

$$a_{n+1} + \frac{3}{2} = 5a_n + \frac{15}{2}$$
$$a_{n+1} + \frac{3}{2} = 5\left(a_n + \frac{3}{2}\right) \qquad (**)$$

- តាង $b_n = a_n + \dfrac{3}{2}$ នោះ $b_{n+1} = a_{n+1} + \dfrac{3}{2}$

នោះ គេបាន:

$(**)$: $\left(a_{n+1} + \dfrac{3}{2}\right) = 5\left(a_n + \dfrac{3}{2}\right)$

$$b_{n+1} = 5b_n$$

នាំឲ្យ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 5$ និងតួទី១ $b_1 = a_1 + \dfrac{3}{2} = 3 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$

តាមរូបមន្ត : តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (b_n) គឺ $b_n = \dfrac{9}{2}5^{n-1}$ នាំឲ្យ $a_n = b_n - \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}5^{n-1} - \dfrac{3}{2}$

ដូច្នេះ $a_n = \frac{9}{2} \times 5^{n-1} - \frac{3}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : បើ $n = 1$ នាំឲ្យ $a_1 = \dfrac{9}{2} \times 5^{1-1} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2} - \dfrac{3}{2} = 3$ (ពិត)

សង្កេត

- កាលណាសម្ទតិកម្មមានស្វ៊ីត a_n តាងស្វ៊ីតជំនួយ r_n និង បង្កើតស្វ៊ីតធរណីមាត្រ b_n
- កាលណាសម្ទតិកម្មមានស្វ៊ីត u_n តាងស្វ៊ីតជំនួយ r_n និង បង្កើតស្វ៊ីតធរណីមាត្រ v_n

លំហាត់អនុវត្តន៍ :

គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម ដែល :

1./ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$; 2./ $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

3./ $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = 4u_n - 1 \end{cases}$; 4./ $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$

$$5./\begin{cases}a_1=7\\a_{n+1}=2a_n+3\end{cases};\quad 6./\begin{cases}u_1=8\\u_{n+1}=-u_n-6\end{cases}$$

$$7./\begin{cases}a_1=-2\\a_{n+1}=2a_n-5\end{cases};\quad 8./\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}=5u_n-1\end{cases}$$

$$9./\begin{cases}u_1=-4\\u_{n+1}=2u_n+4\end{cases};\quad 10./\begin{cases}u_1=5\\u_{n+1}=3u_n-1\end{cases}$$

$$11./\begin{cases}a_1=-3\\a_{n+1}=3a_n+5\end{cases};\quad 12./\begin{cases}u_1=6\\u_{n+1}=-2u_n-3\end{cases}$$

$$13./\begin{cases}a_1=-1\\a_{n+1}=-a_n+5\end{cases};\quad 14./\begin{cases}a_1=4\\a_{n+1}=3a_n-2\end{cases}$$

$$15./\begin{cases}u_1=-3\\u_{n+1}=2u_n-5\end{cases};\quad 16./\begin{cases}u_1=-4\\u_{n+1}=5u_n-2\end{cases}$$

$$17./\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=-3u_n-1\end{cases};\quad 18./\begin{cases}u_1=\frac{1}{2}\\u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n-4\end{cases}$$

$$19./\begin{cases}u_1=\frac{1}{5}\\u_{n+1}=2u_n-1\end{cases};\quad 20./\begin{cases}u_1=-\frac{3}{4}\\u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1\end{cases}$$

ចម្លើយ:

$1./\ u_n=3^n+2$; $2./\ u_n=2^{n-1}+3$

$3./\ u_n=-\frac{10}{3}\cdot4^{n-1}+\frac{1}{3}$; $4./\ u_n=\frac{7}{2}\cdot3^{n-1}+\frac{5}{2}$

$5./\ a_n=5\cdot2^n-3$; $6./\ u_n=11\cdot(-1)^{n-1}-3$

$7./\ a_n=-7\cdot2^{n-1}+5$; $8./\ u_n=\frac{11}{4}\cdot5^{n-1}+\frac{1}{4}$

$9./\ u_n=-4$; $10./\ u_n=\frac{9}{2}\cdot3^{n-1}+\frac{1}{2}$

$11./\ a_n=-\frac{1}{2}\cdot3^{n-1}-\frac{5}{2}$; $12./\ u_n=7\cdot(-2)^{n-1}-1$

$13./\ a_n=-\frac{7}{2}\cdot(-1)^{n-1}+\frac{5}{2}$; $14./\ a_n=3^n+1$

$15./\ u_n=-2^{n+2}+5$; $16./\ u_n=-\frac{9}{2}\cdot5^{n-1}+\frac{1}{2}$

$17./\ u_n=\frac{9}{4}\cdot(-3)^{n-1}-\frac{1}{4}$; $18./\ u_n=\frac{13}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-6$

$19./\ u_n=-\frac{4}{5}\cdot2^{n-1}+1$; $20./\ u_n=\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2$

ខ. ទម្រង់ $u_{n+1} = au_n + bn + c$, , $u_1 = d$, $n \in \mathbb{N}$

<u>របៀបដោះស្រាយ</u> (ផ្ដើមពី ស្វីតជំនួយ នាំបង្កើត ស្វីតធរណីមាត្រ រួច រកតួទី n)

- តាងស្វីតជំនួយ : $r_n = pn+q$ នាំឲ្យ $r_{n+1} = p(n+1)+q$ $(*)$
- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង u_n និង u_{n+1}

នោះ $u_{n+1} = au_n + bn + c$

គេបាន $r_{n+1} = ar_n + bn + c$

$$p(n+1)+q = a(pn+q)+bn+c$$
$$pn+p+q = apn+aq+bn+c$$
$$pn+p+q = (ap+b)n+aq+c$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} p = ap+b \\ p+q = aq+c \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{b}{1-a} \\ q = \dfrac{c-p}{1-a} = \dfrac{c-\dfrac{b}{1-a}}{1-a} = \dfrac{c(1-a)-b}{(1-a)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{b}{1-a} \\ q = \dfrac{c-ac-b}{(1-a)^2} \end{cases}$$

- យក $p = \dfrac{b}{1-a}$ និង $q = \dfrac{c-ac-b}{(1-a)^2}$

ជំនួសក្នុង$(*)$ នោះ $r_{n+1} = p(n+1)+q$

នាំឲ្យ $r_{n+1} = \dfrac{b}{1-a}(n+1) + \dfrac{c-ac-b}{(1-a)^2}$

$$= \frac{b(1-a)(n+1)+c-ac-b}{(1-a)^2}$$
$$= \frac{b(n+1-an-a)+c-ac-b}{(1-a)^2}$$
$$= \frac{bn+b-abn-ab+c-ac-b}{(1-a)^2}$$
$$= \frac{bn-abn-ab+c-ac}{(1-a)^2}$$

- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន

$$u_{n+1} - r_{n+1} = au_n + bn + c - \frac{bn-abn-ab+c-ac}{(1-a)^2}$$

$$u_{n+1} - \frac{bn-abn-ab+c-ac}{(1-a)^2} = au_n + \frac{(bn+c)(a^2-2a+1)-bn+abn+ab-c+ac}{(1-a)^2}$$

$$= au_n + \frac{a^2bn - abn + a^2c - 2ac + ab + ac}{(1-a)^2}$$

$$= a\left[u_n + \frac{abn - bn + ac + b - c}{(1-a)^2}\right]$$

$$u_{n+1} - \frac{bn - abn - ab + c - ac}{(1-a)^2} = a\left[u_n - \frac{bn - abn - ac - b + c}{(1-a)^2}\right] \qquad (**)$$

➢ តាង $v_n = u_n - \frac{bn - abn - ac - b + c}{(1-a)^2}$

នោះ $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b(n+1) - ab(n+1) - ac - b + c}{(1-a)^2}$

$$= u_{n+1} - \frac{bn + b - abn - ab - ac - b + c}{(1-a)^2}$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{bn - abn - ab - ac + c}{(1-a)^2}$$

តាម $(**)$ គេបាន $v_{n+1} = av_n$ នាំឲ្យ (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = a$ និងតួទី១

$v_1 = u_1 - \frac{b - ab - ac - b + c}{(1-a)^2} \Rightarrow v_1 = d + \frac{(ab+ac-c)}{(1-a)^2}$

តាមរូបមន្ត : តួទី n នៃស៊ីតធរណីមាត្រ (v_n) គឺ

$$v_n = v_1 \cdot a^{n-1} = \left[d + \frac{ab + ac - c}{(1-a)^2}\right]a^{n-1}$$

ដោយ $v_n = \left[d + \frac{ab + ac - c}{(1-a)^2}\right]a^{n-1}$

នាំឲ្យ $u_n = v_n + \frac{bn - abn - ac - b + c}{(1-a)^2}$

នោះ $u_n = \left[d + \frac{ab + ac - c}{(1-a)^2}\right]a^{n-1} + \frac{bn - abn - ac - b + c}{(1-a)^2}$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n = \left[d + \frac{ab + ac - c}{(1-a)^2}\right]a^{n-1} + \frac{bn - abn - ac - b + c}{(1-a)^2}}$

លំហាត់គំរូ ១: គណនាតួទី n នៃស៊ីត : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 6n - 1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

<u>ដំណោះស្រាយ :</u>

➢ តាងស៊ីតជំនួយ : $r_n = pn + q$

នាំឲ្យ $r_{n+1} = p(n+1) + q = pn + p + q \qquad (*)$

➢ យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង u_n និង u_{n+1}

នោះ $u_{n+1}=3u_n+6n-1$

គេបាន $r_{n+1}=3r_n+6n-1$

$$pn+p+q=3(pn+q)+6n-1$$

$$pn+p+q=3pn+3q+6n-1$$

$$pn+p+q=(3p+6)n+3q-1$$

នាំឲ្យ

$$\begin{cases} p=3p+6 \\ p+q=3q-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-3 \\ q=\dfrac{-1-q}{-2}=\dfrac{-1+3}{-2}=-1 \end{cases}$$

- យក $p=-3$ និង $q=-1$ ជំនួសក្នុង $(*)$

  នោះ $(*)$: $r_{n+1}=p(n+1)+q$

  នាំឲ្យ $r_{n+1}=-3(n+1)-1=-3n-4$

- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

  គេបាន $u_{n+1}-r_{n+1}=3u_n+6n-1+3n+4$

  $$u_{n+1}+3n+4=3u_n+9n+3$$

  $$u_{n+1}+3n+4=3(u_n+3n+1) \qquad (**)$$

- តាង $v_n=u_n+3n+1$

  នោះ $v_{n+1}=u_{n+1}+3(n+1)+1=u_{n+1}+3n+4$

  នោះគេបាន $(**)$: $(u_{n+1}+3n+4)=3(u_n+3n+1)$

  $$v_{n+1}=3v_n$$

  នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=3$ និងតួទី១ $v_1=u_1+3+1=2+4=6$

  តាមរូបមន្ត : តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (v_n)

  គឺ $v_n=6\cdot 3^{n-1}$

  នាំឲ្យ $u_n=v_n-3n-1=6\cdot 3^{n-1}-3n-1$

ដូច្នេះ $u_n=6\times 3^{n-1}-3n-1$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : បើ $n=1$ នាំឲ្យ $u_1=6\times 3^{1-1}-3\times 1-1=6-4=2$ (ពិត)

លំហាត់គំរូ ២ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត : $\begin{cases} a_1=-3 \\ a_{n+1}=2a_n+4n+3 \end{cases}$, $n\in\mathbb{N}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ :</u>

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ : $r_n=pn+q$

នាំឲ្យ $r_{n+1}=p(n+1)+q=pn+p+q \qquad (*)$

- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង a_n និង a_{n+1}

នោះ $a_{n+1}=2a_n+4n+3$ គេបាន $r_{n+1}=2r_n+4n+3$

$$pn+p+q=2(pn+q)+4n+3$$

$$pn+p+q=2pn+2q+4n+3$$

$$pn+p+q=(2p+4)n+2q+3$$

នាំឲ្យ

$$\begin{cases}2p+4=p\\2q+3=p+q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-4\\q=p-3=-4-3=-7\end{cases}$$

- យក $p=-4$ និង $q=-7$ ជំនួសក្នុង $(*)$

នោះ $(*)$: $r_{n+1}=pn+p+q$

នាំឲ្យ $r_{n+1}=-4n-4-7=-4n-11$

- ធ្វើផលសងរវាង a_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $a_{n+1}-r_{n+1}=2a_n+4n+3+4n+11$

$a_{n+1}+4n+11=2a_n+8n+14$

$a_{n+1}+4n+11=2(a_n+4n+7)$ $(**)$

- តាង $b_n=a_n+4n+7$ នោះ

$b_{n+1}=a_{n+1}+4(n+1)+7=a_{n+1}+4n+11$

តាម $(**)$ គេបាន $b_{n+1}=2b_n$ នាំឲ្យ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$

និងតួទី១ $b_1=a_1+4+7=-3+11=8$

តាមរូបមន្ត : តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (b_n) គឺ $b_n=8\cdot 2^{n-1}$

នាំឲ្យ $a_n=b_n-4n-7=8\cdot 2^{n-1}-4n-7$

ដូច្នេះ $a_n=8\times 2^{n-1}-4n-7$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : បើ $n=1$ នាំឲ្យ $a_1=8\cdot 2^{1-1}-4-7=8-11=-3$ ពិត

លំហាត់អនុវត្តន៍:

គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម ដែល $n\in\mathbb{N}$:

1./ $\begin{cases}u_1=5\\u_{n+1}=3u_n+4n-2\end{cases}$; 2./ $\begin{cases}u_1=-4\\u_{n+1}=3u_n-4n+7\end{cases}$

3./ $\begin{cases}u_1=-3\\u_{n+1}=2u_n-5n+7\end{cases}$; 4./ $\begin{cases}u_1=5\\u_{n+1}=5u_n-2n+\frac{1}{2}\end{cases}$

5./ $\begin{cases}u_1=-6\\u_{n+1}=2u_n-3n-\frac{3}{2}\end{cases}$; 6./ $\begin{cases}u_1=\frac{3}{2}\\u_{n+1}=2u_n-4n+\frac{5}{2}\end{cases}$

7./ $\begin{cases}u_1=\sqrt{3}\\u_{n+1}=2u_n-n+1\end{cases}$; 8./ $\begin{cases}u_1=2\sqrt{3}\\u_{n+1}=2u_n+3n-\sqrt{3}\end{cases}$

9./ $\begin{cases}u_1=\sqrt{3}\\u_{n+1}=\sqrt{2}u_n-n+\sqrt{2}\end{cases}$; 10./ $\begin{cases}u_1=\sqrt{5}\\u_{n+1}=2u_n-\sqrt{2}n+1\end{cases}$

11./ $\begin{cases}u_1=\sqrt{2}\\u_{n+1}=2u_n-3\sqrt{2}n-1\end{cases}$; 12./ $\begin{cases}u_1=\sqrt{3}\\u_{n+1}=\sqrt{2}u_n-2n+5\end{cases}$

ចម្លើយ

$1./\ u_n = 7\cdot 3^n - 2n$; $2./\ u_n = -\frac{7}{2}\cdot 3^{n-1} + 2n - \frac{5}{2}$

$3./\ u_n = -6\cdot 2^{n-1} + 5n - 2$; $4./\ u_n = \frac{9}{2}\cdot 5^{n-1} + \frac{1}{2}n$

$5./\ u_n = -\frac{27}{4}\cdot 2^n + 3n + \frac{9}{2}$; $6./\ u_n = -2^{n+1} + 4n + \frac{3}{2}$

$7./\ u_n = \left(\sqrt{3}-1\right)\cdot 2^{n-1} + n$ $8./\ u_n = \left(\sqrt{3}+6\right)\cdot 2^{n-1} - 3n + \sqrt{3} - 3$

$9./\ u_n = \left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} + \left(\sqrt{2}+1\right)n + \sqrt{2} + 1$

$10./\ u_n = \left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}+1\right)2^{n-1} + \sqrt{2}n + \sqrt{2} - 1$

$11./\ u_n = \left(-5\sqrt{2}-1\right)\cdot 2^{n-1} + 3\sqrt{2}\,n + 3\sqrt{2} + 1$

$12./\ u_n = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}-3\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} + 2\sqrt{2}\,n + 2n + 1 - \sqrt{2}$

ឌ. ទម្រង់ $u_{n+1} = mu_n + (pn+q)k^n$, $\mathbf{u_1 = l}$, $n \in \mathbb{N}$

<u>របៀបដោះស្រាយ</u> (ផ្តើមពី ស្វ៊ីតជំនួយ នាំបង្កើត ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួច រកតួទី n)

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ : $r_n = (an+b)k^n$
- នាំឲ្យ $r_{n+1} = \left[a(n+1)+b\right]k^{n+1}$

$$= (an+a+b)k^{n+1}$$

$$r_{n+1} = (akn+ak+bk)k^n \qquad (*)$$

- យក r_{n+1} និង r_n ជំនួសក្នុង u_{n+1} និង u_n រៀងគ្នា

នោះ $u_{n+1} = mu_n + (pn+q)k^n$

គេបាន $r_{n+1} = mr_n + (pn+q)k^n$

$$(akn+ak+bk)k^n = m(an+b)k^n + (pn+q)k^n$$

$$(akn+ak+bk)k^n = (amn+bm+pn+q)k^n$$

$$(akn+ak+bk)k^n = \left[(am+p)n+bm+q\right]k^n$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} ak = am+p \\ ak+bk = bm+q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{p}{k-m} \\ b = \dfrac{q-ak}{k-m} \end{cases}$

- យក $a = \frac{p}{k-m}$; $b = \frac{q-ak}{k-m}$ ជំនួសក្នុង $(*)$

$(*)$: $r_{n+1} = (akn+ak+bk)k^n$

$$= \left(\frac{kp}{k-m}n + \frac{kp}{k-m} + \frac{q-ak}{k-m}k\right)k^n$$

$$r_{n+1} = \left(\frac{kp}{k-m}n + \frac{kp}{k-m} + \frac{kq-ak^2}{k-m}\right)k^n$$

- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}
- រកទំនាក់ទំនងរវាង u_{n+1} និង u_n
- តាមទំនាក់ទំនងរវាង u_{n+1} និង u_n នាំបង្កើត ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ v_n
- តាមទំនាក់ទំនង ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ v_n គេអាចរកតួទី u_n

លំហាត់គំរូ ១ : គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + (3n+1)5^n \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

ដំណោះស្រាយ :

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ : $r_n = (an+b)5^n$

នាំឲ្យ $r_n = (an+b)5^n$

$$r_{n+1} = \left[a(n+1)+b\right]5^{n+1}$$

$$r_{n+1} = (5an+5a+5b)5^n \quad (*)$$

- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង u_n និង u_{n+1} រៀងគ្នា

នោះ $u_{n+1} = 2u_n + (3n+1)5^n$

គេបាន $r_{n+1} = 2r_n + (3n+1)5^n$

$$(5an+5a+5b)5^n = 2(an+b)5^n + (3n+1)5^n$$

$$(5an+5a+5b)5^n = (2an+2b+3n+1)5^n$$

$$(5an+5a+5b)5^n = \left[(2a+3)n+2b+1\right]5^n$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} 5a = 2a+3 \\ 5a+5b = 2b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1-5a}{3} = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

- យក $a=1$, $b=-\dfrac{4}{3}$ ជំនួសក្នុង $(*)$ គេបាន $r_{n+1} = \left(5n - \frac{5}{3}\right)5^n$
- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $u_{n+1} - r_{n+1} = 2u_n + (3n+1)5^n - \left(5n-\dfrac{5}{3}\right)5^n$

$$u_{n+1} - \left(5n-\frac{5}{3}\right)5^n = 2u_n + \left(3n+1-5n+\frac{5}{3}\right)5^n$$

$$u_{n+1} - \left(5n-\frac{5}{3}\right)5^n = 2u_n + \left(-2n+\frac{8}{3}\right)5^n$$

$$u_{n+1} - \left(5n-\frac{5}{3}\right)5^n = 2\left[u_n - \left(n-\frac{4}{3}\right)5^n\right] \quad (**)$$

- តាង $v_n = u_n - \left(n-\dfrac{4}{3}\right)5^n$ នោះ $v_{n+1} = u_{n+1} - \left(n+1-\dfrac{4}{3}\right)5^{n+1} = u_{n+1} - \left(5n-\dfrac{5}{3}\right)$

តាម $(**)$ គេបាន $v_{n+1} = 2v_n$ នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$ និងតួទី១

$v_1 = 2-5+\dfrac{20}{3} = \dfrac{11}{3}$ នោះតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (v_n) គឺ $v_n = \dfrac{11}{3}\cdot 2^{n-1}$

នាំឲ្យ $u_n = v_n + \left(n - \frac{4}{3}\right)5^n = \frac{11}{3} \cdot 2^{n-1} + \left(n - \frac{4}{3}\right)5^n$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : បើ $n = 1$ នាំឲ្យ $u_1 = \frac{11}{3} \cdot 2^{1-1} + \left(1 - \frac{4}{3}\right)5 = \frac{11}{3} - \frac{5}{3} = 2$ ពិត

ដូច្នេះ $u_n = \frac{11}{3} \times 2^{n-1} + \left(n - \frac{4}{3}\right)5^n$

លំហាត់គំរូ ២ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត : $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = 2u_n + (2n-3)4^n \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

ដំណោះស្រាយ

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ : $r_n = (an+b)4^n$

  នាំឲ្យ $r_n = (an+b)4^n$

  $r_{n+1} = \left[a(n+1)+b\right]4^{n+1}$

  $r_{n+1} = (4an + 4a + 4b)4^n \quad (*)$
- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង u_n និង u_{n+1} រៀងគ្នា

  នោះ $u_{n+1} = 2u_n + (2n-3)4^n$ គេបាន $r_{n+1} = 2r_n + (2n-3)4^n$

  $(4an + 4a + 4b)4^n = 2(an+b)4^n + (2n-3)4^n$

  $(4an + 4a + 4b)4^n = (2an + 2b + 2n - 3)4^n$

  $(4an + 4a + 4b)4^n = [(2a+2)n + 2b - 3]4^n$

  នាំឲ្យ

$$\begin{cases} 4a = 2a + 2 \\ 4a + 4b = 2b - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{-3-4a}{2} = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

- យក $a = 1$, $b = -\frac{7}{2}$ ជំនួសក្នុង $(*)$ $r_{n+1} = (4n + 4 - 14)4^n = (4n-10)4^n$
- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

  គេបាន $u_{n+1} - r_{n+1} = 2u_n + (2n-3)4^n - (4n-10)4^n$

  $u_{n+1} - (4n-10)4^n = 2u_n + (-2n+7)4^n$

  $u_{n+1} - (4n-10)4^n = 2u_n - 2\left(n - \frac{7}{2}\right)4^n$

  $u_{n+1} - (4n-10)4^n = 2\left[u_n - \left(n - \frac{7}{2}\right)4^n\right] \quad (**)$
- តាង $v_n = u_n - \left(n - \frac{7}{2}\right)4^n$ នោះ $v_{n+1} = u_{n+1} - \left(n + 1 - \frac{7}{2}\right)4^{n+1} = u_{n+1} - (4n-10)4^n$

  តាម $(**)$ គេបាន $v_{n+1} = 2v_n$ នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ និងតួទី១ $v_1 = -3 + 10 = 7$ តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (v_n) គឺ $v_n = 7 \cdot 2^{n-1}$

  នាំឲ្យ $u_n = v_n + \left(n - \frac{7}{2}\right)4^n = 7 \times 2^{n-1} + \left(n - \frac{7}{2}\right)4^n$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : បើ $n = 1$ នាំឲ្យ $u_1 = 7 + \left(1 - \frac{7}{2}\right)4 = -3$ ពិត

ដូច្នេះ $u_n = 7 \times 2^{n-1} + \left(n - \frac{7}{2}\right)4^n$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោមដែល $n \in \mathbb{N}$:

1./ $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 4u_n - (n+3)2^n \end{cases}$ ចម្លើយ : $u_n = -7 \cdot 4^{n-1} + \left(\frac{1}{2}n + 2\right)2^n$

2./ $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 4u_n + (3n-2)7^n \end{cases}$ ចម្លើយ : $u_n = 13 \cdot 14^{n-1} + (n-3)7^n$

3./ $\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n - (3n-1)4^n \end{cases}$ ចម្លើយ : $u_n = -\frac{17}{4} \cdot 2^n - \left(\frac{3}{2}n - \frac{7}{2}\right)4^n$

4./ $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = 3u_n + (2n-1)5^n \end{cases}$ ចម្លើយ : $u_n = \left(10 + \sqrt{2}\right)3^{n-1} + (n-3)5^n$

5./ $\begin{cases} u_1 = -\sqrt{3} \\ u_{n+1} = 7u_n - (3n+2)10^n \end{cases}$ ចម្លើយ : $u_n = \left(-\sqrt{3} - \frac{50}{3}\right)7^{n-1} - \left(n - \frac{8}{3}\right)10^n$

6./ $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = 2u_n + (n+5)3^n \end{cases}$ ចម្លើយ : $u_n = -12 \cdot 2^{n-1} + (n+2)3^n$

7./ $\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = -3u_n + (8n-1)5^n \end{cases}$ ចម្លើយ : $u_n = -\frac{17}{4} \cdot (-3)^{n-1} + \left(n - \frac{3}{4}\right)5^n$

8./ $\begin{cases} u_1 = -\sqrt{2} \\ u_{n+1} = 3u_n + (9n+5)6^n \end{cases}$ ចម្លើយ : $u_n = \left(-\sqrt{2} + 8\right)3^{n-1} + \left(3n - \frac{19}{3}\right)6^n$

9./ $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - (5n-3)3^n \end{cases}$ ចម្លើយ : $u_n = -18 \cdot 2^n - (5n-18)3^n$

10./ $\begin{cases} u_1 = 2\sqrt{3} \\ u_{n+1} = 3u_n + (5n+1)4^n \end{cases}$ ចម្លើយ : $u_n = \left(2\sqrt{3} + 56\right)3^{n-1} + (5n-19)4^n$

ឃ. ទម្រង់ $u_{n+1} = ku_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma, u_1 = l$, $n \in \mathbb{N}$

<u>របៀបដោះស្រាយ</u> (ផ្តើមពី ស្វ៊ីតជំនួយ នាំបង្កើតស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួច រកតួទី n)

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ : $r_n = an^2 + bn + c$
- នាំឲ្យ $r_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$

$$= a\left(n^2 + 2n + 1\right) + b(n+1) + c$$

$$= an^2 + 2an + a + bn + b + c$$

$$r_{n+1} = an^2 + (2a+b)n + a + b + c \qquad (*)$$

- យក r_{n+1} និង r_n ជំនួសក្នុង u_{n+1} និង u_n រៀងគ្នា

នោះ $u_{n+1} = ku_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ គេបាន $r_{n+1} = kr_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma$

$$an^2 + (2a+b)n + a + b + c = k\left(an^2 + bn + c\right) + \alpha n^2 + \beta n + \gamma$$

$$an^2 + (2a+b)n + a + b + c = kan^2 + kbn + kc + \alpha n^2 + \beta n + \gamma$$

$$an^2+(2a+b)n+a+b+c=(ka+\alpha)n^2+(kb+\beta)n+kc+\gamma$$ គេបាន

$$\begin{cases} a=ka+\alpha \\ 2a+b=kb+\beta \\ a+b+c=kc+\gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{\alpha}{1-k} \\ b=\dfrac{\beta-2a}{1-k}=\dfrac{\beta-2\dfrac{\alpha}{1-k}}{1-k} \\ \quad =\dfrac{\beta(1-k)-2\alpha}{(1-k)^2}=\dfrac{\beta-\beta k-2\alpha}{(1-k)^2} \\ c=\dfrac{\gamma-a-b}{1-k}=\dfrac{\gamma-\dfrac{\alpha}{1-k}-\dfrac{\beta-\beta k-2\alpha}{(1-k)^2}}{1-k} \\ \quad =\dfrac{\gamma(1-k)^2-\alpha(1-k)-\beta+\beta k+2\alpha}{(1-k)^3} \end{cases}$$

- យក $a=\dfrac{\alpha}{1-k}$; $b=\dfrac{\beta-\beta k-2\alpha}{(1-k)^2}$ និង $c=\dfrac{\gamma(1-k)^2-\alpha(1-k)-\beta+\beta k+2\alpha}{(1-k)^3}$

ជំនួសក្នុង $(*)$: $r_{n+1}=an^2+(2a+b)n+a+b+c$

- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}
- រកទំនាក់ទំនងរវាង u_{n+1} និង u_n
- តាមទំនាក់ទំនងរវាង u_{n+1} និង u_n នាំបង្កើត ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ v_n
- តាមទំនាក់ទំនង ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ v_n គេអាចរកតួទី u_n

លំហាត់គំរូ ១ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត : $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=2u_n+n^2-3n+2 \end{cases}, n\in\mathbb{N}$

ដំណោះស្រាយ :

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ : $r_n=an^2+bn+c$

  នាំឲ្យ $r_{n+1}=an^2+2an+a+bn+b+c$

  $r_{n+1}=an^2+(2a+b)n+a+b+c \quad (*)$

- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង u_n និង u_{n+1} រៀងគ្នា

  នោះ $u_{n+1}=2u_n+n^2-3n+2$

  គេបាន $r_{n+1}=2r_n+n^2-3n+2$

$$an^2+(2a+b)n+a+b+c=2(an^2+bn+c)+n^2-3n+2$$
$$an^2+(2a+b)n+a+b+c=2an^2+2bn+2c+n^2-3n+2$$
$$an^2+(2a+b)n+a+b+c=(2a+1)n^2+(2b-3)n+2c+2$$

នោះ

$$\begin{cases} 2a+1=a \\ 2b-3=2a+b \\ 2c+2=a+b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2a+3=1 \\ c=a+b-2=-1+1-2=-2 \end{cases}$$

- យក $a=-1$, $b=1$ និង $c=-2$ ជំនួសក្នុង $(*)$: $r_{n+1}=-n^2+(-2+1)n-1+1-2=-n^2-n-2$
- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

  គេបាន $$u_{n+1}-r_{n+1}=2u_n+n^2-3n+2+n^2+n+2$$
$$u_{n+1}+n^2+n+2=2u_n+n^2-3n+2+n^2+n+2$$
$$u_{n+1}+n^2+n+2=2u_n+2n^2-2n+4$$
$$\left(u_{n+1}+n^2+n+2\right)=2\left(u_n+n^2-n+2\right) \qquad (**)$$

- តាង $v_n=u_n+n^2-n+2$ នោះ $v_{n+1}=u_{n+1}+(n+1)^2-(n+1)+2$

  $v_{n+1}=u_{n+1}+n^2+2n+1-n-1+2=u_{n+1}+n^2+n+2$

  តាម $(**)$ គេបាន $v_{n+1}=2v_n$ នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$ និងតួទី១

  $v_1=u_1+1-1+2=1+2=3$ នោះតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (v_n) គឺ $v_n=3\cdot 2^{n-1}$

  នាំឲ្យ $u_n=v_n-n^2+n-2=3\cdot 2^{n-1}-n^2+n-2$

  ផ្ទៀងផ្ទាត់ : បើ $n=1$ នាំឲ្យ $u_1=3\cdot 2^{1-1}-1+1-2=1$ ពិត

ដូច្នេះ $$u_n=3\times 2^{n-1}-n^2+n-2$$

លំហាត់គំរូ ២ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត : $\begin{cases} u_1=4 \\ u_{n+1}=3u_n+2n^2-n+1 \end{cases}$ $, n\in\mathbb{N}$

<u>ដំណោះស្រាយ :</u>

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ : $r_n=an^2+bn+c$

$$r_{n+1}=a(n+1)^2+b(n+1)+c=a\left(n^2+2n+1\right)+b(n+1)+c$$
$$r_{n+1}=an^2+2an+a+bn+b+c$$
$$r_{n+1}=an^2+(2a+b)n+a+b+c \qquad (*)$$

- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង u_n និង u_{n+1}

  នោះ $u_{n+1}=3u_n+2n^2-n+1$ គេបាន $r_{n+1}=3r_n+2n^2-n+1$
$$an^2+(2a+b)n+a+b+c=3\left(an^2+bn+c\right)+2n^2-n+1$$
$$an^2+(2a+b)n+a+b+c=3an^2+3bn+3c+2n^2-n+1$$
$$an^2+(2a+b)n+a+b+c=(3a+2)n^2+(3b-1)n+3c+1$$

នាំឲ្យ

$$\begin{cases} 3a+2=a \\ 3b-1=2a+b \\ 3c+1=a+b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{2a+1}{2}=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{a+b-1}{2}=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

- យក $a=-1$, $b=-\dfrac{1}{2}$ និង $c=-\dfrac{5}{4}$ ជំនួសក្នុង $(*)$: $r_{n+1}=an^2+(2a+b)n+a+b+c$

  នាំឲ្យ $$r_{n+1}=-n^2+\left(-2-\frac{1}{2}\right)n-1-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}=-n^2-\frac{5}{2}n-\frac{11}{4}$$

➤ ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $u_{n+1}-r_{n+1}=3u_n+2n^2-n+1+n^2+\frac{5}{2}n+\frac{11}{4}$

$$u_{n+1}+n^2+\frac{5}{2}n+\frac{11}{4}=3u_n+3n^2+\frac{3}{2}n+\frac{15}{4}$$

$$u_{n+1}+n^2+\frac{5}{2}n+\frac{11}{4}=3\left(u_n+n^2+\frac{1}{2}n+\frac{5}{4}\right) \quad (**)$$

➤ តាង $v_n=u_n+n^2+\frac{1}{2}n+\frac{5}{4}$ នោះ $v_{n+1}=u_{n+1}+(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1)+\frac{5}{4}$

$$v_{n+1}=u_{n+1}+n^2+2n+1+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=u_{n+1}+n^2+\frac{5}{2}n+\frac{11}{4}$$

តាម $(**)$ គេបាន $v_{n+1}=3v_n$ នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=3$ និងតួទី១

$v_1=4+1+\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=\frac{27}{4}$ នោះ តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (v_n) គឺ: $v_n=\frac{27}{4}\times 3^{n-1}=\frac{3^{n+2}}{4}$

ដោយ $v_n=\frac{3^{n+2}}{4}$ នាំឲ្យ $u_n=v_n-n^2-\frac{1}{2}n-\frac{5}{4}=\frac{3^{n+2}}{4}-\frac{1}{2}n-\frac{5}{4}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : បើ $n=1$ នាំឲ្យ $u_1=\frac{3^{1+2}}{4}-1-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}=\frac{27-4-2-5}{4}=4$ ពិត

ដូច្នេះ $$u_n=\frac{3^{n+2}}{4}-n^2-\frac{1}{2}n-\frac{5}{4}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍:

គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោមដែល $n\in\mathbb{N}$:

1./ $\begin{cases}u_1=-3\\ u_{n+1}=2u_n-2n^2+n-4\end{cases}$ (ចម្លើយ : $u_n=-17\cdot 2^{n-1}+2n^2+3n+9$)

2./ $\begin{cases}u_1=-1\\ u_{n+1}=3u_n-n^2+3n-4\end{cases}$ (ចម្លើយ : $u_n=-\frac{1}{4}\cdot 3^{n-1}+\frac{1}{2}n^2-n+\frac{7}{4}$)

3./ $\begin{cases}u_1=-4\\ u_{n+1}=2u_n+3n^2-n+1\end{cases}$ (ចម្លើយ : $u_n=13\cdot 2^{n-1}-3n^2-5n-9$)

4./ $\begin{cases}u_1=-2\\ u_{n+1}=3u_n+4n^2-n+2\end{cases}$ (ចម្លើយ : $u_n=\frac{17}{4}\cdot 3^{n-1}-2n^2-\frac{3}{2}n-\frac{11}{4}$)

5./ $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=2u_n-4n^2+n+5\end{cases}$ (ចម្លើយ : $u_n=-7\cdot 2^n+4n^2+7n+6$)

6./ $\begin{cases}u_1=5\\ u_{n+1}=4u_n-3n^2+n-3\end{cases}$ (ចម្លើយ : $u_n=\frac{5}{9}\cdot 2^{2n}+n^2+\frac{1}{3}n+\frac{13}{9}$)

7./ $\begin{cases}u_1=-3\\ u_{n+1}=3u_n-2n^2+5n-1\end{cases}$ (ចម្លើយ : $u_n=-\frac{11}{4}\cdot 3^{n-1}+n^2-\frac{3}{2}n+\frac{1}{4}$)

8./ $\begin{cases}u_1=-4\\ u_{n+1}=2u_n+3n^2-n+5\end{cases}$ (ចម្លើយ : $u_n=17\cdot 2^{n-1}-3n^2-5n-13$)

ខ. ទម្រង់ $u_{n+1}=\frac{au_n+b}{cu_n+d}$, $u_1=\alpha$, $n\in\mathbb{N}$

របៀបដោះស្រាយ

(បង្កើតសមីការសម្គាល់ នាំឲ្យតាងស្វ៊ីតជំនួយ ហើយស្វែងរកស្វ៊ីតធរណីមាត្រឆ្ពោះទៅរកតួទី n)

❖ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\begin{cases}u_1=\alpha\\ u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}\end{cases}$

➢ គេមានសមីការសម្គាល់ ដែលមានទម្រង់ $u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}$ គឺ $r=\dfrac{ar+b}{cr+d}$

នាំឲ្យ $$cr^2+dr-ar-b=0$$
$$cr^2+(d-a)r-b=0$$

➢ បើ $\Delta>0$ នោះ សមីការសម្គាល់មានឫសពីរផ្សេងគ្នា r_1 និង r_2 ។

ដើម្បីគណនាតួទី u_n គេត្រូវ :

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n=\dfrac{u_n-r_1}{u_n-r_2}$ រួចស្រាយថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ
- គណនា v_n រួចទាញរក u_n

$$v_n=\frac{u_n-r_1}{u_n-r_2}\quad\Rightarrow v_nu_n-r_2v_n=u_n-r_1$$
$$v_nu_n-u_n=r_2v_n-r_1$$
$$u_n=\frac{r_2v_n-r_1}{v_n-1}$$

ដូច្នេះ $$\boxed{u_n=\frac{r_2v_n-r_1}{v_n-1}}$$

➢ បើ $\Delta=0$ នោះ សមីការសម្គាល់មានឫសឌុប គឺ $r_1=r_2=r_0$

ដើម្បីគណនាតួទី n គេត្រូវ :

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n=\dfrac{1}{u_n-r_0}$ រួចស្រាយថា (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត
- គណនា v_n រួចទាញរក u_n

$$v_n=\frac{1}{u_n-r_0}\quad\Rightarrow v_nu_n-r_0v_n=1$$
$$\Rightarrow u_n=\frac{1+r_0v_n}{v_n}$$

ដូច្នេះ $$\boxed{u_n=\frac{1+r_0v_n}{v_n}}$$

ឧទាហរណ៍ ១ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{-2u_n - 6}{u_n - 7} \end{cases}$

- គេមានសមីការសម្គាល់ តាមទម្រង់ $u_{n+1} = \dfrac{-2u_n - 6}{u_n - 7}$ គឺ $r = \dfrac{-2r-6}{r-7}$

$$\Rightarrow \quad r^2 - 7r = -2r - 6 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(6) = 1 > 0$$

ដោយ $\Delta > 0$ នោះ សមីការសម្គាល់មានឫសពីរផ្សេងគ្នា គឺ : $r_1 = \dfrac{5-\sqrt{1}}{2} = 2$; $r_1 = \dfrac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3} \quad \Leftrightarrow \quad v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 3}$

ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{-2u_n - 6}{u_n - 7}$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{\dfrac{-2u_n - 6}{u_n - 7} - 2}{\dfrac{-2u_n - 6}{u_n - 7} - 3} = \frac{-2u_n - 6 - 2u_n + 14}{-2u_n - 6 - 3u_n + 21} = \frac{-4u_n + 8}{-5u_n + 15}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{-4(u_n - 2)}{-5(u_n - 3)} = \frac{4}{5}\left(\frac{u_n - 2}{u_n - 3}\right)$$

ដោយ $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3} \quad \Rightarrow v_{n+1} = \dfrac{4}{5} v_n$ នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានរេសុង $q = \dfrac{4}{5}$ និង តួទី១ គឺ

$v_1 = \dfrac{u_1 - 2}{u_1 - 3} = \dfrac{5-2}{5-3} = \dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow v_n = v_1 q^n = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}$ តែ $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3}$

$$\Rightarrow v_n u_n - 3v_n = u_n - 2$$

$$\Rightarrow v_n u_n - u_n = 3v_n - 2$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3v_n - 2}{v_n - 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1} - 2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1} - 1} = \frac{\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1} - 2}{\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1} - 1} = \frac{9 \cdot 4^{n-1} - 4 \cdot 5^{n-1}}{3 \cdot 4^{n-1} - 2 \cdot 5^{n-1}}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : ចំពោះ $n = 1 \quad \Rightarrow u_1 = \dfrac{9 \cdot 4^{1-1} - 4 \cdot 5^{1-1}}{3 \cdot 4^{1-1} - 2 \cdot 5^{1-1}} = \dfrac{5}{1} = 5$ (ពិត)

ដូច្នេះ $\boxed{u_n = \dfrac{9 \cdot 4^{n-1} - 4 \cdot 5^{n-1}}{3 \cdot 4^{n-1} - 2 \cdot 5^{n-1}}}$

លំហាត់គំរូ ១ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 3}{u_n + 6} \end{cases}$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

- គេមានសមីការសម្គាល់ តាមទម្រង់ $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 3}{u_n + 6}$ គឺ $r = \dfrac{2r - 3}{r + 6}$

$\Rightarrow \quad r^2 + 4r + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad \Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 3(4) = 4 > 0$

ដោយ $\Delta > 0$ នោះ សមីការសម្គាល់មានឫសពីរផ្សេងគ្នា គឺ :

$$r_1 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2} = -1 \ ; \ r_1 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2} = -3$$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 3} \Leftrightarrow v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 3}$ ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 3}{u_n + 6}$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{\dfrac{2u_n - 3}{u_n + 6} + 1}{\dfrac{2u_n - 3}{u_n + 6} + 3} = \frac{3u_n + 3}{5u_n + 15} = \frac{3(u_n + 1)}{5(u_n + 3)}$$

ដោយ $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 3} \Rightarrow v_{n+1} = \dfrac{3}{5} v_n$ នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានរេសុង $q = \dfrac{3}{5}$ និង តួទី១ គឺ

$v_1 = \dfrac{u_1 + 1}{u_1 + 3} = \dfrac{1 + 1}{1 + 3} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow v_n = v_1 q^n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$ តែ $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 3}$

$\Rightarrow v_n u_n + 3v_n = u_n + 1$

$\Rightarrow v_n u_n - u_n = -3v_n + 1$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{-3v_n + 1}{v_n - 1}$

$$\Rightarrow u_n = \frac{-3 \times \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1} + 1}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1} - 1} = \frac{-3(3)^{n-1} + 2 \cdot 5^{n-1}}{(3)^{n-1} - 2 \cdot 5^{n-1}}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : ចំពោះ $n = 1 \Rightarrow u_1 == \dfrac{-3(3)^{1-1} + 2 \cdot 5^{1-1}}{(3)^{1-1} - 2 \cdot 5^{1-1}} = \dfrac{-1}{-1} = 1$ (ពិត)

ដូច្នេះ
$$\boxed{u_n = \frac{-3(3)^{n-1} + 2 \cdot 5^{n-1}}{(3)^{n-1} - 2 \cdot 5^{n-1}}}$$

ច. ទម្រង់ $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, u_1 = \alpha \ , u_2 = \beta$

ស្រាយរូបមន្ត: ទំនាក់ទំនងកំណើនលីនេអ៊ែលំដាប់២ មានរាង $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ដែល $u_1 = \alpha, u_2 = \beta$

ឧទាហរណ៍ : ក. តាង α, β ជាឫសពីរផ្សេងគ្នានៃសមីការ

$(2): x^2 = ax + b$ ដែល $a, b \in \mathbb{R}$ ។គេតាង $S_n = \lambda_1\alpha^n + \lambda_2\beta^n, n \in \mathbb{N}$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

បង្ហាញថា $(R_2): S_{n+2} = aS_{n+1} + bS_n$ (សមីការ (2) ជាសមីការសម្គាល់នៃទំនាក់ទំនង (R_2))

ខ. ករណីបើសមីការ $(2): x^2 = ax + b$ មានឫស $x_1 = x_2 = \alpha$ ។

គ. គេតាង $W_n = (\lambda_1 n + \lambda_2)\alpha^n$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $(R'): W_{n+2} = aW_{n+1} + bW_n$

ចម្លើយ:

ក. បង្ហាញថា $(R_2): S_{n+2} = aS_{n+1} + bS_n$

ដោយ α, β ជាឫសនៃសមីការ $x^2 = ax + b$ នោះ

$$\alpha^2 = a\alpha + b \ \times \lambda_1\alpha^n$$

$$\beta^2 = a\beta + b \ \times \lambda_2\beta^n$$

គេបាន

$$+\begin{cases} \lambda_1\alpha^{n+2} = a\lambda_1\alpha^{n+1} + \lambda_1\alpha^n b \\ \lambda_2\beta^{n+2} = a\lambda_2\beta^{n+1} + b\lambda_2\beta^n \end{cases}$$

$$\lambda_1\alpha^{n+2} + \lambda_2\beta^{n+2} = a\left(\lambda_1\alpha^{n+1} + \lambda_2\beta^{n+1}\right) + b\left(\lambda_1\alpha^n + \lambda_2\beta^n\right)$$

$$S_{n+2} = aS_{n+1} + bS_n$$

ខ. បង្ហាញថា $(R_2'): W_{n+2} = aW_{n+1} + bW_n$

ដោយ α ជាឫសនៃសមីការ $x^2 = ax + b$ នោះ $\alpha^2 = a\alpha + b \ (*)$

យក $(*) \times \lambda_1 n\alpha^n$ និង $(*) \times \lambda_2\alpha^n$ គេបាន

$$+\begin{cases} \lambda_1 n\alpha^{n+2} = an\lambda_1\alpha^{n+1} + bn\lambda_1\alpha^n \\ \lambda_2\alpha^{n+2} = a\lambda_2\alpha^{n+1} + b\lambda_2\alpha^n \end{cases}$$

$$(\lambda_1 n + \lambda_2)\alpha^{n+2} = a(\lambda_1 n + \lambda_2)\alpha^{n+1} + b(\lambda_1 n + \lambda_2)\alpha^n \ (**)$$

យក $(*) \times 2\lambda_1\alpha^n$ នោះ $2\lambda_1\alpha^{n+2} = 2a\lambda_1\alpha^{n+1} + 2b\lambda_1\alpha^n \ (***)$

យក $(**) + (***)$ គេបាន

$$\left[(n+2)\lambda_1 + \lambda_2\right]\alpha^{n+2} = a\left[(n+1)\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\right]\alpha^{n+1} + b\left[(\lambda_1 n + \lambda_2) + 2\lambda_1\right]\alpha^n$$

$$W_{n+2} = aW_{n+1} + a\lambda_1\alpha^{n+1} + b + 2b\lambda_1\alpha^n$$

$$W_{n+2} = aW_{n+1} + b + \lambda_1\alpha^n(a\alpha + 2b) \ (****)$$

តែដោយ $x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - ax - b = 0$

តាមទ្រឹស្តីបទ វ្យែត

$$\begin{cases} S = \alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = \alpha_1 \times \alpha_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

គេបាន:

$$\begin{cases} S = \alpha + \alpha = a \Rightarrow 2\alpha = a \\ P = \alpha \times \alpha = -b \Rightarrow \alpha^2 = -b \end{cases}$$

យក $2\alpha = a$ និង $\alpha^2 = -b$ ទៅជំនួសក្នុង $(****)$

គេបាន

$$W_{n+2} = aW_{n+1} + b + \lambda_1 \alpha^n \left(2\alpha^2 - 2\alpha^2\right)$$
$$W_{n+2} = aW_{n+1} + b$$

ដូចនេះ $W_{n+2} = aW_{n+1} + b$

<u>របៀបដោះស្រាយលំហាត់:</u>

(ផ្តើមពីសមីការសម្គាល់ បង្កើតបានស្វ៊ីតជំនួយ នាំឲ្យមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ឆ្ពោះទៅរកតួទី n)

❖ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \quad , \; u_2 = \beta \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

➢ គេមានសមីការសម្គាល់តាមទម្រង់ $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

គឺ : $r^2 = ar + b$ នាំឲ្យ $r^2 - ar - b = 0$

➢ បើ $\Delta > 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសពីរផ្សេងគ្នា គឺ r_1 និង r_2

- គេតាងស្វ៊ីតជំនួយពីរគឺ $x_n = u_{n+1} - r_1 u_n$ និង $y_n = u_{n+1} - r_2 u_n$

គេសរសេរ :

$$\begin{cases} x_n = u_{n+1} - r_1 u_n \\ y_n = u_{n+1} - r_2 u_n \end{cases}$$

គេបានកំណើន $n+1$ គឺ:

$$\begin{cases} x_{n+1} = u_{n+2} - r_1 u_{n+1} \\ y_{n+1} = u_{n+2} - r_2 u_{n+1} \end{cases}$$

ដោយ $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ នាំឲ្យ

$$\begin{cases} x_{n+1} = au_{n+1} + bu_n - r_1 u_{n+1} \\ y_{n+1} = au_{n+1} + bu_n - r_2 u_{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = (a - r_1)u_{n+1} + bu_n \\ y_{n+1} = (a - r_2)u_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = (a - r_1)\left(u_{n+1} + \dfrac{b}{a - r_1} u_n\right) \\ y_{n+1} = (a - r_2)\left(u_{n+1} + \dfrac{b}{a - r_2} u_n\right) \end{cases}$$

យក $x_n = u_{n+1} + \dfrac{b}{a - r_1} u_n$; $y_n = u_{n+1} + \dfrac{b}{a - r_2} u_n$

គេបាន :

$$\begin{cases} x_{n+1} = (a - r_1) x_n \\ y_{n+1} = (a - r_2) y_n \end{cases}$$

នាំឲ្យគេបាន (x_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q_1 = a - r_1$ និង តួទី១ គឺ $x_1 = u_2 - r_1 u_1$
នោះ $x_n = x_1 q^{n-1} = (u_2 - r_1 u_1)(a - r_1)^{n-1}$ និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q_2 = a - r_2$
និង តួទី១ គឺ $y_1 = u_2 - r_2 u_1$ នាំឲ្យ $y_n = y_1 q^{n-1} = (u_2 - r_2 u_1)(a - r_2)^{n-1}$
គេបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x_n = (u_2 - r_1 u_1)(a - r_1)^{n-1} \\ y_n = (u_2 - r_2 u_1)(a - r_2)^{n-1} \end{cases}$$

តែ

$$\begin{cases} x_n = u_{n+1} - r_1 u_n \\ y_n = u_{n+1} - r_2 u_n \end{cases}$$

$$-\begin{cases} u_{n+1} - r_1 u_n = (u_2 - r_1 u_1)(a - r_1)^{n-1} \\ u_{n+1} - r_2 u_n = (u_2 - r_2 u_1)(a - r_2)^{n-1} \end{cases}$$

$$(r_2 - r_1) u_n = (u_2 - r_1 u_1)(a - r_1)^{n-1} - (u_2 - r_2 u_1)(a - r_2)^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{r_2 - r_1}\left[(u_2 - r_1 u_1)(a - r_1)^{n-1} - (u_2 - r_2 u_1)(a - r_2)^{n-1}\right]$$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n = \frac{1}{r_2 - r_1}\left[(u_2 - r_1 u_1)(a - r_1)^{n-1} - (u_2 - r_2 u_1)(a - r_2)^{n-1}\right]}$

- បើ $\Delta = 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសឌុប គឺ $r_1 = r_2 = r_0$
  - គេតាងស្វ៊ីតជំនួយគឺ $x_{n+1} = u_{n+2} - r_0 u_n$ $(*)$ នោះ $x_{n+1} = u_{n+2} - r_0 u_{n+1}$

    ដោយ $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ នាំឲ្យ

$$x_{n+1} = a u_{n+1} + b u_n - r_0 u_{n+1}$$

$$x_{n+1} = (a - r_0) u_{n+1} + b u_n$$

$$x_{n+1} = (a - r_0)\left(u_{n+1} + \frac{b}{a - r_0} u_n\right)$$

យក $x_n = u_{n+1} + \frac{b}{a - r_0} u_n \quad \Rightarrow x_{n+1} = (a - r_0) x_n$

នាំឲ្យ (x_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q_0 = a - r_0$ និង មានតួទី ១ គឺ $x_1 = u_2 - r_0 u_1$

នាំឲ្យ $x_n = (u_2 - r_0 u_1)(a - r_0)^{n-1}$ $(**)$
តាម $(*)$ $x_n = u_{n+1} - r_0 u_n$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $r_0^{\,n+1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_n}{r_0^{\,n+1}} = \frac{u_n}{r_0^{\,n+1}} - \frac{u_n}{r_0^{\,n}} \qquad \text{តាង } w_n = \frac{u_n}{r_0^{\,n}} \qquad \Rightarrow w_{n+1} - w_n = \frac{x_n}{r_0^{\,n+1}}$$

គេបាន (w_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $\frac{x_n}{r_0^{\,n+1}}$ និងតួទី១គឺ $w_1 = \frac{u_1}{r_0}$ $\Rightarrow$ $w_n = w_1 + (n-1)d$

$$\Rightarrow \quad w_n = \frac{u_1}{r_0} + (n-1)\frac{x_n}{r_0^{\,n+1}}$$

ដោយ $w_n = \dfrac{u_n}{r_0^{\,n}} \quad \Rightarrow \dfrac{u_n}{r_0^{\,n}} = \dfrac{u_1}{r_0} + (n-1)\dfrac{x_n}{r_0^{\,n+1}} \quad \Rightarrow u_n = r_0^{\,n}\left(\dfrac{u_1}{r_0} + (n-1)\dfrac{x_n}{r_0^{\,n+1}}\right)$

តែ $x_n = (u_2 - r_0u_1)(a-r_0)^{n-1} \quad \Rightarrow u_n = r_0^{\,n}\left[\dfrac{u_1}{r_0} + (n-1)\dfrac{(u_2-r_0u_1)(a-r_0)^{n-1}}{r_0^{\,n+1}}\right]$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n = r_0^{\,n}\left[\dfrac{u_1}{r_0} + (n-1)\dfrac{(u_2-r_0u_1)(a-r_0)^{n-1}}{r_0^{\,n+1}}\right]}$

➢ បើ $\Delta < 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា គឺ $r_1 = p+iq$ និង $r_2 = p-iq$

- គេតាងស្វ៊ីតជំនួយគឺ $z_n = u_{n+1} - (p-iq)u_n$ នោះ $z_{n+1} = u_{n+2} - (p-iq)u_{n+1}$

ដោយ $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ នាំឲ្យ $z_{n+1} = au_{n+1} + bu_n - (p-iq)u_{n+1}$

$$z_{n+1} = (a-p+iq)u_{n+1} + bu_n$$

$$z_{n+1} = (a-p+iq)\left(u_{n+1} + \frac{b}{a-p+iq_0}u_n\right)$$

យក $z_n = u_{n+1} + \dfrac{b}{a-p+iq}u_n \quad \Rightarrow z_{n+1} = (a-p+iq)z_n$

នោះ (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = a-p+iq$ និងមានតួទី១ $z_1 = u_2 - (p-iq)_0 u_1$

នាំឲ្យ $z_n = \left[u_2 - (p-iq)_0 u_1\right](a-p+iq)^{n-1}$ ឧបមាថា $z_n = A_n + iB_n$, $n \in \mathbb{N}^*$

ដោយ $z_n = u_{n+1} - (p-iq)u_n = u_{n+1} - p + iqu_n$

$$\Rightarrow u_{n+1} - pu_n - iqu_n = A_n + iB_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - pu_n + iqu_n = A_n + iB_n$$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n = \dfrac{B_n}{q}}$

ឧទាហរណ៍ ១ : រកតួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 3 \ ; \ u_2 = 29 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n \end{cases}$

<u>ដំណោះស្រាយ :</u> (ផ្តើមពីសមីការសម្គាល់ បង្កើតស្វ៊ីតជំនួយ នាំឲ្យមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ឆ្ពោះទៅ រកតួទី n)

រកតួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n)

កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 3 \ ; \ u_2 = 29 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n \end{cases}$

- គេមាន សមីការសម្គាល់តាមទម្រង់ $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n$ គឺ $r^2 = 3r + 10$

នាំឲ្យ $r^2 - 3r - 10 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(-10) = 49 > 0$

ដោយ $\Delta > 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ

$r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+\sqrt{49}}{2} = 5$ និង $r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-\sqrt{49}}{2} = -2$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយពីរគឺ : $x_n = u_{n+1} - r_1 u_n$; $y_n = u_{n+1} - r_2 u_n$

គេសរសេរ : $\begin{cases} x_n = u_{n+1} - 5u_n \\ y_n = u_{n+1} + 2u_n \end{cases} \quad (1)$

គេបានកំណើន $n+1$ គឺ $\begin{cases} x_{n+1} = u_{n+2} - 5u_{n+1} \\ y_{n+1} = u_{n+2} + 2u_{n+1} \end{cases}$

ដោយ $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n$ (សម្មតិកម្ម)

នាំឲ្យ $\begin{cases} x_{n+1} = 3u_{n+1} + 10u_n - 5u_{n+1} \\ y_{n+1} = 3u_{n+1} + 10u_n + 2u_{n+1} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = -2(u_{n+1} + 5u_n) \\ y_{n+1} = 5(u_{n+1} + 2u_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = -2x_n \\ y_{n+1} = 5y_n \end{cases}$$

ព្រោះ $x_n = u_{n+1} - 5u_n$ និង $y_n = u_{n+1} + 2u_n$

គេបាន (x_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q_1 = -2$ និងតួទី១ $x_1 = u_2 - 5u_1$

ដោយ $u_1 = 3$; $u_2 = 29$ $\Rightarrow x_1 = 29 - 15 = 29 - 15 = 14$ $\Rightarrow x_n = 14(-2)^{n-1}$

និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q_2 = 5$ និងតួទី១ $y_1 = u_2 + 2u_1$

$\Rightarrow y_1 = 29 + 2 \times 3 = 35$

$\Rightarrow y_n = 35 \cdot 5^{n-1}$

យក $x_n = 14(-2)^{n-1}$ និង $y_n = 35 \cdot 5^{n-1}$

ជំនួសក្នុងប្រព័ន្ធសមីការ (1)

$$(1)\ \begin{cases} x_n = u_{n+1} - 5u_n \\ y_n = u_{n+1} + 2u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{n+1} - 5u_n = 14(-2)^{n-1} \\ u_{n+1} + 2u_n = 35 \cdot 5^{n-1} \end{cases}$$

$$- \begin{cases} u_{n+1} - 5u_n = 14(-2)^{n-1} \\ u_{n+1} + 2u_n = 35 \cdot 5^{n-1} \end{cases}$$

$$-7u_n = 14(-2)^{n-1} - 35 \cdot 5^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_n = (-2)(-2)^{n-1} + 5 \cdot 5^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_n = (-2)^n + 5^n$$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n = (-2)^n + 5^n}$

លំហាត់គំរូ ១ : រកតួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{6} \ ;\ u_2 = \frac{13}{36} \\ 6u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n \end{cases}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u> : រកតួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n)

- គេមាន សមីការសម្គាល់តាមទម្រង់ $6u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n$ គឺ $6r^2 = -r + 1$

$\Rightarrow 6r^2 + r - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(6)(-1) = 25 > 0$

ដោយ $\Delta > 0$ នោះ សមីការសម្គាល់មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ :

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{12} = \frac{-1+5}{12} = \frac{1}{3}$$

$$r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{12} = \frac{-1-5}{12} = -\frac{1}{2}$$

• តាងស្វ៊ីតជំនួយ $x_n = u_{n+1} - r_1 u_n$ និង $y_n = u_{n+1} - r_2 u_n$

គេសរសេរ

$$\begin{cases} x_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \\ y_n = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{cases} \quad (1)$$

គេបាន កំណើន $n+1$ នៃ x_n និង y_n គឺ :

$$\begin{cases} x_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{3}u_{n+1} \\ y_{n+1} = u_{n+2} + \frac{1}{2}u_{n+1} \end{cases}$$

ដោយ $6u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n \Rightarrow u_{n+2} = -\frac{1}{6}u_{n+1} + \frac{1}{6}u_n$

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{6}u_{n+1} - \frac{1}{6}u_n - \frac{1}{3}u_{n+1} \\ y_{n+1} = -\frac{1}{6}u_{n+1} + \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n\right) \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n \end{cases}$$

(ព្រោះ $x_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ និង $y_n = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$)

គេបាន (x_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានផលធៀបរួម $q_1 = -\frac{1}{2}$ និង តួទី១គឺ $x_1 = u_2 - \frac{1}{3}u_1 = \frac{13}{36} + \frac{1}{18} = \frac{5}{12}$

$$\Rightarrow x_n = x_1 q^{n-1} = \frac{5}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានផលធៀបរួម $q_2 = \frac{1}{3}$ និង តួទី១គឺ $y_1 = u_2 + \frac{1}{2}u_1 = \frac{13}{36} - \frac{1}{12} = \frac{5}{18}$

$$\Rightarrow y_n = y_1 q^{n-1} = \frac{5}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

តាម (1)

$$\Rightarrow - \begin{cases} u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{5}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n = \frac{5}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{cases}$$

$$-\frac{5}{6}u_n = \frac{5}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{5}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_n = -\frac{6}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{6}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

ដូច្នេះ $$\boxed{u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n}}$$

សំគាល់ : ស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = \alpha \ ; u_2 = \beta \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$ មាន សមីការសម្គាល់ $r^2 = ar + b$ ឬ $r^2 - ar - b = 0$ ។ ករណី $\Delta > 0$ (ដែល r_1 និង r_2 ជាឫសពីរផ្សេងគ្នានៃសមីការសម្គាល់) នោះ តួទី n គឺ $u_n = r_1^n + r_2^n$

លំហាត់អនុវត្តន៍ ១ :

កំណត់តួទី u_n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត កំណត់ដោយ :

1./ $\begin{cases} u_1 = 6 \ ; u_2 = 20 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n \end{cases}$; 2./ $\begin{cases} u_1 = 1 \ ; u_2 = 13 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

3./ $\begin{cases} u_1 = -1 \ ; u_2 = 13 \\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$; 4./ $\begin{cases} u_1 = 2 \ ; u_2 = \frac{10}{4} \\ 4u_{n+2} = 8u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$

5./ $\begin{cases} u_1 = \frac{7}{3} \ ; u_2 = \frac{37}{9} \\ 3u_{n+2} = 7u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$; 6./ $\begin{cases} u_1 = 6 \ ; u_2 = 26 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \end{cases}$

7./ $\begin{cases} u_1 = 2 \ ; u_2 = \frac{25}{9} \\ 9u_{n+2} = 18u_{n+1} - 5u_n \end{cases}$; 8./ $\begin{cases} u_1 = 1 \ ; u_2 = 25 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 12u_n \end{cases}$

9./ $\begin{cases} u_1 = 7 \ ; u_2 = 29 \\ u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n \end{cases}$; 10./ $\begin{cases} u_1 = 8 \ ; u_2 = 34 \\ u_{n+2} = 8u_{n+1} - 15u_n \end{cases}$

11./ $\begin{cases} u_1 = -5 \ ; u_2 = 13 \\ u_{n+2} = -5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$; 12./ $\begin{cases} u_1 = -4 \ ; u_2 = 10 \\ u_{n+2} = -4u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$

13./ $\begin{cases} u_1 = -2 \ ; u_2 = 20 \\ u_{n+2} = -2u_{n+1} + 8u_n \end{cases}$; 14./ $\begin{cases} u_1 = 3 \ ; u_2 = 9 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$

<u>ចម្លើយលំហាត់អនុវត្តន៍ ១</u> : ($u_n = r_1^n + r_2^n$)

1./ $u_n = 2^n + 4^n$; 2./ $u_n = (-2)^n + 3^n$

3./ $u_n = 2^n + (-3)^n$; 4./ $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n$

5./ $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2^n$; 6./ $u_n = 5^n + 1$

$$7./\ u_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{5}{3}\right)^n \quad ; \quad 8./\ u_n=4^n+(-3)^n$$

$$9./\ u_n=2^n+5^n \quad ; \quad 10./\ u_n=3^n+5^n$$

$$11./\ u_n=(-2)^n+(-3)^n \quad ; \quad 12./\ u_n=(-3)^n+(-1)^n$$

$$13./\ u_n=2^n+(-4)^n \quad ; \quad 14./\ u_n=(-1)^n+4^n$$

ឧទាហរណ៍ ២ : រកតួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1=3\ ;\ u_2=4 \\ u_{n+2}=-2u_{n+1}-u_n \end{cases}$

<u>**ដំណោះស្រាយ :**</u> (ផ្តើមពីសមីការសម្គាល់ បង្កើតស្វ៊ីតជំនួយ នាំឲ្យមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ឆ្ពោះទៅ រកតួទី n)

រកតួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n)

កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1=3\ ;\ u_2=4 \\ u_{n+2}=-2u_{n+1}-u_n \end{cases}$

- គេមាន សមីការសម្គាល់តាមទម្រង់ $u_{n+2}=-2u_{n+1}-u_n$ គឺ $r^2=-2r-1$ នាំឲ្យ $r^2+2r+1=0$

  $\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4(1)(1)=0$

ដោយ $\Delta=0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសឌុបគឺ $r_1=r_2=r_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{2}=-1$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយគឺ : $x_n=u_{n+1}-r_0u_n=u_{n+1}+u_n$

គេបានកំណើន $n+1$ គឺ $x_{n+1}=u_{n+2}+u_{n+1}$

ដោយ $u_{n+2}=-2u_{n+1}-u_n$ (សម្មតិកម្ម) នាំឲ្យ $x_{n+1}=u_{n+2}+u_{n+1}=-2u_{n+1}-u_n+u_{n+1}=-u_{n+1}-u_n$

នាំឲ្យ $x_{n+1}=-(u_{n+1}+u_n)=-x_n$ (ព្រោះ $x_n=u_{n+1}+u_n$) គេបាន (x_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q_0=-1$ និងតួទី១ $x_1=u_2+u_1=3+4=7 \Rightarrow x_n=x_1{q_0}^{n-1}=7(-1)^{n-1}$

ដោយ $x_n=u_{n+1}+u_n \Rightarrow u_{n+1}+u_n=7(-1)^{n-1}$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $(-1)^{n+1}$

គេបាន
$$\frac{u_{n+1}}{(-1)^{n+1}}+\frac{u_n}{(-1)^{n+1}}=\frac{7(-1)^{n-1}}{(-1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{(-1)^{n+1}}-\frac{u_n}{(-1)^n}=7$$

យក $w_n=\dfrac{u_n}{(-1)^n} \Rightarrow w_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}}{(-1)^{n+1}} \Rightarrow w_{n+1}-w_n=7$

គេបាន (w_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត មានផលសងរួម $d=7$ និងតួទី១គឺ $w_1=\dfrac{u_1}{(-1)}=-3$

$$\Rightarrow w_n=w_1+(n-1)d$$
$$=-3+(n-1)(7)=-3+7n-7=7n-10$$

ដោយ $w_n=\dfrac{u_n}{(-1)^n} \Rightarrow u_n=(-1)^n\cdot w_n \Rightarrow u_n=(-1)^n(7n-10)$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n=(-1)^n(7n-10)}$

លំហាត់គំរូ ២ : រកតួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 1 \ ; \ u_2 = -2 \\ 4u_{n+2} = 12u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$

<u>ដំណោះស្រាយ :</u> (ផ្តើមពីសមីការសម្គាល់ បង្កើតស្វ៊ីតជំនួយ នាំឲ្យមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ឆ្ពោះទៅ រកតួទី n)

រកតួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} u_1 = 1 \ ; \ u_2 = -2 \\ 4u_{n+2} = 12u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$$

- គេមាន សមីការសម្គាល់តាមទម្រង់ $4u_{n+2} = 12u_{n+1} - 9u_n$ គឺ
  $4r^2 = 12r - 9$ នាំឲ្យ $4r^2 - 12r + 9 = 0$
  $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(9)(4) = 0$

ដោយ $\Delta = 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសឌុបគឺ $r_1 = r_2 = r_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយគឺ : $x_n = u_{n+1} - r_0 u_n \quad \Rightarrow x_n = u_{n+1} - \dfrac{3}{2}u_n$ នោះ $\quad x_{n+1} = u_{n+2} - \dfrac{3}{2}u_{n+1}$

ដោយ $4u_{n+2} = 12u_{n+1} - 9u_n \quad \Rightarrow u_{n+2} = 3u_{n+1} - \dfrac{9}{4}u_n$ នាំឲ្យ

$$x_{n+1} = u_{n+2} - \frac{3}{2}u_{n+1} = 3u_{n+1} - \frac{9}{4}u_n - \frac{3}{2}u_{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{9}{4}u_n = \frac{3}{2}\left(u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n\right)$$

នាំឲ្យ $x_{n+1} = \dfrac{3}{2}x_n$ (ព្រោះ $x_n = u_{n+1} - \dfrac{3}{2}u_n$) គេបាន (x_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q_0 = \dfrac{3}{2}$ និងតួទី១ គឺ $x_1 = u_2 - \dfrac{3}{2}u_1 = -2 - \dfrac{3}{2}(1) = -\dfrac{7}{2} \qquad \Rightarrow x_n = x_1 q^{n-1} = \left(-\dfrac{7}{2}\right)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

ដោយ $x_n = u_{n+1} - \dfrac{3}{2}u_n \Rightarrow u_{n+1} - \dfrac{3}{2}u_n = \left(-\dfrac{7}{2}\right)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}} - \dfrac{\frac{3}{2}u_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}} = \left(-\dfrac{7}{2}\right)\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}} \qquad \Rightarrow \quad \dfrac{u_{n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}} - \dfrac{u_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n}} = \left(-\dfrac{7}{2}\right)\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2}} = -\dfrac{14}{9}$

យក $w_n = \dfrac{u_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \quad \Rightarrow w_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}} \qquad$ គេបាន $\quad w_{n+1} - w_n = -\dfrac{14}{9}$

$\Rightarrow \ (w_n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត មានផលសងរួម $d = -\dfrac{14}{9}$ និងតួទី១គឺ $w_1 = \dfrac{u_1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$

$$\Rightarrow \quad w_n = w_1 + (n-1)d = \frac{2}{3} + (n-1)\left(-\frac{14}{9}\right)$$

$$\Rightarrow \quad w_n = \frac{2}{3} - \frac{14}{9}n + \frac{14}{9} = -\frac{14}{9}n + \frac{20}{9}$$

ដោយ $w_n=\dfrac{u_n}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}\quad\Rightarrow u_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\cdot w_n\quad\Rightarrow u_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\left(-\dfrac{14}{9}n+\dfrac{20}{9}\right)$

ដូច្នេះ $$\boxed{u_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(-\frac{14}{9}n+\frac{20}{9}\right)}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍ ២

កំណត់តួទី u_n នៃស្ទីតចំនួនពិតកំណត់ដោយ:

$1./\begin{cases}u_1=1\ ;\ u_2=6\\ u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n\end{cases}$; $2./\begin{cases}u_1=-2\ ;\ u_2=4\\ u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n\end{cases}$

$3./\begin{cases}u_1=4\ ;\ u_2=3\\ u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n\end{cases}$; $4./\begin{cases}u_1=-3\ ;\ u_2=2\\ u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n\end{cases}$

$5./\begin{cases}u_1=1\ ;\ u_2=3\\ 4u_{n+2}=4u_{n+1}-u_n\end{cases}$; $6./\begin{cases}u_1=2\ ;\ u_2=5\\ u_{n+2}=-2u_{n+1}-u_n\end{cases}$

$7./\begin{cases}u_1=3\ ;\ u_2=-3\\ u_{n+2}=-6u_{n+1}-9u_n\end{cases}$; $8./\begin{cases}u_1=5\ ;\ u_2=1\\ 9u_{n+2}=12u_{n+1}-4u_n\end{cases}$

$9./\begin{cases}u_1=2\ ;\ u_2=7\\ 9u_{n+2}=6u_{n+1}-u_n\end{cases}$; $10./\begin{cases}u_1=3\ ;\ u_2=-4\\ u_{n+2}=12u_{n+1}-36u_n\end{cases}$

$11./\begin{cases}u_1=1\ ;\ u_2=-6\\ u_{n+2}=10u_{n+1}-25u_n\end{cases}$; $12./\begin{cases}u_1=2\ ;\ u_2=-5\\ u_{n+2}=-8u_{n+1}-16u_n\end{cases}$

$13./\begin{cases}u_1=2\ ;\ u_2=8\\ 2u_{n+2}=10u_{n+1}-25u_n\end{cases}$; $14./\begin{cases}u_1=1\ ;\ u_2=9\\ 16u_{n+2}=-8u_{n+1}-u_n\end{cases}$

ឧទាហរណ៍ ៣ : រកតួទី n នៃស្ទីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases}u_1=0\ ;\ u_2=1\\ u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n\end{cases}$

<u>ដំណោះស្រាយ :</u> (ផ្តើមពីសមីការសម្គាល់ បង្កើតស្ទីតជំនួយ នាំឲ្យមានស្ទីតធរណីមាត្រ ឆ្ពោះទៅ រកតួទី n)

រកតួទី n នៃស្ទីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases}u_1=0\ ;\ u_2=1\\ u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n\end{cases}$

- គេមាន សមីការសម្គាល់តាមទម្រង់ $u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n$ គឺ $r^2=2r-2$ នាំឲ្យ $r^2-2r+2=0$

  $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(2)=4-8=-4<0$

ដោយ $\Delta<0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ

$r_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{2+i\sqrt{4}}{2}=\dfrac{2+2i}{2}=1+i\quad r_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{2-i\sqrt{4}}{2}=\dfrac{2-2i}{2}=1-i$

- តាងស្ទីតជំនួយ គឺ : $z_n=u_{n+1}-r_2u_n=u_{n+1}-(1-i)u_n$ នោះ $z_{n+1}=u_{n+2}-(1-i)u_{n+1}$

ដោយ $u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n$ (សម្មតិកម្ម)

$$\Rightarrow z_{n+1}=2u_{n+1}-2u_n-(1-i)u_{n+1}$$
$$\Rightarrow z_{n+1}=(1+i)u_{n+1}-2u_n$$

$$=(1+i)\left(u_{n+1}-\frac{2}{1+i}u_n\right) \quad =(1+i)\left[u_{n+1}-(1-i)u_n\right]$$

$$\Rightarrow z_{n+1}=(1+i)z_n \qquad (\text{ព្រោះ } \; z_n=u_{n+1}-(1-i)u_n\ )$$

គេបាន (z_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q=(1+i)$ និងតួទី១ គឺ

$z_1=u_2-(1-i)u_1=1-(1-i)\times 0=1$

$$\Rightarrow z_n=z_1\cdot q^{n-1}=(1+i)^{n-1}$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{n-1}$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left[\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)\right]$$

ដោយ $z_n=u_{n+1}-(1-i)u_n$ នាំឲ្យ

$$u_{n+1}-(1-i)u_n \quad =\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left[\cos\left(-\frac{(n-1)\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{(n-1)\pi}{4}\right)\right]$$

$$u_{n+1}-u_n+iu_n=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)+i\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)$$

នាំឲ្យ $u_n=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)$

ដូច្នេះ $$\boxed{u_n=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)}$$

លំហាត់គំរូ ៣ : រកតួទី n នៃស្វីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases}u_1=2\ ;\ u_2=0\\ u_{n+2}=u_{n+1}-u_n\end{cases}$

<u>ដំណោះស្រាយ :</u> (ផ្តើមពីសមីការសម្គាល់ បង្កើតស្វីតជំនួយ នាំឲ្យមានស្វីតធរណីមាត្រ ឆ្ពោះទៅ រកតួទី n)

រកតួទី n នៃស្វីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases}u_1=2\ ;\ u_2=0\\ u_{n+2}=u_{n+1}-u_n\end{cases}$

- គេមាន សមីការសម្គាល់តាមទម្រង់ $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$ គឺ $r^2=r-1$ នាំឲ្យ $r^2-r+1=0$

  $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(1)=1-4=-3<0$

ដោយ $\Delta<0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសពីរ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ

$$r_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \text{ និង } r_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

- តាងស្វីតជំនួយ គឺ : $z_n=u_{n+1}-r_2u_n=u_{n+1}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)u_n$ នោះ $z_{n+1}=u_{n+2}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)u_{n+1}$

ដោយ $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$ (សម្មតិកម្ម)

$$\Rightarrow z_{n+1}=u_{n+1}-u_n-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)u_{n+1} \qquad \Rightarrow \qquad z_{n+1}=\left[1-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right]u_{n+1}-u_n$$

$$=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(u_{n+1}-\frac{u_n}{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$z_{n+1}=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(u_{n+1}-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}u_n\right)$$

$$\Rightarrow z_{n+1}=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z_n$$ (ព្រោះ $z_n=u_{n+1}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)u_n$)

គេបាន (z_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ និងតួទី១ គឺ

$$z_1=u_2-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}u_1=0-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\times 2=-1+i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow z_n=z_1\cdot q^{n-1}=\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$

$$=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$

$$z_n=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left[\cos\frac{(n-1)\pi}{3}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right]$$

$$z_n=2\left[\cos\frac{2\pi+(n-1)\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi+(n-1)\pi}{3}\right]$$

$$z_n=2\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{3}+i\sin\frac{(n+1)\pi}{3}\right]$$

ដោយ $z_n=u_{n+1}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)u_n$

នាំឲ្យ $$u_{n+1}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)u_n=2\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{3}+i\sin\frac{(n+1)\pi}{3}\right]$$

$$u_{n+1}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)u_n=2\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{3}+i\sin\frac{(n+1)\pi}{3}\right]$$

$$u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n+i\frac{\sqrt{3}}{2}u_n=2\cos\frac{(n+1)\pi}{3}+i\,2\sin\frac{(n+1)\pi}{3}$$

នាំឲ្យ $\frac{\sqrt{3}}{2}u_n=2\sin\frac{(n+1)\pi}{3}$ នោះ $u_n=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{(n+1)\pi}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\frac{(n+1)\pi}{3}$

ដូច្នេះ $$\boxed{u_n=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\frac{(n+1)\pi}{3}}$$

ឆ. ទម្រង់ $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \;, u_1 = \alpha \,, u_2 = \beta \;,\; n \in \mathbb{N}$

របៀបដោះស្រាយ (តាងស្ទីតសិប្បនិម្មិត ដើម្បីបំបាត់ចំនួនថេរ គេបានសមីការ សំគាល់ នាំបង្កើតបាន ស្ទីតជំនួយ ជួយរកតួទី n នៃស្ទីតសិប្បនិម្មិត ហើយឈានទៅរកតួទី n)

❖ រកតួទី n នៃស្ទីត $\begin{cases} u_1 = \alpha \quad , \; u_2 = \beta \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \end{cases}$

➢ តាងស្ទីតសិប្បនិម្មិត $w_n = u_n + \lambda \quad \Rightarrow u_n = w_n - \lambda$

គេបាន $u_{n+1} = w_{n+1} - \lambda$ និង $u_{n+2} = w_{n+2} - \lambda$

ដោយ $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$ (សម្មតិកម្ម)

$$\Rightarrow w_{n+2} - \lambda = a\left(w_{n+1} - \lambda\right) + b\left(w_n - \lambda\right) + c$$
$$\Rightarrow w_{n+2} - \lambda = aw_{n+1} - a\lambda + bw_n - b\lambda + c$$
$$\Rightarrow w_{n+2} - aw_{n+1} - bw_n + a\lambda + b\lambda - \lambda - c = 0$$

ឲ្យ $a\lambda + b\lambda - \lambda - c = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \dfrac{c}{a+b-1}$ គេបាន $w_{n+2} - aw_{n+1} - bw_n = 0$

ដោះស្រាយរកតួ w_n តាមវិធីសាស្រ្ត រកតួទី u_n នៃស្ទីតចំនួនពិត (u_n) ដែលមានទម្រង់

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \;,\; u_2 = \beta \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

(គឺបង្កើតសមីការសម្គាល់ នាំឲ្យមានស្ទីតធរណីមាត្រ ឆ្ពោះទៅរកតួទី n)

បន្ទាប់ពីរកតួទី w_n រួចយកទៅជំនួសនៅក្នុង $u_n = w_n - \lambda$ នាំឲ្យ $u_n = w_n - \dfrac{c}{a+b-1}$

ដូច្នេះ $$\boxed{u_n = w_n - \frac{c}{a+b-1}}$$

ឧទាហរណ៍ ១ : រកតួទី n នៃស្ទីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 2 \;;\; u_2 = 5 \\ u_{n+2} = 9u_{n+1} - 14u_n + 4 \end{cases}$

<u>**ដំណោះស្រាយ:**</u> (តាងស្ទីតសិប្បនិម្មិត ដើម្បីបំបាត់ចំនួនថេរ គេបានសមីការសំគាល់ នាំបង្កើតបានស្ទីតជំនួយ ជួយរកតួទី n នៃស្ទីតសិប្បនិម្មិត ហើយឈានទៅរកតួទី n)

រកតួទី u_n នៃស្ទីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 2 \;;\; u_2 = 5 \\ u_{n+2} = 9u_{n+1} - 14u_n + 4 \end{cases}$

- តាងស្ទីតសិប្បនិម្មិត $w_n = u_n + \lambda \quad \Rightarrow \; u_n = w_n - \lambda$ គេបាន $u_{n+1} = w_{n+1} - \lambda$ និង $u_{n+2} = w_{n+2} - \lambda$

ដោយ $u_{n+2} = 9u_{n+1} - 14u_n + 4$

$$\Rightarrow w_{n+2} - \lambda = 9\left(w_{n+1} - \lambda\right) - 14\left(w_n - \lambda\right) + 4$$
$$w_{n+2} - \lambda = 9w_{n+1} - 9\lambda - 14w_n + 14\lambda + 4$$
$$w_{n+2} - 9w_{n+1} + 14w_n - 14\lambda - \lambda + 9\lambda - 4 = 0$$
$$w_{n+2} - 9w_{n+1} + 14w_n - 6\lambda - 4 = 0$$

យក $-6\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -\dfrac{4}{6} = -\dfrac{2}{3}$ គេបាន $w_{n+2} - 9w_{n+1} + 14w_n = 0$

- មានសមីការសម្គាល់ $r^2-9r+14=0$

$$\Delta=(-9)^2-4(14)=81-56=25>0$$

ដោយ $\Delta>0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9+5}{2}=7 \qquad r_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9-5}{2}=2$$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយពីរគឺ $\begin{cases}x_n=w_{n+1}-7w_n\\ y_n=w_{n+1}-2w_n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_{n+1}=w_{n+2}-7w_{n+1}\\ y_{n+1}=w_{n+2}-2w_{n+1}\end{cases}$

ដោយ $w_{n+2}-9w_{n+1}+14w_n=0$

$$\Rightarrow w_{n+2}=9w_{n+1}-14w_n \quad \Rightarrow \begin{cases}x_{n+1}=w_{n+2}-7w_{n+1}\\ y_{n+1}=w_{n+2}-2w_{n+1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_{n+1}=9w_{n+1}-14w_n-7w_{n+1}\\ y_{n+1}=9w_{n+1}-14w_n-2w_{n+1}\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}x_{n+1}=2w_{n+1}-14w_n\\ y_{n+1}=7w_{n+1}-14w_n\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_{n+1}=2(w_{n+1}-7w_n)\\ y_{n+1}=7(w_{n+1}-2w_n)\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}x_{n+1}=2x_n\\ y_{n+1}=7y_n\end{cases}$$

(ព្រោះ $\begin{cases}x_n=w_{n+1}-7w_n\\ y_n=w_{n+1}-2w_n\end{cases}$)

គេបាន (x_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន ផលធៀបរួម $q_1=2$ និងតួទី ១ គឺ $x_1=w_2-7w_1$

ដោយ $w_2=u_2+\lambda$ និង $w_1=u_1+\lambda$ $\left(u_1=2\,,\,u_2=5\,,\,\lambda=-\frac{2}{3}\right)$ នាំឲ្យ $w_2=5-\frac{2}{3}=\frac{13}{3}$

និង $w_1=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ នោះ $x_1=\frac{13}{3}-7\left(\frac{4}{3}\right)=-5 \Rightarrow x_n=x_1q^{n-1}=(-5)2^{n-1}$

គេបាន (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន ផលធៀបរួម $q_1=7$ និងតួទី ១ គឺ $y_1=w_2-2w_1$

$y_1=\frac{13}{3}-2\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{5}{3} \Rightarrow y_n=x_1q^{n-1}=\left(\frac{5}{3}\right)7^{n-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_n=w_{n+1}-7w_n=(-5)2^{n-1}\\ y_n=w_{n+1}-2w_n=\left(\frac{5}{3}\right)7^{n-1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad - \begin{cases}w_{n+1}-7w_n=(-5)2^{n-1}\\ w_{n+1}-2w_n=\left(\frac{5}{3}\right)7^{n-1}\end{cases}$$

$$-5w_n=(-5)2^{n-1}-\left(\frac{5}{3}\right)7^{n-1}$$

$$\Rightarrow w_n=-\frac{1}{5}\left[(-5)2^{n-1}-\left(\frac{5}{3}\right)7^{n-1}\right]$$

ដោយ $w_n = u_n + \lambda \quad \Rightarrow u_n = w_n - \lambda \quad \Rightarrow u_n = -\frac{1}{5}\left[(-5)2^{n-1} - \left(\frac{5}{3}\right)7^{n-1}\right] + \frac{2}{3}$

ដូចនេះ $$\boxed{u_n = -\frac{1}{5}\left[(-5)2^{n-1} - \left(\frac{5}{3}\right)7^{n-1}\right] + \frac{2}{3}}$$

ឧទាហរណ៍ ២ : រកតួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 3\ ;\ u_2 = -1 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n + 2 \end{cases}$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

(តាងស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត ដើម្បីបំបាត់ចំនួនថេរ គេបានសមីការសំគាល់ នាំបង្កើតបានស្វ៊ីតជំនួយ ជួយរកតួទី n នៃ ស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត ហើយឈានទៅរកតួទី n)

រកតួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 3\ ;\ u_2 = -1 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n + 2 \end{cases}$

- តាងស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត $w_n = u_n + \lambda \quad \Rightarrow u_n = w_n - \lambda$

គេបាន កំណើន $n+1$ គឺ $u_{n+1} = w_{n+1} - \lambda \quad u_{n+2} = w_{n+2} - \lambda$

ដោយ $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n + 2 \quad \Rightarrow w_{n+2} - \lambda = 6(w_{n+1} - \lambda) - 9(w_n - \lambda) + 2$

$$w_{n+2} - 6w_{n+1} + 9w_n - \lambda + 6\lambda - 9\lambda - 2 = 0$$

យក $-4\lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ គេបាន $w_{n+2} - 6w_{n+1} + 9w_n = 0$

មានសមីការសម្គាល់ $r^2 - 6r + 9 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4(9) = 36 - 36 = 0$

ដោយ $\Delta = 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសឌុបគឺ $r_1 = r_2 = r_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយគឺ : $x_n = w_{n+1} - r_0 w_n \quad \Rightarrow x_n = w_{n+1} - 3w_n,\ x_{n+1} = w_{n+2} - 3w_{n+1}$,

ដោយ $w_{n+2} - 6w_{n+1} + 9w_n = 0 \quad \Rightarrow w_{n+2} = 6u_{n+1} - 9w_n$ នាំឲ្យ $x_{n+1} = 6w_{n+2} - 9w_n - 3w_{n+1}$

$\Rightarrow \quad x_{n+1} = 3w_{n+1} - 9w_n = 3(w_{n+1} - 3w_n)$

នាំឲ្យ $x_{n+1} = 3x_n$ (ព្រោះ $x_n = w_{n+1} - 3w_n$) គេបាន (x_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផល

ធៀបរួម $q_0 = 3$ និងតួទី១ គឺ $x_1 = w_2 - 3w_1$, ដោយ $w_2 = u_2 + \lambda = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

និង $w_1 = u_1 + \lambda = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ នោះ $x_1 = -\frac{3}{2} - 3\left(\frac{5}{2}\right) = -9 \quad \Rightarrow x_n = x_1 q^{n-1} = (-9)3^{n-1}$

ដោយ $x_n = w_{n+1} - 3w_n \quad \Rightarrow w_{n+1} - 3w_n = (-9)3^{n-1}$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 3^{n+1}

គេបាន $\frac{w_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{3w_n}{3^{n+1}} = (-9)\frac{3^{n-1}}{3^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{w_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{w_n}{3^n} = -1$

យក $v_n = \frac{w_n}{3^n} \quad \Rightarrow v_{n+1} = \frac{w_{n+1}}{3^{n+1}}$ គេបាន $v_{n+1} - v_n = -1$ នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត មានផលសងរួម

$d = -1$ និងតួទី១គឺ $v_1 = \frac{w_1}{3} = \frac{5}{6}$ និង $v_n = v_1 + (n-1)d = \frac{5}{6} + (n-1)(-1) = -n + \frac{11}{6}$

ដោយ $v_n = \dfrac{w_n}{3^n} \Rightarrow w_n = v_n \cdot 3^n = \left(-n + \dfrac{11}{6}\right) \cdot 3^n$ ហើយ $w_n = u_n + \lambda \quad \Rightarrow u_n = w_n - \lambda$

$$\Rightarrow u_n = \left(-n + \frac{11}{6}\right) \cdot 3^n + \frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n = \left(-n + \dfrac{11}{6}\right) \cdot 3^n + \dfrac{1}{2}}$

ឧទាហរណ៍ ៣ : រកតួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 0 \ ; \ u_2 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 8u_n - 5 \end{cases}$

<u>ដំណោះស្រាយ :</u> (តាងស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត ដើម្បីបំបាត់ចំនួនថេរ គេបានសមីការសំគាល់ នាំបង្កើតបានស្វ៊ីតជំនួយ ជួយរកតួទី n នៃស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត ហើយឈានទៅរកតួទី n)

រកតួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 0 \ ; \ u_2 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 8u_n - 5 \end{cases}$

- តាងស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត $w_n = u_n + \lambda \quad \Rightarrow u_n = w_n - \lambda$, $u_{n+1} = w_{n+1} - \lambda$, $u_{n+2} = w_{n+2} - \lambda$

ដោយ $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 8u_n - 5$

$$\Rightarrow w_{n+2} - \lambda = 4(w_{n+1} - \lambda) - 8(w_n - \lambda) - 5$$

$$w_{n+2} - 4w_{n+1} + 8w_n - \lambda + 4\lambda - 8\lambda + 5 = 0$$

$$w_{n+2} - 4w_{n+1} + 8w_n - 5\lambda + 5 = 0$$

យក $-5\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1$ គេបាន $w_{n+2} - 4w_{n+1} + 8w_n = 0$

- មានសមីការសម្គាល់ $r^2 - 4r + 8 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(8) = 16 - 32 = -16 < 0$$

ដោយ $\Delta < 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចពីរឆ្លាស់គ្នាគឺ

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 + i\sqrt{16}}{2} = 2 + 2i \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 - i\sqrt{16}}{2} = 2 - 2i$$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ គឺ : $z_n = w_{n+1} - r_2 w_n = w_{n+1} - (2 - 2i) w_n$, $z_{n+1} = w_{n+2} - (2 - 2i) w_{n+1}$

ដោយ $w_{n+2} - 4w_{n+1} + 8w_n = 0$ (សម្មតិកម្ម) $\Rightarrow w_{n+2} = 4w_{n+1} - 8w_n$

$$z_{n+1} = 4w_{n+1} - 8w_n - (2 - 2i) w_{n+1}$$

$$= (2 + 2i) w_{n+1} - 8w_n$$

$$z_{n+1} = (2 + 2i)\left(w_{n+1} - \frac{8}{2 + 2i} w_n\right)$$

$$= (2 + 2i)\left[w_{n+1} - (2 - 2i) w_n\right]$$

$\Rightarrow z_{n+1} = (2 + 2i) z_n$ (ព្រោះ $z_n = w_{n+1} - (2 - 2i) w_n$)

គេបាន (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q = 2 + 2i$ និងតួទី១ គឺ $z_1 = w_2 - (2 - 2i) w_1$

ដោយ $w_2 = u_2 + \lambda = 1 + 1 = 2$ និង $w_1 = u_1 + \lambda = 0 + 1 = 1 \Rightarrow z_1 = 2 - (2 - 2i) \times 1 = 2i$

$$\Rightarrow z_n = z_1 \cdot q^{n-1} = (2i)(2 + 2i)^{n-1}$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left[2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^{n-1}$$

$$\Rightarrow z_n=2\left(2\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}$$

$$=2^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{4}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right)$$

$$=2^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi-\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right]$$

ដោយ $z_n=w_{n+1}-(2-2i)w_n=w_{n+1}-2w_n+2iw_n$ នោះ

$$w_{n+1}-2w_n+2iw_n=2^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right] w_{n+1}-2w_n+2iw_n$$

$$=2^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i\,2^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}$$

នាំឲ្យ $2w_n=2^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}$ នោះ

$$w_n=2^{n-1}\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}$$

$$=\left(2\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}$$

ដោយ $w_n=u_n+\lambda \quad \Rightarrow u_n=w_n-\lambda=\left(2\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-1$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n=\left(2\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-1}$

ង. ទម្រង់ $u_{n+1}=k\,u_n^p, u_1=\alpha$ $k>0$, $\alpha>0$

<u>របៀបដោះស្រាយ</u>: ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវ :

- បំពាក់លោការីតនេពែរលើ $u_{n+1}=ku_n^p$ គឺ

$$\ln u_{n+1}=\ln ku_n^p$$

$$\ln u_{n+1}=k'+p\ln u_n \quad (k'=\ln k) \quad (1)$$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n=\ln u_n$ គេបានកំណើន $n+1$ គឺ $v_{n+1}=\ln u_{n+1}$

តាម $(1) \Rightarrow v_{n+1}=pv_n+k'$

- ដោះស្រាយរក v_n រួចទាញរក $u_n=e^{v_n}$ (ព្រោះ $v_n=\ln u_n$)

ដូច្នេះ $\boxed{u_n=e^{v_n}}$

ឧទាហរណ៍ ១ : គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n} \end{cases}$ $, n \in \mathbb{N}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n}$

- បំពាក់លោការីតនេពៃរលើ $u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n}$ គឺ

$$\ln u_{n+1} = \ln \sqrt[3]{u_n}$$

$$\ln u_{n+1} = \frac{1}{3}\ln u_n \quad (1)$$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = \ln u_n$

គេបានកំណើន $n+1$ គឺ $v_{n+1} = \ln u_{n+1}$

តាម $(1) \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

គេបាន (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានរេសុង $q = \frac{1}{3}$ និងតួទី១ គឺ $v_1 = \ln u_1 = \ln 3$

$$\Rightarrow v_n = v_1 q^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \ln 3$$

ដោយ $v_n = \ln u_n \Rightarrow u_n = e^{v_n} = e^{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ln 3} = 3^{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n = 3^{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}}$

លំហាត់គំរូ ១ : គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n^2 \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ :

គេមាន $u_{n+1} = 3u_n^2$

- បំពាក់លោការីតនេពៃរលើ $u_{n+1} = 3u_n^2$ គឺ

$$\ln u_{n+1} = \ln 3u_n^2$$

$$\ln u_{n+1} = \ln 3 + 2\ln u_n \quad (1)$$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = \ln u_n$, $v_{n+1} = \ln u_{n+1}$

ពី $(1) \Rightarrow v_{n+1} = 2v_n + \ln 3 \quad (2)$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $r_n = \alpha n + \beta$, $r_{n+1} = \alpha(n+1) + \beta = \alpha n + \alpha + \beta$

យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង v_n និង v_{n+1} រៀងគ្នា គេបាន $r_{n+1} = 2r_n + \ln 3$

$$\alpha n + \alpha + \beta = 2(\alpha n + \beta) + \ln 3$$

$$\alpha n + \alpha + \beta = 2\alpha n + 2\beta + \ln 3$$

$$\begin{cases} \alpha = 2\alpha \\ \alpha + \beta = 2\beta + \ln 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\ln 3 \end{cases}$$

យក $\alpha = 0$; $\beta = -\ln 3$ ជំនួសក្នុង $r_{n+1} = \alpha(n+1) + \beta$ គេបាន $r_{n+1} = -\ln 3$

- ធ្វើផលសងរវាង v_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $v_{n+1} - r_{n+1} = 2v_n + \ln 3 + \ln 3$

$$v_{n+1} + \ln 3 = 2v_n + 2\ln 3$$

$$v_{n+1} + \ln 3 = 2(v_n + \ln 3)$$

តាង $w_n = v_n + \ln 3 \Rightarrow w_{n+1} = v_{n+1} + \ln 3 \quad \Rightarrow w_{n+1} = 2w_n$

គេបាន (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ និងតួទី១គឺ $w_1 = v_1 + \ln 3$ តែ $v_1 = \ln u_1 = \ln 5$

$\Rightarrow w_1 = \ln 3 + \ln 5 = \ln 15 \quad \Rightarrow w_n = w_1 q^{n-1} = 2^{n-1}\ln 15$

ដោយ $w_n = v_n + \ln 3 \Rightarrow v_n = w_n - \ln 3$

$$v_n = 2^{n-1}\ln 15 - \ln 3$$

តែ $v_n = \ln u_n$

$$\Rightarrow u_n = e^{v_n} = e^{2^{n-1}\ln 15 - \ln 3} = e^{\ln\frac{15^{2^{n-1}}}{3}} = \frac{15^{2^{n-1}}}{3}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $n = 1 \Rightarrow u_1 = \dfrac{15^{2^{1-1}}}{3} = \dfrac{15}{3} = 5$ (ពិត)

ដូច្នេះ $$\boxed{u_n = \frac{15^{2^{n-1}}}{3}}$$

ឈ. ទម្រង់ $u_{n+1} = f(u_n)$

- ឧបមាថា គេមានស្វ៊ីត (u_n) ណាមួយ កំណត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយ $u_0 = a$ និង $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, គេចង់ គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

__របៀបដោះស្រាយ__ : ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវ :

- ត្រូវដោះស្រាយសមីការ $l = f(l) \Rightarrow l = \{l_1 \ , \ l_2\}$; $(l_1 < l_2)$
- គេត្រូវតាង $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n + l_1}{u_n + l_2}\right)$
- ត្រូវរកទំនាក់ទំនងរវាងតួ v_{n+1} និង v_n រួចត្រូវទាញរកប្រភេទនៃ (v_n)
- គេអាចរកតួ v_n ជាអនុគមន៍នៃ n
- នាំឲ្យ គេអាចទាញបាន u_n

លំហាត់គំរូ : គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{12}{u_n}\right) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ។

__ដំណោះស្រាយ__ : គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{12}{u_n}) \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

- ដោះស្រាយសមីការ $f(l) = l$ គឺ

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{12}{l}\right)$$

$$l-\frac{1}{2}l=\frac{6}{l}$$

$$\frac{1}{2}l^2=6 \quad \Rightarrow l^2=12$$

$$\left[\begin{array}{l} l_1=-2\sqrt{3} \quad ; \ |l_1|<4 \\ l_2=2\sqrt{3} \quad ; \ |l_2|<4 \end{array}\right.$$

- គេត្រូវតាង $v_n=\ln\left(\frac{u_n+l_1}{u_n+l_2}\right) \quad \Rightarrow v_{n+1}=\ln\left(\frac{u_{n+1}+l_1}{u_{n+1}+l_2}\right)$

$$\Rightarrow v_{n+1}=\ln\left(\frac{u_{n+1}-2\sqrt{3}}{u_{n+1}+2\sqrt{3}}\right) \qquad =\ln\left(\frac{\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{12}{u_n}\right)-2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{12}{u_n}\right)+2\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow v_{n+1}=\ln\left(\frac{u_n{}^2-4\sqrt{3}u_n+12}{u_n{}^2+4\sqrt{3}u_n+12}\right)$$

$$\Rightarrow v_{n+1}=\ln\left(\frac{u_n-2\sqrt{3}}{u_n+2\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\Rightarrow v_{n+1}=2\ln\left(\frac{u_n-2\sqrt{3}}{u_n+2\sqrt{3}}\right)$$

$\Rightarrow v_{n+1}=2v_n \quad \Rightarrow (v_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$ និងតួ

$$v_0=\ln\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\right)=\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)$$

តាមរូបមន្ត $v_n=v_0q^n$ គេបាន

$v_n=2^n\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)$ តែ $v_n=\ln\left(\frac{u_n-2\sqrt{3}}{u_n+2\sqrt{3}}\right)$

$$\ln\left(\frac{u_n-2\sqrt{3}}{u_n+2\sqrt{3}}\right)=2^n\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{u_n-2\sqrt{3}}{u_n+2\sqrt{3}}=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}$$

$$u_n-2\sqrt{3}=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}\left(u_n+2\sqrt{3}\right)$$

$$u_n-2\sqrt{3}=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}u_n+2\sqrt{3}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}$$

$$u_n-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}u_n=2\sqrt{3}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}+2\sqrt{3}$$

$$u_n = 2\sqrt{3}\frac{1+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}}{1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}}$$

ដូច្នេះ
$$\boxed{u_n = 2\sqrt{3}\frac{1+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}}{1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}}}$$

+ គណនាលីមីត

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{3}\frac{1+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}}{1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}} = 2\sqrt{3}$$

លំហាត់ស្រាវជ្រាវស្វ៊ីត

1. កំណត់តម្លៃ a , b ដើម្បីឲ្យ $v_n = \frac{a+u_n}{b+u_n}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។
2. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n): $a_{n+2} = 2\sqrt{3}a_{n+1} - 4a_n$, $a_1 = 0$; $a_2 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។
3. គេមានស្វ៊ីត (a_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $a_o = 1$, $a_1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ និង $(n+1)a_{n+1} - (x+n)a_n + xa_{n-1} = 0$,$(n = 1,2,3,...)$ ។ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត(a_n) ។
4. គេមានស្វ៊ីត(a_n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $a_1 = 5$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_1$ ។
   ក/. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)
   ខ/. គណនា $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}$
5. គេអោយ $a_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n-1)a_{n-1}+1}$, $n = 1,2,3......$ ។
   ក/. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)
   ខ/. គណនា $\frac{1}{\sqrt{a_1a_n}} + \frac{1}{\sqrt{a_2a_{n-1}}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_na_1}}$
6. រកស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម៖
   ក/. $u_{n+1}u_n = -5u_{n+1} + 4u_n + 2$, $u_o \neq -5$
   ខ/. $3u_{n+1}u_n = 5u_{n+1} + 7u_n - 12$, $u_o \neq \frac{5}{3}$
7. គណនា u_n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} u_0 > 0\ ,\ u_1 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{u}_{\mathrm{n+2}} = (u_n^2u_{n+1})^{\frac{1}{3}} \end{cases}$

8. គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

a. $\begin{cases} u_0 > 0\,,\ u_1 > 0 \\ u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}u_n}{u_{n+1}+u_n} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ b. $\begin{cases} u_0 = 3+i \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}(3u_n - i\,\overline{u_n}) \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

a. $\begin{cases} u_0 = \frac{37}{12}\,,\ u_1 = \frac{35}{12} \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n + 3^{n+1} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

9. គេឲ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $u_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n$ ។

បង្ហាញថា $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]$ ជាចំនួនគត់គូ រួចទាញថា u_n ជាចំនួនសេស។

10. តាង $(a_n)_{n\ge1}$ ជាស្វ៊ីតចំនួនពិត ដែល $a_1 = 2, a_{n+1} = 1 + a_1a_2....a_n$ តាង $\prod_{i=1}^{n} a_i = P, \sum_{i=1}^{n} a_i = Q$ ។

បង្ហាញថា $P + Q = 1$

11. តាង $(a_n)_{n\ge1}$ ជាស្វ៊ីតចំនួនពិត ដែល $a_{n+1} > a_n^2 + \frac{1}{5}, \forall n \ge 0$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{a_{n+5}} \ge a_{n-5}^2, \forall n \ge 5$

12. បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{1^2 - 2^2 + 3^2 - .... + (-1)^{k+1}k^2} = \frac{2n}{n+1}$

13. តាង $a_n = 3n + \sqrt{n^2-1}$ និង $b_n = 2\left(\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2+n}\right), (n \ge 1)$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{a_1 - b_1} + \sqrt{a_2 - b_2} + ... + \sqrt{a_{49} - b_{49}} = A + B\sqrt{2}$ ដែល A និង B ជាចំនួនគត់

14. តាង $a_n = \sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}, n \ge 1$ ។បង្ហាញថា $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{20}}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

15. តាង $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $a_1 + a_2 + ... + a_n < 1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a_1a_2...a_n\left[1-(a_1+a_2+...+a_n)\right]}{(a_1+a_2+...+a_n)(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)} \le 1$

16. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_1 = \frac{1}{2}$ និង $u_{n+1} = u_n^2 + u_n, n = 1,2,....$ ។

រកផ្នែកគត់នៃចំនួន $A = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k + 1}$

17. គេឲ្យ n ចំនួនពិត $a_1, a_2, ..., a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ: $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$ និង $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1$ ។ស្រាយបញ្ជាក់ថា ក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនោះ មានពីរចំនួនដែលមានផលគុណមិនលើសពី $-\frac{1}{n}$ ។

18. ក/. តាង $f(n) = \left(n^2+n+1\right)^2 + 1$ ។ គេកំណត់ស្វ៊ីត $U_n = \frac{f(1)\times f(3)\times f(5)\times ...\times f(2n-1)}{f(1)\times f(3)\times f(5)\times ...\times f(2n-1)}, n \in \mathbb{N}$ ។

គណនា $\lim_{n\to\infty} n\sqrt{U_n}$ ។

ខ/. គេឲ្យស្វ៊ីតពីរ (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $a_n + \sqrt{2}b_n = \left(2+\sqrt{2}\right)^n$

គណនា $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ ។

19. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ :$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ ចំពោះ $n \in \mathbb{N}$ និង (v_n) ជាស្វ៊ីតមួយទៀតដែល $v_n = u_{n+1} - au_n$ ។តើតម្លៃ a ស្មើប៉ុន្មាន ដែល v_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ?

20. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_1 = 1\,, u_{n+1} = \frac{6+u_n}{2+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ ។

កំណត់តម្លៃ a,b ដើម្បីឲ្យ $v_n=\frac{a+u_n}{b+u_n}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ។

21. គេឲ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន n បើ $a_n>0$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\sum_{j=1}^{n}a_j^3=\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)^2$ ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n=n,n=1,2,...$ ។
22. តាង $a_1=1$ និង តាង $a_n=\left\lfloor\frac{n^3}{a_{n-1}}\right\rfloor,n\geq 2$ ។កំណត់តម្លៃនៃ a_{2018} ។
23. គេឲ្យស៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases}a_1=-4,a_2=10\\a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=12\end{cases}$ ។ស្រាយបញ្ជាក់ថា a_n+4 ចែកដាច់នឹង n ចំពោះ n បឋម។
24. រកចំនួនគត់ n និងគណនាមុំ A,B និង C ដោយដឹងថា ត្រីកោណ (ABC) មានមុំស្រួចទាំងបីផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\sqrt[2000]{\tan^n A}+\sqrt[2000]{\tan^n B}+\sqrt[2000]{\tan^n C}=\frac{n\left(3\sqrt{3}-1\right)+6000}{2000}$ ។
25. គេមានស៊ីត $\{x_n\}$ កំណត់ដោយ $x_1=2$ និង $x_{n+1}=\frac{2+x_n}{1-2x_n},n=1,2,.....$ ។
ក/. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x_n\neq 0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ ។
ខ/. បង្ហាញថា $\{x_n\}$ មិនមែនជាស៊ីតខួប ។
26. គេឲ្យស៊ីត (s_m) ដែលមាន $m\in\mathbb{N},\mathrm{m}\geq 4$ និង
$s_1=1,s_{m+1}=s_m+1(m-2)+2(m-3)+...+(m-2)1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $s_m=C_m^4=C(m,4)$ ។
27. គេឲ្យ $s_n=1+q+q^2+...+q^n,(q\neq 0)$ និង $s'_n=1+\left(\frac{1+q}{2}\right)+\left(\frac{1+q}{2}\right)^2+...+\left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ ។
28. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $C_{n+1}^1+C_{n+1}^2s_1+C_{n+1}^3s_2+...+C_{n+1}^{n+1}s_n=2^ns'_n$ ។
29. គេឲ្យស៊ីតពហុធា $\left(T_n(x)\right),n=0,1,2,...$ ដែលមាន $T_o(x)=1,T_1(x)=x$ និង
$T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=2xT_n(x),n\geq 1$ ។
ក/. រក $T_2(x),T_3(x),...,T_6(x)$
ខ/. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos nu=T_n(\cos u)$ ។ទាញថា $\forall|x|\leq 1,|T_n(x)|\leq 1$ ។
30. គេឲ្យ m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ដោយដឹងថា $mn+1$ ចែកដាច់នឹង 24 ។ស្រាយបញ្ជាក់ថា $m+n$ ក៏ចែកដាច់នឹង 24 ដែរ។
31. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ និងជាប់លើ $\mathbb{R}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់
$\forall x,y\in\mathbb{R},\mathrm{f(x+y)+x+y=[f(x)+x][f(y)+y]}$ និង $f(1)=a-1,(a>0)$ ។
ក/. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R},\mathrm{f(x)+x}\geq 0$ ។ តាមសម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីរសម្មតិកម្មបង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{f(x)+x}\neq 0$ ។ រួចទាញឲ្យបានថា $f(0)=1$ ។
ខ/. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន $f(nx)+nx=\left[f(x)+x\right]^n$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall n\in\mathbb{N}^*,f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}=a^{\frac{1}{n}}$ ។ ទាញរកកន្សោមនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។
32. តាងគេឲ្យស៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ: $x_{n+1}=\frac{-x_n+\sqrt{3-3x_n^2}}{2}$ ។
ក/. រកលក្ខខណ្ឌលើ x_1 ដើម្បីឲ្យគ្រប់តួនៃស៊ីតវិជ្ជមាន។
ខ/. រកខួបនៃស៊ីត (x_n) ។

33. ឧបមាថា a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង $\{a^{-1}\}=\{a^2\},2<a^2<3$ ។គណនាតម្លៃនៃ $a^{12}-144a^{-1}$ ។ សម្គាល់ $\{x\}=x-[x],0\le\{x\}\le 1$ $/\{x\}$ ហៅថា ម៉ង់ទីសនៃ x ។
34. បង្ហាញថា $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$ ។
35. តាងចំនួន $a_0,a_1,...,a_n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តតគ្នា និង $f(x)=\dfrac{b^x}{b^x+\sqrt{b}},(b>0)$ ។

    បង្ហាញថា $\sum_{k=0}^{n}a_kC_n^k\left[f(x)\right]^k\left[f(1-x)\right]^{n-k}=a_0f(1-x)+a_nf(x)$ ។
36. ដោះស្រាយសមីការ $\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 4x\rfloor+\lfloor 8x\rfloor+\lfloor 16x\rfloor+\lfloor 32x\rfloor=12345$ ។
37. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $\begin{cases}u_1=0,u_2=14,u_3=-18\\u_{n+1}=7u_{n-1}-6u_{n-2},n=3,4,5,...\end{cases}$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់ចំនួនបឋម p នោះ $p|u_p$ ។
38. ឧបមាថា p ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល 2^p-2 ចែកដាច់នឹង p ។គេកំណត់ស្វ៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_1=p$ និង $u_{n+1}=2^{u_n}-1$ ចំពោះគ្រប់ $n=1,2,3,...$ ។ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់ចំនួនគត់ $n=1,2,3,...$ គេបានជានិច្ច $2^{u_k}-2$ ចែកដាច់នឹង u_k ។
39. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ពីសំណុំចំនួនគត់ទៅសំណុំចំនួនគត់កំណត់ដោយ
40. $f(x)=\begin{cases}n+3 & \text{បើ n សេស}\\ \frac{n}{2} & \text{បើ n គូ}\end{cases}$ ។ឧបមាថា k ជាចំនួនសេស និង $f\{f[f(x)]\}=27$ ។

    គណនាផលបូកលេខនៃ k ។
41. គេឲ្យ $x_1,x_2,x_3,...,x_n>0$ និងតាង $S=x_1+x_2+...+x_n$ ។

    ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\le 1+S+\dfrac{S^2}{2!}+...+\dfrac{S^n}{n!}$ ។
42. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $2,3,6,14,40,152,784,...$ មានតួទីមួយ $a_0=2$ និងតួទូទៅ (a_n) ចំពោះ $n\ge 3,a_n=(n+4)a_{n+1}-4na_{n-2}+(4n-8)a_{n-1}$ មានផលបូកនៃស្វ៊ីតពីរដែលមនាទម្រង់ច្បាស់លាស់។
43. តាង $P_0(x)=x^3+313x^2-77x-8$ ។គេឲ្យ $P_n(x)=P_{n-1}(x-n)$ ចំពោះ $n\in\mathbb{N}^*$ ។ រកមេគុណ x នៃ $P_{20}(x)$ ។
44. A ជាចំនួនគត់ដែលមាន 4 តួ លេខតាងដោយ $\overline{mcdu}$ ហើយ c,m,d និង u ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើនតគ្នាមានផលសង្សម r ។

    ក/. គណនាផលបូកលេខនៃ A ជាអនុគមន៍នៃ r ទាញរកតម្លៃនៃ m ដើម្បីឲ្យ A ចែកដាច់នឹង 3

    ខ/. បង្ហាញថា A ចែកមិនដាច់នឹង 11 ។
45. គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត៖

    ក. $2u_{n+2}-5u_{n+1}+3u_n=0$

    ខ. $u_{n+2}=2u_{n+1}-4u_n$

    គ. $u_{n+3}-u_{n+2}+2u_{n+1}+4u_n=0$

    ឃ. $u_{n+2}-2u_{n+1}-4u_n=0$

    ង. $u_{n+3}-2u_{n+1}-4u_n=0$
46. គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

    ក. $u_{n+2}-5u_n+6u_n=3^{n+1}-2^n$

    ខ. $u_{n+2}-6u_{n+1}+8u_n=3^n+2^n+2^{2n}$

គ. $u_{n+3}-6u_{n+1}+9u_n=(-1)^n$

ឃ. $u_{n+4}-2u_{n+3}+2u_{n+2}+4u_{n+1}-8u_n=n$

ង. $u_{n+3}-4u_{n+2}+u_{n+1}+6u_n=5^n-2n^2$

ច. $u_{n+3}+6u_{n+2}+30u_{n+1}+25u_n=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

47. គណនាតួទី n នៃស៊ីត $(u_n)_{n>0}$ ចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

ក. $u_{n+1}=6u_n+2$ ចំពោះ $u_1=1$

ខ. $u_{n+1}=3u_n+n!-3\ln n$ ចំពោះ $u_1=5$

គ. $S_{n+1}-2S_n=n^2+1$ ចំពោះ $u_1=-1$

ឃ. $2S_{n+1}+8S_n=7$ ចំពោះ $u_1=2$

បញ្ជាក់ S_n ជាផលបូកនៃស៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n>0}$

48. គណនាតួទី n នៃស៊ីត $(u_n)_{n>0}$ ចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

ក. $S_n=n^n+\ln\left(\frac{n^2}{\cos^2 n\pi}\right)$

ខ. $S_{n+3}=n!+\ln\left(\frac{n^2}{n!\tan^2 n\pi}\right)$

គ. $S_{n+2}-2S_{n-1}+2S_n=n+1$

ឃ. $S_{n+3}-4S_{n+2}+S_{n+1}+6S_n=5^n-2n^2$

ង. $S_{n+3}+6S_{n+2}+30S_{n+1}+25S_n=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

បញ្ជាក់ S_n ជាផលបូកនៃស៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n>0}$

49. គណនាតួទី n នៃស៊ីត $(u_n)_{n>0}$ ចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

ក. $4u_{n+1}-8u_n=0$

ខ. $u_{n+2}+5u_{n+1}-6u_n=0$

គ. $4u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=0$

ឃ. $u_{n+2}+10u_{n+1}+25u_n=n(-5)^n$

ង. $u_{n+2}+5u_{n+1}+6u_n=2(-3)^n+3(-2)^n$

ច. $u_{n+2}+9u_{n+1}-26u_n=(-1)^n 3^{n+1}$

ឆ. $u_{n+4}-u_{n+3}-3u_{n+2}+5u_{n+1}+10u_n=(-2)^n$

ជ. $u_{n+2}-2u_{n+1}+4u_n=\left(1+\sqrt{3}\right)^n$

ឈ. $u_{n+2}+5u_{n+1}+6u_n=2(-3)^n+3n(-2)^n$

ញ. $u_{n+3}+6u_{n+1}+2u_n=(-1)^n 2^{n+1}$

ដ. $u_{n+4}-6u_{n+3}+6u_{n+2}+27u_{n+1}-56u_n=(-1)^{3n}$

ឋ. $u_{n+2}-4u_{n+1}+4u_n=2^n+2n^3$

ឌ. $u_{n+2}-2u_{n+1}+4u_n=\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)$

50. គេឲ្យ (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = \tan n.\tan(n-1), n=1,2,...$ តាង $S_n = u_1+u_2+...+u_n$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា មានចំនួនពិត α,β ដែល $S_n = u_1+u_2+...+u_n = \alpha\tan n+\beta n$ ។
51. គេឲ្យស៊ីត $(x_n)_{n\geq 0}$ និង $(y_n)_{n\geq 0}$ ដោយ $x_0 = 3, y_0 = 2, x_n = 3x_{n-1}+4y_{n-1}, y_n = 2x_{n-1}+3y_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ។ បង្ហាញថា ស៊ីត $(z_n)_{n\geq 0}$ ដែល $z_n = 1+4x_n^2y_n^2$ មិនផ្ទុកចំនួនបឋម ។ $(contain\ no\ prime\ numbers)$
52. គេឲ្យស៊ីត $\{x_n\}: x_1 = 1, x_{n+1} = 3x_n^3+2x_n^2+x_n$, ស៊ីត $y_n = \dfrac{1}{1+2x_n+3x_n^2}$ និងស៊ីត $z_n = \dfrac{2+3x_n}{1+2x_n+3x_n^2}$ តាង $\prod_{i=1}^{n} y_i = P, \sum_{i=1}^{n} z_i = Q$ ។ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P+Q=1$ ។
53. គេឲ្យ $f(n+1) = (-1)^{n+1}n-2f(n), n\geq 1$ និង $f(1) = f(2016)$ ។ គណនា $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2015)$
54. គេឲ្យ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $[1,+\infty)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ
    ក. $f(1) = a, a>0$
    ខ. $f(x+1) = 2015f^2(x)+f(x), x\geq 1$ ។គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(1)}{f(2)}+\dfrac{f(2)}{f(3)}+...+\dfrac{f(n)}{f(n+1)}\right]$
55. គេឲ្យ ស៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_0 = 0, x_n = kx_{n-1}+(-1)^n, n\geq 1, 0<k<1$ ។គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2$
56. គេឲ្យ ស៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1 = 5, x_{n+1} = x_n^2-2, n=1,2,...$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_1x_2...x_n}$
57. គេឲ្យ $a_1,a_2,...,a_n\geq 1$ និង $x_k,(0\leq k\leq n)$ កំណត់ដោយ $a_0 = 1, a_k = \dfrac{1}{1+a_kx_{k-1}}$ ចំពោះ $1\leq k\leq n$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x_1+x_2+...+x_n > \dfrac{n^2A}{A^2+n^2}, A = 1+a_1+a_2+...+a_n$
58. គេឲ្យស៊ីត $Fibonacci$ កំណត់ដោយ $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$ ចំពោះ $n\geq 3$ ។
    ក. បង្ហាញថា $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$ និង $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^n = (-1)^n\begin{pmatrix}F_{n-1} & -F_n\\ -F_n & F_{n+1}\end{pmatrix}$ ចំពោះ $n\geq 2$
    ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2 = (-1)^n, n\geq 2$ ។
59. គេឲ្យស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_0 = 2, u_1 = \dfrac{5}{2}$ និង $u_n = u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1$ ។ រកតួទី n នៃស៊ីត(u_n)
60. អង្កត់$[AB]$ មានរង្វាស់ស្មើ a ។តាង M_1 ជាចំណុចកណ្តាលនៃ$[AB]$, M_2 ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BM_1]$, M_3 ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[M_1M_2],...,M_n$ ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[M_{n-2}M_{n-1}]$ ។
    ក. គណនាប្រវែងនៃអង្កត់ $[AM_n]$ ជាអនុគមន៍នៃ n
    ខ. បង្ហាញថា កាលណា $n\to\infty, M_n$ ខិតទៅរកទីតាំងកំហិត L
61. ឧបមាថា ΔABC មានរង្វាស់ជ្រុង a,b,c ។តាង $P_i, i=\overline{1,n-1}$ ជាចំណុចដែលចែក BC ជា n ផ្នែកស្មើៗគ្នា និង P_n ត្រួតស៊ីគ្នាជាមួយC ។ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} AP_k^2\right)$ ជាអនុគមន៍នៃ a,b,c ។
62. គេឲ្យស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_0 = 1996$ និង $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{1+u_n}, n=1,2,3,...$ ។ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lfloor u_n\rfloor = 1994-n$ ចំពោះ $0\leq n\leq 999$ ។ $(\lfloor u_n\rfloor : integer\ part)$ ។
63. បើស៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_0 = 5, x_{n+1} = x_n+\dfrac{1}{x_n}$ ។ បង្ហាញថា $\forall n\geq 1, 2n < x_n^2-25 < \dfrac{47n}{23}$

ឯកសារពិគ្រោះ

1. សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១១ (កម្រិតមូលដ្ឋាន កម្រិតខ្ពស់) របស់ក្រសួងអប់រំយុវជន និង កីឡា បោះពុម្ពឆ្នាំ ២០០៩
2. សៀវភៅគណិតវិទ្យា ភាគទី(១ ១២) របស់វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ
3. សៀវភៅវិភាគចំនួនពិត ភាគ ១ របស់លោកគ្រូ សួន សុវ៉ាន់ បោះពុម្ពឆ្នាំ ២០០៧
4. កំរងវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាសម្រាប់សិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសរបស់លោកគ្រូ ប៊ុន រួ បោះពុម្ពឆ្នាំ ១៩៩៩
5. Mathematices A.Year 11. J.B.Fitzpatrick, G.L.Watson 1985
6. Mathematices A.Year 12. J.B.Fitzpatrick, P.L.Galbraith 1985