អ៊ឹម ឈុនហោ
សាស្ត្រាចារ្យវិទ្យាល័យហាសអន្តប្រីយ៍

អ៊ី គឹមឃឿន
សិស្សវិទ្យាល័យហាសអន្តប្រីយ៍

លំហាត់គណិតវិទ្យា

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡង ៖

- ☞ សិស្សពូកែថ្នាក់ទូទាំងសាលា
- ☞ សិស្សពូកែថ្នាក់ទូទាំងស្រុក
- ☞ សិស្សពូកែថ្នាក់ទូទាំងខេត្ត
- ☞ សិស្សពូកែថ្នាក់ទូទាំងប្រទេស
- ☞ ប្រឡងប្រជែងនានា

ភាគ ១

$$A=\sqrt{\frac{2}{1}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+\cdots+\sqrt[2015]{\frac{2015}{2014}}$$

$$B=\binom{2015}{2}+\binom{2015}{5}+\binom{2015}{8}+\cdots+\binom{2015}{2015}$$

ស្រាវជ្រាវ និង រៀបរៀង

លោក **អ៊ឹម ឈុនហោ** និង លោក **អ៊ី គឹមឃឿន**

គ្រូតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក **អយ ស៊ីណា** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិ.ហាសអង្គរបុរី

លោក **ធៀម សុវណ្ណ** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិ.ជសអង្គរជ័យ

លោក **ស៊ុក ស៊ីថា** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិ.កំពង់ស្ពឺ

លោក **គិត កញ្ញា** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិ.ពួក(សៀមរាប)

គ្រូតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

យុវសិស្ស **ស៊ុខ ណារីន** ជ័យលាភីសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស
ផ្នែកអក្សរសាស្ត្រខ្មែរ

យុវសិស្ស **ទ្រី គឹមលី** រៀននៅវិទ្យាល័យសុខអានក្តីទន្ទឹម

យុវសិស្ស **ឆុល ឌីម៉ង់** រៀននៅវិទ្យាល័យហ៊ុនសែនអង្គប្រីយ៍

យុវសិស្ស **ស៊ឹម វិច្ឆិកា** រៀននៅវិទ្យាល័យហ៊ុនសែនអង្គប្រីយ៍

យុវសិស្ស **ស៊ិន រិទ្ធី** រៀននៅវិទ្យាល័យហ៊ុនសែនអង្គប្រីយ៍

យុវសិស្ស **ទ្រី ហ្គិចហ្គួយ** រៀននៅវិទ្យាល័យអង្គព្រះស្តេច

វាយអត្ថបទ

លោក **អ៊ឹម ឈុនហោ**សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យាវិ.ហាសអង្គប្រីយ៍

យុវសិស្ស **អ៊ី គឹមឃឿន** រៀននៅវិទ្យាល័យហ៊ុនសែនអង្គប្រីយ៍

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **លំហាត់គណិតវិទ្យា** សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ យើងខ្ញុំបានស្រាវជ្រាវ និងរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារសម្រាប់ជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សា ជាពិសេសសម្រាប់សិស្សដែលមានបំណងចង់ប្រឡងសិស្សពូកែផ្នែកគណិតវិទ្យាកម្រិតមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ដើម្បីយកទៅរៀនស្រាវជ្រាវដោយខ្លួនឯង ។

សៀវភៅនេះផងដែរ យើងខ្ញុំបានដកស្រង់លំហាត់ចេញពីសៀវភៅអង់គ្លេសមួយចំនួនដែលធ្លាប់ចេញប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសថ្មីៗនេះ និងលំហាត់ខ្លះទៀតដកស្រង់ចេញពីសៀវភៅវៀតណាម ។

ទោះបីជាយើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀង ក៏ដូចជាអ្នកត្រួតពិនិត្យខិតខំពិនិត្យដោយយកចិត្តទុកដាក់យ៉ាងណា ក៏ដោយ កង្វះខាត និងកំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមានទាំងបច្ចេកទេស និងអក្ខរាវិរុទ្ធ ។

អាស្រ័យហេតុនេះយើងខ្ញុំរង់ចាំដោយរីករាយជានិច្ចនូវមតិរិះគន់ពីគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីស្ថាបនា និងកែលម្អសៀវភៅនេះឲ្យកាន់តែប្រសើរថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់ យើងខ្ញុំសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពល្អ និងសម្រេចបានដូចអ្វីដែលប៉ងប្រាថ្នាទៅថ្ងៃអនាគត ។

តាកែវ ថ្ងៃទី ១០ មករា ២០១៥

អ្នករៀបរៀង

អ៊ឹម ឈុនហោ និង អ៊ី គឹមឃឿន

សង្ខេបរូបមន្តសំខាន់ៗ

I.ភាពចែកដាច់:

1-ភាពចែកដាច់:

បើ $a\neq 0$, b និង c ជាចំនួនគត់ ដែល $b=ac$ នោះគេថា

a ចែកដាច់ b គេកំណត់សរសេរ $a|b$ ។

a ជាតួចែករបស់ b

b ជាពហុគុណនៃ a ។

2-ចំនួនបឋម:

ចំនួនបឋម m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានធំជាង 1 ដែលតួចែករបស់វាមានតែលេខ 1 និង m ។

បើចំនួនគត់ $n>1$ មិនមែនជាចំនួនបឋម យើងហៅថា **ចំនួនពហុធា**

យើងអាចសរសេរ n ជា $n=ab$ ដែល $1<a\leq b<n\,;\,a,b\in\mathbb{N}$ ។

3-ទ្រឹស្តីបទ:

ក-បើ $a\,,b\,,c$ ជាចំនួនគត់ដែល $c|a\,,\,c|b$ នោះ $c|(am+bn)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $m\,,n$ ។

ខ-បើ $a\,,b\,,c$ ជាចំនួនគត់ដែល $a|b\,,\,b|c$ នោះ $a|c$ ។

គ-បើ $a|b$ និង $b\neq 0$ នោះ $1\leq |a|\leq |b|$ ។

ឃ-បើ $a|b$ និង $b\neq 0$ នោះ $(b/a)|b$ ។

4-វិធីចែកបែបអឺគ្លីត:

ក-ទ្រឹស្តីបទ:

បើ a និង b ជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង b ខុសពីសូន្យ នោះគេមាន

ចំនួនគត់ $q\,,r$ មួយគត់ដែល $a=bq+r\;\;;\;0\leq r<b$ ។

5-ភាពសមមូល:

បើគេសរសេរ $a \equiv b \pmod m$ អានថា a សមមូល b តាម $(\text{mod}\,ulo)m$ ។ មានន័យថា m ចែកដាច់ $(a-b)$ ឬ $a = mq + b$ ដែល q ជាចំនួនគត់ ។ ឬមានន័យម៉្យាងទៀតថា a និង b មានសំណល់ដូចគ្នា ពេលចែកជាមួយ m ។

6-ទ្រឹស្តីបទ:

តាង $a , b , c , d , m \in \mathbb{Z} , k \in \mathbb{Z}^{+}$ គេបាន:

ក- $a \equiv a \pmod m$

ខ-បើ $a \equiv b \pmod m$ និង $b \equiv c \pmod m$ នោះ $a \equiv c \pmod m$

គ-បើ $a \equiv b \pmod m$ នោះគ្រប់ចំនួនគត់ k គេបាន: $ka \equiv kb \pmod m$

ឃ-បើ $a \equiv b \pmod m$ និង $c \equiv d \pmod m$ គេបាន:

i. $a + c \equiv b + d \pmod m$
ii. $a - c \equiv b - d \pmod m$
iii. $ac \equiv bd \pmod m$
iv. $a^k \equiv b^k \pmod m$

ង-បើ f ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់នោះគេបាន:
$f(a) \equiv f(b) \pmod m$

II.តួចែករួមធំបំផុត និង ពហុគុណរួមតូចបំផុត:

1-តួចែករួមធំបំផុត

ក-និយមន័យ

បើ $a , b \in \mathbb{Z}$ មិនសូន្យទាំងពីរព្រមគ្នា នោះចំនួនគត់ធំបំផុតដែលចែក a , b ដាច់ទាំងពីរ ហៅថា **តួចែករួមធំបំផុត** របស់ a និង b ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $PGCD(a , b)$ ឬ $GCD(a , b)$ ឬ (a, b) ។

2-ពហុគុណរួមតូចបំផុត:

ក-និយមន័យ

បើ $a , b \in \mathbb{Z}$ មិនសូន្យទាំងពីរព្រមគ្នា នោះចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតដែលជាពហុគុណនៃ a ផង និង b ផង ហៅថា **ពហុគុណរួមតូចបំផុត** នៃ a និង b គេតាងដោយ $PPCM(a , b)$ ឬ $LCM(a , b)$ ឬ $[a , b]$ ។

ខ-លក្ខណ:

បើ $a|c$ និង $b|c$ នោះ $PPCM(a , b)|c$ ។

3-ទ្រឹស្តីបទ $Bachet - Bézout$:

តួចែករួមធំបំផុតរបស់គ្រប់ចំនួនគត់ពីរ a , b អាចសរសេរជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ a និង b បានជានិច្ច គេបាន: $PGCD(a , b) = ax + by$ x , y ជាពីរចំនួនគត់ ។

4-កូរ៉ូលែអឺគ្លីត

បើ a ចែកដាច់ bc ហើយ $PGCD(a , b) = 1$ នោះ a ចែកដាច់ c ។

5-ទ្រឹស្តីបទ

-បើ $PGCD(a , b) = d$ នោះ $PGDD(a/d , b/d) = 1$ ។

-បើ c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះ $PGCD(ca , cb) = c.PGCD(a , b)$

-បើ a , b , c ជាចំនួនគត់មិនសូន្យនោះគេមាន:
$PGCD(a ,bc) = PGCD(a , c.PGCD(a , b))$

-បើ a , b , c ជាចំនួនគត់មិនសូន្យនោះគេមាន:
$PGCD(a^2 , b^2) = [PGCD(a , b)]^2$

6-ប្រមាណវិធីចែកបែបអឺគ្លីត(អាល់កូរីតអឺគ្លីត)

បើ a , b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន គេធ្វើប្រមាណវិធីចែកបន្តបន្ទាប់គ្នាយើងទាញបានដូចតទៅ:

$a = bq_1 + r_1 \ ; \ 0 \le r_1 < b$

$b = r_1 q_2 + r_2 \ ; \ 0 \le r_2 < r_1$

$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \ ; \ 0 \le r_3 < r_2$

$\vdots$

$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n \ ; \ 0 \le r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = r_n q_n$

គេបាន:

$PGCD(a , b) = PGCD(b , r_1) = PGCD(r_1, r_2) = ...PGCD(r_{n-1} , r_n)$

បើ $r_{n-1} = 0$ គេបាន: $PGCD(a , b) = r_n$

7-ទ្រឹស្តីបទ

បើ a , b , n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះគេបាន:

$PGCD(a , b) = PGCD(a + nb , b)$

III.ផ្នែកគត់ និង ផ្នែកទសភាគ:

1-និយមន័យ

ផ្នែកគត់នៃ x តាងដោយ $\lfloor x \rfloor$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុត ដែលតូចជាង ឬស្មើនឹង x ។

ឧទាហរណ៍: $\lfloor 7.89 \rfloor = 7$ ។

ផ្នែកទសភាគនៃ x តាងដោយ $\{x\}$

ឧទាហរណ៍: $\{7.89\} = 0.89$

គេបាន: $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$

2-ទ្រឹស្តីបទ

ក- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$

ខ-បើ $n\in\mathbb{Z}$, $\lfloor n+x\rfloor = n+\lfloor x\rfloor$

គ-$\lfloor -x\rfloor = \begin{cases} -\lfloor x\rfloor - 1 & ; \ x\notin\mathbb{Z} \\ -\lfloor x\rfloor & ; \ x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

ឃ-$\lfloor x_1+x_2+....+x_n\rfloor \geq \lfloor x_1\rfloor + \lfloor x_2\rfloor + ... + \lfloor x_n\rfloor$ ដែល $x_1 , x_2 ,..., x_n \in\mathbb{R}$

ង-$\lfloor x_1.x_2....x_n\rfloor \geq \lfloor x_1\rfloor . \lfloor x_2\rfloor .....\lfloor x_n\rfloor$ ដែល $x_1 , x_2 ,..., x_n \in\mathbb{R}$

ច-$\left\lfloor \dfrac{x}{n}\right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{\lfloor x\rfloor}{n}\right\rfloor$ ចំពោះ $n\in\mathbb{N} ; x\in\mathbb{R}$ ។

IV.<u>បន្សំ</u>

1-និយមន័យ

បន្សំ k ធាតុយកពី n ធាតុគឺជាការយកព្រមគ្នាម្តង k ធាតុចេញពី n ធាតុខុសៗគ្នា ដោយមិនគិតលំដាប់នៃការយកចេញ ។

$(n\in\mathbb{N} , k\in\mathbb{N} , k\leq n)$ គេកំណត់សរសេរ $C(n , k)$ ឬ C_n^k ឬ $\begin{pmatrix} n \\ k\end{pmatrix}$

ដែល $C(n , k) = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ ។

2-ទ្វេធាញ្ញូតុន

ក-$(a+b)^n = C_n^0.a^n + C_n^1.a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-3}.b^2 + ... + C_n^n b^n$

$$= C_n^0.b^n + C_n^1.b^{n-1}a + C_n^2 b^{n-2}a^2 + ... + C_n^n a^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k.a^k.b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.b^k.a^{n-k}$$

ខ-$(a-b)^n = C_n^0.a^n - C_n^1.a^{n-1}b + C_n^2.a^{n-2}.b^2 - .... + (-1)^n.C_n^n.b^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k.C_n^k.a^k.b^{n-k}$$

3-លក្ខណៈបន្សំ

ក-$C_n^k = C_n^{n-k}$

ខ-$C_{n+1}^{k+1}=\dfrac{n+1}{k+1}C_n^k$

គ-$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$

V.ប្រព័ន្ធគោល និង លក្ខណៈចែកដាច់មួយចំនួន

$n=\overline{a_k a_{k-1}.........a_{0(b)}}=a_k.b^k+a_{k-1}.b^{k-1}+.....+a_1 b+a_0$

$n=\overline{a_k a_{k-1}.........a_0}=a_k.10^k+a_{k-1}.10^{k-1}+.....+10a_1+a_0$

$n\,\vdots\,2\,,4\,,8$ លុះត្រាតែ $a_0\,\vdots\,2\,,\ a_1a_0\,\vdots\,4\,,\ a_2a_1a_0\,\vdots\,8$ រៀងគ្នា

$n\,\vdots\,3\,,9$ លុះត្រាតែ $\sum_{i=1}^{k}a_i\,\vdots\,3\,,9$ រៀងគ្នា

$n\,\vdots\,7\,,11\,,13$ លុះត្រាតែ $\overline{a_k a_{k-1}.......a_3}-\overline{a_2a_1a_0}\,\vdots\,7\,,11\,,13$ រៀងគ្នា

$n\,\vdots\,11$ លុះត្រាតែ $a_0-a_1+.......+(-1)^k.a_k\,\vdots\,11$ ។

VI.ទ្រឹស្តីបទសំណល់

1-$(a+b)^n\equiv b^n\pmod a\quad;\quad a,b\in\mathbb{Z}$

2-$(a+b)^n=na.b^{n-1}+b^n\pmod{a^2}$

3-$(a+b)^a\equiv b^a\pmod{a^2}$

VII.ទ្រឹស្តីបទ Fermat

គ្រប់ $a\in\mathbb{Z}\,,m$ ជាចំនួនបឋមនោះ $a^m\equiv a\pmod m$

បើ $a\in\mathbb{Z}$ ហើយ $(a\,,m)=1$ នោះ $a^{m-1}\equiv 1\pmod m$

VIII.វិសមភាព

1-លក្ខណៈរបស់វិសមភាពមួយចំនួន

បើ $a\,,b\,,c\,,d\in\mathbb{R}$ គេបាន:

$\dfrac{a}{b}<1\Rightarrow\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+c}$

$\dfrac{a}{b}>1\Rightarrow\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+c}{b+c}$

$$\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}$$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c} > \frac{c}{d}$$

2-វិសមភាពតម្លៃដាច់ខាត

ក-$|a+b| \le |a| + |b|$ សមភាពកើតមាននៅពេល $ab \ge 0$

ខ-$||a| - |b|| \le |a-b|$

គ-$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \le |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$ សមភាពកើតមានពេល $a_{ij} \ge 0$

3-វិសមភាព Cauchy(AM-GM)

ក-បើ $a_1 , a_2 ,......., a_n \ge 0$ គេបាន: $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2......a_2}$

សមភាពកើតមាននៅពេល $a_1 = a_2 = ... = a_n$ ។

4-វិសមភាព Cauchy-Schwarz

គេឲ្យ $a_1 , a_2 , ..., a_n$ និង $b_1 , b_2 ,....., b_n$ ជាចំនួនពិតណាក៏បាន នោះ យើងបាន:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \ge (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$$

សមភាពកើតមាននៅពេល $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

5-វិសមភាព Bernoulli

គេឲ្យ $a > -1$ និង $n \in \mathbb{Q}^+$

បើ $n \ge 1$ នោះ $(1+a)^n \ge 1 + na$ សមភាពកើតមានពេល $a = 0$ ឬ $n = 1$

បើ $0 < n < 1$ នោះ $(1+a)^n < 1 + na$

6-វិសមភាព Jensen

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ (a , b) និង អនុគមន៍ $f(x)$ប៉ោង លើ (a , b) នោះយើងមាន $x_1 , x_2 \in (a , b)$ យើងបាន:

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ សមភាពកើតមានពេល $x_1 = x_2$

បើ $f(x)$ ផតលើ (a , b) និង $x_1 , x_2 \in (a , b)$ នោះយើងបាន:

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \ge f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

ឧបមាថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ (a , b)

និង $\forall x_1 , x_2 ,....,x_n \in (a , b) ; \forall n \ge 2$ យើងបាន:

$\frac{f(x_1)+f(x_2)+....+f(x_n)}{n} \le f\left(\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n}\right)$

ឧបមាថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍ផតលើ (a , b) និង

$\forall x_1 , x_2 ,....,x_n \in (a , b) ; \forall n \ge 2$ យើងបាន:

$\frac{f(x_1)+f(x_2)+....+f(x_n)}{n} \ge f\left(\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n}\right)$

វិសមភាពទាំងពីរខាងលើក្លាយជាសមភាពនៅពេល $x_1 = x_2 = ... = x_n$

7-វិសមភាព Chebyschev

បើ $a_1 < a_2 < ..... < a_n$ និង $b_1 < b_2 < ...... < b_n$ នោះយើងបាន:

$\frac{a_1+a_2+.....+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+....+b_n}{n} \le \frac{a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n}{n}$

បើ $a_1 > a_2 > .... > a_n$ និង $b_1 > b_2 > ..... > b_n$ នោះយើងបាន:

$\frac{a_1+a_2+.....+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+....+b_n}{n} \ge \frac{a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n}{n}$

សមភាពកើតមាននៅពេល $a_1 = a_2 = ... = a_n ; b_1 = b_2 = ...b_n$

8-វិសមភាព Minkowski

$(a_1 , a_2 ,....,a_n);(b_1,b_2,....,b_n)$ និង $(c_1 , c_2 ,...., c_n)$ ជាចំនួនពិត នោះគេ

បាន: $\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}+....+\sqrt{a_n^2+b_n^2+c_n^2}$

$\ge \sqrt{(a_1+b_1+c_1)^2+(a_2+b_2+c_2)^2+....+(a_n+b_n+c_n)^2}$

ផ្នែកប្រធានលំហាត់

លំហាត់ទី១

គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) មួយកំណត់ដោយ $a_0=0, a_1=1, a_2=2, a_3=6$

$a_{n+4}=2a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា a_n ចែកដាច់នឹង n ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។

លំហាត់ទី២

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2009^{3^{2016n+2013}}+2010^{2^{2016n+2013}}$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

លំហាត់ទី៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយដែលមាន A , B , C ជាមុំក្នុងត្រីកោណ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ $P=\sqrt{\dfrac{\tan^8 A+\tan^8 B+\tan^8 C}{\tan A.\tan B.\tan C}}$

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន S ជាក្រឡាផ្ទៃ h_A , h_B , h_C ជាកម្ពស់ និង m_A , m_B , m_C ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណនោះ ។

បង្ហាញថា: $h_A.{m_B}^4+h_B.{m_C}^4+h_C.{m_A}^4\geq 9\sqrt[4]{3}.S^2.\sqrt{S}$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឲ្យស្វ៊ីត(x_k) ដែល $x_k=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+..........+\dfrac{k}{(k+1)!}$ ចំពោះ $k\in\mathbb{N}^*$ រកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+...........+x_{2015}^n}$ ។

លំហាត់ទី៦

រកបីលេខខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ $M=1993^{1994^{1995^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10000}}}}}}$

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យ $f(x,y,z)=2x^2+2y^2-2z^2+\dfrac{7}{xy}+\dfrac{1}{z}$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃ: $M = f(a,b,c) = f(c,a,b) = f(b,c,a)$ គ្រប់ a,b,c ជាបីចំនួនពិតផ្សេងគ្នាខុសពីសូន្យ ។

លំហាត់ទី៨

រកគ្រប់អនុគមន៍ f កំណត់លើ$\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ:

$$\begin{cases} f(0) = 2014 \quad , \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2015 \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).\cos y \ ; \ \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

លំហាត់ទី៩

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x, y, z ដែល $xyz = 1$ គេបាន:

$$\frac{x^{\sqrt{2015}}}{y+z} + \frac{y^{\sqrt{2015}}}{z+y} + \frac{z^{\sqrt{2015}}}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

លំហាត់ទី១០

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$f(xy).f(yz).f(zx).f(x+y).f(y+z).f(z+x) = 2015$$

ចំពោះ $\forall x, y, z$ វិជ្ជមាន ។

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យអនុគមន៍ $f : (0\ ,+\infty) \to \mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$f(\tan 2x) = \tan^4 x + \frac{1}{\tan^4 x} \quad ; \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

បង្ហាញថា $f(\sin x) + f(\cos x) \geq 196$

លំហាត់ទី១២

ឧបមាថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលមានដេរីវេ ហើយ $f(0) = 0$

និង $f(2014) = 2014$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_0^{2014} \left((f(x))^{2014} + (f'(x))^2 \right) dx \geq \dfrac{2014^{1008}}{508}$

លំហាត់ទី១៣

រកគ្រប់អនុគមន៍ជាប់ និងមានដេរីវេ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

$f^2(x)=2015+\int\left[f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2\right]dx$

លំហាត់ទី១៤

កំនត់អនុគមន៍ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ដែល $f\left(C_n^m\right)=C_{f(n)}^{f(m)}$ គ្រប់ m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\ge1}$ និង $(v_n)_{n\ge1}$ កំណត់ដោយ $u_1=3, v_1=2$

និង $u_{n+1}=3u_n+4v_n$, $v_{n+1}=2u_n+3v_n$; $n\ge1$

គេកំណត់យក $x_n=u_n+v_n$, $y_n=u_n+2v_n$ ។

បង្ហាញថា $y_n=\left\lfloor x_n\sqrt{2}\right\rfloor$ ចំពោះ $n\ge1$ ។ ($\lfloor a\rfloor$ ជាផ្នែកគត់នៃ a) ។

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យស្វ៊ីត $(x_n)_{n\ge0}$ និង $(y_n)_{n\ge0}$ កំណត់ដោយ $x_0=3$, $y_0=2$

$x_n=3x_{n-1}+4y_{n-1}$ និង $y_n=2x_{n-1}+3y_{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(z_n)_{n\ge0}$ ដែល $z_n=1+4x_n^2.y_n^2$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (x_n) និង (y_n) កំណត់ដោយ $x_1=0$

$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+y_n)$, $y_1=1$ និង $y_{n+1}=\dfrac{1}{4}(x_n+3y_n)$ ។

ក-គណនាតួទី 2 ទី 3 ទី 4 នៃស្វ៊ីតនីមួយៗ ។

ខ-គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n)$ ។

សិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសឆ្នាំ២០១៤

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_0=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $u_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\forall n\in\mathbb{N}:\ u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ ។

ក-$\forall n\in\mathbb{N}^*$ គេយក $v_n=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}u_n+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}u_{n-1}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលត្រូវបញ្ជាក់តួទី 1 និងរេសុង q រួចសរសេរ v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n^2+u_{n+1}^2=u_n.u_{n+2}+u_{n-1}.u_{n+1}$, $\forall n\geq 1$ ។

រួចទាញថា: $u_n^2-u_{n-1}.u_{n+1}=0$ ។

សិស្សពូកែទូទាំងខេត្តបាត់ដំបងឆ្នាំ២០១៤

លំហាត់ទី១៩

ស្វ៊ីត $u_1, u_2, ...$ កំណត់ដោយ: $u_1=\dfrac{1}{2}$; $u_{n+1}=u_n^2+u_n$; $n=1,2,.....$

រកផ្នែកគត់នៃចំនួន $A=\dfrac{1}{u_1+1}+\dfrac{1}{u_2+1}+...........+\dfrac{1}{u_{2015}+1}$ ។

សិស្សពូកែទូទាំងខេត្តកំពតឆ្នាំ២០១៤

លំហាត់ទី២០

រកសំណល់ពេល $\left(n^2+n+41\right)^2$ ចែកនឹង 12 ។

លំហាត់ទី២១

ស្រាយថាបើ x,y,z ជាចំនួនពិតមិនសូន្យដែល $x+y+z=0$

នោះគេបាន: $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}+\dfrac{y^2+z^2}{y+z}+\dfrac{z^2+x^2}{z+x}=\dfrac{x^3}{yz}+\dfrac{y^3}{xz}+\dfrac{z^3}{xy}$ ។

លំហាត់ទី២២

គណនាតម្លៃ $A=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k(n-k)!+(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}$

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យ p និង q ជាចំនួនបឋមពីរ។ដោះស្រាយសមីការ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

លំហាត់ទី២៤

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ស្រាយថា $\left\lfloor \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2} \right\rfloor - 1$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ ។

លំហាត់ទី២៥

ស្រាយថាសមីការ $x^2+y^2+z^2=2016^{2015}+2014$ គ្មានឫសក្នុងសំណុំចំនួនគត់ x,y,z ទេ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យ $a_1=4$, $a_n=4^{a_{n-1}}$, $n>1$ ។ ចូររកសំណល់ពេល a_{2015} ចែកនឹង 7

លំហាត់ទី២៧

រកសំណល់ $3^{2^n}-1$ ពេលចែកនឹង 2^{n+3} ។

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យពហុធា $1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17}$ ដែល $y=x+1$ និង a_i ជាចំនួនថេរ រក a_2 ។

លំហាត់ទី២៩

គណនា $A=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{(n-k)!(n+k)!}\right)$

លំហាត់ទី៣០

រកបណ្តាឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x, y) របស់សមីការ $15^x + 4^x + \lfloor A \rfloor^x = y^{2014}$ ក្នុងនោះនិម្មិត $\lfloor A \rfloor$ សញ្ញាសម្គាល់ឲ្យផ្នែកគត់របស់ចំនួនពិត A ដែល: $A = \sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \cdots + \sqrt[2015]{\frac{2015}{2014}}$ ។

លំហាត់ទី៣១

ចូរកំណត់មេគុណរបស់ x^2 ពេលពន្លាត

$(1+x)(1+2x)(1+4x)\cdots(1+2^n x)$

លំហាត់ទី៣២

កំណត់ប្រភេទត្រីកោណ ABC ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

$$\sqrt{2}\sin(\mathrm{B}+45^\circ) = \frac{a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)}{2abc} \quad (1)$$

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម $\frac{x^3}{1-x^8} + \frac{y^3}{1-y^8} + \frac{z^3}{1-z^8}$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេឲ្យ u, v និង w ជាឫសនៃពហុធា $P(x) = x^3 - 10x + 11$ ។

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $A = \arctan u + \arctan v + \arctan w$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $A = \lim\limits_{x\to 2015}\left(\frac{x}{x-2015}\int_{2015}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\right)$

លំហាត់ទី៣៦

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $A = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

គណនា $A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$

លំហាត់ទី៣៨

បង្ហាញថាកន្សោម $A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ មានតម្លៃក្នុង $[m,M]$

ដែល $m=\min\left\{\frac{a_1}{b_1};\frac{a_2}{b_2};\ldots;\frac{a_n}{b_n}\right\}$ និង $M=\max\left\{\frac{a_1}{b_1};\frac{a_2}{b_2};\ldots;\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេឲ្យស្វីត (a_n) មួយកំណត់ដោយ $a_1=1, a_n=\left\lfloor\frac{n^3}{a_{n-1}}\right\rfloor,\ n>1$ ។

គណនា a_{2015}

លំហាត់ទី៤០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ស្រាយថាចំពោះ $n\geq m+1, m\geq 0$

គេបាន: $P=\frac{\tan^n A}{\sin^m\frac{A}{2}}+\frac{\tan^n B}{\sin^m\frac{B}{2}}+\frac{\tan^n C}{\sin^m\frac{C}{2}}\geq 2^m.3^{\frac{n+2}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$; $x,y,z>0$

គេបាន: $x\tan^n A+y\tan^n B+z\tan^n C\geq\frac{9.3^{\frac{n}{2}}.xyz}{xy+yz+zx}$ ។

លំហាត់ទី៤២

ស្វីត $x_{0,}x_1,x_2\ldots$ និង $y_0,y_1,y_2\ldots$ កំណត់ដោយ:

$x_0=y_0=1$, $x_{n+1}=\frac{x_n+2}{x_n+1}$, $y_{n+1}=\frac{y_n^2+2}{2y_n}$ ចំពោះ $n=0,1,2\ldots$ ។

ស្រាយថា $y_n=x_{2^n-1}$ ។

លំហាត់ទី៤៣

រកចំនួនវិជ្ជមាន x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$x+\left[\frac{x}{3}\right]=\left[\frac{2x}{3}\right]+\left[\frac{3x}{5}\right]$ ដែល $[x]$ ជាផ្នែកគត់នៃ x ។

លំហាត់ទី៤៤

បង្ហាញថាចំនួន $A=2^{2^{2016}}+2^{2^{2015}}+1$ ចែកដាច់នឹង 21 ។

លំហាត់ទី៤៥

ក-ចំពោះ $x>0$ គណនា $A=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$ ។

ខ-ចំពោះ $x<1$ គណនា $B=\arctan\frac{1+x}{1-x}-\arctan x$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឲ្យ k ជាចំនួនគត់មួយ និងយក

$n=\sqrt[3]{k+\sqrt{k^2-1}}+\sqrt[3]{k-\sqrt{k^2-1}}+1$ ស្រាយថា n^3-3n^2 ជាចំនួនគត់មួយ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ស្រាយថា

$a.\ \ r_a+r_b+r_c=4R+r$

$b.\ \ r_a+r_b+r=4\cos C+r_c$

លំហាត់ទី៤៨

បើ $x+y+z=0$ ស្រាយថា $\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=\frac{x^7+y^7+z^7}{7}$

លំហាត់ទី៤៩

គេឲ្យ $a_n=(n^2+1)n!$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ បើ

$\frac{a_{100}}{a_1+a_2+\cdots+a_{100}}=\frac{p}{q}$ ដែល $\gcd(p,q)=1$ ។ គណនាផលបូក $p+q$

លំហាត់ទី៥០

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $A=\binom{2015}{2}+\binom{2015}{5}+\binom{2015}{8}+\cdots+\binom{2015}{2015}$

លំហាត់ទី៥១

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n>2:\ n^n(n-2)^{n-2}>(n-1)^{2(n-1)}$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេឲ្យ a,b,c,d ជាចំនួនគត់ ។

ស្រាយថា $2\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)-\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2+8abcd$

ចែកដាច់នឹង $a+b+c+d$ ។

លំហាត់ទី៥៣

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}2x^3+3x^2-18=y^3+y\ (1)\\ 2y^3+3y^2-18=z^3+z\ \ (2)\\ 2z^3+3z^2-18=x^3+x\ \ (3)\end{cases}$ ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ស្រាយថា:

$m_a^2+m_b^2+m_c^2=3R^2\left(2+2\cos A\cos B\cos C\right)$ ។

លំហាត់ទី៥៥

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC គេបាន:

$\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos \mathrm{B}}{b^3}+\frac{\cos \mathrm{C}}{c^3}\geq\frac{81}{16p^2}$ ។

លំហាត់ទី៥៦

គេឲ្យ α និង β ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមានដែល $\alpha^2+4\beta$ មិនមែនជាការេប្រាកដ។ ស្វ៊ីត $(x_n)_{n\geq 0}$ កំណត់ដោយ $x_{n+2}=\alpha x_{n+1}+\beta x_n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 0$ ។ ដោយដឹងថា x_1 និង x_2 ជាចំនួនគត់។ស្រាយថាគ្មានចំនួនគត់ n_0 ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_{n_0}^2=x_{n_0-1}\cdot x_{n_0+1}$ ។

លំហាត់ទី៥៧

គេឲ្យ a , b , c , d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $abcd \geq 3$ ។

លំហាត់ទី៥៨

គេឲ្យ α , β , γ ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណមួយដែល $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ $T=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ ។

លំហាត់ទី៥៩

បន្សំនៃ n ធាតុយកម្តង i ធាតុតាងដោយ $\mathrm{C}(n;i)$ ។ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាបង្ហាញថា: $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\mathrm{C}(n;i)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$ ។

លំហាត់ទី៦០

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k នោះមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n_k ដែល $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^k=\sqrt{n_k}-\sqrt{n_{k-1}}$ ។

លំហាត់ទី៦១

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុងសំណុំចំនួនពិត $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3=18 \\ x^7+y^7+z^7=2058 \end{cases}$

លំហាត់ទី៦២

ត្រីកោណ ABC មួយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$\tan^6\frac{A}{2}+\tan^6\frac{B}{2}+\tan^6\frac{C}{2}=\frac{1}{9}$ ស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

លំហាត់ទី៦៣

ស្រាយថា:

$$\sin 2^\circ \sin 18^\circ \sin 22^\circ \sin 38^\circ \sin 42^\circ \sin 58^\circ \sin 62^\circ \sin 78^\circ \sin 82^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{1024}$$

លំហាត់ទី៦៤

ស្រាយថា: $\frac{C_n^0}{C_{n+2}^1} + \frac{C_n^1}{C_{n+3}^2} + \frac{C_n^2}{C_{n+4}^3} + \cdots + \frac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}} + \cdots + \frac{C_n^n}{C_{2n+2}^{n+1}} = \frac{1}{2}$

លំហាត់ទី៦៥

ប្រៀបធៀប 2016! និង $2^{2016}(1008!)^2$ ។

លំហាត់ទី៦៦

រកចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែល $2013^n + 2014^n + 2015^n + 2016^n + 2017^n$ ចែកដាច់នឹង 5 ។

លំហាត់ទី៦៧

អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ មួយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $f\left(f\left(f(0)\right)\right)=0$ និង $|f(a)-f(b)|\le|a-b|$ ចំពោះគ្រប់ $a,b\in\mathbb{R}$ ។ ស្រាយថា $f(0)=0$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឲ្យស្វ៊ីត $(a_n)_{n=0,1\ldots}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់:

$a_0=1, a_{2016}=0, a_{n+1}=2a_1a_n-a_{n-1}\left(n\ge1\right)$ ។

គណនាផលបូក $a_{2015}+a_{2017}$

លំហាត់ទី៦៩

ដោះស្រាយសមីការ:

$arc\cot\left(\frac{x-3}{x^2-9}\right)+arc\cot\left(\frac{x-2}{x^2-4x+4}\right)=\arctan\left(\frac{3}{4}\right)$ ក្នុងសំណុំ $\mathbb{R}$ ។

លំហាត់ទី៧០

ស្រាយថា $16<\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<17$

លំហាត់ទី៧១

កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម:

$A=\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)$ ដែល

$x_1,x_2,\ldots x_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតកំណត់ក្នុង $\left(\frac{1}{4},1\right)$ ។

លំហាត់ទី៧២

ស្រាយថា $3^{4^5}+4^{5^6}$ អាចសរសេរជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់ដែលចំនួននីមួយៗធំជាង 10^{2015} ។

លំហាត់ទី៧៣

គេឲ្យ x មិនមែនជាចំនួនគត់ហើយ $x>1$ ស្រាយថា:

$$\left(\frac{x+\{x\}}{\lfloor x\rfloor}-\frac{\lfloor x\rfloor}{x+\{x\}}\right)+\left(\frac{x+\lfloor x\rfloor}{\{x\}}-\frac{\{x\}}{x+\lfloor x\rfloor}\right)>\frac{9}{2}$$ ។

ដែល $\lfloor x\rfloor$ ជាផ្នែកគត់នៃ x ហើយ $\{x\}$ ជាផ្នែកទសភាគនៃ x ។

លំហាត់ទី៧៤

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ x,y,z ដែល a,r,s,t ជាចំនួនថេរ:

$$\begin{cases} yz=a(y+z)+r \\ zx=a(z+x)+s \\ xy=a(x+y)+t \end{cases}$$ ។

លំហាត់ទី៧៥

គេឲ្យ: $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=4 \\ x^3+y^3+z^3=4 \end{cases}$ ។ គណនា $E=x^n+y^n+z^n\ ,n\in\mathbb{Z}$

លំហាត់ទី៧៦

គេឲ្យ z_1,z_2,z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា:

$(1):\ z_1 z_2 z_3 = 1$

$(2):\ z_1 + z_2 + z_3 = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3}$

ស្រាយថាយ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម z_1, z_2, z_3 ស្មើ 1

លំហាត់ទី៧៧

កំណត់គ្រប់តម្លៃ θ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា: $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ និង

$\sin^5\theta + \cos^5\theta = 1$ ។

លំហាត់ទី៧៨

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x) = \int_0^x \dfrac{2t-1}{t^2 - 2t + 2}\,dt$

ក្នុងចន្លោះ $[-1,1]$ ។

លំហាត់ទី៧៩

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y ស្រាយថា:

$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \ge \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor$ ។

លំហាត់ទី៨០

គេឲ្យ:

$\alpha_n = 1 + \rho\cos\theta + \rho^2\cos 2\theta + \cdots + \rho^n \cos n\theta$

$\beta_n = \rho\sin\theta + \rho^2\sin 2\theta + \cdots + \rho^n \sin n\theta$

ក. បង្កើតចំនួនកុំផ្លិច $A = \alpha_n + i\beta_n$

ខ.សិក្សា α_n និង β_n កាលណា $\rho < 1$ និង $n \to +\infty$

សិស្សពូកែទូទាំងស្រុកសំរោងខេត្តតាកែវ ឆ្នាំ ២០១៤

លំហាត់ទី៨១

គណនា: $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}\right)$ ។

លំហាត់ទី៨២

កំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ x^2y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា:

$x+y+\sqrt{2x^2+2xy+3y^2}=k$ ថេរ ចំពោះគ្រប់ $x\,,y\ge 0$ ។

លំហាត់ទី៨៣

គេឲ្យ $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2015$ ។

គណនា $(x+2015y)(y+2015x)$

លំហាត់ទី៨៤

ចូរកំណត់រកពហុធា $P(x)$ ជាមួយមេគុណជាចំនួនគត់ហើយ

ផ្ទៀងផ្ទាត់: $16P(x)=\left[P(2x)\right]^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ។

លំហាត់ទី៨៥

ស្រាយថាប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases} x^6+x^3+x^3y+y=147^{157} \\ x^3+x^3y+y^2+y+z^9=157^{147} \end{cases}$$

គ្មានចម្លើយចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x,y និង z ។

លំហាត់ទី៨៦

គេឲ្យ s និង t ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា:

$7^s\,\|\,400!$ និង $3^t\,\|\,((3!)!)!$ គណនា $s+t$ ។

លំហាត់ទី៨៧

ចំនួនលេខសូន្យចុងបញ្ចប់នៃ $2015!$ គឺ m ។ គណនា m

លំហាត់ទី៨៨

គណនាផលបូក: $A_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}$

លំហាត់ទី៨៩

គណនាផលបូក: $B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \binom{n}{k}$ ។

លំហាត់ទី៩០

កំណត់អនុគមន៍: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$\begin{cases} f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \ ; \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

លំហាត់ទី៩១

គេឲ្យ a,b,c,d ជាចំនួនពិត។ ស្រាយថា:

$\min\left(a-b^2, b-c^2, c-d^2, d-a^2\right) \le \frac{1}{4}$ ។

លំហាត់ទី៩២

គេឲ្យ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់និងមានដេរីវេដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា: $\int_0^1 \left[f'(x) \right]^2 dx = 1$ ។ ស្រាយថា: $|f(1) - f(0)| < 1$ ។

លំហាត់ទី៩៣

រកពហុធាដែលមានឫសជាគូបនៃឫសរបស់ពហុធា $t^3 + at^2 + bt + c$

(ដែលជាចំនួនថេរ) ។

លំហាត់ទី៩៤

បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចំនួន x_i, $(i = 1,2,3\ldots)$ និង

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ គេបាន: $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$ ។

លំហាត់ទី៩៥

គេឲ្យ $f(x) = 4^x + 6^x + 9^x$ ស្រាយថាបើ m,n ជាចំនួនគត់

នោះ $f(2^m)$ ជាកត្តានៃ $f(2^n)$ គ្រប់ $m \le n$ ។

លំហាត់ទី៩៦

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា: $3^{2^{x!}} = 2^{3^{x!}} + 1$ ។

លំហាត់ទី៩៧

គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ac=1$

ស្រាយថា: $\arctan\frac{1}{a}+\arctan\frac{1}{b}+\arctan\frac{1}{c}=\pi$ ។

លំហាត់ទី៩៨

ចូរកំណត់ត្រីធាតុអសនិទាន (a,b,c) ដែល:

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$

សិស្សពូកែទូទាំងខេត្តតាកែវ ឆ្នាំ ២០១២

លំហាត់ទី៩៩

បង្ហាញថា: $\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\ge\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-1\right)$ ។

លំហាត់ទី១០០

គេឲ្យ $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n n^2}{n!}=e^x$ ស្រាយថា: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=(x^2+x)e^x$

រួចគណនា $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}$ ។

លំហាត់ទី១០១

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ស្រាយថា:

$\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\ge 3^{1-\sqrt{2}}$ ។

លំហាត់ទី១០២

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ។ ស្រាយថា:

$(2R+a)(2R+b)(2R+c)<8R^3e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ ។

លំហាត់ទី១០៣

គេឲ្យ $\begin{cases} x,\ y,z>0 \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$ ។ ស្រាយថា:

$$x.\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+y.\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{1+y^2}}+z.\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}=2$$ ។

លំហាត់ទី១០៤

គេឲ្យ ABC ត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយថា:

$$(\sin\mathrm{A})^{\sin B}+(\sin B)^{\sin C}+(\sin C)^{\sin A}>1{,}19$$ ។

លំហាត់ទី១០៥

ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន:

$$(1+x!)(1+y!)=(x+y)!$$ ។

លំហាត់ទី១០៦

រក(បើមាន) ចំនួនគត់ n ធម្មជាតិតូចបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin n^0}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos n^0}=4\sqrt{2}$$ ។

លំហាត់ទី១០៧

កំណត់ចំនួនថេរ a,b,c ដែល:

$$\sqrt{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[3]{\sqrt{ak^3+bk^2+ck+1}-\sqrt{ak^3+bk^2+ck}}$$ ។

លំហាត់ទី១០៨

គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{4} \\ x_n=\dfrac{x_1+4x_2+9x_3++(n-1)^2x_{n-1}}{n^2(n-1)} \end{cases}$$

គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(12n^2-31n+2015\right)x_n$ ។

លំហាត់ទី១០៩

ស្រាយថា: $\left(\dfrac{\sin a+\cot a}{1+\sin a\tan a}\right)^n=\dfrac{\sin^n a+\cot^n a}{1+\sin^n a\tan^n a}\ ;n\in\mathbb{N}$ ។

លំហាត់ទី១១០

គណនាផលបូក:

$$S=\frac{2}{2015+1}+\frac{2^2}{2015^2+1}+\frac{2^3}{2015^4+1}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{2015^{2^n}+1}$$

លំហាត់ទី១១១

គេឲ្យ a ជាចំនួនមួយគត់ដែល $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{23}=\dfrac{a}{23!}$ កំណត់សំណល់ពេល a ចែកនឹង 13 ។

លំហាត់ទី១១២

រកលេខខ្ទង់ចុងក្រោយនៃផលបូក:

$A=1+\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{2015}+\underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}_{2015}+\underbrace{4^{4^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}_{2015}+\underbrace{5^{5^{\cdot^{\cdot^{5}}}}}_{2015}+\underbrace{6^{6^{\cdot^{\cdot^{6}}}}}_{2015}+\underbrace{7^{7^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}_{2015}$ ។

លំហាត់ទី១១៣

ក-ដាក់ជាផលគុណកត្តាចំពោះកន្សោម $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

ខ-បង្ហាញថា $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$ ចែកដាច់នឹង 24 ចំពោះគ្រប់ $a\,,b\,,c\in\mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ទី១១៤

រកសំណល់ពេលចែក $A=a^{2n}+a^n+1$ ជាមួយ a^2+a+1 ទៅតាមចំនួនគត់ n ដែល $a\in\mathbb{Z}\,,a\neq1$ ។ ទាញរកសំណល់ពេលចែក $2015^{2n}+2015^n+1$ ជាមួយ $2015^2+2015+1$ ។

លំហាត់ទី១១៥

គេឲ្យ $a_1+a_2+\cdots+a_{2015}=1$ ។ ស្រាយថា $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2015}^2\geq\dfrac{1}{2015}$

លំហាត់ទី១១៦

គេឲ្យ $a, b, c > 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $a^{2016} + b^{2016} + c^{2016} = 3$
រកតម្លៃធំបំផុតនៃ $A = a^2 + b^2 + c^2$

លំហាត់ទី១១៧

បង្ហាញថា $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

លំហាត់ទី១១៨

គេមាន z_1 , z_2 , z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$
និង $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ ។ បង្ហាញថា $\left|\dfrac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = r$ ។

លំហាត់ទី១១៩

គេយក x , y , z ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:
$\sin x + \sin y + \sin z = 0$ និង $\cos x + \cos y + \cos z = 0$ ។
ស្រាយថា: $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$ និង $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$

លំហាត់ទី១២០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានរង្វាស់ជ្រុង a , b , c និងក្រឡាផ្ទៃ S ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$
តើសមភាពកើតមាននៅពេលណា ?

លំហាត់ទី១២១

គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន x , y , z ដែល $x \geq y \geq z$
ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\dfrac{x^2y}{z} + \dfrac{y^2z}{x} + \dfrac{z^2x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2$

លំហាត់ទី១២២

សន្មត់ថាចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c , x , y , z ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$cy+bz=a$, $az+cx=b$ និង $bx+ay=c$ ។

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x,y,z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$

លំហាត់ទី១២៣

គណនាផលបូក: $A=\tan^6\frac{\pi}{18}+\tan^6\frac{5\pi}{18}+\tan^6\frac{7\pi}{18}$ ។

លំហាត់ទី១២៤

គណនាផលបូក:

$A=\binom{n}{1}\cos x+\binom{n}{2}\cos 2x+\binom{n}{3}\cos 3x+\cdots+\binom{n}{n}\cos nx$

លំហាត់ទី១២៥

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ x,y,z,v,t ដែល:

$x+y+z+v+t=xyvt+(x+y)(v+t)$

$xy+z+vt=xy(v+t)+vt(x+y)$

លំហាត់ទី១២៦

យក x_0 ជាឫសនៃសមីការ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ដែល $ad\neq 0$ ។

តាង $\alpha=\max\left\{\left|\frac{b}{a}\right|,\left|\frac{c}{a}\right|,\left|\frac{d}{a}\right|\right\}$ និង $\beta=\left\{\left|\frac{a}{d}\right|,\left|\frac{c}{d}\right|,\left|\frac{c}{d}\right|\right\}$ ។

បង្ហាញថា: $\frac{1}{1+\beta}\leq|x_0|\leq 1+\alpha$ ។

លំហាត់ទី១២៧

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^3-1}+\frac{1}{4^4-1}++\frac{1}{2015^{2015}-1}\leq\frac{2014}{2015}$ ។

លំហាត់ទី១២៨

គណនាតម្លៃ: $A=9\left(\sqrt[4]{23-\sqrt{448}}\right)^{-\frac{2}{3}\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\dots}}}}$ ។

លំហាត់ទី១២៩

គេឲ្យ n និង p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ស្រាយថា:

$$\frac{1}{(1+1)\sqrt[p]{1}}+\frac{1}{(2+1)\sqrt[p]{2}}+\frac{1}{(3+1)\sqrt[p]{3}}++\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}<p$$ ។

លំហាត់ទី១៣០

ដោះស្រាយសមីការ: $\left\lfloor \frac{25x-2}{4} \right\rfloor = \frac{13x+4}{3}$ ដែល $\lfloor a \rfloor$ ជាផ្នែកគត់នៃចំនួនពិត a ។

លំហាត់ទី១៣១

គេឲ្យពហុធានៃ x កំណត់ដោយ: $f(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{19}+x^{20}$

អាចសរសេរជាទម្រង់ នៃពហុធា

$y: g(y)=a_0+a_1y+a_2y^2++a_{19}y^{19}+a_{20}y^{20}$ ដែល $y=x-4$

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម: $A=a_0+a_1+a_3++a_{20}$ ។

លំហាត់ទី១៣២

ស្រាយថា: $\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \max\left(a^2+b, b^2+a\right)=-\frac{1}{4}$ ។

លំហាត់ទី១៣៣

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដែលមានមេគុណជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។

ស្រាយថា: $\sqrt{P(a)P(b)} \geq P(\sqrt{ab})$ ចំពោះ a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

លំហាត់ទី១៣៤

បើ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n$ ។ ស្រាយថា: $a_1^4+a_2^4+a_3^4+\cdots+a_n^4 \geq n$

លំហាត់ទី១៣៥

រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $n^4-4n^3+22n^2-36n+18$ ជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ទី១៣៦

គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតខុសពី $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ

$abc = a+b+c$ នោះ

$$\frac{3a-a^3}{3a^2-1}\cdot\frac{3b-b^3}{3b^2-1}\cdot\frac{3c-c^3}{3c^2-1}=\frac{3a-a^3}{3a^2-1}+\frac{3b-b^3}{3b^2-1}+\frac{3c-c^3}{3c^2-1}$$ ។

លំហាត់ទី១៣៧

គេឲ្យ $f_1, f_2, f_3,\dots, f_n$ និង $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ស្រាយថាកន្សោម:

$$f_1x_1^2+f_1x_1^2+f_1x_1^2+\cdots+f_1x_1^2-\frac{\left(f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\cdots+f_nx_n\right)^2}{f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n}$$

មិនមែនជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

លំហាត់ទី១៣៨

រកត្រីធាតុ (x,y,z) ជាចំនួនពិតរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}\dfrac{4x^2}{4x^2+1}=y\\[2mm] \dfrac{4y^2}{4y^2+1}=z\\[2mm] \dfrac{4z^2}{4z^2+1}=x\end{cases}$

លំហាត់ទី១៣៩

គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) មួយកំណត់ដោយ:

$$\begin{cases}a_1=2\,,\ a_2=9\\ n(n+1)a_{n+1}=6n(n+2)a_{n-1}-9(n+1)(n+2)a_{n-1}\ ,\ n\geq 2\end{cases}$$ ។

ស្រាយថា: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}=\binom{n}{0}2^{n-1}+\binom{n}{1}2^{n-2}+\binom{n}{2}2^{n-3}+\cdots+\binom{n}{n-1}$ ។

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឲ្យស្វីត (a_n)មួយកំណត់ដោយ $a_0=0, a_1=1, a_2=2, a_3=6$

$a_{n+4}=2a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា a_n ចែកដាច់នឹង n ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $a_{n+4}=2a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n$

$$a_4=2a_3+a_2-2a_1-a_0=2.6+2-2.1-0=12$$

$$a_5=2a_4+a_3-2a_2-a_1=2.12+6-2.2-1=25$$

គេបាន: $\frac{a_1}{1}=1$, $\frac{a_2}{2}=1$, $\frac{a_3}{3}=2$, $\frac{a_4}{4}=3$, $\frac{a_5}{5}=5$ ពិត

ឧបមាពិតដល់ $n=p+3: a_{p+3}=(p+3)F_{p+3}$ ដែល(F_p) ជាស្វីត *Febbonacci*

$F_{p+4}=F_{p+3}+F_{p+2}$, $F_1=1$, $F_2=1$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n=p+4: a_{p+4}=(p+4)F_{p+4}$

យើងមាន: $a_{p+4}=2a_{p+3}+a_{p+2}-2a_{p+1}-a_p$

$$a_{p+4}=2(p+3)F_{p+3}+(p+2)F_{p+2}-2(p+1)F_{p+1}-pF_p$$

$$a_{p+4}=2(p+3)F_{p+3}+(p+2)F_{p+2}-2(p+1)F_{p+1}-p(F_{p+2}-F_{p+1})$$

$$a_{p+4}=2(p+3)F_{p+3}+(p+2)F_{p+2}-2pF_{p+1}-2F_{p+1}-pF_{p+2}+pF_{p+1}$$

$$a_{p+4}=2(p+3)F_{p+3}+2F_{p+2}-(p+2)F_{p+1}$$

$$a_{p+4}=2(p+3)F_{p+3}+2F_{p+2}-(p+2)(F_{p+3}-F_{p+2})$$

$$a_{p+4}=(p+4)F_{p+3}+(p+4)F_{p+2}$$

$$a_{p+4}=(p+4)(F_{p+3}+F_{p+2})$$

$a_{p+4}=(p+4)F_{p+4}$ ពិត

ដូចនេះ a_n ចែកដាច់នឹង n ចំពោះ $n \geq 1$ ។

លំហាត់ទី២

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2009^{3^{2016n+2013}} + 2010^{2^{2016n+2013}}$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $3^{2016n+2013} = 3.3^{2016n+2012} = 3.3^{4(504n+503)} = 3.81^{504n+503} \equiv 3 \pmod{10}$

$\Rightarrow 3^{2016n+2013} = 10k+3\ ,\ k \in \mathbb{N}^*$

$2^{2016n+2013} = 2.2^{2016n+2012} = 2.2^{4(504n+503)} = 2.16^{504n+503} \equiv 2 \pmod{10}$

$\Rightarrow 2^{2016n+2013} = 10p+2\ ,\ p \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 2009^{3^{2016n+2013}} + 2010^{2^{2016n+2013}} = 2009^{10k+3} + 2010^{10p+2}$

$= 2009^3.2009^{10k} + 2010^2.2010^{10p}$

ដោយ $(2009,11)=1$ និង $(2010,11)=1$ តាម *Fermat* គេបាន:

$2009^{10k} \equiv 1 \pmod{11}$

$2010^{10p} \equiv 1 \pmod{11}$

$2009^3 \equiv 2 \pmod{11}$

$2010^2 \equiv 9 \pmod{11}$

$\Rightarrow 2009^{3^{2016n+2012}} + 2010^{2^{2016n+2013}} \equiv 1.2 + 1.9 \equiv 0 \pmod{11}$

ដូចនេះ $2009^{3^{2016n+2013}} + 2010^{2^{2016n+2013}}$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

លំហាត់ទី៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយដែលមាន $A\,,B\,,C$ ជាមុំក្នុងត្រីកោណ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ $P = \sqrt{\dfrac{\tan^8 A + \tan^8 B + \tan^8 C}{\tan A.\tan B.\tan C}}$

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី (*Cauchy*) គេបាន:

$$P=\sqrt{\frac{\tan^8 A+\tan^8 B+\tan^8 C}{\tan A.\tan B.\tan C}}\geq\frac{\sqrt{3.\sqrt[3]{\tan^8 A.\tan^8 B.\tan^8 C}}}{\tan A.\tan B.\tan C}$$

$$=\sqrt{\frac{3.\sqrt[3]{\tan^8 A.\tan^8 B.\tan^8 C}}{\tan^2 A.\tan^2 B.\tan^2 C}}$$

$$P\geq\sqrt{3.\sqrt[3]{\tan^2 A.\tan^2 B.\tan^2 c}}\quad (*)$$

តែ $A+B+C=\pi\Rightarrow\tan(A+B+C)=\tan\pi=0$ គេបាន:

$$\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A.\tan B.\tan C}{1-(\tan A.\tan B+\tan B.\tan C+\tan C.\tan A)}=0$$ គេបាន:

$$\Rightarrow\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$$

$$\tan A.\tan B.\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C}$$

$$\Rightarrow\left(\tan A.\tan B.\tan C\right)^2\geq 3^3$$

$$\Rightarrow\tan A.\tan B.\tan C\geq 3\sqrt{3}\quad (**)$$

តាម (*) និង (**) គេបាន: $P\geq\sqrt{3.\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^2}}=3$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ P គឺ 3 ។

សមភាពកើតមានពេល $\tan A=\tan B=\tan C\Rightarrow A=B=C$

នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន S ជាក្រឡាផ្ទៃ h_A , h_B , h_C ជាកម្ពស់ និង m_A , m_B , m_C ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណនោះ ។

បង្ហាញថា: $h_A.m_B{}^4+h_B.m_C{}^4+h_C.m_A{}^4\geq 9\sqrt[4]{3}.S^2.\sqrt{S}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន:

$$h_A.m_B{}^4+h_B.m_C{}^4+h_C.m_A{}^4\ge 3\sqrt[3]{h_A.h_B.h_C.m_A{}^4.m_B{}^4.m_C{}^4}\quad (1)$$

តាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន:

$$4m_A{}^2=2(b^2+c^2)-a^2\ge(b+c)^2-a^2=(a+b+c)(b+c-a)$$

តែ $p=\dfrac{a+b+c}{2}\Rightarrow a+b+c=2p$

$$\Rightarrow b+c-a=2(p-a)$$

គេបាន: $4m_A{}^2\ge 4p(p-a)\Rightarrow m_A{}^2\ge p(p-a)$

ស្រាយដូចគ្នា $m_B{}^2\ge p(p-b)$, $m_C{}^2\ge p(p-c)$

យើងបាន: $m_A{}^2.m_B{}^2.m_C{}^2\ge p^3(p-a)(p-b)(p-c)=p^2.S^2$

ព្រោះ $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$ (រូបមន្តហេរ៉ុង)

នាំឲ្យ $m_A{}^4.m_B{}^4.m_C{}^4\ge p^4.S^4\quad (2)$

តាមរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $S=\dfrac{1}{2}ah_A=\dfrac{1}{2}bh_B=\dfrac{1}{2}ch_C$

$$\Rightarrow\begin{cases}h_A=\dfrac{2S}{a}\\ h_B=\dfrac{2S}{b}\\ h_C=\dfrac{2S}{c}\end{cases}\Rightarrow h_A.h_B.h_C=\frac{8S^3}{abc}\quad (3)$$

តែ $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\le\dfrac{(a+b+c)^3}{3^3}$

$$\Rightarrow\frac{1}{abc}\ge\frac{3^3}{(a+b+c)^3}$$

តាម (3) គេបាន: $h_A.h_B.h_C\ge\dfrac{8.S^3.3^3}{(a+b+c)^3}=\dfrac{3^3S^3}{p^3}\quad (4)$

យក (2) គុណនឹង (4) គេបាន: $h_A.h_B.h_C.m_A{}^4.m_B{}^4.m_C{}^4 \ge p^4.S^4.\dfrac{3^3S^3}{p^3}$ (5)

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{h_A.h_B.h_C.m_A{}^4.m_B{}^4.m_C{}^4} \ge 9S^2\sqrt[3]{S.p} \quad (6)$$

ដោយ $p = 3p - 2p = 3p - (a+b+c) = (p-a)+(p-b)+(p-c)$

$\Rightarrow p \ge 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\Rightarrow p^3 \ge 3^3(p-a)(p-b)(p-c) \Rightarrow p^4 \ge 3^3.S^2$

$$\Rightarrow p \ge \sqrt[4]{3^3.S^2}$$

យើងបាន $\sqrt[3]{S.p} \ge \sqrt[3]{S.\sqrt[4]{3^3.S^2}} = \sqrt[4]{3}.\sqrt{S}$

តាម (6) គេបាន $3\sqrt[3]{h_A.h_B.h_C.m_A{}^4.m_B{}^4.m_B{}^4} \ge 9\sqrt[4]{3}.S^2.\sqrt{S}$ (7)

តាម (1) និង (7) $h_A.m_B^4 + h_B.m_C^4 + h_C.m_A^4 \ge 9\sqrt[4]{3}.S^2.\sqrt{S}$ ពិត ។

លំហាត់ទី៥

គេឲ្យស្វ៊ីត (x_k) ដែល $x_k = \dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+..........+\dfrac{k}{(k+1)!}$ ចំពោះ $k \in \mathbb{N}^*$ រកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + ...+x_{2015}^n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x_k = \dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+..........+\dfrac{k}{(k+1)!}$

យើងបាន $x_k - x_{k-1} = \dfrac{k}{k+1} > 0$ (*) , $k \in \mathbb{N}^*$

នោះ (x_k) ជាស្វ៊ីតកើនគេបាន: $0 < x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_n$

$\Rightarrow x_{2015}^n < x_1^n + x_2^n + x_3^n + ...+x_{2015}^n < 2015x_{2015}^n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2015} < \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + ...+x_{2015}^n} < \lim\limits_{n\to+\infty} 2015^{\frac{1}{n}}.x_{2015}$ (**)

តាម (*) គេបាន $x_k - x_{k-1} = \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2015}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{2015}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$x_{2015} - x_0 = 1 - \frac{1}{2016!}$$

$$x_{2015} = 1 - \frac{1}{2016!} \quad (\text{ព្រោះ } x_0 = 0\ )$$

តាម(**) គេបាន

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2016!}\right) < \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots\dots\dots\dots + x_{2015}^n} < \lim_{n\to+\infty} 2015^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{1}{2016!}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots\dots\dots\dots + x_{2015}^n} = 1 - \frac{1}{2016!} \qquad \text{ព្រោះ } \lim_{n\to+\infty} 2015^{\frac{1}{n}} = 1$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots\dots\dots\dots + x_{2015}^n} = 1 - \frac{1}{2016!}$

លំហាត់ទី៦

រកបីលេខខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ $M = 1993^{1994^{1995^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10000}}}}}}$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $1995^{1996^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10000}}}}} = 10k + 5 \quad , \quad k \in \mathbb{N}$

$$1994 \equiv -6 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 1994^{1995^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10000}}}}} \equiv (-6)^{10k+5} \pmod{100}$$

$$\equiv (-6)^{10k}.(-6)^5 \equiv -(100p + 76)(7700 + 76)$$

$$\equiv -76 \equiv 24 \pmod{100}$$

គេបាន: $1994^{1995^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10000}}}}} = 100n + 24 = 20m + 4 \quad ; m, n \in \mathbb{N}$

$$1993^{1994^{1995^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10000}}}}}} \equiv (-7)^{20m+4} \pmod{1000}$$

$$\equiv (-7)^{20m}.(-7)^{4} \pmod{1000}$$

តែ $(-7)^4 \equiv 401 \pmod{1000}$

$$\equiv (400+1) \pmod{1000}$$

$$\Rightarrow (-7)^{20} \equiv (400+1)^5 \equiv 1 + C_5^1 400 + C_5^2 400^2 + C_5^3 400^3 + C_5^4 400^4 + C_5^5 400^5$$

$$\equiv 1 \pmod{1000}$$

$$\Rightarrow (-7)^{20m} \equiv 1 \pmod{1000}$$

$$\Rightarrow 1993^{1994^{1995^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10000}}}}}} \equiv 401 \pmod{1000}$$

ដូចនេះ លេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ $1993^{1994^{1995^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10000}}}}}}$ គឺ 401 ។

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យ $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 + \frac{7}{xy} + \frac{1}{z}$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ:

$M = f(a,b,c) = f(c,a,b) = f(b,c,a)$ គ្រប់ a,b,c ជាបីចំនួនពិតផ្សេងគ្នាខុសពីសូន្យ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 + \frac{7}{xy} + \frac{1}{z}$ គេបាន:

$$f(a,b,c) = 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 + \frac{7}{ab} + \frac{1}{c} \quad (1)$$

$$f(b,c,a) = 2b^2 + 2c^2 - 2a^2 + \frac{7}{bc} + \frac{1}{a} \quad (2)$$

$$f(c,a,b)=2c^2+2a^2-2b^2+\frac{7}{ac}+\frac{1}{b} \quad (3)$$

យក $(2)-(1)$: $4(c^2-a^2)+7\left(\frac{1}{bc}-\frac{1}{ab}\right)+\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=0$

$$4(c-a)(c+a)-7\left(\frac{c-a}{abc}\right)+\frac{c-a}{ac}=0$$

$$(c-a)\left[4(c+a)-\frac{7}{abc}+\frac{1}{ac}\right]=0$$

$$4(c+a)+\frac{b-7}{abc}=0 \quad , \ (c-a\neq 0) \quad (4)$$

យក $(3)-(2)$: $4(a^2-b^2)+\frac{7}{ac}-\frac{7}{bc}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=0$

$$4(a-b)(a+b)-7\frac{(a-b)}{abc}+\frac{(a-b)}{ab}=0 \ \ (a\neq b)$$

$$4(a+b)-\frac{7}{abc}+\frac{1}{ab}=0$$

$$4(a+b)+\frac{c-7}{abc}=0 \quad (5)$$

យក $(4)-(5)$: $4(c-b)+\frac{b-c}{abc}=0 \Rightarrow 4-\frac{1}{abc}=0 \quad (c-b\neq 0)$

$\Rightarrow abc=\frac{1}{4}$ ជំនួសក្នុង (4)

គេបាន: $a+b+c=7$

ដោយ $f(a,b,c)=2a^2+2b^2-2c^2+\frac{7}{ab}+\frac{1}{c}$

$$=\frac{1}{abc}(2a^2.abc+2b^2.abc-2c^2.abc+7c+ab)$$

$$=\frac{1}{abc}(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2+7c+ab)$$

$$=\frac{1}{2abc}(a^2+b^2-c^2+14c+2ab)$$

$$= \frac{1}{2abc}(a^2+b^2-c^2+2c(a+b+c)+2ab)$$
$$= \frac{1}{2abc}(a^2+b^2-c^2+2ac+2bc+2ab+2c^2)$$
$$= \frac{1}{2abc}(a+b+c)^2$$
$$= \frac{1}{2}(7)^2.4 = 98$$

ដូចនេះ $M = f(a,b,c) = f(c,a,b) = f(b,c,a) = 98$

លំហាត់ទី៨

រកគ្រប់អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$\begin{cases} f(0) = 2014 \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2015 \\ f(x+y)+f(x-y) = 2f(x).\cos y \ ; \ \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x).\cos y$

យក $x = \frac{\pi}{2}$, $y = a - \frac{\pi}{2}$: $f(a)+f(\pi-a) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(a-\frac{\pi}{2}\right)$

$$= 2.2015.\sin a \quad (1)$$

យក $x = a-\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$: $f(a)+f(a-\pi) = 2.f\left(a-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad (2)$

យក $(1)-(2)$: $f(\pi-a)-f(a-\pi) = 2.2015\sin a \quad (3)$

$x=0$, $y=\pi-a$: $f(\pi-a)+f(a-\pi) = 2f(0).\cos(\pi-a)$

$$= 2.2014(-\cos a) \quad (4)$$

យក $(3)+(4)$: $2f(\pi-a) = 2.2015\sin a - 2.2014\cos a$

$$f(\pi-a) = 2015.\sin a - 2014\cos a$$

តាង $x=\pi-a\Rightarrow a=\pi-x$ គេបាន

$$f(x)=2015.\sin(\pi-x)-2014\cos(\pi-x)$$
$$=2015\sin x+2014\cos x \quad , \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះ $f(x)=2015\sin x+2014\cos x \quad , \quad \forall x\in\mathbb{R}$

លំហាត់ទី៩

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x,y,z ដែល $xyz=1$

គេបាន: $\dfrac{x^{\sqrt{2015}}}{y+z}+\dfrac{y^{\sqrt{2015}}}{z+y}+\dfrac{z^{\sqrt{2015}}}{x+y}\geq\dfrac{3}{2}$

ដំណោះស្រាយ

យក $a=\sqrt{2015}$ តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន:

$$\left[x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)\right]\left[\frac{x^a}{y+z}+\frac{y^a}{x+z}+\frac{z^a}{x+y}\right]\geq\left(x^{\frac{a+1}{2}}+y^{\frac{a+1}{2}}+z^{\frac{a+1}{2}}\right)^2$$

ដោយ $x\left(y+z\right)+y(x+z)+z(x+y)=2(xy+yz+zx)$

យើងគ្រាន់តែស្រាយឲ្យបាន $\left(x^{\frac{a+1}{2}}+y^{\frac{a+1}{2}}+z^{\frac{a+1}{2}}\right)^2\geq3\left(xy+yz+zx\right)$

វាជាការគ្រប់គ្រាន់

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន:

$$(x+y+z)^2\geq3(xy+yz+zx)$$

ត្រូវបង្ហាញថា $\left(x^{\frac{a+1}{2}}+y^{\frac{a+1}{2}}+z^{\frac{a+1}{2}}\right)^2\geq x+y+z$

តាមវិសមភាព $Bernoulli$ គេបាន:

$$x^{\frac{a+1}{2}}=\left(1+x-1\right)^{\frac{a+1}{2}}\geq1+\frac{a+1}{2}(x-1)\quad(1)$$

$$y^{\frac{a+1}{2}}=\left(1+y-1\right)^{\frac{a+1}{2}}\geq 1+\frac{a+1}{2}\left(y-1\right)\quad (2)$$

$$z^{\frac{a+1}{2}}=(1+z-1)^{\frac{a+1}{2}}\geq 1+\frac{a+1}{2}(z-1)\quad (3)$$

ដោយយក $(1)+(2)+(3)$ គេបាន:

$$x^{\frac{a+1}{2}}+y^{\frac{a+1}{2}}+z^{\frac{a+1}{2}}\geq 3+\frac{a+1}{2}(x+y+z)-3\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

$$x^{\frac{a+1}{2}}+y^{\frac{a+1}{2}}+z^{\frac{a+1}{2}}\geq 3+\left(\frac{a+1}{2}-1\right)(x+y+z)-3\left(\frac{a+1}{2}\right)+(x+y+z)$$

$$x^{\frac{a+1}{2}}+y^{\frac{a+1}{2}}+z^{\frac{a+1}{2}}-(x+y+z)\geq 3+\left(\frac{a+1}{2}-1\right)(x+y+z)-3\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

$$x^{\frac{a+1}{2}}+y^{\frac{a+1}{2}}+z^{\frac{a+1}{2}}-(x+y+z)\geq 3+\left(\frac{a+1}{2}-1\right)(3\sqrt[3]{xyz})-3\left(\frac{a+1}{2}\right),xyz=1$$

$$x^{\frac{a+1}{2}}+y^{\frac{a+1}{2}}+z^{\frac{a+1}{2}}-(x+y+z)\geq 3+\left(\frac{3a-3}{2}\right)-3\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

$$x^{\frac{a+1}{2}}+y^{\frac{a+1}{2}}+z^{\frac{a+1}{2}}-(x+y+z)\geq 0$$

$\Rightarrow x^{\frac{a+1}{2}}+y^{\frac{a+1}{2}}+z^{\frac{a+1}{2}}\geq x+y+z$ ពិត ។

ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១០

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$f(xy).f(yz).f(zx).f(x+y).f(y+z).f(z+x)=2015$

ចំពោះ $\forall x,y,z$ វិជ្ជមាន ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(xy).f(yz).f(zx).f(x+y).f(y+z).f(z+x)=2015$

យក $x=y=z=a\ ,\ a\in(0,+\infty):\ f(a^2).f(2a)=\sqrt[3]{2015}\quad(1)$

$x=y=a,\ z=1:\ f(a^2).f(a).f(a).f(2a).f(a+1).f(a+1)=2015$

$$f(a^2).f^2(a).f(2a).f^2(a+1)=2015\quad(2)$$

យក(2) ធៀប(1) គេបាន:

$\left(f(a).f(a+1)\right)^2=\sqrt[3]{2015^2}$

$f(a).f(a+1)=\sqrt[3]{2015}\quad(3)$

$(3):$ ប្តូរ a ដោយ $a+1: f(a+1).f(a+2)=\sqrt[3]{2015}$

$\Rightarrow f(a)=f(a+2)\quad ,\forall a\in(0,+\infty)\quad(4)$

យក $z=1:\ f(xy).f(x).f(y).f(x+y).f(x+1).f(y+1)=2015$

តែ $(3):\ f(a).f(a+1)=\sqrt[3]{2015}$ គេបាន: $f(xy).f(x+y)=\sqrt[3]{2015}$

យក $y=2:\ f(2x).f(x+2)=\sqrt[3]{2015}\ (5)$

$y=4:\ f(4x).f(x+4)=\sqrt[3]{2015}$

តាម $(4): f(a)=f(a+2)\Rightarrow f(x+2)=f(x+4)\ ,\ a\in(0,+\infty)$

$\Rightarrow f(2x)=f(4x)$

$\Leftrightarrow f(a)=f(2a)$

តាម (4) និង $(5):\ f(a).f(a)=\sqrt[3]{2015}$

$\left(f(a)\right)^2=\sqrt[3]{2015}$

$f(a)=\sqrt[6]{2015}\ ,\ a\in(0,+\infty)$

ដូចនេះ $f(a)=\sqrt[6]{2015}\ ,\ a\in(0,+\infty)$

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យអនុគមន៍ $f:(0\ ,+\infty)\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$f(\tan 2x)=\tan^4 x+\frac{1}{\tan^4 x}\quad;\quad\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$$

បង្ហាញថា $f(\sin x)+f(\cos x)\ge 196$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $f(\tan 2x)=\tan^4 x+\dfrac{1}{\tan^4 x}\quad (1)$

តាង $t=\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan x}-\tan x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{t}=\frac{1}{\tan x}-\tan x$$

$$\Rightarrow \frac{4}{t^2}=\tan^2 x+\frac{1}{\tan^2 x}-2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{t^2}+2=\tan^2 x+\frac{1}{\tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \tan^4 x+\frac{1}{\tan^4 x}=\left(\frac{4}{t^2}+2\right)^2-2$$

$$\Rightarrow \tan^4 x+\frac{1}{\tan^4 x}=\frac{16}{t^4}+\frac{16}{t^2}+2\quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន: $f(t)=\dfrac{16}{t^4}+\dfrac{16}{t^2}+2$

$$\Rightarrow f(\sin x)=\frac{16}{\sin^4 x}+\frac{16}{\sin^2 x}+2\quad (3)$$

$$\Rightarrow f(\cos x)=\frac{16}{\cos^4 x}+\frac{16}{\cos^2 x}+2\quad (4)$$

យក $(3)+(4)$ គេបាន:

$$f(\sin x)+f(\cos x)=16\left(\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}\right)+16\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)+4\quad (*)$$

តាមវិសមភាព *Cauchy* :

$$\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}\ge 2\sqrt{\frac{1}{\sin^4 x.\cos^4 x}}=\frac{2}{\sin^2 x.\cos^2 x}=\frac{8}{(\sin 2x)^2}\ge 8$$

$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}}=\frac{2}{\sin x.\cos x}=\frac{4}{\sin 2x}\geq 4$$

ព្រោះ $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow 0\leq \sin 2x\leq 1$

តាម (*): $f(\sin x)+f(\cos x)\geq 16.8+16.4+4=196$ ពិត

ដូចនេះ $f(\sin x)+f(\cos x)\geq 196$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១២

ឧបមាថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលមានដេរីវេ ហើយ $f(0)=0$ និង $f(2014)=2014$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_0^{2014}\left((f(x))^{2014}+(f'(x))^2\right)dx\geq\frac{2014^{1008}}{508}$

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព $Cauchy:\left(f(x)\right)^{2014}+\left(f'(x)\right)^2\geq 2f'(x).\left(f(x)\right)^{1007}$

$$\int_0^{2014}\left((f(x))^{2014}+(f'(x))^2\right)dx\geq\int_0^{2014}2f'(x).\left(f(x)\right)^{1007}.dx$$

$$\int_0^{2014}\left((f(x))^{2014}+(f'(x))^2\right)dx\geq 2.\left[\frac{\left(f(x)\right)^{1008}}{1008}\right]_0^{2014}$$

$$\int_0^{2014}\left((f(x))^{2014}+(f'(x))^2\right)dx\geq\frac{\left(f(2014)\right)^{1008}}{504}-\frac{\left(f(0)\right)^{1008}}{504}$$

$$\int_0^{2014}\left((f(x))^{2014}+(f'(x))^2\right)dx\geq\frac{2014^{1008}}{504}$$ ពិត

ដូចនេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១៣

រកគ្រប់អនុគមន៍ជាប់ និងមានដេរីវេ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

$f^2(x)=2015+\int\left[f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2\right]dx$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន: $f^2(x)=2015+\int\left[f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2\right]dx$

$f^2(x)-2015=\int\left[f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2\right]dx$

$\left(f^2(x)-2015\right)'=f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2$

$2f'(x).f(x)=f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2$

$f^2(x)-2f'(x).f(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$

$\left(f(x)-f'(x)\right)^2=0$

$f(x)-f'(x)=0$

$f(x)=f'(x)$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1$

$\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int dx=x+a$

$\ln\left|f(x)\right|=x+a$

$\left|f(x)\right|=e^{x+a}$

$f(x)=\pm e^{x+a}$ ដែល a ជាចំនួនថេរ ។

ដូចនេះ $f(x)=\pm e^{x+a}$ ។

លំហាត់ទី១៤

កំនត់អនុគមន៍ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ដែល $f\left(C_n^m\right)=C_{f(n)}^{f(m)}$ គ្រប់ m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $f\left(C_n^m\right)=C_{f(n)}^{f(m)}$

យក $m=n$: $f\left(C_n^n\right)=C_{f(n)}^{f(n)} \Leftrightarrow f(1)=1$

$m=n-m$: $f\left(C_n^{n-m}\right)=C_{f(n)}^{f(n-m)}$ តែ $C_n^{n-m}=C_n^m$

$\Rightarrow f\left(C_n^m\right)=C_{f(n)}^{f(n-m)}$

$\Rightarrow C_{f(n)}^{f(m)}=C_{f(n)}^{f(n-m)}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(m)=f(n-m) \\ f(n)=f(m)+f(n-m) \end{array}\right.$$

បើ $f(m)=f(n-m)$ យក $m=n-1 \Rightarrow f(n-1)=f(1)=1 \Rightarrow f(n)=1$

បើ $f(n)=f(m)+f(n-m)$ យក

$m=1: f(n)=f(1)+f(n-1)=1+f(n-1)$

$\Rightarrow f(n)-f(n-1)=1$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{n}\left(f(n)-f(n-1)\right)=\sum_{n=2}^{n}1=n-1$$

$\Rightarrow f(n)-f(1)=n-1$

$\Rightarrow f(n)=n$

ដូចនេះ $f(n)=1$, $f(n)=n$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\geq 1}$ និង $(v_n)_{n\geq 1}$ កំណត់ដោយ $u_1=3, v_1=2$

និង $u_{n+1}=3u_n+4v_n$, $v_{n+1}=2u_n+3v_n$; $n\geq 1$

គេកំណត់យក $x_n=u_n+v_n$, $y_n=u_n+2v_n$ ។

បង្ហាញថា $y_n=\left\lfloor x_n\sqrt{2}\right\rfloor$ ចំពោះ $n\geq 1$ ។ ($\lfloor a\rfloor$ ជាផ្នែកគត់នៃ a) ។

ដំណោះស្រាយ

យើងនឹងស្រាយតាមវាចាកំណើនថា: ${u_p}^2 - 2v_p^2 = 1 \ , \ \ p \geq 1$

ចំពោះ $n = 1$: $u_1^2 - 2v_1^2 = 3^2 - 2.2^2 = 1$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $p = n$: $u_n^2 - 2v_n^2 = 1$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $p = n+1$: $u_{n+1}^2 - 2v_{n+1}^2 = 1$

យើងមាន: $u_{n+1}^2 - 2v_{n+1}^2 = (3u_n + 4v_n)^2 - 2(2u_n + 3v_n)^2$

$$= 9u_n^2 + 24u_n.v_n + 16v_n^2 - 8u_n^2 - 24u_n.v_n - 18v_n^2$$

$$= u_n^2 - 2v_n^2 = 1$$ ពិត

យើងនឹងបន្តស្រាយទៀតថា: $2x_n^2 - y_n^2 = 1 \ ; n \geq 1$

យើងមាន: $2x_n^2 - y_n^2 = 2(u_n + v_n)^2 - (u_n + 2v_n)^2$

$$= 2u_n^2 + 4u_n.v_n + 2v_n^2 - u_n^2 - 4u_n.v_n - 4v_n^2$$

$$= u_n^2 - 2v_n^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2}x_n + y_n)(\sqrt{2}x_n - y_n) = 1 \ ; \ n \geq 1$$

តែដោយ $\sqrt{2}x_n + y_n > 1$ នោះ $0 < x_n\sqrt{2} - y_n < 1 \ ; \ n \geq 1$

គេបាន: $y_n = \lfloor x_n\sqrt{2} \rfloor$

ដូចនេះ $y_n = \lfloor x_n\sqrt{2} \rfloor$

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យស្វ៊ីត $(x_n)_{n\geq 0}$ និង $(y_n)_{n\geq 0}$ កំណត់ដោយ $x_0 = 3 \ , \ y_0 = 2$

$x_n = 3x_{n-1} + 4y_{n-1}$ និង $y_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(z_n)_{n\geq 0}$ ដែល $z_n = 1 + 4x_n^2.y_n^2$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $x_n = 3x_{n-1} + 4y_{n-1}$

$y_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1}$

$\Rightarrow x_n^2 - 2y_n^2 = (3x_{n-1} + 4y_{n-1})^2 - 2(2x_{n-1} + 3y_{n-1})^2$

$= 9x_{n-1}^2 + 24x_{n-1}.y_{n-1} + 16y_{n-1}^2 - 8x_{n-1}^2 - 24x_{n-1}.y_{n-1} - 18y_{n-1}^2$

$= x_{n-1}^2 - 2y_{n-1}^2 = ... = x_0^2 - 2y_0^2 = 9 - 8 = 1$

គេបាន: $z_n = 1 + 4x_n^2.y_n^2$

$= \left(x_n^2 - 2y_n^2\right)^2 + 4x_n^2.y_n^2$

$= x_n^4 + 4y_n^4 - 4x_n^2.y_n^2 + 4x_n^2.y_n^2$

$= x_n^4 + 4y_n^4 + 4x_n^2.y_n^2 - 4x_n^2.y_n^2$

$= \left(x_n^2 + 2y_n^2\right)^2 - \left(2x_n.y_n\right)^2$

$= \left(x_n^2 + 2y_n^2 + 2x_n.y_n\right)\left(x_n^2 + 2y_n^2 - 2x_n.y_n\right)$

$= \left(x_n^2 + 2x_n.y_n + y_n^2 + y_n^2\right)\left(x_n^2 - 2x_n.y_n + y_n^2 + y_n^2\right)$

$= \left[(x_n + y_n)^2 + y_n^2\right]\left[(x_n - y_n)^2 + y_n^2\right]$

ដោយកត្តានីមួយៗធំជាង 1 នោះ z_n មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ

ដូចនេះ z_n មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (x_n) និង (y_n) កំណត់ដោយ $x_1 = 0$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, $y_1 = 1$ និង $y_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + 3y_n)$ ។

ក-គណនាតួទី 2 ទី 3 ទី 4 នៃស្វ៊ីតនីមួយៗ ។

ខ-គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n)$ ។

សិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសឆ្នាំ២០១៤

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាតួទី 2 ទី 3 ទី 4 នៃស៊ីតនីមួយៗ

ចំពោះ $n=1$ គេបាន: $x_2=\frac{1}{2}(x_1+y_1)=\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$

និង $y_2=\frac{1}{4}(x_1+3y_1)=\frac{1}{4}(0+3)=\frac{3}{4}$

ចំពោះ $n=2$ គេបាន: $x_3=\frac{1}{2}(x_2+y_2)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{3}{4})=\frac{5}{8}$

និង $y_3=\frac{1}{4}(x_2+3y_2)=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}+\frac{9}{4})=\frac{11}{16}$

ចំពោះ $n=3$ គេបាន: $x_4=\frac{1}{2}(x_3+y_3)=\frac{1}{2}(\frac{5}{8}+\frac{11}{16})=\frac{21}{32}$

និង $y_4=\frac{1}{4}(x_3+3y_3)=\frac{1}{4}(\frac{5}{8}+\frac{33}{16})=\frac{43}{64}$

ដូចនេះ $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{5}{8}$, $x_4=\frac{21}{32}$ និង $y_2=\frac{3}{4}$, $y_3=\frac{11}{16}$, $y_4=\frac{43}{64}$

ខ-គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n)$

យើងមាន: $\begin{cases} x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n) & (*) \\ y_{n+1}=\frac{1}{4}(x_n+3y_n) & (**) \end{cases}$

តាង $u_n=2x_n+4y_n$

$\Rightarrow u_{n+1}=2x_{n+1}+4y_{n+1}$

$=x_n+y_n+x_n+3y_n$

$=2x_n+4y_n$

$u_{n+1}=u_n$

នោះ (u_n) ជាស៊ីតថេរ ។

យើងបាន: $u_{n+1}=u_n=............=u_1=2x_1+4y_1=2.0+4.1=4$

គេបាន $u_n = 2x_n + 4y_n = 4 \Rightarrow y_n = 1 - \frac{1}{2}x_n$ ជំនួសក្នុង

$(*):\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + 1 - \frac{1}{2}x_n\right)$

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}$$

សមីការសម្គាល់: $r = \frac{1}{4}r + \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

តាង $z_n = x_n - \frac{2}{3}$

$$z_{n+1} = x_{n+1} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{2}{3}\right)$$

$z_{n+1} = \frac{1}{4}z_n$ នោះ (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{4}$

និងតួទី 1 $z_1 = x_1 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$

តួទី n នៃស្វ៊ីត (z_n) គឺ $z_n = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

តែ $z_n = x_n - \frac{2}{3}$ នោះ $x_n = z_n + \frac{2}{3} = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$

ដោយ $y_n = 1 - \frac{1}{2}x_n$ នោះ $y_n = 1 - \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\right]$

$$=1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}$$

យើងបាន: $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\right]=\frac{2}{3}$

ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=0$

យើងបាន: $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\right]=\frac{2}{3}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)=\frac{2}{3}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n)=\frac{2}{3}$

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_0=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $u_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\forall n\in\mathbb{N}:\ u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ ។

ក-$\forall n\in\mathbb{N}^*$ គេយក $v_n=\frac{3+\sqrt{5}}{2}u_n+\frac{1+\sqrt{5}}{2}u_{n-1}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលត្រូវបញ្ជាក់តួទី 1 និងរេសុង q រួចសរសេរ v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n^2+u_{n+1}^2=u_n.u_{n+2}+u_{n-1}.u_{n+1}$, $\forall n\geq 1$ ។

រួចទាញថា: $u_n^2-u_{n-1}.u_{n+1}=0$ ។

សិស្សពូកែទូទាំងខេត្តបាត់ដំបងឆ្នាំ២០១៤

ដំណោះស្រាយ

ក-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលត្រូវបញ្ជាក់តួទី 1 និងរេសុង q រួចសរសេរ v_n ជាអនុគមន៍នៃ n:

យើងមាន: $v_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}u_n + \frac{1+\sqrt{5}}{2}u_{n-1}$

$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{4}u_n + \frac{1+\sqrt{5}}{2}u_{n-1}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 u_n + \frac{1+\sqrt{5}}{2}u_{n-1}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}u_n + u_{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}u_{n+1} + u_n\right)$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}(u_n + u_{n-1}) + u_n\right)$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}u_n + \frac{1+\sqrt{5}}{2}u_{n-1}\right)$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}v_n$$

នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ និងតួទី 1 គឺ

$$v_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}u_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}u_0 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}+2}{4} + \frac{2\sqrt{5}-2}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}$$

តួទី n នៃស្វ៊ីត (v_n) គឺ $v_n = v_1.q^{n-1} = \sqrt{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ ។

ខ-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n^2 + u_{n+1}^2 = u_n.u_{n+2} + u_{n-1}.u_{n+1}$, $\forall n \geq 1$

យើងមាន: $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ (1) $\Rightarrow u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (2)

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង u_{n+1} ហើយ (2) នឹង u_n គេបាន:

$u_{n+1}^2 = u_n.u_{n+1} + u_{n-1}.u_{n+1}$ (*) និង $u_n.u_{n+2} = u_{n+1}.u_n + u_n^2$ (**)

ដកសមីការ (*) និង (**) អង្គនិងអង្គគេបាន:

$u_{n+1}^2 - u_n.u_{n+2} = u_n.u_{n+1} + u_{n-1}.u_{n+1} - u_n.u_{n+1} - u_n^2$

គេបាន: $u_n^2 + u_{n+1}^2 = u_n.u_{n+2} + u_{n-1}.u_{n+1}$

ដូចនេះ $u_n^2 + u_{n+1}^2 = u_n.u_{n+2} + u_{n-1}.u_{n+1}$

ទាញថា: $u_n^2 - u_{n-1}.u_{n+1} = 0$:

តាង $w_n = u_n^2 - u_{n-1}.u_{n+1} \quad \Rightarrow w_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_n.u_{n+2}$

ដោយ $u_{n+1}^2 - u_n.u_{n+2} = u_{n-1}.u_{n+1} - u_n^2$

គេបាន: $w_{n+1} = u_{n-1}.u_{n+1} - u_n^2 = -(u_n^2 - u_{n-1}.u_{n+1}) = -w_n$

នោះ (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q = -1$ និងតួទី 1

$w_1 = {u_1}^2 - u_0.u_2$ ដោយ $u_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $u_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

និង $u_2 = u_0 + u_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5-1}}{2} = 1$

នោះ $w_1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0$

គេបាន: $w_n = w_1.q^{n-1} = 0$ សមមូល $u_n^2 - u_{n-1}.u_{n+1} = 0$

ដូចនេះ $u_n^2 - u_{n-1}.u_{n+1} = 0$ ។

លំហាត់ទី១៩

ស្វ៊ីត $u_1, u_2, ...$ កំណត់ដោយ: $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$; $n = 1, 2, ...$

រកផ្នែកគត់នៃចំនួន $A = \frac{1}{u_1+1} + \frac{1}{u_2+1} + ... + \frac{1}{u_{2015}+1}$ ។

សិស្សពូកែទូទាំងខេត្តកំពតឆ្នាំ២០១៤

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$

$$= u_n(u_n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n+1} = \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_n.u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n.u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2015}\left(\frac{1}{u_i+1}\right) = \sum_{i=1}^{2015}\left(\frac{1}{u_i} - \frac{1}{u_{i+1}}\right) = 2 - \frac{1}{u_{2016}} < 2 \quad ; \quad u_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A < 2 \quad (*)$$

ដោយ $u_{n+1} = u_n^2 + u_n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$ នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន

ឧបមាថា (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើត្រង់ a , $u_1 < a$

នោះ $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = a$, $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}) = a$

គេបាន: $a = a^2 + a \Rightarrow a = 0 < u_1 = \frac{1}{2}$ មិនពិត យើងបាន:

$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}) = +\infty$

យើងមាន: $u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{3}{4}, u_3 = \frac{21}{16} > 1, ...$

$$\Rightarrow u_{2016} > u_{2015} > ...... > u_3 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{2016}} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{u_{2016}} > -1 \Rightarrow 2 - \frac{1}{u_{2016}} > 1$$

$$\Rightarrow A > 1 \quad (**)$$

តាម (*) និង (**) គេបាន: $1<A<2 \Rightarrow \lfloor A \rfloor = 1$

ដូចនេះ $\lfloor A \rfloor = 1$ ។

លំហាត់ទី២០

រកសំណល់ពេល $\left(n^2+n+41\right)^2$ ចែកនឹង 12 ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយដឹងថា $n(n-1)(n+1)(n+2)$ ចែកដាច់នឹង 12

យើងមាន: $\left(n^2+n+41\right)^{20} \equiv \left(n^2+n+5\right)^2 \pmod{12}$

$$\equiv n^4+n^2+25+2n^3+10n^2+10n \pmod{12}$$

$$\equiv n(n^3+11n+2n^2+10)+1 \pmod{12}$$

$$\equiv n\left[n^2(n+2)-(n+2)\right]+1 \pmod{12}$$

$$\equiv n(n+2)(n^2-1)+1 \pmod{12}$$

$$\equiv n(n-1)(n+1)(n+2)+1 \pmod{12}$$

$$\equiv 1 \pmod{12}$$

ដូចនេះសំណល់នៃការចែក $\left(n^2+n+41\right)^2$ នឹង 12 គឺ 1 ។

លំហាត់ទី២១

ស្រាយថាបើ x, y, z ជាចំនួនពិតមិនសូន្យដែល $x+y+z=0$

នោះគេបាន: $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}+\dfrac{y^2+z^2}{y+z}+\dfrac{z^2+x^2}{z+x}=\dfrac{x^3}{yz}+\dfrac{y^3}{xz}+\dfrac{z^3}{xy}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $x+y+z=0 \Rightarrow \begin{cases} x+y=-z \\ y+z=-x \\ x+z=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=z^2-2xy \\ y^2+z^2=x^2-2yz \\ x^2+z^2=y^2-2zx \end{cases}$

នោះ $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}+\dfrac{y^2+z^2}{y+z}+\dfrac{z^2+x^2}{z+x}=\dfrac{x^3}{yz}+\dfrac{y^3}{xz}+\dfrac{z^3}{xy}$

$$\frac{z^2-2xy}{-z}+\frac{x^2-2yz}{-x}+\frac{y^2-2xz}{-y}=\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{xz}+\frac{z^3}{xy}$$

$$xy(2xy-z^2)+zy(2zy-x^2)+zx(2zx-y^2)=x^4+y^4+z^4$$

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-xyz^2-zyx^2-zxy^2=x^4+y^4+z^4$$

$$2(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)-xyz(x+y+z)=x^4+y^4+z^4$$

$$x^4+y^4+z^4-2(x^2y^2+z^2y^2+z^2x^2)=0 \quad (1)$$

យើងមាន: $x^2+y^2=z^2-2xy$

$$x^2+y^2-z^2=-2xy$$

$$\left(x^2+y^2-z^2\right)^2=(-2xy)^2$$

$$x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2=4x^2y^2$$

$$x^4+y^4+z^4-2(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)=0 \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី២២

គណនាតម្លៃ $A=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k(n-k)!+(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k(n-k)!+(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{(k+1)!}+\frac{1}{k!(n-k)!}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}+\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)+\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{2^n}{n!} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k(n-k)!+(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{2^n}{n!}\right)=1$$

ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)!}=0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

ដូចនេះ $A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k(n-k)!+(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}=1$

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យ p និង q ជាចំនួនបឋមពីរ ។

ដោះស្រាយសមីការ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ដំណោះស្រាយ

យើងសង្កេតឃើញថា: $\frac{1}{x}<\frac{1}{pq}\Rightarrow x>pq$, $\frac{1}{y}<\frac{1}{pq}\Rightarrow y>pq$

យើងមាន: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}\Rightarrow ypq+xpq=xy$

$$xy - ypq - xpq + p^2q^2 = p^2q^2$$
$$y(x - pq) - pq(x - pq) = p^2q^2$$
$$(x - pq)(y - pq) = p^2q^2$$

គេបាន: $\begin{cases} x - pq = 1 \\ y - pq = p^2q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + pq \\ y = pq(1 + pq) \end{cases}$

$$\begin{cases} x - pq = p^2q^2 \\ y - pq = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = pq(1 + pq) \\ y = 1 + pq \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - pq = p \\ y - pq = pq^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = p(1 + q) \\ y = pq(1 + q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - pq = pq^2 \\ y - pq = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = pq(1 + q) \\ y = p(1 + q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - pq = q \\ y - pq = p^2q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = q(1 + p) \\ y = pq(1 + p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - pq = p^2q \\ y - pq = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = pq(1 + p) \\ y = q(1 + p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - pq = p^2 \\ y - pq = q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = p(p + q) \\ y = q(p + q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - pq = q^2 \\ y - pq = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = q(p + q) \\ y = p(p + q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - pq = pq \\ y - pq = pq \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2pq \\ y = 2pq \end{cases}$$

ដូចនេះ គូចម្លើយជាចំនួនគត់របស់សមីការគឺ:

$(x, y) = \left(1 + pq, pq(1 + pq)\right) ; \left(pq(1 + pq), 1 + pq\right)$

$\left(p(1 + q), pq(1 + q)\right) ; \left(pq(1 + q), p(1 + q)\right)$

$\left(q(1 + p), pq(1 + p)\right) ; \left(pq(1 + p), q(1 + p)\right)$

$\left(p(p + q), q(\mathrm{p} + \mathrm{q})\right) ; \left(q(p + q), p(p + q)\right) ; \left(2pq, 2pq\right)$

លំហាត់ទី២៤

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ស្រាយថា $\left\lfloor\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2}\right\rfloor-1$

ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $x_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2}$

$$=\frac{4}{6+2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n}+\frac{4}{6-2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4n}$$

$$=\frac{4}{6+2\sqrt{5}}\left(\frac{1+4\sqrt{5}+6\sqrt{5^2}+4\sqrt{5^3}+\sqrt{5^4}}{16}\right)^n$$

$$+\frac{4}{6-2\sqrt{5}}\left(\frac{1-4\sqrt{5}+6\sqrt{5^2}-4\sqrt{5^3}+\sqrt{5^4}}{16}\right)^n$$

$$=\frac{4}{6+2\sqrt{5}}\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{4}{6-2\sqrt{5}}\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ដោយ $\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)=7$

$$\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)=1$$

$\Rightarrow x_{n+1}=7x_n-x_{n-1}$ ដែល $x_0=3$, $x_1=3$ $\Rightarrow x_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។ ដោយ $0<\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4n}<1$

នោះគេបាន: $\left\lfloor\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2}\right\rfloor = x_n - 1$

$$\Rightarrow \left\lfloor\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2}\right\rfloor - 1 = x_n - 2$$

តែ $x_n - 2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2} - 2$

$$= \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]^2 + \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]^2 - 2$$

$$= \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]^2$$

ត្រូវស្រាយថា: $y_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}$ ជាចំនួនគត់

យើងមាន:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \frac{2}{1-\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}$$

$$= \frac{2}{1+\sqrt{5}}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)^{n} + \frac{2}{1-\sqrt{5}}\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)^{n}$$

$$= \frac{2}{1+\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \frac{2}{1-\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

ដោយ $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 3$, $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow y_{n+1} = 3y_n - y_{n-1}$ ដែល $y_0 = -1, y_1 = 1$

នោះ y_n ជាចំនួនគត់ ។

ដូចនេះ $\left\lfloor\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4n-2}\right\rfloor-1$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ ។

លំហាត់ទី២៥

ស្រាយថាសមីការ $x^2+y^2+z^2=2016^{2015}+2014$ គ្មានឫស ក្នុងសំណុំចំនួនគត់ x,y,z ទេ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាសមីការ $x^2+y^2+z^2=2016^{2015}+2014$ គ្មានឫស

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n នោះ $n^2\equiv 0,1,4 \pmod 8$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\equiv 0,1,2,3,4,5,6 \pmod 8$ (1)

តែ $2016\equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow 2016^{2015}\equiv 1 \pmod 8$

$2014\equiv 6 \pmod 8$

$\Rightarrow 2016^{2015}+2014\equiv 7 \pmod 8$ (2)

តាម (1) និង(2) គេបាន: គ្មានចំនួនគត់ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$x^2+y^2+z^2=2016^{2015}+2104$ ទេ

ដូចនេះ សមីការ $x^2+y^2+z^2=2016^{2015}+2104$ គ្មានឫសក្នុងសំណុំ ចំនួនគត់ទេ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យ $a_1=4$, $a_n=4^{a_{n-1}}$, $n>1$ ។ ចូររកសំណល់ពេល a_{2015} ចែកនឹង7

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $\gcd(4,7)=1$

តាម *Fermat* $4^6 \equiv 1\,(\bmod 7)$

យើងមាន $4^n \equiv 4\,(\bmod 6)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n

$\Rightarrow 4^n = 6t+4,\ t$ ជាចំនួនគត់

$\Rightarrow a_{2015} = 4^{a_{2014}} = 4^{6t+4} = 4^4.\left(4^6\right)^t \equiv 4(\bmod 7)$

ដូចនេះ a_{2015} ចែកនឹង 7 ឲ្យសំណល់ 4 ។

លំហាត់ទី២៧

រកសំណល់ $3^{2^n}-1$ ពេលចែកនឹង 2^{n+3} ។

ដំណោះស្រាយ

រកសំណល់ $3^{2^n}-1$ ពេលចែកនឹង 2^{n+3} ។

ដោយ $3^{2^n}-1=(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^{2^2}+1)\ldots(3^{2^{n-1}}+1)$

ដោយដឹងថា $(3^2+1),(3^{2^2}+1),\ldots,(3^{2^{n-1}}+1)$ ចែកដាច់នឹង 2 តែចែកមិនដាច់នឹង 4 ព្រោះថា $3\equiv -1\,(\bmod 4) \Rightarrow 3^{2^k}\equiv 1\,(\bmod 4)$

$\Rightarrow 3^{2^k}+1\equiv 2\,(\bmod 4)$ ។ វាបង្ហាញថាមានចំនួនគត់សេស $(2m+1)$ មួយផ្ទៀងផ្ទាត់: $(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^{2^2}+1)\ldots(3^{2^{n-1}}+1)\equiv 2^{n-1}(2m+1)$

នោះ $3^{2^n}-1=2.4.2^{n-1}(2m+1)=m.2^{n+3}+2^{n+2}$

ដូចនេះ សំណល់ពេល $3^{2^n}-1$ នឹង 2^{n+3} គឺ 2^{n+2} ។

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យពហុធា $1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17}$ ដែល $y=x+1$ និង a_i ជាចំនួនថេរ រកតម្លៃ a_2 ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ a_2

តាង $f(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}$ (1)

$\Rightarrow xf(x)=x-x^2+x^3-x^4+\cdots+x^{17}-x^{18}$ (2)

យក $(1)+(2): xf(x)+f(x)=1-x^{18} \Rightarrow f(x)=\dfrac{1-x^{18}}{1+x}$

$$\Rightarrow f(y-1)=\frac{1-(y-1)^{18}}{1+(y-1)}=\frac{1-\left(y-1\right)^{18}}{y}$$

នោះគេបាន a_2 ជាមេគុណរបស់ y^3 ក្នុងការពន្លាត $1-(y-1)^{18}$ គឺ

$$a_2=C_{18}^3=\frac{18!}{15!.3!}=816$$

ដូចនេះ $a_2=816$ ។

លំហាត់ទី២៩

គណនា $A=\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{(n-k)!(n+k)!}\right)$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{(n-k)!(n+k)!}\right)=\dfrac{1}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!}\right)$

$$=\frac{1}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{n-k}=\frac{1}{2.(2n)!}\left[\sum_{k=0}^{n}2.\binom{2n}{n-k}\right] \quad (1)$$

ដោយ $\left[\sum_{k=0}^{n}2.\binom{2n}{n-k}\right]=2\left[\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n-2}+\cdots+\binom{2n}{0}\right]$ (1)

ដោយ $\binom{2n}{0}=\binom{2n}{2n}$

$$\binom{2n}{1}=\binom{2n}{2n-1}$$
$$\binom{2n}{2}=\binom{2n}{2n-2}$$
$$\vdots$$
$$\binom{2n}{n}=\binom{2n}{n}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}=\sum_{k=n}^{2n}\binom{2n}{k}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{2n}2.\binom{2n}{n-k}=2\left[\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n-2}+\cdots+\binom{2n}{0}\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{2n}\left[\binom{2n}{k}\right]+\binom{2n}{n}=2^{2n}+\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{(n-k)!(n+k)!}\right)=\frac{1}{2.(2n)!}\left[2^{2n}+\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]$$
$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{(n-k)!(n+k)!}\right)=\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}+\frac{1}{2.(n!)^2}$$

ដូចនេះ $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{(n-k)!(n+k)!}\right)=\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}+\frac{1}{2.(n!)^2}$ ។

លំហាត់ទី៣០

រកបណ្ដាឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) របស់សមីការ $15^x+4^x+\lfloor A\rfloor^x=y^{2014}$ ក្នុងនោះនិម្មិត $\lfloor A\rfloor$ សញ្ញាសម្គាល់ឲ្យផ្នែកគត់របស់ចំនួនពិត A ដែល: $A=\sqrt{\frac{2}{1}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+\cdots+\sqrt[2015]{\frac{2015}{2014}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\sqrt{\frac{2}{1}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+\cdots+\sqrt[2015]{\frac{2015}{2014}}>2014 \quad (1)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន:

$$\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}}=\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}\underbrace{1.1...1}_{k}}\leq\frac{1}{k+1}\left(\frac{k+1}{k}+k\right)=\frac{1}{k+1}\left(\frac{k^2+k+1}{k}\right)$$

$$\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}}\leq\frac{k(k+1)+1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

សញ្ញាស្មើមិនអាចកើតមានទេព្រោះ $\frac{k+1}{k}\neq 1$

$$\Rightarrow\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}}<1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{2014}\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}}<\sum_{k=1}^{2014}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2015-\frac{1}{2015}<2015$$

$A<2015\ \ (2)$

តាម (1) និង (2) : $2014<A<2015\Rightarrow\lfloor A\rfloor=2014$

គេបានសមីការថ្មីគឺ $15^x+4^x+2014^x=y^{2014}$

ដោយ $15^x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3)\ ,4^x\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)\ ,2014^x\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$

$\Rightarrow 15^x+4^x+2014^x\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$

បើ $y=3k\ ,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow y^{2014}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3)$ សមីការគ្មានឫស

$y=3k+1\ ,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow y^{2014}\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ សមីការគ្មានឫស

$y=3k+2\ ,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow y^{2014}\equiv(3k+2)^{2014}\equiv(-1)^{2014}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,3)$

សមីការគ្មានឫស

ដូចនេះសមីការ $15^x+4^x+\lfloor A\rfloor^x=y^{2014}$ គ្មានឫសជាចំនួនគត់ទេ ។

លំហាត់ទី៣១

ចូរកំណត់មេគុណរបស់ x^2 ពេលពន្លាត

$(1+x)(1+2x)(1+4x)\cdots(1+2^n x)$

ដំណោះស្រាយ

តាង $f_n(x)=a_{n,0}+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,n}x^n$

$=(1+x)(1+2x)(1+4x)\cdots(1+2^n x)$

$\Rightarrow a_{n,0}=1$, $a_{n,1}=1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$

តែ $f_n(x)=f_{n-1}(x)(1+2^n x)$

$=\left(1+(2^n-1)x+a_{n-1,2}x^2+\cdots\right)(1+2^n x)$

$=1+(2^{n+1}-1)x+(a_{n-1,2}+2^{2n}-2^n)x^2+\cdots$

គេបាន: $a_{n,2}=a_{n-1,2}+2^{2n}-2^n$ យក $u_n=a_{n-1,2}$

$u_{n+1}-u_n=2^{2n}-2^n$

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^{n-1}(u_{i+1}-u_i)=\sum_{i=2}^{n-1}(2^{2n}-2^n)$$

$$\Rightarrow u_n-u_2=\frac{2^4(4^{n-2}-1)}{3}-\frac{2^2(2^{n-2}-1)}{2-1}$$

$$\Rightarrow u_n=u_2+\frac{2^4(2^{2n-4}-1)}{3}-2^2(2^{n-2}-1)$$

តែ $u_2=a_{1,2}$

ដោយ $f_n(x)=a_{n,0}+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,n}x^n$

$=(1+x)(1+2x)(1+4x)\cdots(1+2^n x)$

$\Rightarrow f_1(x)=a_{1,0}+a_{1,1}x+a_{1,2}x^2=(1+x)(1+2x)$

$=1+3x+2x^2\Rightarrow a_{1,2}=2$

$$\Rightarrow u_n = 2 + \frac{2^{2n}-16}{3} - (2^n - 4)$$
$$= \frac{6 + 2^{2n} - 16 - 3.2^n + 12}{3}$$
$$= \frac{2^{2n} - 3.2^n + 2}{3} = \frac{(2^n-1)(2^n-2)}{3}$$
$$\Leftrightarrow a_{n-1,2} = \frac{(2^n-1)(2^n-2)}{3}$$
$$\Rightarrow a_{n,2} = \frac{(2^{n+1}-1)(2^{n+1}-2)}{3}$$

ដូចនេះ មេគុណរបស់ x^2 ពេលពន្លាតរួចគឺ : $\dfrac{(2^{n+1}-1)(2^{n+1}-2)}{3}$

លំហាត់ទី៣២

កំណត់ប្រភេទត្រីកោណ ABC ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

$$\sqrt{2}\sin(\mathrm{B}+45^\circ) = \frac{a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)}{2abc} \quad (1)$$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $\sqrt{2}\sin(\mathrm{B}+45^\circ) = \dfrac{a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)}{2abc}$

$$= \frac{a^2b+a^2c-a^3+b^2a+b^2c-b^3+c^2a+c^2b-c^3}{2abc}$$
$$= \frac{a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$$
$$= \frac{(b^2+c^2-a^2)}{2bc} + \frac{(a^2+c^2-b^2)}{2ac} + \frac{(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$$
$$= \cos A + \cos B + \cos C$$

តាមសមីការ (1) : $\sqrt{2}\sin(B+45^\circ) = \cos\mathrm{A} + \cos B + \cos C$

$\sin B+\cos B=\cos A+\cos B+\cos C$

$\sin B=\cos A+\cos C$

$2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$

$\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$

តែ $A+B+C=\pi\Rightarrow\frac{A+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$

$\Rightarrow\cos\frac{A+C}{2}=\sin\frac{B}{2}$ គេបាន:

$\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}$

$\left[\begin{array}{l}B=A-C\\B=C-A\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B+C=A\\B+A=C\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A=90^\circ\\C=90^\circ\end{array}\right.$

ដូចនេះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងដែលមានកំពូល A ឬ C ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $x^4+y^4+z^4=1$។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម $\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $0<u<1$

តាង $f(u)=u(1-u^8)$ និងយក A ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានមួយ

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន:

$$A\left(f(u)\right)^8=Au^8\underbrace{(1-u^8)(1-u^8)\cdots(1-u^8)}_{8\,times}\le\left[\frac{Au^8+8(1-u^8)}{9}\right]^9$$

យក $A=8$ គេបាន: $8\left(f(u)\right)^8 \le \left(\frac{8}{9}\right)^9$

$$\left(f(u)\right)^8 \le \frac{8^8}{9^9}$$

$$f(u) \le \frac{8}{\sqrt[4]{3^9}}$$

យើងបាន: $\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}=\frac{x^4}{x(1-x^8)}+\frac{y^4}{y(1-y^8)}+\frac{z^4}{z\left(1-z^8\right)}$

$$\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8} \ge \frac{(x^4+y^4+z^4).\sqrt[4]{3^9}}{8}$$

$$\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8} \ge \frac{\sqrt[4]{3^9}}{8}=\frac{9\sqrt[4]{3}}{8},\ x^4+y^4+z^4=1$$

ដូចនេះ តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}$ គឺ $\frac{9\sqrt[4]{3}}{8}$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេឲ្យ u,v និង w ជាឫសនៃពហុធា $P(x)=x^3-10x+11$ ។

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $A=\arctan u+\arctan v+\arctan w$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $A=\arctan u+\arctan v+\arctan w$

យើងមាន $P(x)=x^3-10x+11$ មានឫស u,v,w

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន:

$u+v+w=0$

$uv+vw+uw=-10$

$uvw=-11$

តាង $u=\tan a$

$v=\tan b$

$w=\tan c$

គេបាន៖ $a=\arctan u$

$b=\arctan v$

$c=\arctan w$

យើងមាន៖ $\tan(a+b+c)=\dfrac{\tan a+\tan b+\tan c-\tan a\tan b\tan c}{1-(\text{tanatanb}+\tan b\tan c+\tan a\tan c)}$

$$\tan(\text{a}+\text{b}+\text{c})=\frac{u+v+w-uvw}{1-(uv+uw+vw)}=\frac{0-(-11)}{1-(-10)}=1$$

$$\Rightarrow a+b+c=\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \arctan u+\text{arctanv}+\text{arctanw}=\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះ $A=\arctan u+\arctan v+\arctan w=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

លំហាត់ទី៣៥

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $A=\lim\limits_{x\to2015}\left(\dfrac{x}{x-2015}\displaystyle\int_{2015}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\right)$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖ $\lim\limits_{x\to2015}\left(\dfrac{x}{x-2015}\displaystyle\int_{2015}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\right)$

តាង $\displaystyle\int_{2015}^{x}\frac{\sin t}{t}dt=F(x)$

$$\Rightarrow \int_{2015}^{x}\frac{\sin t}{t}dt=F(x)-F(2015)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2015}\left(\frac{x}{x-2015}\int_{2015}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\right)=\lim_{x\to 2015}\left(\frac{x}{x-2015}\left(F(x)-F(2015)\right)\right)$$

$$\lim_{x\to 2015}\left(\frac{x}{x-2015}\int_{2015}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\right)=\lim_{x\to 2015}\left(\frac{F(x)-F(2015)}{x-2015}\right)\lim_{x\to 2015}x$$

$$\lim_{x\to 2015}\left(\frac{x}{x-2015}\int_{2015}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\right)=F'(2015).2015$$

តែ $F'(x)=\frac{\sin x}{x}\Rightarrow F'(2015)=\frac{\sin 2015}{2015}$

$$\lim_{x\to 2015}\left(\frac{x}{x-2015}\int_{2015}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\right)=\frac{\sin 2015}{2015}\cdot 2015=\sin 2015$$

ដូចនេះ $A=\lim_{x\to 2015}\left(\frac{x}{x-2015}\int_{2015}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\right)=\sin 2015$

លំហាត់ទី៣៦

គណនាតម្លៃកន្សោម $A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}$

តាង $y=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}$ គេបាន:

$$\ln y=\ln\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}$$

$$\ln y=\ln\frac{1}{n}+\ln\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}$$

$$\ln y=-\ln n+\frac{1}{n}\ln(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)$$

$$\ln y = -\ln n + \frac{1}{n}\left(\ln(3n+1) + \ln(3n+2) + \ln(3n+n)\right)$$

$$\ln y = -\ln n + \frac{1}{n}\left(\sum_{r=1}^{n}\ln(3n+r)\right)$$

$$\ln y = -\ln n + \frac{1}{n}\left(\sum_{r=1}^{n}\ln n\left(3+\frac{r}{n}\right)\right)$$

$$\ln y = -\ln n + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\ln n + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\ln\left(3+\frac{r}{n}\right)$$

$$\ln y = -\ln n + \ln n + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\ln\left(3+\frac{r}{n}\right)$$

$$\ln y = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\ln\left(3+\frac{r}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln y = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\ln\left(3+\frac{r}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln y = \int_0^1 \ln(3+x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln y = \left((3+x)\ln(3+x) - x\right)\Big|_0^1$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln y = (4\ln 4 - 1) - (3\ln 3 - 0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln y = \ln 256 - \ln e - \ln 27 = \ln\frac{256}{27e}$$

$$\ln \lim_{n\to\infty} y = \ln\frac{256}{27e}$$

$$\lim_{n\to\infty} y = \frac{256}{27e}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}} = \frac{256}{27e}$

លំហាត់ទី៧៧

គណនា $A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $y=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$ គេបាន:

$$\ln y=\ln\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(\mathrm{n}+\mathrm{n})\right)$$

$$\ln y=\ln\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(\sum_{r=1}^{n}\ln(n+r)\right)$$

$$\ln y=-\ln n+\frac{1}{n}\left(\sum_{r=1}^{n}\ln n\left(1+\frac{r}{n}\right)\right)$$

$$\ln y=-\ln n+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\ln n+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)$$

$$\ln y=-\ln n+\ln n+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)$$

$$\ln y=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln y=\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$$\ln\lim_{n\to\infty}y=\left((1+x)\ln(1+x)-x\right)\Big|_0^1$$

$$\ln\lim_{n\to\infty}y=2\ln 2-1=\ln 4-\ln e=\ln\frac{4}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}y=\frac{4}{e}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}=\frac{4}{e}$

លំហាត់ទី៣៨

បង្ហាញថាកន្សោម $A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ មានតម្លៃក្នុង $[m,M]$

ដែល $m=\min\left\{\frac{a_1}{b_1};\frac{a_2}{b_2};\ldots;\frac{a_n}{b_n}\right\}$ និង $M=\max\left\{\frac{a_1}{b_1};\frac{a_2}{b_2};\ldots;\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាកន្សោម $A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ មានតម្លៃក្នុង $[m,M]$

ដោយ $m=\min\left\{\frac{a_1}{b_1};\frac{a_2}{b_2};\ldots;\frac{a_n}{b_n}\right\}$ គេបាន:

$\frac{a_1}{b_1}\ge m,\frac{a_2}{b_2}\ge m,\ldots\frac{a_n}{b_n}\ge m$

$\Rightarrow a_1\ge mb_1,a_2\ge mb_2,\ldots,a_n\ge mb_n$

$\Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_n\ge m(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$\Rightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\ge m \quad (1)$

$M=\max\left\{\frac{a_1}{b_1};\frac{a_2}{b_2};\ldots;\frac{a_n}{b_n}\right\}$ គេបាន:

$\frac{a_1}{b_1}\le M,\frac{a_2}{b_2}\le M,\ldots\frac{a_n}{b_n}\le M$

$\Rightarrow a_1\le Mb_1,\ a_2\le Mb_2,\ldots,a_n\le Mb_n$

$\Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_n\le M(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$\Rightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\le M \quad (2)$

តាម (1) និង (2): $m \le \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \le M$

ដូចនេះ កន្សោម $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$ មានតម្លៃក្នុង $[m, M]$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេឲ្យស្វ៊ីត(a_n) មួយកំណត់ដោយ $a_1 = 1, a_n = \left\lfloor \dfrac{n^3}{a_{n-1}} \right\rfloor, \; n > 1$ ។

គណនា a_{2015}

ដំណោះស្រាយ

គណនា a_{2015}

យើងមាន: $a_1 = 1 \,;\, a_n = \left\lfloor \dfrac{n^3}{a_{n-1}} \right\rfloor \;;\; a_2 = \left\lfloor \dfrac{8}{1} \right\rfloor = 8 \;;\; a_3 = \left\lfloor \dfrac{27}{8} \right\rfloor = 3$

យើងនឹងបន្តស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់សេស $n > 3$, $a_n = n$

ត្រូវស្រាយថា $a_{n+2} = n + 2$ ជាការគ្រប់គ្រាន់ ។

យើងមាន: $a_{n+1} = \left\lfloor \dfrac{(n+1)^3}{a_n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n} \right\rfloor = n^2 + 3n + 3$

$$a_{n+2} = \left\lfloor \frac{(n+2)^3}{a_{n+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n+2)^3}{n^2 + 3n + 3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^3 + 6n^2 + 12n + 8}{n^2 + 3n + 3} \right\rfloor$$

$$a_{n+2} = \left\lfloor \frac{(n+2)(n^2 + 3n + 3) + n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n + 3} \right\rfloor$$

$$a_{n+2} = \left\lfloor n + 2 + \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n + 3} \right\rfloor = n + 2 \text{ ពិត}$$

ព្រោះ $0 < \dfrac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n + 3} < 1$

$\Rightarrow a_n = n$

$\Rightarrow a_{2015} = 2015$

ដូចនេះ $a_{2015} = 2015$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយដែលមានមុំស្រួច A,B,C ។ ស្រាយថា

បើ $n \geq m+1, m \geq 0$ គេបាន: $P = \dfrac{\tan^n A}{\sin^m \frac{A}{2}} + \dfrac{\tan^n B}{\sin^m \frac{B}{2}} + \dfrac{\tan^n C}{\sin^m \frac{C}{2}} \geq 2^m . 3^{\frac{n+2}{2}}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{\tan^n A}{\sin^m \frac{A}{2}} + \dfrac{\tan^n B}{\sin^m \frac{B}{2}} + \dfrac{\tan^n C}{\sin^m \frac{C}{2}} \geq 2^m . 3^{\frac{n+2}{2}}$

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន:

$$\frac{\tan^n A}{\sin^m \frac{A}{2}} + \underbrace{2^{m+1}(\sqrt{3})^n \sin\frac{A}{2} + 2^{m+1}(\sqrt{3})^n \sin\frac{A}{2} + \cdots + 2^{m+1}(\sqrt{3})^n \sin\frac{A}{2}}_{m}$$

$$\geq (\mathrm{m}+1)\sqrt[m+1]{\left(2^{m+1}(\sqrt{3})^n\right)^m \tan^n A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan^n A}{\sin^m \frac{A}{2}} + m2^{m+1}(\sqrt{3})^n \sin\frac{A}{2} \geq (\mathrm{m}+1)\sqrt[m+1]{\left(2^{m+1}(\sqrt{3})^n\right)^m \tan^n A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan^n A}{\sin^m \frac{A}{2}} + m2^{m+1}(\sqrt{3})^n \sin\frac{A}{2} \geq (\mathrm{m}+1)2^m(\sqrt{3})^{\frac{nm}{m+1}} \sqrt[m+1]{\tan^n A} \ (1)$$

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន:

$$\frac{\tan^n B}{\sin^m \frac{B}{2}}+m2^{m+1}(\sqrt{3})^n\sin\frac{B}{2}\geq (\mathrm{m}+1)2^m(\sqrt{3})^{\frac{nm}{m+1}}\sqrt[m+1]{\tan^n B}\ (2)$$

$$\frac{\tan^n C}{\sin^m \frac{C}{2}}+m2^{m+1}(\sqrt{3})^n\sin\frac{C}{2}\geq (\mathrm{m}+1)2^m(\sqrt{3})^{\frac{nm}{m+1}}\sqrt[m+1]{\tan^n C}\ (3)$$

យក $(1)+(2)+(3)$:

$$\frac{\tan^n A}{\sin^m \frac{A}{2}}+\frac{\tan^n B}{\sin^m \frac{B}{2}}+\frac{\tan^n C}{\sin^m \frac{C}{2}}+m2^{m+1}(\sqrt{3})^n\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\geq (m+1)2^{m+1}(\sqrt{3})^{\frac{mn}{m+1}}\left(\sqrt[m+1]{\tan^n A}+\sqrt[m+1]{\tan^n B}+\sqrt[m+1]{\tan^n C}\right)\ (4)$$

តាង $f(x)=\tan^\alpha x\ ,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ ,\ \alpha>1$

$$\Rightarrow f'(x)=\alpha(1+\tan^2 x)\tan^{\alpha-1}x=\alpha\tan^{\alpha-1}x+\alpha\tan^{\alpha+1}x$$

$$\Rightarrow f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+\tan^2 x)\tan^{\alpha-2}x+\alpha(\alpha+1)(1+\tan^2 x)\tan^\alpha x>0$$

$\Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍ផត ។ តាមវិសមភាព *Jensen* គេបាន:

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}\geq f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

តែ $A+B+C=\pi$

$$\Leftrightarrow \tan^\alpha A+\tan^\alpha \mathrm{B}+\tan^\alpha C\geq 3\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^\alpha=3(\sqrt{3})^\alpha$$

$$\Rightarrow \sqrt[m+1]{\tan^n A}+\sqrt[m+1]{\tan^n B}+\sqrt[m+1]{\tan^n C}\geq 3(\sqrt{3})^{\frac{n}{m+1}}\ (5)$$

តាង $g(x)=\sin x\Rightarrow g'(x)=\cos x\Rightarrow g''(x)=-\sin x<0$

$\Rightarrow g$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។ តាមវិសមភាព *Jensen* គេបាន:

$$\frac{g\left(\frac{A}{2}\right)+g\left(\frac{B}{2}\right)+g\left(\frac{C}{2}\right)}{3}\leq g\left(\frac{A+B+C}{6}\right)$$

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le 3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\ \ (6)$$

យក (5) និង(6) ជំនួសក្នុង (4) គេបាន:

$$\Rightarrow \frac{\tan^n A}{\sin^m \frac{A}{2}}+\frac{\tan^n B}{\sin^m \frac{B}{2}}+\frac{\tan^n C}{\sin^m \frac{C}{2}}+m2^{m+1}(\sqrt{3})^n.\frac{3}{2}$$

$$\ge (m+1)2^{m+1}(\sqrt{3})^{\frac{mn}{m+1}}.3(\sqrt{3})^{\frac{n}{m+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan^n A}{\sin^m \frac{A}{2}}+\frac{\tan^n B}{\sin^m \frac{B}{2}}+\frac{\tan^n C}{\sin^m \frac{C}{2}}$$

$$\ge (m+1)2^{m+1}(\sqrt{3})^{\frac{mn}{m+1}}.3(\sqrt{3})^{\frac{n}{m+1}}-m2^{m+1}(\sqrt{3})^n.\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan^n A}{\sin^m \frac{A}{2}}+\frac{\tan^n B}{\sin^m \frac{B}{2}}+\frac{\tan^n C}{\sin^m \frac{C}{2}}\ge 2^m.3^{\frac{n+2}{2}}$$ ពិត

ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៤១

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ។ ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n\ge 2\ ;\ x,y,z>0$

គេបាន: $x\tan^n A+y\tan^n B+z\tan^n C\ge \dfrac{9.3^{\frac{n}{2}}.xyz}{xy+yz+zx}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $x\tan^n A+y\tan^n B+z\tan^n C\ge \dfrac{9.3^{\frac{n}{2}}.xyz}{xy+yz+zx}$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន:

$$\left(x\tan^n A+y\tan^n B+z\tan^n C\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\left(\tan^{\frac{n}{2}}A+\tan^{\frac{n}{2}}B+\tan^{\frac{n}{2}}C\right)^2$$

ដោយ $\tan^{\alpha}x+\tan^{\alpha}y+\tan^{\alpha}z\geq 3\tan^{\alpha}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$

(តាមលំហាត់ទី៤០សម្រាយខាងលើរួចហើយ)

$$\Rightarrow \tan^{\frac{n}{2}}A+\tan^{\frac{n}{2}}B+\tan^{\frac{n}{2}}C\geq 3\tan^{\frac{n}{2}}\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

ដោយ $A+B+C=\pi$

$$\Rightarrow \tan^{\frac{n}{2}}A+\tan^{\frac{n}{2}}B+\tan^{\frac{n}{2}}C\geq 3\tan^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow\left(\tan^{\frac{n}{2}}A+\tan^{\frac{n}{2}}B+\tan^{\frac{n}{2}}C\geq 3\tan^{\frac{n}{2}}\right)^2\geq 9.3^{\frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow\left(x\tan^n A+y\tan^n B+z\tan^n C\right)\geq\frac{9.3^{\frac{n}{2}}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

$$\left(x\tan^n A+y\tan^n B+z\tan^n C\right)\geq\frac{9.3^{\frac{n}{2}}.xyz}{xy+yz+zx}$$ ពិត

ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៤២

ស្វ៊ីត $x_{0,}x_1,x_2\ldots$ និង $y_0\,,y_1,y_2\ldots$ កំណត់ដោយ:

$x_0=y_0=1$, $x_{n+1}=\frac{x_n+2}{x_n+1}$, $y_{n+1}=\frac{y_n^2+2}{2y_n}$ ចំពោះ $n=0,1,2\ldots$ ។

ស្រាយថា $y_n=x_{2^n-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $x_{n+1}=\frac{x_n+2}{x_n+1}$ សមីការសម្គាល់ $r=\frac{r+2}{r+1}\Rightarrow r=\pm\sqrt{2}$

$y_{n+1}=\frac{y_n^2+2}{2y_n}$ សមីការសម្គាល់ $u=\frac{u^2+2}{2u}\Rightarrow u=\pm\sqrt{2}$

តាង $a_n=\frac{x_n-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{x_{n+1}-\sqrt{2}}{x_{n+1}+\sqrt{2}}=\frac{\frac{x_n+2}{x_n+1}-\sqrt{2}}{\frac{x_n+2}{x_n+1}+\sqrt{2}}=\frac{x_n+2-\sqrt{2}(x_n+1)}{x_n+2+\sqrt{2}(x_n+1)}$

$\Leftrightarrow a_{n+1}=\frac{(1-\sqrt{2})x_n-\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})x_n+\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}=\frac{(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})}\cdot\frac{x_n-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}}=\frac{(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})}a_n$ (1)

$b_n=\frac{y_n-\sqrt{2}}{y_n+\sqrt{2}}\Rightarrow b_{n+1}=\frac{y_{n+1}-\sqrt{2}}{y_{n+1}+\sqrt{2}}=\frac{\frac{y_n^2+2}{2y_n}-\sqrt{2}}{\frac{y_n^2+2}{2y_n}+\sqrt{2}}=\frac{y_n^2-2\sqrt{2}y_n+\sqrt{2}^2}{y_n^2+2\sqrt{2}y_n+\sqrt{2}^2}$

$\Leftrightarrow b_{n+1}=\left(\frac{y_n-\sqrt{2}}{y_n+\sqrt{2}}\right)^2=b_n^2$ (2) តែ $a_0=b_0=\frac{(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})}=\lambda$

តាម $(1)\Rightarrow(\mathrm{a}_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $a_0=\lambda$, $q=\lambda$

$\Rightarrow a_n=\lambda.\lambda^n=\lambda^{n+1}$

$\Rightarrow a_{2^n-1}=\lambda^{2^n-1+1}=\lambda^{2^n}$ (3)

តាម $(2):\mathrm{b}_{n+1}=\mathrm{b}_n^2\Leftrightarrow\ln b_{n+1}=2\ln b_n$, យក $v_n=\ln b_n\Leftrightarrow v_{n+1}=2v_n$

$\Rightarrow(v_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន

$v_0=\ln b_0=\ln\lambda$, $q=2\Rightarrow v_n=\ln\lambda.2^n=\ln\lambda^{2^n}$

$\Leftrightarrow\ln\lambda^{2^n}=\ln b_n\Rightarrow b_n=\lambda^{2^n}$ (4)

តាម(3) និង (4): $a_{2^n-1}=b_n\Leftrightarrow\frac{x_{2^n-1}-\sqrt{2}}{x_{2^n-1}+\sqrt{2}}=\frac{y_n-\sqrt{2}}{y_n+\sqrt{2}}$

$\Rightarrow x_{2^n-1} = y_n$ ពិត ។

ដូចនេះ $x_{2^n-1} = y_n$

លំហាត់ទី៤៣

រកចំនួនវិជ្ជមាន x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$x + \left[\frac{x}{3}\right] = \left[\frac{2x}{3}\right] + \left[\frac{3x}{5}\right]$ ដែល $[x]$ ជាផ្នែកគត់នៃ x ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $x = 15k + r \quad , 0 \le r \le 14, k \ge 0$ គេបាន:

$$15k + r + \left[\frac{15k+r}{3}\right] = \left[\frac{2(15k+r)}{3}\right] + \left[\frac{3(15k+r)}{3}\right]$$

$$\Rightarrow 15k + r + 5k + \left[\frac{r}{3}\right] = 10k + \left[\frac{2r}{3}\right] + 9k + \left[\frac{3r}{5}\right]$$

$$\Rightarrow k + r + \left[\frac{r}{3}\right] = \left[\frac{2r}{3}\right] + \left[\frac{3r}{5}\right]$$

$\Rightarrow k = 0 \ , \ r = 2$

ដូចនេះ $x = 2$ ។

លំហាត់ទី៤៤

បង្ហាញថាចំនួន $A = 2^{2^{2016}} + 2^{2^{2015}} + 1$ ចែកដាច់នឹង 21 ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $A = 2^{2^{2016}} + 2^{2^{2015}} + 1 = \left(2^{2^{2015}}\right)^2 + 2^{2^{2015}} + 1$

យើងមាន: $2^{2015} \equiv 2 \pmod 6 \Rightarrow 2^{2015} = 6k + 2$

$$\Rightarrow A=\left(2^{6k+2}\right)^2+2^{6k+2}+1=(3.21+1)^{2k}.16+(3.21+1)^k.4+1$$
$$\equiv 1.16+1.4+1\equiv 21\equiv 0 \pmod{21}$$

ដូចនេះ $A=2^{2^{2016}}+2^{2^{2015}}+1$ ចែកដាច់នឹង 21 ។

លំហាត់ទី៤៥

ក-ចំពោះ $x>0$ គណនា $A=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$ ។

ខ-ចំពោះ $x<1$ គណនា $B=\arctan\frac{1+x}{1-x}-\arctan x$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ចំពោះ $x>0$ គណនា $A=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$

របៀបទី១

យើងមាន: $A=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \tan A=\tan\left(\arctan x+\arctan\frac{1}{x}\right)=\frac{\tan(\arctan x)+\tan\left(\arctan\frac{1}{x}\right)}{1-\tan(\arctan x)\tan\left(\arctan\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{x+\frac{1}{x}}{1-x.\frac{1}{x}}=+\infty$$

$$\Rightarrow A=\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $A=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ ។

របៀបទី២

តាង $y=\arctan\frac{1}{x}\Rightarrow \tan y=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\cot y=\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$

$$\Rightarrow \arctan x=\frac{\pi}{2}-y$$

យើងបាន: $A=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-y+y=\frac{\pi}{2}$

ខ-ចំពោះ $x<1$ គណនា $B=\arctan\frac{1+x}{1-x}-\arctan x$

យើងមាន: $B=\arctan\frac{1+x}{1-x}-\arctan x$

$$\Rightarrow \tan B=\tan\left(\arctan\frac{1+x}{1-x}-\arctan x\right)$$

$$=\frac{\tan\left(\arctan\frac{1+x}{1-x}\right)-\tan(\arctan x)}{1+\tan\left(\arctan\frac{1+x}{1-x}\right)\tan(\arctan x)}=\frac{\frac{1+x}{1-x}-x}{1+\frac{1+x}{1-x}.}$$

$$\Rightarrow \tan B=\frac{1+x-x+x^2}{1-x+x+x^2}=1\Rightarrow B=\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $B=\arctan\frac{1+x}{1-x}-\arctan x=\frac{\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឲ្យk ជាចំនួនគត់មួយ និង $n=\sqrt[3]{k+\sqrt{k^2-1}}+\sqrt[3]{k-\sqrt{k^2-1}}+1$

ស្រាយថា n^3-3n^2 ជាចំនួនគត់មួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា n^3-3n^2 ជាចំនួនគត់មួយ

តាង $a=\sqrt[3]{k+\sqrt{k^2-1}}$, $b=\sqrt[3]{k-\sqrt{k^2-1}}+1$ និង $c=1-n$

នោះ $a+b+c=0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^3=0$

$\Leftrightarrow (a+b)^3+3(a+b)c(a+b+c)+c^3=0$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3(ac+bc)(a+b+c)+3\text{ab}(\text{a}+\text{b})=0$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3(ac+bc)(a+b+c)+3\text{ab}(a+b+c)-3abc=0$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ac)-3abc=0$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

តែ $ab=1$ នោះសមភាពទៅជា:

$2k+(1-n^3)=3(1-n)$

$2k+1-3n+3n^2-n^3=3-3n$

$n^3-3n^2=2k-2$ ពិត ។ ព្រោះ k ជាចំនួនគត់

ដូចនេះ n^3-3n^2 ចំនួនគត់ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ។ ស្រាយថា:

$a.\ \ r_a+r_b+r_c=4R+r$

$b.\ \ r_a+r_b+r=4\cos C+r_c$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $r_a+r_b+r_c=4R+r$

យើងមាន: $r_a+r_b+r_c=4R+r$

$\Leftrightarrow r_a+r_b+r_c-r=4R$

តែ $r_a=\dfrac{S}{p-a}, r_b=\dfrac{S}{p-b}$, $r_c=\dfrac{S}{p-c}$, $r=\dfrac{S}{p}$ គេបាន:

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p}$$

$$\Leftrightarrow r_a + r_b + r_c - r = S\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_a + r_b + r_c - r = S\left(\frac{(p-a)+(p-b)}{(p-a)(p-b)} + \frac{p-(p-c)}{p(p-c)}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_a + r_b + r_c - r = S\left(\frac{c}{(p-a)(p-b)} + \frac{c}{p(p-c)}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_a + r_b + r_c - r = Sc\left(\frac{p(p-c)+(p-a)(p-b)}{\mathrm{p}(p-a)(p-b)(\mathrm{p-c})}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_a + r_b + r_c - r = Sc\left(\frac{p^2 - pc + p^2 - p(a+b) + ab}{S^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_a + r_b + r_c - r = c\left(\frac{2p^2 - p(a+b+c) + ab}{S}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_a + r_b + r_c - r = c\left(\frac{2p^2 - p.2p + ab}{S}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_a + r_b + r_c - r = \frac{abc}{S} = 4R$$ ពិត

ដូចនេះ $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

b. $r_a + r_b + r = 4\cos C + r_c$

យើងមាន: $r_a + r_b + r = 4\cos C + r_c$

$$\Leftrightarrow r_a + r_b + r - r_c = 4R\cos C$$

$$r_a + r_b + r - r_c = \left(\frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p} - \frac{S}{p-c}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_a + r_b + r - r_c = S\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p-c}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_a+r_b+r-r_c=S\left(\frac{(p-b)+(p-a)}{(p-b)(p-a)}+\frac{p-c-p}{p(p-c)}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_a+r_b+r-r_c=S\left(\frac{c}{(p-b)(p-a)}-\frac{c}{p(p-c)}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_a+r_b+r-r_c=Sc\left(\frac{p(p-c)-(p-b)(p-a)}{\mathrm{p}(p-b)(p-a)(\mathrm{p-c})}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_a+r_b+r-r_c=Sc\left(\frac{p^2-pc-p^2+p(a+b)-ab}{S^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_a+r_b+r-r_c=c\left(\frac{p(a+b-c)-ab}{S}\right)$$

$$\Leftrightarrow r_a+r_b+r-r_c=\frac{c}{S}\left(\frac{1}{2}(a+b+c)(a+b-c)-ab\right)$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\mathrm{sinB}}=\dfrac{c}{\mathrm{sinC}}=2R$

$$\Rightarrow a=2R\sin A,\ \ b=2R\,\mathrm{sinB},\ \ \mathrm{c}=2R\,\mathrm{sinC}$$

$$\Leftrightarrow r_a+r_b+r-r_c$$

$$=\frac{c}{S}\left(\frac{1}{2}\cdot 4R^2\left(\mathrm{sinA+sinB+sinC}\right)\left(\mathrm{sinA+sinB-sinC}\right)-4R^2\sin A\sin B\right)$$

$$=\frac{2R^2c}{S}\left(\left(\mathrm{sinA+sinB+sinC}\right)\left(\mathrm{sinA+sinB-sinC}\right)-2\sin A\sin B\right)$$

$$=\frac{2R^2c}{\frac{abc}{4R}}\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C\right)\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin C\right)$$

$$-\frac{2R^2c}{\frac{abc}{4R}}\cdot 2\sin A\sin B$$

$$=\frac{8R^3}{ab}\left(2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\left(2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$-\frac{16R^3}{ab}\sin A\sin B$

$=\frac{8R^3}{ab}\cdot 4\cos^2\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$

$-\frac{16R^3}{ab}\sin A\sin B$

$=\frac{8R^3}{ab}\cdot 4\cos^2\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right)-\frac{16R^3}{ab}\sin A\sin B$

$=\frac{8R^3}{ab}\cdot 4\cos^2\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)-\frac{16R^3}{ab}\sin A\sin B$

$=\frac{8R^3}{ab}\cdot 4\cos^2\frac{C}{2}\sin A\sin B-\frac{16R^3}{ab}\sin A\sin B$

$=\frac{8R^3\,\text{sinAsinB}}{ab}\left(4\cos^2\frac{C}{2}-2\right)$

$=4R\left(2\cos^2\frac{C}{2}-1\right)$

$\Leftrightarrow r_a+r_b+r-r_c$

$=4R\cos C$ ពិត ។

ដូចនេះ $r_a+r_b+r=4\cos C+r_c$ ។

លំហាត់ទី៤៨

បើ $x+y+z=0$ ស្រាយថា $\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=\frac{x^7+y^7+z^7}{7}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=\frac{x^7+y^7+z^7}{7}$

តាង $p(k)=k^3+pk+q$ មានឫស x, y, z គេបាន:

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0 \\ y^3 + py + q = 0 \\ z^3 + pz + q = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 + px + q = 0 \ \times x^n \\ y^3 + py + q = 0 \ \times y^n \\ z^3 + pz + q = 0 \ \times z^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{n+3} + px^{n+1} + qx^n = 0 \ \ (1) \\ y^{n+3} + py^{n+1} + qy^n = 0 \ \ (2) \\ z^{n+3} + pz^{n+1} + qz^n = 0 \ \ (3) \end{cases}$$

យក $(1)+(2)+(3)$:

$$x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} + p\left(x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1}\right) + q(x^n + y^n + z^n) = 0$$

តាង $S_n = x^n + y^n + z^n$ គេបាន:

$$S_{n+3} + pS_{n+1} + qS_n = 0 \Rightarrow S_{n+3} = -pS_{n+1} - qS_n \ \ (*)$$

ដោយ $S_0 = x^0 + y^0 + z^0 = 3$

$S_1 = x + y + z = 0$

$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត:

$xy + yz + zx = p$

$\Rightarrow S_2 + 2p = 0$

$\Rightarrow S_2 = -2p$

តាម $(*)$: $S_{n+3} = -pS_{n+1} - qS_n$

យក $n = 0: S_3 = -pS_1 - qS_n \Leftrightarrow S_3 = -p(0) - qS_0 = -3q$

$n = 1 : S_4 = -pS_2 - qS_1 \Leftrightarrow S_4 = -(-2p)p = 2p^2$

$n = 2 : S_5 = -pS_3 - qS_2 \Leftrightarrow S_5 = -p(-3q) - q(-2p) = 5pq$

$n = 4 : S_7 = -pS_5 - qS_4 \Leftrightarrow S_7 = -p(5pq) - q(2p^2) = -7p^2q$

គេបានសមភាព: $\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=\frac{x^7+y^7+z^7}{7}$

$$\Leftrightarrow \frac{-2p}{2}\cdot\frac{5pq}{5}=\frac{-7p^2q}{7}$$

$p^2q=p^2q$ ពិត

ដូចនេះ សមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឲ្យ $a_n=(n^2+1)n!$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ បើ $\frac{a_{100}}{a_1+a_2+\cdots+a_{100}}=\frac{p}{q}$ ដែល $\gcd(p,q)=1$ ។ គណនាផលបូក $p+q$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $a_n=(n^2+1)n!$

$$=\left(n^2+n-(n-1)\right)n!$$

$$=\left(n(n+1)-(n-1)\right)n!$$

$$=n(n+1)!-(n-1)\,\mathrm{n}!$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{100}a_n=\sum_{n=1}^{100}\left(n(n+1)!-(n-1)\,\mathrm{n}!\right)$$

$$\Leftrightarrow a_1+a_2+\cdots+a_{100}=(100^2+1)100!$$

តែ $a_{100}=(100^2+1)100!$

$$\Rightarrow\frac{a_{100}}{a_1+a_2+\cdots+a_{100}}=\frac{100.101!}{(100^2+1)100!}=\frac{100.101}{(100^2+1)}=\frac{10100}{10001}$$

ដោយ $\gcd(10100,10001)=1$

$$\Rightarrow p+q=10100+10001=20101$$

ដូចនេះ $p+q=20101$ ។

លំហាត់ទី៥០

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $A=\binom{2015}{2}+\binom{2015}{5}+\binom{2015}{8}+\cdots+\binom{2015}{2015}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $A=\binom{2015}{2}+\binom{2015}{5}+\binom{2015}{8}+\cdots+\binom{2015}{2015}$

យក $x^3=1\Leftrightarrow x^2+x+1=0$

តាង $f(x)=(1+x)^{2015}$

$$=\binom{2015}{0}+\binom{2015}{1}x+\binom{2015}{2}x^2+\cdots+\binom{2015}{2015}x^{2015}$$

គេបាន: $xf(x)=\binom{2015}{0}x+\binom{2015}{1}x^2+\binom{2015}{2}$

$$=\binom{2015}{3}x+\binom{2015}{4}x^2+\binom{2015}{5}\quad(1)$$

$$\vdots$$

$$=\binom{2015}{2013}x+\binom{2015}{2014}x^2+\binom{2015}{2015}$$

$$x^2f(x^2)=\binom{2015}{0}x^2+\binom{2015}{1}x+\binom{2015}{2}$$

$$=\binom{2015}{3}x^2+\binom{2015}{4}x+\binom{2015}{5}\quad(2)$$

$$\vdots$$

$$=\binom{2015}{2013}x^2+\binom{2015}{2014}x+\binom{2015}{2015}$$

$$f(1)=\binom{2015}{0}+\binom{2015}{1}+\binom{2015}{2}$$

$$=\binom{2015}{3}+\binom{2015}{4}+\binom{2015}{5}\quad(3)$$

$$\vdots$$

$$=\binom{2015}{2013}+\binom{2015}{2014}+\binom{2015}{2015}$$

យក $(1)+(2)+(3):\ xf(x)+x^2f(x^2)+f(1)=3A$

$$\Rightarrow A=\frac{xf(x)+x^2f(x^2)+f(1)}{3}$$

តែ $xf(x)=x(1+x)^{2015}$

$\Leftrightarrow xf(x) = x(-x^2)^{2015}$, $x^2 + x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow xf(x) = -x^{4031} = -(x^3)^{1343}.x^2 = -x^2$, $x^3 = 1$

$x^2 f(x^2) = x^2(1+x^2)^{2015}$

$\Leftrightarrow x^2 f(x^2) = x^2(-x)^{2015} = -x^{2017}$

$\Leftrightarrow x^2 f(x^2) = -(x^3)^{672}.x = -x$

$f(1) = 2^{2015}$

$$\Rightarrow A = \frac{2^{2015} - x^2 - x}{3} = \frac{2^{2015} - (x^2 + x + 1) + 1}{3} = \frac{2^{2015} + 1}{3}$$

ដូចនេះ $A = \dfrac{2^{2015} + 1}{3}$

លំហាត់ទី៥១

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n > 2 : n^n(n-2)^{n-2} > (n-1)^{2(n-1)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $n^n(n-2)^{n-2} > (n-1)^{2(n-1)}$

តាង $f(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{2(n-1)}}$, $x > 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{nx^{n-1}(1 + x^{2n-2}) - 2(n-1)x^{2n-3}.x^n}{\left(1 + x^{2(n-1)}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{nx^{n-1} + nx^{3n-3} - 2nx^{3n-3} + 2x^{3n-3}}{\left(1 + x^{2(n-1)}\right)^2} = \frac{nx^{n-1} - nx^{3n-3} + 2x^{3n-3}}{\left(1 + x^{2(n-1)}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^{n-1}\left(n - nx^{2n-2} + 2x^{2n-2}\right)}{\left(1 + x^{2(n-1)}\right)^2} = \frac{x^{n-1}\left(n - (n-2)x^{2n-2}\right)}{\left(1 + x^{2(n-1)}\right)^2}$$

ដោយ $x > 0 \Rightarrow x^{n-1} > 0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាតាម $n - (n-2)x^{2n-2}$

ព្រោះ $\left(1+x^{2(n-1)}\right)^2 > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$

បើ $n-(n-2)x^{2n-2}=0 \Rightarrow x_0 = \sqrt[2n-2]{\dfrac{n}{n-2}}$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$\sqrt[2n-2]{\dfrac{n}{n-2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{(n-2)\left(\sqrt[2n-2]{\dfrac{n}{n-2}}\right)^n}{2n-2}$	$\searrow$	

ដោយ $\sqrt[2n-2]{\dfrac{n}{n-2}} \neq 1$, $\sqrt[2n-2]{\dfrac{n}{n-2}} > 1$

តាមតារាងសញ្ញា: $f(x_0) > f(1)$

តែ $f(1)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f(x_0) > \dfrac{1}{2}$, $x_0 = \sqrt[2n-2]{\dfrac{n}{n-2}}$

$$\Rightarrow f(x_0) = \frac{\left(\sqrt[2n-2]{\dfrac{n}{n-2}}\right)^n}{1+\dfrac{n}{n-2}} = \frac{(n-2)\left(\sqrt[2n-2]{\dfrac{n}{n-2}}\right)^n}{2n-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-2)\left(\sqrt[2n-2]{\dfrac{n}{n-2}}\right)^n}{2n-2} > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-2}{2(n-1)}\left(\sqrt[2n-2]{\frac{n}{n-2}}\right)^n > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[2n-2]{\frac{n}{n-2}}\right)^n > \frac{n-1}{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{n-2}\right)^n > \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{2n-2}$$

$$\Leftrightarrow n^n(n-2)^{2n-2} > (n-1)^{2n-2}(n-2)^n$$

$\Leftrightarrow n^n(n-2)^{n-2} > (n-1)^{2(n-1)}$ ពិត

ដូចនេះ $n^n(n-2)^{n-2} > (n-1)^{2(n-1)}$ $,n > 2$

លំហាត់ទី៥២

គេឲ្យ a,b,c,d ជាចំនួនគត់ ។ស្រាយថា

$2\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)-\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2+8abcd$

ចែកដាច់នឹង $a+b+c+d$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $x^4-\left(\sum a\right)x^3+\left(\sum ab\right)x^2-\left(\sum abc\right)x+abcd$ (1)

$\Rightarrow a, b, c, d$ ជាឫសនៃសមីការ (1) គេបាន:

$$\Rightarrow \left(\sum a^4\right)-\left(\sum a\right)\left(\sum a^3\right)+\left(\sum ab\right)\left(\sum a^2\right)-\left(\sum abc\right)\left(\sum a\right)+4abcd=0$$

$$\Rightarrow \left(\sum a^4\right)+\left(\sum ab\right)\left(\sum a^2\right)+4abcd=\left(\sum a\right)\left(\sum a^3\right)+\left(\sum abc\right)\left(\sum a\right)$$

$$\Rightarrow \left(\sum a^4\right)+\left(\sum ab\right)\left(\sum a^2\right)+4abcd=\left(\sum a\right)\left[\left(\sum a^3\right)+\left(\sum abc\right)\right]$$

តែ $\left(\sum ab\right)=\dfrac{\left(\sum a\right)^2-\left(\sum a^2\right)}{2}$

$$\Rightarrow\left(\sum a^4\right)+\left[\frac{\left(\sum a\right)^2-\left(\sum a^2\right)}{2}\right]\left(\sum a^2\right)+4abcd$$

$$=\left(\sum a\right)\left[\left(\sum a^3\right)+\left(\sum abc\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sum a^4\right)+\left[\left(\sum a\right)^2-\left(\sum a^2\right)\right]\left(\sum a^2\right)+8abcd$$

$$=2\left(\sum a\right)\left[\left(\sum a^3\right)+\left(\sum abc\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sum a^4\right)-\left(\sum a^2\right)^2+8abcd$$

$$=2\left(\sum a\right)\left[\left(\sum a^3\right)+\left(\sum abc\right)\right]-\left(\sum a\right)^2\left(\sum a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sum a^4\right)-\left(\sum a^2\right)^2+8abcd$$

$$=\left(\sum a\right)\left[2\left(\sum a^3\right)+2\left(\sum abc\right)-\left(\sum a\right)\left(\sum a^2\right)\right]$$ ពិត

ដូចនេះ $2\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)-\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2+8abcd$

ចែកដាច់នឹង $a+b+c+d$

លំហាត់ទី៥៣

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} 2x^3+3x^2-18=y^3+y & (1) \\ 2y^3+3y^2-18=z^3+z & (2) \\ 2z^3+3z^2-18=x^3+x & (3) \end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(u)=2u^3+3u^2-18$ និង $g(v)=v^3+v$

សមីការខាងលើទៅជា $\begin{cases} f(x)=g(y) \\ f(y)=g(z) \\ f(z)=g(x) \end{cases}$

គេបាន: $g'(\mathrm{v})=\mathrm{v}^2+1>0\,,\forall v\in\mathbb{R}$ នោះ g ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច

ឧបមាថា $x=\max(x,y,z)\Rightarrow\begin{cases}x\geq y\\x\geq z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq g(y)\\g(x)\geq g(z)\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}g(x)\geq f(x)\\g(z)\leq f(z)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+x\geq 2x^3+3x^2-18\\z^3+z\leq 2z^3+3z^2-18\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+3x^2-x-18\leq 0\\z^3+3z^2-z-18\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(x^2+5x+9)\leq 0\\(\mathrm{y}-2)(\mathrm{y}^2+5y+9)\geq 0\end{cases}$$

តែ $x^2+5x+9=x^2+5x+\frac{25}{4}+\frac{11}{4}=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0\,,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\leq 0\\z-2\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq 2\\z\geq 2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2\leq z\leq x\leq 2$

$\Rightarrow x=z=2$

តាម (1): $2x^3+3x^2-18=y^3+y$

$\Leftrightarrow 2.2^3+3.2^2-18=y^3+y$

$\Leftrightarrow y^3+y-10=0$

$\Leftrightarrow (y-2)(y^2+2y+5)=0$

តែ $y^2+2y+5=y^2+2y+1+4=(y+1)^2+4>0\,,\forall y\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y=2$

តម្លៃ $x=2,y=2,z=2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់សមីការ

ដូចនេះ $x=2,y=2,z=2$ ជាគូរចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ស្រាយថា:

$m_a^2+m_b^2+m_c^2=3R^2\left(2+2\cos A\cos B\cos C\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $m_a^2+m_b^2+m_c^2=3R^2\left(2+2\cos A\cos B\cos C\right)$

តាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន:

$$m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$$m_b^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}$$

$$m_c^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$$

$$\Rightarrow m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)\quad (*)$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\text{sinB}}=\frac{c}{\text{sinC}}=2R$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=4R^2\left(\sin^2 A+\sin^2\text{B}+\sin^2\text{C}\right)$$

តាម $(*)$: $\Rightarrow m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\cdot 4R^2\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)$

$$\Leftrightarrow m_a^2+m_b^2+m_c^2=3R^2\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)$$

យើងមាន:

$$\sin^2\text{A}+\sin^2\text{B}+\sin^2\text{C}=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\left(1-\cos^2 C\right)$$

$$=2-\frac{1}{2}\left(\cos 2A+\cos 2B\right)-\cos^2 C$$

$$=2-\frac{1}{2}\left(2\cos(A+B)\cos(A-B)\right)-\cos^2 C$$

តែ $A+B+C=\pi \Rightarrow \pi - C = A+B \Rightarrow \cos(\mathrm{A+B})=-\cos\mathrm{C}$

$\Leftrightarrow \sin^2\mathrm{A}+\sin^2\mathrm{B}+\sin^2\mathrm{C}=2+\cos C\cos(A-B)+\cos\mathrm{C}\cos(\mathrm{A+B})$

$\Leftrightarrow \sin^2\mathrm{A}+\sin^2\mathrm{B}+\sin^2\mathrm{C}=2+\cos C\left(\cos(A-B)+\cos(A+B)\right)$

$\Leftrightarrow \sin^2\mathrm{A}+\sin^2\mathrm{B}+\sin^2\mathrm{C}=2+\cos C\left(2\cos A\cos B\right)$

$\Leftrightarrow \sin^2\mathrm{A}+\sin^2\mathrm{B}+\sin^2\mathrm{C}=2+2\cos A\cos B\cos C$

$\Leftrightarrow m_a^2+m_b^2+m_c^2=3R^2\left(2+2\cos A\cos B\cos C\right)$ ពិត

ដូចនេះ $m_a^2+m_b^2+m_c^2=3R^2\left(2+2\cos A\cos B\cos C\right)$ ។

លំហាត់ទី៥៥

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC គេបាន:

$$\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos\mathrm{B}}{b^3}+\frac{\cos\mathrm{C}}{c^3}\geq\frac{81}{16p^2}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos\mathrm{B}}{b^3}+\frac{\cos\mathrm{C}}{c^3}\geq\frac{81}{16p^2}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Leftrightarrow a^2+2b\cos A=b^2+c^2$$

$\Leftrightarrow \frac{2bc\cos A}{a^2}+1=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}$ (1) (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង a^2)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន:

$$\frac{2ac\cos\mathrm{B}}{b^2}+1=\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{b^2}\quad(2)$$

$$\frac{2ab\cos\mathrm{C}}{c^2}+1=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\quad(3)$$

យក $(1)+(2)+(3)$:

$$3+\frac{2bc\cos A}{a^2}+\frac{2ac\cos B}{b^2}+\frac{2ab\cos C}{c^2}$$

$$=\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{b^2}\right)+\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)$$

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន:

$$\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{b^2}\right)+\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)\geq 6$$

$$\Leftrightarrow 3+\frac{2bc\cos A}{a^2}+\frac{2ac\cos B}{b^2}+\frac{2ab\cos C}{c^2}\geq 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc\cos A}{a^2}+\frac{ac\cos B}{b^2}+\frac{ab\cos C}{c^2}\geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{abc\cos A}{a^3}+\frac{abc\cos B}{b^3}+\frac{abc\cos C}{c^3}\geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\geq \frac{3}{2abc}\quad (*)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន:

$$\frac{1}{abc}\geq\left(\frac{3}{a+b+c}\right)^3\Rightarrow\frac{3}{2abc}\geq\frac{3}{2}\left(\frac{3}{a+b+c}\right)^3=\frac{81}{16p^3}\quad (**)$$

តាម $(*)$ និង $(**)$ គេបាន:

$$\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\geq\frac{81}{16p^2}$$

ដូចនេះ $\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\geq\frac{81}{16p^2}$ ។

លំហាត់ទី៥៦

គេឲ្យ α និង β ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមានដែល $\alpha^2+4\beta$ មិនមែនជាការេប្រាកដ។ ស្វ៊ីត $(x_n)_{n\geq 0}$ កំណត់ដោយ $x_{n+2}=\alpha x_{n+1}+\beta x_n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 0$ ។ ដោយដឹងថា x_1 និង x_2 ជាចំនួនគត់។ស្រាយថាគ្មានចំនួនគត់ n_0 ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_{n_0}^2=x_{n_0-1}\cdot x_{n_0+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $x_{n+2}=\alpha x_{n+1}+\beta x_n$

សមីការសម្គាល់ស្វ៊ីត $x^2-\alpha x-\beta=0$ (1)

$\Delta=\alpha^2+4\beta>0$ ព្រោះ $\alpha\ ,\beta>0$

ឧបមាថា r_1,r_2 ជាឫសនៃសមីការ

$x_n=Ar_1^n+Br_2^n$

$\Rightarrow x_{n_0}=Ar_1^{n_0}+Br_2^{n_0}$

$\Rightarrow x_{n_0-1}=Ar_1^{n_0-1}+Br_2^{n_0-1}$

$\Rightarrow x_{n_0+1}=Ar_1^{n_0+1}+Br_2^{n_0+1}$

ឧបមាថាមានចំនួនគត់ n_0 មួយផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $x_{n_0}^2=x_{n_0-1}\cdot x_{n_0+1}$

$\left(Ar_1^{n_0}+Br_2^{n_0}\right)^2=\left(Ar_1^{n_0-1}+Br_2^{n_0-1}\right)\left(Ar_1^{n_0+1}+Br_2^{n_0+1}\right)$

$\Leftrightarrow A^2r_1^{2n_0}+2ABr_1^{n_0}r_2^{n_0}+B^2r_2^{2n_0}$

$=A^2r_1^{2n_0}+ABr_1^{n_0-1}r_2^{n_0+1}+ABr_1^{n_0+1}r_2^{n_0-1}+B^2r_2^{2n_0}$

$\Leftrightarrow 2ABr_1^{n_0}r_2^{n_0}=AB_1^{n_0-1}r_2^{n_0-1}\left(r_1^2+r_2^2\right)$

$\Leftrightarrow 2r_1r_2=r_1^2+r_2^2$

$\Leftrightarrow \left(r_1-r_2\right)^2=0$

$\Rightarrow r_1=r_2$ ផ្ទុយពីការពិតព្រោះ $\Delta\neq 0$

ដូចនេះ គ្មានចំនួនគត់ n_0 ណាមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_{n_0}^2 = x_{n_0-1}\cdot x_{n_0+1}$ ។

លំហាត់ទី៥៧

គេឲ្យ $a\,,b\,,c\,,d$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $abcd\ge 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $abcd\ge 3$ បើ $\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1$

របៀបទី១

តាង $x=\frac{1}{1+a^4}\ ,\ y=\frac{1}{1+b^4}\ ,\ z=\frac{1}{1+c^4}\ ,\ t=\frac{1}{1+d^4}$

$\Rightarrow x+y+z+t=1$

$$\Rightarrow\begin{cases} a^4=\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{y+z+t}{x}\\ b^4=\dfrac{1-y}{y}=\dfrac{x+z+t}{y}\\ c^4=\dfrac{1-z}{z}=\dfrac{x+y+t}{z}\\ c^4=\dfrac{1-t}{t}=\dfrac{x+y+z}{t}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a^4.b^4.c^4.d^4=\frac{(y+z+t)(x+z+t)(x+y+t)(x+y+z)}{xyzt}$$

តាមវិសមភាព $Cauchy$: $(abcd)^4\ge\dfrac{3\sqrt[3]{yzt}.3\sqrt[3]{xzt}.3\sqrt[3]{xyt}.3\sqrt[3]{xyz}}{xyzt}=3^4$

$\Rightarrow abcd\ge 3$ ពិត

ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

របៀបទី២

តាង $a^2 = \tan x$, $b^2 = \tan y$, $c^2 = \tan z$, $d^2 = \tan u$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{1+\tan^2 y} + \frac{1}{1+\tan^2 z} + \frac{1}{1+\tan^2 u} = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \cos^2 u = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 - \cos^2 u = \sin^2 u$$

តាមវិសមភាព $Cauchy$:

$$\sin^2 u = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z \geq 3\sqrt[3]{\cos^2 x.\cos^2 y.\cos^2 z}$$

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន:

$$\sin^2 x \geq 3\sqrt[3]{\cos^2 y.\cos^2 z.\cos^2 u}$$

$$\sin^2 y \geq 3\sqrt[3]{\cos^2 x.\cos^2 z.\cos^2 u}$$

$$\sin^2 z \geq 3\sqrt[3]{\cos^2 x.\cos^2 y.\cos^2 u}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x.\sin^2 y.\sin^2 z.\sin^2 u \geq 3^4.\cos^2 x.\cos^2 y.\cos^2 z.\cos^2 u$$

$$\Rightarrow \tan^2 x.\tan^2 y.\tan^2 z.\tan^2 u \geq 3^4$$

$$\Rightarrow (abcd)^4 \geq 3^4$$

$$\Rightarrow abcd \geq 3$$

ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

របៀបទី៣

យើងនឹងស្រាយថា: $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+y^2} \geq \dfrac{2}{1+xy}$ ចំពោះ $\forall x, y > 0$

និង $xy \geq 1$ ។

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \geq 0$$

$$\frac{(x-y)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$ ព្រោះ $xy \geq 1$

ដោយ $\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}\le 1\Leftrightarrow 2+a^4+b^4\le 1+a^4+b^4+a^4b^4$

$$\Leftrightarrow a^4.b^4\ge 1\Leftrightarrow a.b\ge 1$$

យើងបាន: $\frac{1}{1+(a^2)^2}+\frac{1}{1+(b^2)^2}\ge\frac{2}{1+a^2b^2}$ (1)

$\frac{1}{1+(c^2)^2}+\frac{1}{1+(d^2)^2}\ge\frac{2}{1+c^2.d^2}$ (2)

យក $(1)+(2)$ គេបាន:

$$1\ge 2\left(\frac{2}{1+abcd}\right)\Rightarrow 1+abcd\ge 4$$

$$\Rightarrow abcd\ge 3$$

ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៥៨

គេឲ្យ α,β,γ ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណមួយដែល $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ $T=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ $T=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

របៀបទី១ ដោយ α,β,γ ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណ

$\sin\alpha>0,\sin\beta>0,\sin\gamma>0$ ។

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន: $\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\ge\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$

$$\Rightarrow\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\le\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^3\quad(1)$$

តាងអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sin x$ ដែល $0<x<\pi$

នោះ $f'(x)=\cos x$ និង $f''(x)=-\sin x<0$ នាំឲ្យ f ជាអនុគមន៍ប៉ោង តាមវិសមភាពយិនសិន $(Jensen's\ inequality)$ ចំពោះគ្រប់ α , β , γ នៃចន្លោះ $(0\,,\pi)$ គេបាន:

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}\le f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ (2)$$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

ដូចនេះតម្លៃអតិបរមានៃ $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ គឺ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ។

របៀបទី២ យកត្រីកោណ ABC មានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ តាងមុំ $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$ ដែល $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$ ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC គេទាញបាន:

$$\sin\alpha=\frac{a}{2R}\,,\sin\beta=\frac{b}{2R}\,,\sin\gamma=\frac{c}{2R}\Rightarrow T=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{abc}{8R^3}\ \ (1)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$:

គេមាន $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ (2)

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$:

$$(a+b+c)^2\le(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)=3(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow a+b+c\le\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \ (3)$$

តាម (2) និង (3) គេទាញ $abc\le\left(\frac{\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3}\right)^3$ (4)

តាមរូបមន្ត $Leibnitz$ គេមាន $OG^2=R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$

ដែល G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ។

ដោយ $OG\geq 0$ នោះ $R^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}\geq 0 \quad \Rightarrow a^2+b^2+c^2\leq 9R^2\,(5)$

តាម (4) និង (5) គេទាញបាន:

$$abc\leq\left(\frac{\sqrt{3}.\sqrt{9R^2}}{3}\right)^2=3\sqrt{3}R^3\Rightarrow\frac{abc}{8R^3}\leq\frac{3\sqrt{3}}{9}\ \ (6)$$

តាម (1) និង (6) គេបាន: $T=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\dfrac{abc}{8R^3}\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

ដូចនេះតម្លៃអតិបរមានៃ $T=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ គឺ $T_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

លំហាត់ទី៥៩

បន្សំនៃ n ធាតុយកម្តង i ធាតុតាងដោយ $\mathrm{C}(n;i)$ ។ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាបង្ហាញថា: $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\mathrm{C}(n;i)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\mathrm{C}(n;i)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$

យើងមាន: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\mathrm{C}(n;i)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$

បើ $n=1:\displaystyle\sum_{i=1}^{1}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\mathrm{C}(1;i)=\sum_{j=1}^{1}\frac{1}{j}\Leftrightarrow 1^2\cdot\frac{1}{1}\cdot 1=\frac{1}{1}$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=p:\displaystyle\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\mathrm{C}(\mathrm{p};i)=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}$

យើងនឹងបន្តស្រាយបញ្ជាក់ថាវាពិតដល់ $n=p+1$:

$$\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\mathrm{C}(\mathrm{p}+1;i)=\sum_{j=1}^{p+1}\frac{1}{j}$$

គេមានៈ $\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}C(p+1,i)=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\cdot C(p+1,i)+(-1)^{p+2}\cdot\frac{1}{p+1}$

ព្រោះ $C(p+1;p+1)=1$

ដោយ $C(p+1;i)=\frac{(p+1)!}{(p+1-i)!i!}=\frac{p+1}{p+1-i}\cdot\frac{p!}{(p-i)!i!}$

$$=\frac{p+1}{p+1-i}C(p;i)=\left(1+\frac{i}{p+1-i}\right)C(p;i)$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\mathrm{C}(\mathrm{p}+1;i)=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\left[\left(1+\frac{i}{p+1-i}\right)C(p;i)\right]+(-1)^{p+2}\cdot\frac{1}{p+1}$$

$$=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}C(p;i)+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}C(p;i)\cdot\frac{i}{p+1-i}+(-1)^{p+2}\cdot\frac{1}{p+1}$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\cdot\frac{1}{p+1-i}C(p;i)+(-1)^{p+2}\cdot\frac{1}{p+1}$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\cdot\frac{1}{p+1}C(p+1;i)+(-1)^{p+2}\cdot\frac{1}{p+1}$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}+\frac{1}{p+1}\left[\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}C(p+1;i)+(-1)^{p+2}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}+\frac{1}{p+1}\left[\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^{i+1}C(p+1;i)+1\right]$$

តាមទ្វេធាញូតុនៈ $(a+b)^{p+1}=\sum_{i=0}^{p+1}C(p+1;i).a^{p+1-i}b^{i}$

យក $a=1,b=-1$ គេបានៈ

$$\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^{i}C(p+1;1)=0\Rightarrow\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^{i+1}C(p+1;1)=0$$

$$\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}C(p+1,i)=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}+\frac{1}{1+p}=\sum_{j=1}^{p+1}\frac{1}{j}$$ ពិត

ដូចនេះ $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}\mathrm{C}(n;i)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$ ។

លំហាត់ទី៦០

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k នោះមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n_k ដែល $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^k=\sqrt{n_k}-\sqrt{n_{k-1}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^k=\sqrt{n_k}-\sqrt{n_{k-1}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^k}=\frac{1}{\sqrt{n_k}+\sqrt{n_{k-1}}}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^k=\sqrt{n_k}+\sqrt{n_{k-1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n_k}=\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^k+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^k\right)$$

$$\Rightarrow n_k=\frac{1}{4}\left(\left(5+2\sqrt{6}\right)^k+\left(5-2\sqrt{6}\right)^k+2\right)$$

តាង $x_k=\left(5+2\sqrt{6}\right)^k+\left(5-2\sqrt{6}\right)^k$

$x_0=2$, $x_1=10,\left(5+2\sqrt{6}\right)+\left(5-2\sqrt{6}\right)=10,\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)=1$

$\Rightarrow x_{n+2}=10x_{n+1}-x_n$

បន្ទាប់មកយើងនឹងស្រាយថា $x_k\equiv 2 \pmod 4$

ចំពោះ $k=0: x_0\equiv 2 \pmod 4$ ពិត

$k=1: x_1\equiv 10\equiv 2 \pmod 4$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $k=p: x_p\equiv 2 \pmod 4$

ស្រាយថាវាពិតដល់ $k = p+1: x_{p+1} \equiv 2 \pmod 4$

ដោយ $x_{p+1} = 10x_p - x_{p-1} \equiv 10.2 - 2 \equiv 2 \pmod 4$ ពិត

ដូចនេះមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n_k ដែល $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^k = \sqrt{n_k} - \sqrt{n_{k-1}}$ ។

លំហាត់ទី៦១

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុងសំណុំចំនួនពិត $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3=18 \\ x^7+y^7+z^7=2058 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $p(k) = k^3 + ak^2 + bk + c$ មានឫស x, y, z

តែ $x+y+z=0 \Rightarrow p(k) = k^3 + bk + c$

$$\begin{cases} x^3+ax^2+bx+c=0 \\ y^3+ay^2+by+c=0 \\ z^3+az^2+bz+c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{n+3}+bx^{n+1}+cx^n=0 \quad (1) \\ y^{n+3}+by^{n+1}+cy^n=0 \quad (2) \\ z^{n+3}+bz^{n+1}+cz^n=0 \quad (3) \end{cases}$$

យក $(1)+(2)+(3)$:

$$\Rightarrow \left(x^{n+3}+y^{n+3}+z^{n+3}\right)+b\left(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}\right)+c\left(x^n+y^n+z^n\right)=0$$

តាង $S_n = x^n+y^n+z^n \Leftrightarrow S_{n+3}+bS_{n+1}+cS_n=0 \quad (*)$

ដោយ $x+y+z=0 \Rightarrow (x+y+z)^3=0$

$x^3+(y+z)^3+3x(y+z)(x+y+z)=0$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$

$\Leftrightarrow 18 = 3xyz \Rightarrow xyz = 6$
$\Rightarrow c = -6$

គេបាន: $S_{n+3} + bS_{n+1} - 6S_n = 0$

$\Rightarrow S_{n+3} = 6S_n - bS_{n+1}$
$\Rightarrow S_7 + bS_5 - 6S_4 = 0$

$\Leftrightarrow S_7 + b(6S_2 - bS_3) - 6(6S_1 - bS_2) = 0$

$\Leftrightarrow S_7 + 12bS_2 - b^2S_3 - 36S_2 = 0$

ដោយ $S_7 = 2058,\ S_3 = 18,\ S_1 = 0$

ហើយ $x + y + z = 0 \Rightarrow \left(x + y + z\right)^2 = 0$

$\Rightarrow S_2 + 2b = 0 \Rightarrow S_2 = -2b$ គេបាន: $2058 + 12b(-2b) - 18b^2 = 0$

$\Leftrightarrow 42b^2 = 2058$

$\Leftrightarrow b = \pm 7$

បើ $b = -7 \Leftrightarrow p(x) = x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x-3)(x+2)$

នោះ $\left[\begin{array}{l}(x+1) = 0\\(x-3) = 0\\(x+2) = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = -1\\x = 3\\x = -2\end{array}\right.$

បើ $b = 7 \Leftrightarrow\ p(x) = x^3 + 7x - 6$ កើនដាច់ខាត ។

នាំឲ្យពហុធាគ្មានឫស

ដូចនេះប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ $(x; y; z) = (-1; 3; -2)$ និងគ្រប់ចម្លាស់របស់វា ។

លំហាត់ទី៦២

ត្រីកោណ ABC មួយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$\tan^6\dfrac{A}{2} + \tan^6\dfrac{B}{2} + \tan^6\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{9}$ ស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន:

$$\tan^6\frac{A}{2}+\tan^6\frac{B}{2}\ge 2\tan^3\frac{A}{2}\tan^3\frac{B}{2}\quad(1)$$

$$\tan^6\frac{B}{2}+\tan^6\frac{C}{2}\ge 2\tan^3\frac{B}{2}\tan^3\frac{C}{2}\quad(2)$$

$$\tan^6\frac{A}{2}+\tan^6\frac{C}{2}\ge 2\tan^3\frac{A}{2}\tan^3\frac{C}{2}\quad(3)$$

យក $(1)+(2)+(3)$:

$$\tan^6\frac{A}{2}+\tan^6\frac{B}{2}+\tan^6\frac{C}{2}\ge \tan^3\frac{A}{2}\tan^3\frac{B}{2}+\tan^3\frac{B}{2}\tan^3\frac{C}{2}+\tan^3\frac{A}{2}\tan^3\frac{C}{2}(*)$$

តាង $x=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}, y=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}, z=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$

យើងមាន: $A+B+C=\pi\Rightarrow\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

$$\Rightarrow\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1$$

ឬ $x+y+z=1$

តាមវិសមភាព *Cauchy − Schwarz* :

$$\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}+\sqrt{z^2}\right)\left(\sqrt{(x^3)^2}+\sqrt{(y^3)^2}+\sqrt{(z^3)^2}\right)\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$, ព្រោះ $x+y+z=1$

តាមវិសមភាព *Cauchy − Schwarz* :

$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(1^2+1^2+1^2\right)\geq(x+y+z)^2=1$

$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\frac{1}{3}$

$\Rightarrow\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\geq\frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3\geq\frac{1}{9}$

ឬ $\tan^3\frac{A}{2}\tan^3\frac{B}{2}+\tan^3\frac{B}{2}\tan^3\frac{C}{2}+\tan^3\frac{A}{2}\tan^3\frac{C}{2}\geq\frac{1}{9}$

តាម (*) :$\tan^6\frac{A}{2}+\tan^6\frac{B}{2}+\tan^6\frac{C}{2}\geq\frac{1}{9}$

សមភាពកើតពេល $\tan^6\frac{A}{2}=\tan^6\frac{B}{2}=\tan^6\frac{C}{2}$

ឬ $A=B=C$ នោះ ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

ដូចនេះ ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

លំហាត់ទី៦៣

ស្រាយថា:

$$\sin 2^\circ\sin 18^\circ\sin 22^\circ\sin 38^\circ\sin 42^\circ\sin 58^\circ\sin 62^\circ\sin 78^\circ\sin 82^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{1024}$$

ដំណោះស្រាយ

តាង $A=\sin 2^\circ\sin 18^\circ\sin 22^\circ\sin 38^\circ\sin 42^\circ\sin 58^\circ\sin 62^\circ\sin 78^\circ\sin 82$

ដំបូងយើងនឹងស្រាយថា $\sin 3a=4\sin a\sin(60^\circ+a)\sin(60^\circ-\mathrm{a})$

យើងមាន:

$4\sin a\sin(60^\circ+\mathrm{a})\sin(60^\circ-a)$

$$= 4\text{sina}\left(\sin a\cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos a\right)\left(\sin 60^\circ \text{cosa} - \text{sina}\cos 60^\circ\right)$$

$$= 4\sin a\left(\frac{1}{2}\sin a + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos a\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cosa} - \frac{1}{2}\sin a\right)$$

$$= 4\sin a\left(\frac{3}{4}\cos^2 a - \frac{1}{4}\sin^2 a\right)$$

$$= \sin a\left(3\cos^2 a - \sin^2 a\right)$$

$$= \sin a\left(3(1-\sin^2 a) - \sin^2 a\right)$$

$$= \sin a\left(3 - 4\sin^2 a\right)$$

$$= 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$= \sin 3a$ ពិត

យើងបាន:

$$4\sin 2^\circ \sin(60^\circ + 2^\circ)\sin(60^\circ - 2^\circ) = \sin 6^\circ \qquad (1)$$

$$4\sin 18^\circ \sin(60^\circ + 18^\circ)\sin(60^\circ - 18^\circ) = \sin 54^\circ \qquad (2)$$

$$4\sin 22^\circ \sin(60^\circ + 22^\circ)\sin(60^\circ - 22^\circ) = \sin 66^\circ \qquad (3)$$

គុណអង្គ $(1),(2),(3)$: $4^3 A = \sin 6^\circ \sin 54^\circ \sin 66^\circ$

$$64A = \sin 6^\circ \sin(60^\circ - 6^\circ)\sin(60^\circ + 6^\circ)$$

$$64\text{A} = \sin 18^\circ \quad (*)$$

បន្ទាប់មកយើងត្រូវរកតម្លៃនៃ $\sin 18^\circ$

យើងមាន $90^\circ = 3.18^\circ + 2.18^\circ$

$$\Leftrightarrow 90^\circ - 3.18^\circ = 2.18^\circ$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(90^\circ - 3.18^\circ\right) = \cos 2.18^\circ$$

$$\Leftrightarrow \sin 3.18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$$

$$\Leftrightarrow 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 18^\circ - 2\sin^2 18^\circ - 3\sin 18^\circ + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin 18^\circ - 1\right)\left(4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1\right) = 0 \;, \sin 18^\circ \neq 1$$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0$

តាង $t = \sin 18°$, $0 < t < 1$

$4t^2 + 2t - 1 = 0$

$\Delta' = 1 + 4 = 5$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

តែ $t = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$ មិនយក

$\Rightarrow \sin 18° = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

តាម $(*): 64\,\mathrm{A} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow A = \dfrac{\sqrt{5}-1}{1024}$ ពិត

ដូចនេះ

$$\sin 2° \sin 18° \sin 22° \sin 38° \sin 42° \sin 58° \sin 62° \sin 78° \sin 82° = \frac{\sqrt{5}-1}{1024}$$

លំហាត់ទី៦៤

ស្រាយថា: $\dfrac{C_n^0}{C_{n+2}^1} + \dfrac{C_n^1}{C_{n+3}^2} + \dfrac{C_n^2}{C_{n+4}^3} + \cdots + \dfrac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}} + \cdots + \dfrac{C_n^n}{C_{2n+2}^{n+1}} = \dfrac{1}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\dfrac{C_n^0}{C_{n+2}^1} + \dfrac{C_n^1}{C_{n+3}^2} + \dfrac{C_n^2}{C_{n+4}^3} + \cdots + \dfrac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}} + \cdots + \dfrac{C_n^n}{C_{2n+2}^{n+1}} = \dfrac{1}{2}$

យើងមាន: $\dfrac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}} = \dfrac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}{\dfrac{(n+k+2)!}{(k+1)!(n+1)!}}$

$$= \frac{n!(k+1)!(n+1)!}{k!(n-k)!(n+k+2)!}$$

$$= \frac{n!(n+1)!(k+1)}{(n-k)!(n+k+2)!}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n!(n+1)!\big((n+k+2)-(n-k)\big)}{(n-k)!(n+k+2)!}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot n!(n+1)!\left(\frac{1}{(n-k)!(n+k+1)!}-\frac{1}{(n-k-1)!(n+k+2)!}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!}\left(\frac{(2n+1)!}{(n-k)!(n+k+1)!}-\frac{(2n+1)!}{(n-k-1)!(n+k+2)!}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{C_{2n+1}^{n}}\left(C_{2n+1}^{n-k}-C_{2n+1}^{n-k-1}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{C_{2n+1}^{n}}\sum_{k=0}^{n}\left(C_{2n+1}^{n-k}-C_{2n+1}^{n-k-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{C_{2n+1}^{n}}\cdot C_{2n+1}^{n}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_n^0}{C_{n+2}^1}+\frac{C_n^1}{C_{n+3}^2}+\frac{C_n^2}{C_{n+4}^3}+\cdots+\frac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}}+\cdots+\frac{C_n^n}{C_{2n+2}^{n+1}} = \frac{1}{2}$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{C_n^0}{C_{n+2}^1}+\frac{C_n^1}{C_{n+3}^2}+\frac{C_n^2}{C_{n+4}^3}+\cdots+\frac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}}+\cdots+\frac{C_n^n}{C_{2n+2}^{n+1}} = \frac{1}{2}$

លំហាត់ទី៦៥

ប្រៀបធៀប $2016!$ និង $2^{2016}(1008!)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ប្រៀបធៀប $2016!$ និង $2^{2016}(1008!)^2$

យើងនឹងប្រៀបធៀប $(2k)!$ និង $2^{2k}(k!)^2$

ឧបមាថា $(2k)! < 2^{2k}(k!)^2$

បើ $k = 1 \Leftrightarrow 2! < 2^2(1!)^2 \Leftrightarrow 2 < 4$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $k = p \Leftrightarrow (2p)! < 2^{2p}(\text{p}!)^2$

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថាវាពិតដល់:

$k = p+1 \Leftrightarrow \left(2(p+1)\right)! < 2^{2(p+1)}\left((\text{p}+1)!\right)^2$

ដោយ $2p+1 < 2p+2$, $p > 0$

$\Leftrightarrow \left(2p+1\right)\left(2p+2\right) < \left(2p+2\right)^2$

$\Leftrightarrow (2p)!\left(2p+1\right)\left(2p+2\right) < 2^{2p}(\text{p}!)^2\left(2p+2\right)^2$

$\Leftrightarrow (2p+2)! < 2^{2(\text{p}+1)}\left((p+1)!\right)^2$ ពិត

យក $k = 1008$:

$2016! < 2^{2016}(1008!)^2$ ពិត

ដូចនេះ $2016! < 2^{2016}(1008!)^2$ ។

លំហាត់ទី៦៦

រកចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែល $2013^n + 2014^n + 2015^n + 2016^n + 2017^n$ ចែកដាច់នឹង 5 ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែល $2013^n + 2014^n + 2015^n + 2016^n + 2017^n$ ចែកដាច់នឹង 5

យើងមាន: $2013 \equiv 3 \pmod 5$

$\Rightarrow 2013^n \equiv 3^n \pmod 5$

$2014 \equiv 4 \pmod 5$

$\Rightarrow 2014^n \equiv 4^n \pmod 5$

$2015 \equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow 2015^n \equiv 0 \pmod 5$

$2016 \equiv (-4)^n \pmod 5$

$\Rightarrow 2016^n \equiv 3^n \pmod 5$

$2017 \equiv (-3)^n \pmod 5$

$\Rightarrow 2017^n \equiv (-3)^n \pmod 5$

$\Rightarrow 2013^n + 2014^n + 2015^n + 2016^n + 2017^n \equiv 3^n + 4^n + (-3)^n + (-4)^n \pmod 5$

បើ n សេស: $n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2013^n + 2014^n + 2015^n + 2016^n + 2017^n \equiv 0 \pmod 5$

បើ n គូ: $n = 2k\ , k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2013^n + 2014^n + 2015^n + 2016^n + 2017^n \equiv 2\left(3^n + 4^n\right) \pmod 5$

តែ $\gcd(2,5) = 1$

$\Rightarrow 2013^n + 2014^n + 2015^n + 2016^n + 2017^n \equiv 3^{2k} + 4^{2k} \pmod 5$

ដោយ $3^2 \equiv -1 \pmod 5$, $4^2 \equiv 1 \pmod 5$

នោះយើងឃើញថា k ត្រូវតែជាចំនួនសេស $k = 2p+1,\ p \in \mathbb{Z}$

ដូចនេះ $n = 2k+1,\ n = 2(2p+1)\ ,\quad p;k = 0,1,2\ldots$

លំហាត់ទី៦៧

អនុគមន៍ $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ មួយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $f\left(f\left(f(0)\right)\right) = 0$ និង $\left|f(a) - f(b)\right| \le \left|a - b\right|$ ចំពោះគ្រប់ $a,b \in \mathbb{R}$ ។ ស្រាយថា $f(0) = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $f(0)=0$

យើងមាន: $|f(a)-f(b)|\le|a-b|$ ឬ $|a-b|\ge|f(a)-f(b)|$

ដោយ $|f(0)|=|f(0)-0|\ge\left|f\left(f(0)\right)-f(0)\right|$

$\ge\left|f\left(f\left(f(0)\right)\right)-f\left(f(0)\right)\right|=\left|f\left(f(0)\right)\right|$ (1)

ហើយ $\left|f\left(f(0)\right)\right|=\left|f\left(f(0)\right)-0\right|\ge\left|f\left(f\left(f(0)\right)\right)-f(0)\right|=|f(0)|$ (2)

តាម (1) និង (2):

$|f(0)|\ge\left|f\left(f(0)\right)\right|\ge|f(0)|$

$\Rightarrow|f(0)|=\left|f\left(f(0)\right)\right|$

$\Rightarrow f(0)=\pm f\left(f(0)\right)$

បើ $f(0)=f\left(f(0)\right)\Rightarrow f(0)=f\left(f\left(f(0)\right)\right)=0$ ពិត

បើ $f(0)=-f\left(f(0)\right)$

ដោយ $|f(0)|=|f(0)-0|\ge\left|f\left(f(0)\right)-f(0)\right|=|2f(0)|=2|f(0)|$

$\Rightarrow f(0)=0$ ពិត

ដូចនេះ $f(0)=0$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឲ្យស្វ៊ីត $(a_n)_{n=0,1\ldots}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $a_0=1, a_{2016}=0, a_{n+1}=2a_1a_n-a_{n-1}$ $(n\ge1)$ គណនាផលបូក $a_{2015}+a_{2017}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក $a_{2015}+a_{2017}$

ឧបមាថា $|a_1|\ge1$

$|a_2|=|2a_1a_1-a_0|\ge2|a_1||a_1|-|a_0|\ge2|a_1|-1\ge2|a_1|-|a_1|=|a_1|$

$|a_3|=|2a_1a_2-a_1|\ge2|a_1||a_2|-|a_1|\ge2|a_2|-|a_1|\ge2|a_2|-|a_2|=|a_2|$

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k:\left|a_k\right|\ge\left|a_{k-1}\right|$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n=k+1:\ \left|a_{k+1}\right|\ge\left|a_k\right|$

យើងមាន: $a_{k+1}=2a_1a_k-a_{k-1}$

$\Rightarrow\left|a_{k+1}\right|=\left|2a_1a_k-a_{k-1}\right|\ge2\left|a_1\right|\left|a_k\right|-\left|a_{k-1}\right|$

$\ge2\left|a_k\right|-\left|a_{k-1}\right|\ge2\left|a_k\right|-\left|a_k\right|=\left|a_k\right|$ ពិត

$\Rightarrow\left|a_{k+1}\right|\ge\left|a_k\right|\ge\cdots\ge\left|a_1\right|\ge\left|a_0\right|=1$

$\Rightarrow\left|a_k\right|\ge1$ យក $k=2016$

$\left|a_{2016}\right|\ge1\Leftrightarrow0\ge1$ មិនពិត ព្រោះ $a_{2016}=0$

$\Rightarrow\left|a_1\right|<1$

តាង $a_1=\cos\alpha\ ,\ \alpha\in\left(0,\pi\right)$

គេបានស្វ៊ីតថ្មីគឺ: $a_{n+1}=2\cos\alpha a_n-a_{n-1}$

សមីការសម្គាល់ស្វ៊ីត $x^2-2\cos\alpha x+1=0$

$\Delta'=\cos^2\alpha-1=-\sin^2\alpha$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=i\sin\alpha$

$x=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$

$\Rightarrow a_n=A\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)^n+B\left(\cos\alpha-i\sin\alpha\right)^n$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_0=A+B\\a_1=A\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)+B\left(\cos\alpha-i\sin\alpha\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\A\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)+B\left(\cos\alpha-i\sin\alpha\right)=\cos\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=1-B\quad(*)\\(1-B)\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)+B\left(\cos\alpha-i\sin\alpha\right)=\cos\alpha\ \ (**)\end{cases}$$

តាម $(**):(1-B)\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)+B\left(\cos\alpha-i\sin\alpha\right)=\cos\alpha$

$\Leftrightarrow i\sin\alpha-2Bi\sin\alpha=0$

$\Leftrightarrow i\sin\alpha=2Bi\sin\alpha$

$\Leftrightarrow 1=2B \Rightarrow B=\frac{1}{2}$

តាម $(*): \mathrm{A}=1-B$

$A=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_n=\frac{1}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+\frac{1}{2}(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n$

$\Leftrightarrow a_n=\frac{1}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+\frac{1}{2}(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))^n$

$\Leftrightarrow a_n=\frac{1}{2}(\cos\mathrm{n}\alpha+i\sin\mathrm{n}\alpha)+\frac{1}{2}(\cos\mathrm{n}(-\alpha)+i\sin\mathrm{n}(-\alpha))$

$\Leftrightarrow a_n=\frac{1}{2}(\cos\mathrm{n}\alpha+i\sin\mathrm{n}\alpha)+\frac{1}{2}(\cos\mathrm{n}\alpha-i\sin\mathrm{n}\alpha)$

$\Leftrightarrow a_n=\cos n\alpha$

$\Rightarrow a_{2016}=\cos 2016\alpha$

$\cos 2016\alpha=0$

$\Rightarrow 2016\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow 4032\alpha=\pi+2k\pi$

$\Leftrightarrow 2015\alpha=\pi-2017\alpha+2k\pi$

$\Leftrightarrow \cos 2015\alpha=-\cos 2017\alpha$

$\Rightarrow a_{2015}+a_{2017}=0$

ដូចនេះ $a_{2015}+a_{2017}=0$ ។

របៀបទី២

គណនាផលបូក $a_{2015}+a_{2017}$

ឧបមាថា $|a_1|\geq 1$

$|a_2|=|2a_1a_1-a_0|\geq 2|a_1||a_1|-|a_0|\geq 2|a_1|-1\geq 2|a_1|-|a_1|=|a_1|$

$|a_3|=|2a_1a_2-a_1|\geq 2|a_1||a_2|-|a_1|\geq 2|a_2|-|a_1|\geq 2|a_2|-|a_2|=|a_2|$

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k:\left|a_k\right|\ge\left|a_{k-1}\right|$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n=k+1:\ \left|a_{k+1}\right|\ge\left|a_k\right|$

យើងមាន: $a_{k+1}=2a_1a_k-a_{k-1}$

$$\Rightarrow\left|a_{k+1}\right|=\left|2a_1a_k-a_{k-1}\right|\ge 2\left|a_1\right|\left|a_k\right|-\left|a_{k-1}\right|$$

$$\ge 2\left|a_k\right|-\left|a_{k-1}\right|\ge 2\left|a_k\right|-\left|a_k\right|=\left|a_k\right|$$ ពិត

$\Rightarrow\left|a_{k+1}\right|\ge\left|a_k\right|\ge\cdots\ge\left|a_1\right|\ge\left|a_0\right|=1$

$\Rightarrow\left|a_k\right|\ge 1$ យក $k=2016$

$\left|a_{2016}\right|\ge 1\Leftrightarrow 0\ge 1$ មិនពិត ព្រោះ $a_{2016}=0$

$\Rightarrow\left|a_1\right|<1$

តាង $a_1=\cos\alpha\ ,\ \alpha\in\left(0,\pi\right)$

$a_2=2a_1a_1-a_0=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$

$a_3=2\cos\alpha\left(2\cos^2\alpha-1\right)-\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\cos 3\alpha$

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=p:a_p=\cos p\alpha$

ស្រាយថាវាពិតដល់ $n=p+1:a_{p+1}=\cos(p+1)\alpha$

យើងមាន: $a_{p+1}=2a_1a_p-a_{p-1}$

$a_{p+1}=2\cos\alpha\cos p\alpha-\cos(p-1)\alpha$

$$=2\cos\alpha\,\mathrm{cosp}\,\alpha-\left(\cos p\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin p\alpha\right)$$

$=\cos\alpha\cos p\alpha+\sin\alpha\sin p\alpha$

$=\cos(p+1)\alpha$ ពិត

$\Rightarrow a_{2016}=\cos 2016\alpha$

$\cos 2016\alpha=0$

$$\Rightarrow 2016\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$\Leftrightarrow 4032\alpha=\pi+2k\pi$

$\Leftrightarrow 2015\alpha = \pi - 2017\alpha + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \cos 2015\alpha = -\cos 2017\alpha$

$\Rightarrow a_{2015} + a_{2017} = 0$

ដូចនេះ $a_{2015} + a_{2017} = 0$ ។

លំហាត់ទី៦៩

ដោះស្រាយសមីការ:

$$arc\cot\left(\frac{x-3}{x^2-9}\right) + arc\cot\left(\frac{x-2}{x^2-4x+4}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$$

ក្នុងសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ:

$$arc\cot\left(\frac{x-3}{x^2-9}\right) + arc\cot\left(\frac{x-2}{x^2-4x+4}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \quad (*)$$

ក្នុងសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$

សមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases} x^2-9 \neq 0 \\ x^2-4x+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 3 \\ x \neq 2 \end{cases}$

តាង $\alpha = arc\cot\left(\frac{x-3}{x^2-9}\right) \Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{x+3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{x+3} \Rightarrow \tan\alpha = x+3$

តាង $\beta = arc\cot\left(\frac{x-2}{x^2-4x+4}\right) \Rightarrow \cot\beta = \frac{1}{x-2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan\beta} = \frac{1}{x-2} \Rightarrow \tan\beta = x-2$

តាម $(*)$: $\alpha + \beta = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \tan(\alpha+\beta)=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)+(x-2)}{1-(x+3)(x-2)}=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{1-x^2-x+6}=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 8x+4=-3x^2-3x+21$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+11x-17=0$$

$$\Delta=11^2-4.3.(-17)=325$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{325}$$

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{325}}{6}$$

ដូចនេះ $x=\dfrac{-11\pm\sqrt{325}}{6}$ ជាឫសនៃសមីការ ។

លំហាត់ទី៧០

ស្រាយថា $16<\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<17$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $16<\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<17$

យើងមាន: ចំពោះ $k>0$

$$k-1<k<k+1$$

$$\sqrt{k-1}<\sqrt{k}<\sqrt{k+1}$$

$$\sqrt{k}+\sqrt{k-1}<2\sqrt{k}<\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

$$\Rightarrow 2\sum_{k=1}^{80}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sum_{k=1}^{80}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{81}-\sqrt{1}) < \sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{80})$$

$$\Leftrightarrow 16 < \sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}} < 17$$ ពិត

ដូចនេះ $16 < \sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}} < 17$

លំហាត់ទី៧១

កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម:

$$A = \log_{x_1}\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2}\left(x_3 - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \log_{x_n}\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)$$

ដែល $x_1, x_2, \ldots x_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតកំណត់ក្នុង $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម

$A = \log_{x_1}\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2}\left(x_3 - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \log_{x_n}\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)$ ដែល $x_1, x_2, \ldots x_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតកំណត់ក្នុង $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$

យើងមាន: $\left(x_{k+1} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_{k+1}^2 - x_{k+1} + \frac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow x_{k+1}^2 \geq x_{k+1} - \frac{1}{4}$

ដែល $x_k \in \left(0,\frac{1}{4}\right)$

$$\Rightarrow \log_{x_k}^{x_{k+1}^2} \le \log_{x_k}\left(x_{k+1}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_{x_k}\left(x_{k+1}-\frac{1}{4}\right) \ge \log_{x_k}^{x_{k+1}^2} = 2\log_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$\Rightarrow \log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)$$

$$\ge 2\left(\log_{x_1}^{x_2}+\log_{x_2}^{x_3}+\cdots+\log_{x_n}^{x_1}\right) \quad (*)$$

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន:

$$\left(\log_{x_1}^{x_2}+\log_{x_2}^{x_3}+\cdots+\log_{x_n}^{x_1}\right) \ge n\sqrt[n]{\left(\log_{x_1}^{x_2}.\log_{x_2}^{x_3}\cdots\log_{x_n}^{x_1}\right)} = n$$

តាម $(*)$: $\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right) \ge 2n$

សមភាពកើតមានពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = \frac{1}{2}$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម A គឺ $2n$

លំហាត់ទី៧២

ស្រាយថា $3^{4^5}+4^{5^6}$ អាចសរសេរជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់ដែលចំនួននីមួយៗធំជាង 10^{2015} ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $3^{4^5}+4^{5^6}$ អាចសរសេរជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់ដែលចំនួននីមួយៗធំជាង 10^{2015}

តាង $m = 3^{4^4}$, $n = 4^{\frac{5^6+1}{4}}$ គេបាន:

$$3^{4^5}+4^{5^6}=m^4+\frac{1}{4}n^4=m^4+m^2n^2+\frac{1}{4}n^4-m^2n^2$$

$$\Leftrightarrow 3^{4^5}+4^{5^6}=\left(m^2+\frac{1}{2}n^2\right)^2-(mn)^2$$

$$\Leftrightarrow 3^{4^5}+4^{5^6}=\left(m^2-mn+\frac{1}{2}n^2\right)\left(m^2+mn+\frac{1}{2}n^2\right)$$

តែ $\left(m^2-mn+\frac{1}{2}n^2\right)>n\left(\frac{1}{2}n-m\right)=4^{\frac{5^6+1}{4}}\left(\frac{1}{2}\cdot 4^{\frac{5^6+1}{4}}-3^{4^4}\right)$

$$\left(m^2-mn+\frac{1}{2}n^2\right)>4^{\frac{5^6+1}{4}}\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{5^6+1}{2}}-2^{2.4^4}\right)>4^{\frac{5^6+1}{4}}\left(2^{\frac{5^6-1}{2}}-2^{512}\right)$$

$$\left(m^2-mn+\frac{1}{2}n^2\right)>2^{\frac{5^6+1}{2}}.2^{512}\left(2^{\frac{5^6-1}{2}-512}-1\right)>2^{\frac{5^6+1}{2}}.2^{512}$$

$$\left(m^2-mn+\frac{1}{2}n^2\right)>2^{10\cdot\frac{5^6+1}{20}}.2^{510}>2^{10\cdot\frac{5^6+1}{20}}.2^{10.51}$$

$$\left(m^2-mn+\frac{1}{2}n^2\right)>10^{3.5^4}.10^{51}>10^{2015}$$

ហើយយើងឃើញថា: $\left(m^2+mn+\frac{1}{2}n^2\right)>\left(m^2-mn+\frac{1}{2}n^2\right)>10^{2015}$

ដូចនេះ $3^{4^5}+4^{5^6}$ អាចសរសេរជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់ដែលចំនួននីមួយៗធំជាង 10^{2015} ។

លំហាត់ទី៧៣

គេឲ្យ x មិនមែនជាចំនួនគត់ហើយ $x>1$ ស្រាយថា:

$$\left(\frac{x+\{x\}}{\lfloor x\rfloor}-\frac{\lfloor x\rfloor}{x+\{x\}}\right)+\left(\frac{x+\lfloor x\rfloor}{\{x\}}-\frac{\{x\}}{x+\lfloor x\rfloor}\right)>\frac{9}{2}$$ ។

ដែល $\lfloor x\rfloor$ ជាផ្នែកគត់នៃ x ហើយ $\{x\}$ ជាផ្នែកទសភាគនៃ x ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\left(\frac{x+\{x\}}{\lfloor x\rfloor}-\frac{\lfloor x\rfloor}{x+\{x\}}\right)+\left(\frac{x+\lfloor x\rfloor}{\{x\}}-\frac{\{x\}}{x+\lfloor x\rfloor}\right)>\frac{9}{2}$

តាង $a=\lfloor x\rfloor$, $b=\{x\}\Rightarrow a+b=x$

វិសមភាពទៅជា:

$$\left(\frac{a+2b}{a}-\frac{a}{a+2b}\right)+\left(\frac{2a+b}{b}-\frac{b}{2a+b}\right)>\frac{9}{2}$$

$$\left(1+\frac{2b}{a}-\frac{a}{a+2b}\right)+\left(1+\frac{2a}{b}-\frac{b}{2a+b}\right)>\frac{9}{2}$$

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-\left(\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{2a+b}\right)>\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$$

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន:

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ សមភាពកើតពេល $a=b$

តែ $\lfloor x\rfloor\neq\{x\}\Leftrightarrow a\neq b$ នោះសមភាពមិនអាចកើតឡើងទេ

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$$

ដោយ $2a+b>a+b$, $a+2b>a+b$

$$\frac{1}{a+2b}<\frac{1}{a+b}\Rightarrow\frac{a}{a+2b}<\frac{a}{a+b}$$

$$\frac{1}{2a+b}<\frac{1}{a+b}\Rightarrow\frac{b}{2a+b}<\frac{b}{a+b}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{2a+b}<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1<\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow-\left(\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{2a+b}\right)>-\frac{3}{2}$$

$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-\left(\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{2a+b}\right)>2.2-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ ពិត

ដូចនេះ $\left(\frac{x+\{x\}}{\lfloor x\rfloor}-\frac{\lfloor x\rfloor}{x+\{x\}}\right)+\left(\frac{x+\lfloor x\rfloor}{\{x\}}-\frac{\{x\}}{x+\lfloor x\rfloor}\right)>\frac{9}{2}$

លំហាត់ទី៧៤

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ x,y,z ដែល a,r,s,t ជាចំនួនថេរ:

$\begin{cases} yz=a(y+z)+r \\ zx=a(z+x)+s \\ xy=a(x+y)+t \end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} yz=a(y+z)+r \\ zx=a(z+x)+s \\ xy=a(x+y)+t \end{cases}$

យើងមាន: $\begin{cases} yz=a(y+z)+r \\ zx=a(z+x)+s \\ xy=a(x+y)+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz-a(y+z)=r \\ zx-a(z+x)=s \\ xy-a(x+y)=t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} yz-ay-az+a^2=a^2+r \\ zx-az-ax+a^2=a^2+s \\ xy-ax-ay+a^2=a^2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(z-a)-a(z-a)=a^2+r \\ z(x-a)-a(x-a)=a^2+s \\ x(y-a)-a(y-a)=a^2+t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-a)(z-a)=a^2+r & (1) \\ (z-a)(x-a)=a^2+s & (2) \\ (x-a)(y-a)=a^2+t & (3) \end{cases}$

យក $(1)\times(2)\times(3)$ គេបាន:

$(x-a)(y-a)(z-a)=\pm\sqrt{(a^2+r)(a^2+s)(a^2+t)}$

តាម $(1): (x-a)(a^2+r)=\pm\sqrt{(a^2+r)(a^2+s)(a^2+t)}$

$$\Rightarrow x-a=\pm\sqrt{\frac{(a^2+s)(a^2+t)}{a^2+r}}$$

$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{(a^2+s)(a^2+t)}{a^2+r}}+a$$

បើ: $x=-\sqrt{\frac{(a^2+s)(a^2+t)}{a^2+r}}+a$ ជំនួសក្នុង (2) និង (3) គេបាន:

តាម $(2): (z-a)(x-a)=a^2+s$

$$\Leftrightarrow (z-a)\left(-\sqrt{\frac{(a^2+s)(a^2+t)}{a^2+r}}\right)=a^2+s$$

$$\Rightarrow z-a=-\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+s)}{a^2+t}}\right)$$

$$\Rightarrow z=-\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+s)}{a^2+t}}\right)+a$$

តាម $(3): (x-a)(y-a)=a^2+t$

$$\Leftrightarrow \left(-\sqrt{\frac{(a^2+s)(a^2+t)}{a^2+r}}\right)(y-a)=a^2+t$$

$$\Rightarrow y-a=-\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+t)}{a^2+s}}\right)$$

$$\Rightarrow y=-\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+t)}{a^2+s}}\right)+a$$

យកតម្លៃ $z=-\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+s)}{a^2+t}}\right)+a,\ y=-\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+t)}{a^2+s}}\right)+a$

ទៅជំនួសក្នុងសមីការ (1) ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

បើ $x=\sqrt{\frac{(a^2+s)(a^2+t)}{a^2+r}}+a$ ជំនួសក្នុង (2) និង (3) គេបាន:

តាម $(2):(z-a)(x-a)=a^2+s$

$$\Leftrightarrow (z-a)\left(\sqrt{\frac{(a^2+s)(a^2+t)}{a^2+r}}\right)=a^2+s$$

$$\Rightarrow z-a=\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+s)}{a^2+t}}\right)$$

$$\Rightarrow z=\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+s)}{a^2+t}}\right)+a$$

តាម $(3):(x-a)(y-a)=a^2+t$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{(a^2+s)(a^2+t)}{a^2+r}}\right)(y-a)=a^2+t$$

$$\Rightarrow y-a=\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+t)}{a^2+s}}\right)$$

$$\Rightarrow y=\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+t)}{a^2+s}}\right)+a$$

យកតម្លៃ $z=\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+s)}{a^2+t}}\right)+a,\ y=\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+t)}{a^2+s}}\right)+a$

ទៅជំនួសក្នុងសមីការ(1) ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

ដូចនេះ ចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ $(x;y;z)$ គឺ:

$$\left(-\sqrt{\frac{(a^2+s)(a^2+t)}{a^2+r}}+a;-\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+t)}{a^2+s}}\right)+a;-\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+s)}{a^2+t}}\right)+a\right)$$

$$\left(\sqrt{\frac{(a^2+s)(a^2+t)}{a^2+r}}+a;\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+t)}{a^2+s}}\right)+a;\left(\sqrt{\frac{(a^2+r)(a^2+s)}{a^2+t}}\right)+a\right)$$

លំហាត់ទី៧៥

គេឲ្យ: $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=4 \\ x^3+y^3+z^3=4 \end{cases}$ ។ គណនា $E=x^n+y^n+z^n \ ,n\in\mathbb{Z}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $E=x^n+y^n+z^n \ ,n\in\mathbb{Z}$

យើងមាន: $x+y+z=4$

$(x+y+z)^2=4^2$

$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=16$

តែ $x^2+y^2+z^2=4$ គេបាន:

$xy+yz+zx=6$

$(x+y+z)^3=4^3$

$x^3+(y+z)^3+3x(y+z)(x+y+z)=64$

$x^3+y^3+z^3+3yz(y+z)+3x(y+z)(x+y+z)=64$

$x^3+y^3+z^3+3(xy+xz)(x+y+z)+3yz(x+y+z)-3xyz=64$

$x^3+y^3+z^3+3(xy+xz+yz)(x+y+z)-3xyz=64$

តែ $x^3+y^3+z^3=4$ គេបាន:

$4+3.6.4-3xyz=64$

$xyz=4$

នោះ x,y,z ជាឫសនៃសមីការ $X^3-4X^2+6X-4=0 \ (*)$

តាម $(*)$: $X^3-4X^2+6X-4=0$

$\Leftrightarrow (X-2)(X^2-2X+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X-2=0 \\ X^2-2X+2=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 2 \\ X = 1-i, X = 1+i \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow E = x^n + y^n + z^n = 2^n + (1+i)^n + (1-i)^n$$

$$\Leftrightarrow x^n + y^n + z^n = 2^n + \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n + \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow x^n + y^n + z^n = 2^n + \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$$+\sqrt{2^n}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^n$$

$$\Leftrightarrow x^n + y^n + z^n = 2^n + \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$+\sqrt{2^n}\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow x^n + y^n + z^n = 2^n + \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^n + y^n + z^n = 2^n + 2\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}$$

ដូចនេះ $x^n + y^n + z^n = 2^n + 2\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី៧៦

គេឲ្យ z_1, z_2, z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា:

$(1):\ z_1 z_2 z_3 = 1$

$(2):\ z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$

ស្រាយថាយ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម z_1, z_2, z_3 ស្មើ 1

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាយ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម z_1, z_2, z_3 ស្មើ 1

តាង $a = z_1 + z_2 + z_3, b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3, c = z_1z_2z_3$

នោះ z_1 , z_2 , z_3 ជាឫសនៃសមីការ $X^3 - aX^2 + bX - c = 0$ (*)

តែ $a = z_1z_2z_3 = 1$

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2 + z_3) z_1z_2z_3 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

តាម (*): $X^3 - aX^2 + aX - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (X-1)(X^2 + X + 1) - aX(X-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X-1)(X^2 + X + 1 - aX) = 0$$

$\Leftrightarrow X = 1$ ពិត

ដូចនេះឃើញថាយ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម z_1, z_2, z_3 ស្មើនឹង 1 ។

លំហាត់ទី៧៧

កំណត់គ្រប់តម្លៃ θ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ និង $\sin^5\theta + \cos^5\theta = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់តម្លៃ θ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ និង

$\sin^5\theta + \cos^5\theta = 1$

ដោយ $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

$0 \le \sin^5 x \le \sin^2 x$

$0 \le \cos^5 x \le \cos^2 x$

$0 \le \sin^5 x + \cos^5 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

សញ្ញាស្មើកើតមានកាលណាតែ $\theta = 0$ និង $\theta = \frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $\theta = 0$ និង $\theta = \frac{\pi}{2}$ ជាតម្លៃដែលត្រូវរក ។

លំហាត់ទី៧៨

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x) = \int_0^x \frac{2t-1}{t^2-2t+2}dt$ ក្នុងចន្លោះ $[-1,1]$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x) = \int_0^x \frac{2t-1}{t^2-2t+2}dt$ ក្នុងចន្លោះ $[-1,1]$

យើងមាន: $f(x) = \int_0^x \frac{2t-1}{t^2-2t+2}dt$

$\Rightarrow f(-1) = \int_0^{-1} \frac{2t-2+1}{t^2-2t+2}dt$

$= \int_0^{-1} \frac{2t-2}{t^2-2t+2}dt + \int_0^{-1} \frac{1}{(t-1)^2+1}dt$

$= \int_0^{-1} \frac{d\left(t^2-2t+2\right)}{t^2-2t+2} + \int_0^{-1} \frac{1}{(t-1)^2+1}dt$

$= \ln\left(t^2-2t+2\right)\Big|_0^{-1} + \arctan\left(t-1\right)\Big|_0^{-1}$

$= \ln 5 - \ln 2 + \arctan(-2) - \arctan(-1)$

$= \ln\frac{5}{2} - \arctan 2 + \frac{\pi}{4}$

$$f(1)=\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-2t+2}dt$$
$$=\ln\left(t^2-2t+2\right)\Big|_0^1+\arctan\left(t-1\right)\Big|_0^1$$
$$=\ln 1-\ln 2+\arctan 0-\arctan(-1)$$
$$=-\ln 2+\arctan(\tan 0)+\arctan 1$$
$$=-\ln 2+\frac{\pi}{4}$$

$f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-2x+2}$ តែ $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0\ ,\forall x\in\mathbb{R}$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាតាម $2x-1$

បើ $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2t-1}{t^2-2t+2}dt$$
$$=\ln\left(t^2-2t+2\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\arctan\left(t-1\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\ln\frac{5}{4}-\ln 2-\arctan\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{2}-\ln\frac{5}{8}$$

តាមតារាងអថេរភាព

x	-1	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\ln\frac{5}{2}-\arctan 2+\frac{\pi}{4}$ ↘	$\frac{\pi}{4}-\ln\frac{5}{8}-\arctan\frac{1}{2}$	↗ $\frac{\pi}{4}-\ln 2$

ដូចនេះ តម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍គឺ $\dfrac{\pi}{4}-\ln\dfrac{5}{8}-\arctan\dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៧៩

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x,y ស្រាយថា:

$\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor\geq\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor x+y\rfloor$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x,y ស្រាយថា:

$\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor\geq\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor x+y\rfloor$

យើងមាន: $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$, $y=\lfloor y\rfloor+\{y\}$

$\Rightarrow\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor=2\lfloor x\rfloor+\lfloor 2\{x\}\rfloor+2\lfloor y\rfloor+\lfloor 2\{y\}\rfloor$

ម្យ៉ាងទៀត $\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor\{x\}+\{y\}\rfloor$

យើងគ្រាន់តែស្រាយថា: $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor\{2x\}\rfloor+\lfloor\{2y\}\rfloor\geq\lfloor x+y\rfloor$

$\Leftrightarrow\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor\{2x\}\rfloor+\lfloor\{2y\}\rfloor\geq\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor\{x\}+\{y\}\rfloor$

$\Leftrightarrow\lfloor\{2x\}\rfloor+\lfloor\{2y\}\rfloor\geq\lfloor\{x\}+\{y\}\rfloor$

សន្មតថា $\{x\}\geq\{y\}$,$\{x\}$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន

$\Rightarrow\lfloor\{2x\}\rfloor+\lfloor\{2y\}\rfloor\geq\lfloor 2\{x\}\rfloor\geq\lfloor\{x\}+\{y\}\rfloor$ ពិត

ព្រោះ $\{x\}\geq\{y\}\Rightarrow 2\{x\}\geq\{x\}+\{y\}$

ដូចនេះ $\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor\geq\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor x+y\rfloor$ ។

លំហាត់ទី៨០

គេឲ្យ: $\alpha_n=1+\rho\cos\theta+\rho^2\cos 2\theta+\cdots+\rho^n\cos n\theta$

$\beta_n=\rho\sin\theta+\rho^2\sin 2\theta+\cdots+\rho^n\sin n\theta$

ក. បង្កើតចំនួនកុំផ្លិច $A=\alpha_n+i\beta_n$

ខ.សិក្សា α_n និង β_n កាលណា $\rho<1$ និង $n\to+\infty$

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្កើតចំនួនកុំផ្លិច $A=\alpha_n+i\beta_n$

យើងមាន:

$\alpha_n=1+\rho\cos\theta+\rho^2\cos 2\theta+\cdots+\rho^n\cos^n\theta$ (1)

$i\beta_n=i\rho\sin\theta+i\rho^2\sin 2\theta+\cdots+i\rho^n\sin^n\theta$ (2)

យក $(1)+(2)$:

$$\alpha_n+i\beta_n=1+\rho\left(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\right)+\rho^2\left(\cos 2\theta+i\sin 2\theta\right)$$
$$+\rho^3\left(\cos 3\theta+i\sin 3\theta\right)+\cdots+\rho^n\left(\cos\mathrm{n}\theta+i\sin\mathrm{n}\theta\right)$$

$$A=1+\rho\left(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\right)+\rho^2\left(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\right)^2$$
$$+\rho^3\left(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\right)^3+\cdots+\rho^n\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n$$

គេបាន A ជាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី 1 ស្មើនឹង 1 រេសុង $q=\rho\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ ហើយមាន $(n+1)$ តួគេបាន:

$$A=\frac{1-\left(\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\right)^{n+1}}{1-\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}$$

$$=\frac{1-\rho^{n+1}\left[\cos(n+1)\theta+i\sin(\mathrm{n}+1)\theta\right]}{1-\rho\cos\theta-i\rho\sin\theta}$$

$$=\frac{\left[1-\rho^{n+1}\cos(n+1)\theta\right]-i\rho^{n+1}\sin(n+1)\theta}{\left(1-\rho\cos\theta\right)-i\rho\sin\theta}$$

$$=\frac{\left[\left(1-\rho^{n+1}\cos(n+1)\theta\right)-i\rho^{n+1}\sin(n+1)\theta\right]\left[\left(1-\rho\cos\theta\right)+i\rho\sin\theta\right]}{\left(1-\rho\cos\theta\right)^2+\rho^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\left(1-\rho^{n+1}\cos(n+1)\theta\right)\left(1-\rho\cos\theta\right)+\rho^{n+2}\sin\theta\sin(\mathrm{n}+1)\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}$$

$$+i\frac{\left(1-\rho^{n+1}\cos(n+1)\theta\right)\rho\sin\theta-\rho^{n+1}\sin(n+1)\theta\left(1-\rho\cos\theta\right)}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1-\rho\cos\theta-\rho^{n+1}\cos(n+1)\theta+\rho^{n+2}\cos\theta\cos(n+1)\theta+\rho^{n+2}\sin\theta\sin(\mathrm{n}+1)\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

$$+i\frac{\rho\sin\theta-\rho^{n+2}\sin\theta\cos(n+1)\theta-\rho^{n+1}\sin(n+1)\theta+\rho^{n+2}\cos\theta\sin(n+1)\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

$$=\frac{1-\rho\cos\theta-\rho^{n+1}\cos(n+1)\theta+\rho^{n+2}\left(\cos\theta\cos(n+1)\theta+\sin\theta\sin(\mathrm{n}+1)\theta\right)}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

$$+i\frac{\rho\sin\theta-\rho^{n+1}\sin(n+1)\theta+\rho^{n+2}\left(\cos\theta\sin(n+1)\theta-\sin\theta\cos(n+1)\theta\right)}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

$$=\frac{1-\rho\cos\theta-\rho^{n+1}\cos(n+1)\theta+\rho^{n+2}\cos n\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

$$+i\frac{\rho\sin\theta-\rho^{n+1}\sin(n+1)\theta+\rho^{n+2}\left(\sin n\theta\right)}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

តែ $A=\alpha_n+i\beta_n$ នោះគេបាន:

$$\alpha_n=\frac{1-\rho\cos\theta-\rho^{n+1}\cos(n+1)\theta+\rho^{n+2}\cos n\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

$$\beta_n=\frac{\rho\sin\theta-\rho^{n+1}\sin(n+1)\theta+\rho^{n+2}\left(\sin n\theta\right)}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

ដូចនេះ

$$\alpha_n=\frac{1-\rho\cos\theta-\rho^{n+1}\cos(n+1)\theta+\rho^{n+2}\cos n\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

$$\beta_n=\frac{\rho\sin\theta-\rho^{n+1}\sin(n+1)\theta+\rho^{n+2}\left(\sin n\theta\right)}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

ខ.សិក្សា α_n និង β_n កាលណា $\rho<1$ និង $n\to+\infty$

$\rho<1$ នោះ ρ^{n+1} និង ρ^{n+2} ខិតទៅ 0 គេបាន:

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \alpha_n$

$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\rho\cos\theta-\rho^{n+1}\cos(n+1)\theta+\rho^{n+2}\cos n\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\right)$

$= \frac{1-\rho\cos\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \beta_n$

$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\rho\sin\theta-\rho^{n+1}\sin(n+1)\theta+\rho^{n+2}\left(\sin n\theta\right)}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}\right)$

$= \frac{\rho\sin\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = \frac{1-\rho\cos\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$ និង $\lim_{n\to+\infty}\beta_n = \frac{\rho\sin\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$ ។

លំហាត់ទី៨១

គណនា: $\lim_{x\to0}\left(\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១

គណនា: $\lim_{x\to0}\left(\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\right)$

តាមទ្វេធាញូតុន $(1+mx)^n = C_n^0+mxC_n^1+(mx)^2C_n^2+\cdots+(mx)^nC_n^n$

$(1+nx)^m = C_m^0+nxC_m^1+(nx)^2C_m^2+\cdots+(nx)^mC_m^n$

នោះ $\lim_{x\to0}\left(\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{C_n^0+mxC_n^1+(mx)^2C_n^2+\cdots+(mx)^nC_n^n}{x^2}\right)$$

$$-\lim_{x\to 0}\left(\frac{C_m^0+nxC_m^1+(nx)^2C_m^2+\cdots+(nx)^mC_m^n}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{C_n^0+mxC_n^1+(mx)^2C_n^2-\left(C_m^0+nxC_m^1+(nx)^2C_m^2\right)}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+mnx+m^2x^2C_n^2-\left(1+mnx+n^2x^2C_m^2\right)}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{m^2x^2\dfrac{n!}{(n-2)!2!}-n^2x^2\dfrac{m!}{(m-2)!2!}}{x^2}\right)$$

$$=\frac{m^2n(n-1)}{2}-\frac{n^2m(m-1)}{2}$$

$$=mn\left(\frac{m(n-1)-n(m-1)}{2}\right)$$

$$=\frac{mn(n-m)}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\right)=\frac{mn(n-m)}{2}$ ។

របៀបទី២

គណនា: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\right)$

យើងមាន: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+mx)^n-1-\left((1+nx)^m-1\right)}{x^2}\right)$$

ដោយៈ

$$(1+mx)^n-1=mx\left((1+mx)^{n-1}+(1+mx)^{n-2}+\cdots+1\right)$$

$$(1+mx)^n-1=mx\left((1+mx)^{n-1}-1+(1+mx)^{n-2}-1+\cdots+(1+mx)-1+n\right)$$

$$(1+mx)^n-1$$

$$=m^2x^2\left[\left((1+mx)^{n-2}+\cdots+1\right)+\left((1+mx)^{n-3}+\cdots+1\right)+\cdots+1\right]+mnx$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$(1+nx)^m-1=nx\left((1+nx)^{m-1}+(1+nx)^{m-2}+\cdots+1\right)$$

$$(1+nx)^m-1=nx\left((1+nx)^{m-1}-1+(1+nx)^{m-2}-1+\cdots+(1+nx)-1+m\right)$$

$$\Leftrightarrow (1+nx)^m-1$$

$$=n^2x^2\left[\left((1+nx)^{m-2}+\cdots+1\right)+\left((1+nx)^{m-3}+\cdots+1\right)+\cdots+1\right]+mnx$$

គេបានៈ

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[m^2\left((1+mx)^{n-2}+\cdots+1\right)+\left((1+mx)^{n-3}+\cdots+1\right)+\cdots+1\right]$$

$$-\lim_{x\to 0}\left[n^2\left((1+nx)^{m-2}+\cdots+1\right)+\left((1+nx)^{m-3}+\cdots+1\right)+\cdots+1\right]$$

$$=m^2\left[(n-1)+(n-2)+\cdots+1\right]-n^2\left[(m-1)+(m-2)+\cdots+1\right]$$

$$=m^2\frac{n(n-1)}{2}-n^2\frac{m(m-1)}{2}=\frac{m^2n^2-m^2n-m^2n^2+n^2m}{2}$$

$$=\frac{mn(n-m)}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\right)=\frac{mn(n-m)}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨២

កំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ x^2y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា:

$x+y+\sqrt{2x^2+2xy+3y^2}=k$ ថេរ ចំពោះគ្រប់ $x\,,y\geq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ x^2y

យើងមាន: $x+y+\sqrt{2x^2+2xy+3y^2}=k$

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន:

$$x+y=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+y\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2y}{4}}$$

$$x+y\geq 3\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\qquad (1)$$

សមភាពកើតមានពេល $\frac{x}{2}=y\Leftrightarrow x=2y$

$$2x^2+2xy+3y^2=\underbrace{\frac{2x^2}{8}+\frac{2x^2}{8}+\cdots+\frac{2x^2}{8}}_{8}+\underbrace{\frac{2xy}{4}+\cdots+\frac{2xy}{4}}_{4}+y^2+y^2+y^2$$

$$\geq 15\sqrt[15]{\left(\frac{2x^2}{8}\right)^8\left(\frac{2xy}{4}\right)^4\left(y^2\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2xy+3y^2\geq 15\left\{\left(\frac{x^{20}y^{10}}{4^{10}}\right)\right\}^{\frac{1}{15}}=15\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{\frac{10}{15}}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2xy+3y^2 \geq 15\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2xy+3y^2} \geq \sqrt{15}\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

យក $(1)+(2)$ គេបាន:

$$x+y+\sqrt{2x^2+2xy+3y^2} \geq 3\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+\sqrt{15}\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow k \geq \left(3+\sqrt{15}\right)\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow k^3 \geq \left(3+\sqrt{15}\right)^3\left(\frac{x^2y}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2y}{4}\right) \leq \frac{k^3}{\left(3+\sqrt{15}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow x^2y \leq \frac{4k^3}{\left(3+\sqrt{15}\right)^3}$$

ដូចនេះ $\max x^2y = \dfrac{4k^3}{\left(3+\sqrt{15}\right)^3}$ ។

លំហាត់ទី៨៣

គេឲ្យ $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2015$ ។

គណនា $(x+2015y)(y+2015x)$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $(x+2015y)(y+2015x)$

យើងមាន: $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2015$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=2015\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)\\ \left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2015\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+1}-2015\sqrt{y^2+1}=-\left(x+2015y\right) & (*)\\ \sqrt{y^2+1}-2015\sqrt{x^2+1}=-\left(y+2015x\right) & (**)\end{cases}$$

យក $(*)\times 2015+(**)$: គេបាន:

$$\left(1-2015^2\right)\sqrt{y^2+1}=-2015\left(x+2015y\right)-\left(y+2015x\right)$$

$$=-\left(4030x+2015^2y+y\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}=\frac{4030x+(2015^2+1)y}{2015^2-1}$$

$$\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2+1}=\frac{4030x+(2015^2+1)y+(2015^2-1)y}{2015^2-1}$$

$$=\frac{4030x+2.2015^2y}{2015^2-1}$$

$$\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2+1}=\frac{4030\left(x+2015y\right)}{2015^2-1}\qquad(1)$$

យក $(**)\times 2015+(*)$: គេបាន:

$$\left(1-2015^2\right)\sqrt{x^2+1}=-2015\left(y+2015x\right)-\left(x+2015y\right)$$

$$=-\left(4030y+2015^2x+x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=\frac{4030y+(2015^2+1)x}{2015^2-1}$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=\frac{4030y+(2015^2+1)x+(2015^2-1)x}{2015^2-1}$$

$$= \frac{4030y + 2.2015^2 x}{2015^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} = \frac{4030(y + 2015x)}{2015^2 - 1} \quad (2)$$

យក $(1)\times(2)$:

$$\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = \frac{4030(x + 2015y)}{2015^2 - 1} \cdot \frac{4030(y + 2015x)}{2015^2 - 1}$$

$$2015 = \frac{4030^2 (x + 2015y)(y + 2015x)}{\left(2015^2 - 1\right)^2}$$

$$\Rightarrow (x + 2015y)(y + 2015x) = \frac{2015.\left(2015^2 - 1\right)^2}{4030^2}$$

$$= \frac{2015\left(2015^2 - 1\right)^2}{4.2015^2} = \frac{\left(2015^2 - 1\right)^2}{4.2015} = \frac{\left(2015^2 - 1\right)^2}{8060}$$

ដូចនេះ $(x + 2015y)(y + 2015x) = \dfrac{\left(2015^2 - 1\right)^2}{8060}$ ។

លំហាត់ទី៨៤

ចូរកំណត់រកពហុធា $P(x)$ ជាមួយមេគុណជាចំនួនគត់ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់: $16P(x) = \left[P(2x)\right]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចូរកំណត់រកពហុធា $P(x)$ ជាមួយមេគុណជាចំនួនគត់

យើងមាន: $16P(x) = \left[P(2x)\right]^2 \ (*)$

សន្មតថា a ជាមេគុណរបស់ $P(x)$ ដែលមានដឺក្រេខ្ពស់បំផុត

$P(x) = ax^n + \cdots$

$P(x^2) = ax^{2n} + \cdots$

$P(2x) = a(2x)^n + \cdots$

$\left[P(2x)\right]^2 = a^2.2^{2n}.x^{2n} + \cdots$

តាម $(*) : 16a = 4^n.a^2$

$16 = 4^n.a \;\Rightarrow a = \dfrac{16}{4^n}$

ដោយ a ជាចំនួនគត់នោះ $n \in \{0; 1; 2\}$ ។

បើ $n = 0 : P(x) = 16$

$\Leftrightarrow 16.16 = 16^2$ ពិត

បើ $n = 1 : \Rightarrow P(x) = 4x + k \;, k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P(x^2) = 4x^2 + k$

$\Rightarrow 16P(x^2) = 64x^2 + 16k$

$\Rightarrow P(2x) = 8x + k$

$\Leftrightarrow 64x^2 + 16k = (8x + k)^2$

$\Leftrightarrow 64x^2 + 16k = 64x^2 + 16kx + k^2 \Rightarrow k = 0$

$\Rightarrow P(x) = 4x$

បើ $n = 2 : \Rightarrow P(x) = x^2 + tx + k \;,\quad t;k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P(x^2) = x^4 + tx^2 + k \Leftrightarrow 16P(x^2) = 16x^4 + 16tx^2 + 16k$

$\Rightarrow P(2x) = 4x^2 + 2tx + k \Rightarrow \left[P(2x)\right]^2 = \left(4x^2 + 2tx + k\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[P(2x)\right]^2 = 16x^4 + 4t^2x^2 + k^2 + 16tx^3 + 4tkx + 8kx^2$

$\Leftrightarrow 16x^4 + 16tx^2 + 16k = 16x^4 + 4t^2x^2 + k^2 + 16tx^3 + 4tkx + 8kx^2$

$\Leftrightarrow 16tx^2 + 16k = 16tx^3 + (4t^2 + 8k)x^2 + 4tkx + k^2$

$\Rightarrow P(x) = x^2$

ដូចនេះ $P(x) = 16$, $P(x) = 4x$, $P(x) = x^2$ ជាពហុធាដែលត្រូវរក ។

លំហាត់ទី៨៥

ស្រាយថាប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases} x^6 + x^3 + x^3y + y = 147^{157} \\ x^3 + x^3y + y^2 + y + z^9 = 157^{147} \end{cases}$$

គ្មានចម្លើយចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x, y និង z ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases} x^6 + x^3 + x^3y + y = 147^{157} & (1) \\ x^3 + x^3y + y^2 + y + z^9 = 157^{147} & (2) \end{cases}$$

គ្មានចម្លើយចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x, y និង z

យក $(1)+(2)$ គេបាន:

$$x^6 + x^3 + x^3y + y + x^3 + x^3y + y^2 + y + z^9 = 147^{157} + 157^{147}$$

$$x^6 + y^2 + 1 + 2x^3y + 2y + x^3 + z^9 = 147^{157} + 157^{147} + 1$$

$$\left(x^3 + y + 1\right)^2 + z^9 = 147^{157} + 157^{147} + 1 \quad (*)$$

ដោយ $a^2 \equiv 0,1,2,3,4,5,6,7,9,16,17 \pmod{19}$; $a \in \mathbb{Z}$

ម្យ៉ាងទៀត $147 \equiv 14 \pmod{19}$

$$\Rightarrow 147^{157} \equiv 14^{157} \equiv (14^{18})^8 . 14^{13} \pmod{19}$$

ដោយ $(14;19) = 1$ តាមទ្រឹស្តីបទ *Fermat* គេបាន:

$$14^{18} \equiv 1 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow \left(14^{18}\right)^8 \equiv 1 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 147^{157} \equiv 14^{13} \pmod{19}$$

ហើយ $14 \equiv -5 \pmod{19} \Rightarrow 14^2 \equiv 6 \pmod{19}$

$$\Rightarrow 14^3 \equiv 8 \pmod{19} \Rightarrow 14^5 \equiv 10 \pmod{19}$$

$\Rightarrow 14^{10} \equiv 5 \pmod{19} \Rightarrow 14^{13} \equiv 2 \pmod{19}$

$\Leftrightarrow 147^{157} \equiv 2 \pmod{19}$

ហើយ $157 \equiv 5 \pmod{19}$

$\Rightarrow 157^{147} \equiv 5^{147} \pmod{19}$

$\Leftrightarrow 157^{147} \equiv \left(5^{18}\right)^{8}.5^{3} \pmod{19}$

ដោយ $(5;19)=1$ តាមទ្រឹស្តីបទ $Fermat$ គេបាន:

$5^{18} \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow \left(5^{18}\right)^{8} \equiv 1 \pmod{19}$

$\Rightarrow 157^{147} \equiv 5^{3} \equiv 125 \equiv 11 \pmod{19}$

$\Rightarrow 147^{157} + 157^{147} + 1 \equiv 14 \pmod{19}$

បើ z ចែកដាច់នឹង19 នោះអង្គខាងឆ្វេង$(*)$

$\equiv 0,1,2,3,4,5,6,7,9,16,17 \pmod{19}$ តែអង្គខាងស្តាំ$\equiv 14 \pmod{19}$

នោះសមីការ$(*)$ គ្មានឫសទេ

បើz ចែកមិនដាច់នឹង19 នោះតាមទ្រឹស្តីបទគេបាន:

$z^{18} \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow z^{9} \equiv \pm 1 \pmod{19}$ នោះអង្គខាងឆ្វេង$(*)$

$\equiv 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,16,17,18 \pmod{19}$ តែអង្គខាងស្តាំ

$\equiv 14 \pmod{19}$

នោះសមីការ$(*)$ គ្មានឫសទេ

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការគ្មានឫសចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x, y, z ។

លំហាត់ទី៨៦

គេឲ្យ s និង t ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា:

$7^{s} \| 400!$ និង $3^{t} \| ((3!)!)!$ គណនា $s+t$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $s+t$

យើងមាន: $((3!)!)!=(6!)!=720!$

តាមអនុគមន៍ *Legendre* គេបាន:

$$t=e_3(720)=\left\lfloor\frac{720}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{720}{3^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{720}{3^3}\right\rfloor\left\lfloor\frac{720}{3^4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{720}{3^5}\right\rfloor$$

$$=240+80+26+8+2=356$$

$$s=e_7(400)=\left\lfloor\frac{400}{7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{400}{7^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{400}{7^3}\right\rfloor$$

$$s=57+8+1=66$$

$$\Rightarrow s+t=66+356=422$$

ដូចនេះ $s+t=422$ ។

លំហាត់ទី៨៧

ចំនួនលេខសូន្យចុងបញ្ចប់នៃ $2015!$ គឺ m ។ គណនា m

ដំណោះស្រាយ

គណនា m

ចំនួន m លេខសូន្យចុងបញ្ចប់នៃ $2015!$ គឺ $10^m \| 2015!$

តែ $10^m=2^m.5^m$ គេបាន: $m=\min\left(e_2(2015),e_5(2015)\right)=e_5(2015)$

ព្រោះ $2<5$

តាមអនុគមន៍ *Legendre* គេបាន:

$$m=e_5(2015)=\left\lfloor\frac{2015}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2015}{5^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2015}{5^3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2015}{5^4}\right\rfloor$$

$$\Leftrightarrow m=403+80+16+3=502$$

ដូចនេះ ចំនួនលេខសូន្យចុងបញ្ចប់នៃ $2015!$ គឺ $m = 502$ ។

លំហាត់ទី៨៨

គណនាផលបូក: $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក: $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}$

យើងមាន: $\binom{n+2}{k} = \frac{(n+2)!}{k!(n+2-k)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2-k)(n+1-k)} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2-k)(n+1-k)} \binom{n}{k}$$

យក $k = 0,1,2,\ldots,n$ បន្ទាប់មកបូក:

$$\binom{n+2}{0} = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)(n+1)} \binom{n}{0}$$

$$\binom{n+2}{1} = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+1)n} \binom{n}{1}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n+2}{n} = \frac{(n+2)(n+1)}{2.1} \binom{n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k} = (n+1)(n+2)\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}\binom{n}{0} + \frac{1}{n(n+1)}\binom{n}{1} + \cdots + \frac{1}{2.1}\binom{n}{n}\right]$$

តែ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \Rightarrow \binom{n}{0} = \binom{n}{n}; \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} \cdots$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k} = (n+1)(n+2).\mathrm{A}_n$$

$$\Leftrightarrow\left[\sum_{k=0}^{n+2}\binom{n+2}{k}-\binom{n+2}{n+1}-\binom{n+2}{n+2}\right]=(n+1)(n+2).\mathrm{A}_n$$

តាមទ្វេធាញ៉ូតុនគេបាន: $\sum_{k=o}^{n+2}\binom{n+2}{k}=2^{n+2}$

$$\Leftrightarrow\left[2^{n+2}-(n+2)-1\right]=(n+1)(n+2).\mathrm{A}_n$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}_n=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}$$

ដូចនេះ $\mathrm{A}_n=\dfrac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}$ ។

លំហាត់ទី៨៩

គណនាផលបូក: $B_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\binom{n}{k}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក: $B_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\binom{n}{k}$

$$\binom{n+3}{k}=\frac{(n+3)!}{k!(n+3-k)!}=\frac{(n+2)(n+1)(n+3)}{(n+3-k)(n+2-k)(n+1-k)}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+3-k)(n+2-k)(n+1-k)}\binom{n}{k}$$

យក $k=0,1,2,\ldots,n$ បន្ទាប់មកបូក:

$$\binom{n+3}{0}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)}\binom{n}{0}$$

$$\binom{n+3}{1}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+2)(n+1)n}\binom{n}{1}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n+3}{n}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3.2.1}\binom{n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+3}{k}=(n+1)(n+2)(n+3)\,\mathrm{B}_n$$

ព្រោះ $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{n-k}\Rightarrow\binom{n}{0}=\binom{n}{n};\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}\cdots$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+3}{k}=(n+1)(n+2)(n+3).\mathrm{B}_n$$

$$\Leftrightarrow\left[\sum_{k=0}^{n+3}\binom{n+3}{k}-\binom{n+1}{n+1}-\binom{n+3}{n+2}-\binom{n+3}{n+3}\right]=(n+1)(n+2)(n+3).\mathrm{B}_n$$

តាមទ្វេធាញូតុនគេបាន: $\displaystyle\sum_{k=o}^{n+3}\binom{n+3}{k}=2^{n+3}$

$$\Leftrightarrow\left[2^{n+3}-\frac{(n+3)!}{2!(n+1)!}-\frac{(n+3)!}{1!(n+2)!}1\right]=(n+1)(n+2)(n+3).\mathrm{B}_n$$

$$\Rightarrow B_n=\frac{2^{n+4}-(n^2+3n+2)}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$$

ដូចនេះ $B_n=\dfrac{2^{n+4}-(n^2+3n+2)}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$ ។

លំហាត់ទី៩០

កំណត់អនុគមន៍: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$\begin{cases} f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)\ ;\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ f

យើងមាន: $\begin{cases} f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)\ ;\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\end{cases}$

យកតម្លៃ a មួយក្នុងន័យទូទៅដែល $y=x-a$ គេបាន:

$f(2x-a)+f(a)=2f(x)f(x-a)$

$\Rightarrow f(a)=2f(x)f(x-a)-f(2x-a)$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x-a)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(2x-a)=0\end{cases}$$

$\Rightarrow f(a)=0$

ដូចនេះ $f(a)=0$ ។

លំហាត់ទី៩១

គេឲ្យ a,b,c,d ជាចំនួនពិត ។ ស្រាយថា:

$\min\left(a-b^2,b-c^2,c-d^2,d-a^2\right)\le\dfrac{1}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\min\left(a-b^2,b-c^2,c-d^2,d-a^2\right)\le\dfrac{1}{4}$

យើងឧបមាថាវាផ្ទុយការពិតថាចំនួន $a-b^2,b-c^2,c-d^2,d-a^2$ សុទ្ធតែជាចំនួនធំជាង $\dfrac{1}{4}$ គេបាន:

$$a-b^2+b-c^2+c-d^2+d-a^2>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$a^2-a+\frac{1}{4}+b^2-b+\frac{1}{4}c^2-c+\frac{1}{4}+d^2-d+\frac{1}{4}<0$$

$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(c-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(d-\dfrac{1}{2}\right)^2<0$ មិនពិត

ដូចនេះ $\min\left(a-b^2, b-c^2, c-d^2, d-a^2\right) \le \frac{1}{4}$ ។

លំហាត់ទី៩២

គេឲ្យ $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់និងមានដេរីវេដែលផ្ទៀងផ្ទាត់: $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = 1$ ។ ស្រាយថា: $|f(1)-f(0)|<1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $|f(1)-f(0)|<1$

យើងដឹងថា: $\int_0^1 \left(|f'(x)|-1\right)^2 dx \ge 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx - 2\int_0^1 |f'(x)| dx + \int_0^1 dx \ge 1$

$\Leftrightarrow 1 + x\Big|_0^1 \ge 2\int_0^1 |f'(x)| dx$

$\Leftrightarrow 2 \ge 2\left|f(x)\right|\Big|_0^1$

$\Leftrightarrow 1 \ge |f(1)| - |f(0)| > |f(1)-f(0)|$ ពិត

ដូចនេះ $|f(1)-f(0)|<1$ ។

លំហាត់ទី៩៣

រកពហុធាដែលមានឫសជាគូបនៃឫសរបស់ពហុធា t^3+at^2+bt+c (ដែលជាចំនួនថេរ) ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១

រកពហុធាដែលមានឫសជាគូបនៃឫសរបស់ពហុធា t^3+at^2+bt+c

សន្មតថា m,n,p ជាឫសរបស់ពហុធា t^3+at^2+bt+c

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន:

$$\begin{cases} m+n+p=-a \\ mn+np+pm=b \\ mnp=-c \end{cases}$$ នោះឫសរបស់ពហុធាដែលត្រូវរកគឺ m^3, n^3, p^3

$\Rightarrow m^3+n^3+p^3=(m+n+p)^3-3(m+n+p)(mn+np+pm)+3mnp$

$\Leftrightarrow m^3+n^3+p^3=-a^3-3.(-a).b-3c$

$\Leftrightarrow m^3+n^3+p^3=-a^3+3ab-3c$

$\Rightarrow m^3n^3+n^3p^3+p^3m^3$

$=(mn+np+pm)^3-3mnp(mn+np+pm)(m+n+p)+3n^2m^2p^2$

$=b^3-3(-c)b(-a)+3(-\mathrm{c})^2$

$=b^3-3abc+3c^2$

$\Rightarrow n^3m^3p^3=(-c)^3=-c^3$

នោះពហុធាដែលត្រូវរកគឺ:

$x^3-(-a^3+3ab-3c)x^2+(b^3-3abc+3c^2)x+c^3=0$

ដូចនេះ ពហុធាដែលត្រូវរកគឺ

$x^3-(-a^3+3ab-3c)x^2+(b^3-3abc+3c^2)x-c^3=0$ ។

របៀបទី២

រកពហុធាដែលមានឫសជាគូបនៃឫសរបស់ពហុធា t^3+at^2+bt+c

តាង $x=t^3 \Rightarrow t=\sqrt[3]{x}$ គេបាន:

$x+a\sqrt[3]{x^2}+b\sqrt[3]{x}+c=0$

$x+c=-\sqrt[3]{x}\left(a\sqrt[3]{x}+b\right)$

$\Leftrightarrow (x+c)^3=\left[-\sqrt[3]{x}\left(a\sqrt[3]{x}+b\right)\right]^3$

$x+a\sqrt[3]{x^2}+b\sqrt[3]{x}+c=0$

$x+c=-\sqrt[3]{x}(a\sqrt[3]{x}+b)$

$\Leftrightarrow \left(x+c\right)^3 = \left[-\sqrt[3]{x}\left(a\sqrt[3]{x}+b\right)\right]^3$

$x^3+3x^2c+3xc^2+c^3 = -x\left(a^3x+3a^2b\sqrt[3]{x^2}+3ab^2\sqrt[3]{x}+b^3\right)$

$x^3+3x^2c+3xc^2+c^3 = -x\left(a^3x+b^3+3ab\sqrt[3]{x}(a\sqrt[3]{x}+b)\right)$

$x^3+3x^2c+3xc^2+c^3 = -x\left(a^3x+b^3-3ab(x+c)\right)$

$x^3+3x^2c+3xc^2+c^3+a^3x^2+b^3x-3abx^2-3abcx = 0$

$x^3+\left(3c+a^3-3a\right)x^2+\left(3c^2+b^3-3abc\right)x+c^3 = 0$

ដូចនេះ ពហុធាដែលត្រូវរកគឺ:

$x^3-\left(-a^3+3ab-3c\right)x^2+\left(b^3-3abc+3c^2\right)x-c^3 = 0$ ។

លំហាត់ទី៩៤

បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចំនួន x_i, $(i=1,2,3\ldots)$

និង $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ គេបាន: $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$

យើងមាន: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, $x_i \ge 0 \Rightarrow x_i \in [0,1)$

តាង $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$, $x \in (0,1)$

$$\Leftrightarrow f(x)=x(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}x(1-x)^{-\frac{5}{2}}>0$$

នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ផត តាមវិសមភាព *Jensen* គេបាន:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geq f\left(\frac{1}{n}\right)\ ;\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$

យើងគ្រាន់តែស្រាយថា $\sqrt{n}\geq\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$ ជាការគ្រប់គ្រាន់

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)^2\leq n\sum_{i=1}^{n}x_i\ ;\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\leq\sqrt{n}$$ ពិត ។

ដូចនេះ $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$ ។

លំហាត់ទី៩៥

គេឲ្យ $f(x)=4^x+6^x+9^x$ ស្រាយថាបើ m,n ជាចំនួនគត់នោះ $f(2^m)$ ជាកត្តានៃ $f(2^n)$ គ្រប់ $m\le n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $f(2^m)$ ជាកត្តានៃ $f(2^n)$ គ្រប់ $m\le n$

តាង $g(x)=4^x-6^x+9^x$ នោះសមភាព

$\left(a^2+ab+b^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^4+a^2b^2+b^4$

$\Leftrightarrow f(x)g(x)=f(2x)$; $a=2^x, b=3^x$

ធ្វើតាមលំនាំនេះបន្តទៀតគេបាន:

$f(x)g(x)g(2x)\cdots g(2^{k-1}x)=f(2^k x)$, $k\ge 2$

តែដោយ $m\le n$ នោះគេបាន:

$f(2^m)g(2^m)g(2^{m+1})\cdots g(2^{n-1})=f(2^n)$, $k\ge 2$

$\Rightarrow f(2^m)$ ជាកត្តានៃ $f(2^n)$ ពិត

ដូចនេះ $f(2^m)$ ជាកត្តានៃ $f(2^n)$ ។

លំហាត់ទី៩៦

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា: $3^{2^{x!}}=2^{3^{x!}}+1$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា: $3^{2^{x!}}=2^{3^{x!}}+1$

យើងមាន: $3^{2^{x!}}=2^{3^{x!}}+1$

បើ $x=1: 3^{2^{1!}}=2^{3^{1!}}+1 \Leftrightarrow 9=9$ ពិត

បើ $x>1 \Rightarrow x!$ ជាចំនួនគូ $\Rightarrow 2^{x!}$ ក៏ជាចំនួនគត់គូដែរ។

សន្មតថា $2^{x!}=2k \Rightarrow 3^{2^{x!}}=3^{2k}\equiv 1,9 \pmod{10}$

ដោយ $3\equiv -1 \pmod 4$

$\Rightarrow 3^{x!}\equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 3^{x!}=4p+1,\ p\in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 2^{3^{x!}}=2^{4p+1}=2.16^p\equiv 2 \pmod{10}$

$\Rightarrow 2^{3^{x!}}+1\equiv 3 \pmod{10}$

ដូចនេះ មានតែតម្លៃ $x=1$ ទេ ដែល $3^{2^{x!}}=2^{3^{x!}}+1$ ។

លំហាត់ទី៩៧

គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ac=1$ ស្រាយថា:

$\arctan\frac{1}{a}+\arctan\frac{1}{b}+\arctan\frac{1}{c}=\pi$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\arctan\frac{1}{a}+\arctan\frac{1}{b}+\arctan\frac{1}{c}=\pi$

តាង $x=\tan a$, $y=\tan b$, $z=\tan c$

$\Rightarrow a=\arctan x$,$b=\arctan y$, $c=\arctan z$

តែ $\tan(a+b+c)=\dfrac{\tan a+\tan b+\tan c-\tan a\tan b\,\mathrm{tanc}}{1-(\tan a\tan b+\tan b\tan c+\tan a\tan c)}$

$\Leftrightarrow \tan(a+b+c)=\dfrac{x+y+z-xyz}{1-(xy+yz+zx)}$

$\Rightarrow a+b+c=\arctan\left(\dfrac{x+y+z-xyz}{1-(xy+yz+zx)}\right)+k\pi$

$$\Leftrightarrow \arctan x + \arctan y + \arctan z = \arctan\left(\frac{x+y+z-xyz}{1-\left(xy+yz+zx\right)}\right) + k\pi$$

$$\arctan\frac{1}{a} + \arctan\frac{1}{b} + \arctan\frac{1}{c} = \arctan\left(\frac{ab+bc+ac-1}{abc-(a+b+c)}\right) + k\pi$$

តែ $ab+bc+ac=1$

$$\arctan\frac{1}{a} + \arctan\frac{1}{b} + \arctan\frac{1}{c} = k\pi$$

ដោយ $0 < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ ចំពោះ $x > 0$

$$\Rightarrow 0 < \arctan\frac{1}{a} + \arctan\frac{1}{b} + \arctan\frac{1}{c} < \frac{3\pi}{2}$$

គេបាន: $k=1$: $\arctan\frac{1}{a} + \arctan\frac{1}{b} + \arctan\frac{1}{c} = \pi$ ពិត ។

ដូចនេះ $\arctan\frac{1}{a} + \arctan\frac{1}{b} + \arctan\frac{1}{c} = \pi$ ។

លំហាត់ទី៩៨

ចូរកំណត់ត្រីធាតុអសនិទាន (a,b,c) ដែល: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ត្រីធាតុអសនិទាន (a,b,c) ដែល: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$

តាង $\sqrt[3]{2} = x$

$$\Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x^3 - 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 1$$

$$\Rightarrow x-1 = \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{3}{3x^2+3x+3} = \frac{3}{3x^2+3x+x^3+1} \ , x^3 = 2$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \frac{3}{(x+1)^3} \Rightarrow \sqrt[3]{x-1} = \frac{\sqrt[3]{3}}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}+1}=\frac{\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)}{3}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

$$\Rightarrow (a,b,c)=\left(\frac{4}{9},-\frac{2}{9},\frac{1}{9}\right)$$

ដូចនេះ ត្រីធាតុអសនិទានគឺ $(a,b,c)=\left(\frac{4}{9},-\frac{2}{9},\frac{1}{9}\right)$ ។

លំហាត់ទី៩៩

បង្ហាញថា: $\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\geq\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-1\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\geq\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-1\right)$

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន:

$$n+(n+1)+(n+1)\geq 3\sqrt[3]{n(n+1)^2}$$

$$3n+2\geq 3\sqrt[3]{n(n+1)^2}$$

$$2\geq 3\left(\sqrt[3]{n(n+1)^2}-n\right)$$

$$2\geq 3\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right)$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{n}}\geq\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\geq\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k}} \ge \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{(k+1)^2}-\sqrt[3]{k^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k}} \ge \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-1\right)$$

ឬ $\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ge \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-1\right)$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ge \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-1\right)$ ។

លំហាត់ទី១០០

គេឲ្យ $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n n^2}{n!}=e^x$ ស្រាយថា: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=(x^2+x)e^x$

រួចគណនា $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=(x^2+x)e^x$ រួចគណនា $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}$

យើងមាន: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2x^n}{n(n-1)!}$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)x^n+x^n}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)x^n}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$= x^2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$= x^2e^x + xe^x = (x^2+x)e^x$ ពិត

គណនា $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}$

យើងមាន: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2x^n}{n!} = (x^2+x)e^x$

យក $x=1$: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!} = 2e$

ដូចនេះ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2x^n}{n!} = (x^2+x)e^x$ និង $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!} = 2e$ ។

លំហាត់ទី១០១

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ស្រាយថា:

$$\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}$

តាង $f(x) = (\tan x)^{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow f'(x) = 2\sqrt{2}\left(1+\tan^2 x\right)\left(\tan x\right)^{2\sqrt{2}-1}$

$\Rightarrow f''(x) = 4\sqrt{2}\left(1+\tan^2 x\right)\left(\tan x\right)^{2\sqrt{2}-1}$

$+2\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)\left(1+\tan^2 x\right)^2\left(\tan x\right)^{2\sqrt{2}-2} > 0$

នោះ f ជាអនុគមន៍ផត

តាមវិសមភាព *Jensen* គេបាន:

$$\frac{f\left(\frac{A}{2}\right)+f\left(\frac{B}{2}\right)+f\left(\frac{C}{2}\right)}{3}\geq f\left(\frac{A+B+C}{6}\right)$$

តែ $A+B+C=\pi$

$$\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\geq 3\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)^{2\sqrt{2}}$$

$$\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\geq 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2\sqrt{2}}=3\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}=3^{1-\sqrt{2}}$$ ពិត

ដូចនេះ $\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\geq 3^{1-\sqrt{2}}$ ។

លំហាត់ទី១០២

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ស្រាយថា:

$(2R+a)(2R+b)(2R+c)<8R^3e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $(2R+a)(2R+b)(2R+c)<8R^3e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

យើងមាន: $(2R+a)(2R+b)(2R+c)<8R^3e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$\Leftrightarrow(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C)<e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $8R^3$

តាង $f(x)=\ln(x+1)-x$; $x\in(0,1)$

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}<0\Rightarrow f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះគ្រប់ $x\in(0,1)$

$\Rightarrow f(x)<f(0)$

តែ $f(0)=\ln 1-0=0 \Rightarrow f(x)<0\Rightarrow \ln(1+x)-x<0\Rightarrow \ln(1+x)<x$

យក $x=\sin A;\sin B;\sin C$ រួចបូក:

$\ln(1+\sin A)+\ln(\mathrm{sinB})+\ln(\mathrm{sinC})<\mathrm{sinA}+\mathrm{sinB}+\mathrm{sinC}$

$\ln(1+\sin A)(1+\sin A)(1+\sin A)<\mathrm{sinA}+\mathrm{sinB}+\mathrm{sinC}$

$(1+\sin A)(1+\sin A)(1+\sin A)<e^{\mathrm{sinA}+\mathrm{sinB}+\mathrm{sinC}}\quad (*)$

តាង $g(x)=\sin x\Rightarrow g'(x)=\cos x\Rightarrow g''(x)=-\sin x<0$

នោះ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង

តាមវិសមភាព *Jensen* គេបាន:

$$\frac{g(A)+g(B)+\mathrm{g(C)}}{3}\le g\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C\le 3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ព្រោះ $A+B+C=\pi$

$$\Rightarrow e^{\mathrm{sinA}+\mathrm{sinB}+\mathrm{sinC}}\le e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\quad (**)$$

តាម $(*)$ និង $(**)$ គេបាន: $\left(1+\sin A\right)\left(1+\mathrm{sinB}\right)\left(1+\mathrm{sinC}\right)<e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ ពិត

ដូចនេះ $\left(2R+a\right)\left(2R+b\right)\left(2R+c\right)<8R^3e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ ។

លំហាត់ទី១០៣

គេឲ្យ $\begin{cases}x,\ y,z>0\\ xy+yz+zx=1\end{cases}$ ។ ស្រាយថា:

$$x.\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+y.\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{1+y^2}}+z.\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}=2$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា:

$$x.\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+y.\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{1+y^2}}+z.\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}=2$$

តាង $x=\tan\alpha, y=\tan\beta, z=\tan\gamma$; $\left(\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$

តែ $xy+yz+zx=1\Leftrightarrow \tan\alpha\tan\beta+\tan\gamma\tan\beta+\tan\gamma\tan\alpha=1$

ដោយ $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-(\tan\alpha\tan\beta+\tan\gamma\tan\beta+\tan\gamma\tan\alpha)}$

ដោយ $\tan\alpha\tan\beta+\tan\gamma\tan\beta+\tan\gamma\tan\alpha=1$ កាលណា

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ គេបាន:

$$x.\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+y.\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{1+y^2}}+z.\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

$$=\tan\alpha.\sqrt{\frac{(1+\tan^2\beta)(1+\tan^2\gamma)}{1+\tan^2\alpha}}+\tan\beta.\sqrt{\frac{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\gamma)}{1+\tan^2\beta}}$$

$$+\tan\gamma.\sqrt{\frac{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)}{1+\tan^2\gamma}}$$

$$=\tan\alpha.\sqrt{\frac{\frac{1}{\cos^2\beta}\cdot\frac{1}{\cos^2\gamma}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}}+\tan\beta.\sqrt{\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\gamma}}{\frac{1}{\cos^2\beta}}}$$

$$+\tan\gamma.\sqrt{\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\beta}}{\frac{1}{\cos^2\gamma}}}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\beta.\cos\gamma} + \frac{\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right)}{\cos\beta.\cos\gamma} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \gamma\right)}{\cos\alpha.\cos\gamma} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right)}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

$$= \frac{\cos(\beta+\gamma)}{\cos\beta.\cos\gamma} + \frac{\cos(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha.\cos\gamma} + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

$$= \frac{\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta.\cos\gamma} + \frac{\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha.\cos\gamma}$$

$$+ \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

$= 3 - \left(\tan\alpha\tan\beta + \tan\gamma\tan\beta + \tan\gamma\tan\alpha\right) = 3 - 1 = 2$ ពិត

ដូចនេះ សមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១០៤

គេឲ្យ ABC ត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយថា:

$\left(\sin \mathrm{A}\right)^{\sin B} + \left(\sin B\right)^{\sin C} + \left(\sin C\right)^{\sin A} > 1,19$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\left(\sin \mathrm{A}\right)^{\sin B} + \left(\sin B\right)^{\sin C} + \left(\sin C\right)^{\sin A} > 1,19$

តាង $f(x) = x^x$; $x \in (0,1)$

$\Leftrightarrow \ln f(x) = x\ln x$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = f(x)\left(\ln x + 1\right) = x^x\left(\ln x + 1\right)$$

បើ $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \ln x = 0$; $x^x > 0$

$$\Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

តាមតារាងអថេរភាព

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt[e]{e}}$	$\nearrow$	

តាមតារាងគេបាន: $f(x) > f\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow x^x > \frac{1}{\sqrt[e]{e}}$

តាមវិសមភាព *Bernoulli* គេបាន:

យក $v \in (0,1)$

$$u^v = \frac{u}{u^{1-v}} = \frac{u}{(1-u+1)^{1-v}} > \frac{u}{1+(1-v)(1-u)} = \frac{u}{u+v-uv} > \frac{u}{u+v}$$

$$(\sin B)^{\sin C} + (\sin C)^{\sin A} > \frac{\sin B}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin C}{\sin A + \sin C} \quad (1)$$

សន្មត់ថា $\sin A \ge \sin B \ge \sin C$ គេបាន:

$$\begin{cases} (\sin B)^{\sin A} \ge (\sin A)^{\sin A} \ge \dfrac{1}{\sqrt[e]{e}} \\ \dfrac{\sin B}{2(\sin B + \sin C)} + \dfrac{\sin C}{\sin A + \sin C} > \dfrac{\sin C}{2(\sin B + \sin C)} \end{cases}$$

តាម $(*)$: $(\sin C)^{\sin B} + (\sin B)^{\sin C} + (\sin C)^{\sin A}$

$$> \frac{1}{\sqrt[e]{e}} + \frac{\sin B}{2(\sin B + \sin C)} + \frac{\sin C}{2(\sin B + \sin C)}$$

$$\Leftrightarrow (\sin C)^{\sin B} + (\sin B)^{\sin C} + (\sin C)^{\sin A} > \frac{1}{\sqrt[e]{e}} + \frac{1}{2} > 1,19$$

ដូចនេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១០៥

ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន:

$(1+x!)(1+y!)=(x+y)!$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន:

$(1+x!)(1+y!)=(x+y)!$

បើ $x,y>2 \Rightarrow 1+x!\,,1+y!$ ជាចំនួនគត់សេស

$\Rightarrow (1+x!)(1+y!)$ ជាចំនួនគត់សេស

តែ $(x+y)!$ជាចំនួនគត់គូ

មានន័យថាកាលណាបើ$x,y>2$នោះសមីការគ្មានឫស

$\Rightarrow x,y\in\{0,1,2\}$

បើ $x=0 \Leftrightarrow (1+0!)(1+0!)=(0+0)! \Leftrightarrow 4=1$ មិនពិត

បើ $x=1:2(1+y!)=(1+y)! \Leftrightarrow 2=(1+y)!-2y!$

$\Leftrightarrow y!(1+y-2)=2 \Rightarrow y=2$

បើ $x=2:(1+2!)(1+y!)=(2+y)! \Leftrightarrow 3=(2+y)!-3y!$

$\Leftrightarrow 3=y!(y^2+3y-1) \Rightarrow \text{y}=1$

ដូចនេះ $(x,y)=(1,2)\ ;\ (2,1)$ ។

លំហាត់ទី១០៦

រក(បើមាន) ចំនួនគត់ n ធម្មជាតិតូចបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin n^\circ}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos n^\circ}=4\sqrt{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

យើងមាន: $\frac{\sqrt{3}-1}{\sin n^\circ}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos n^\circ}=4\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\sin n^\circ}+\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\cos n^\circ}=4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\sin n^\circ}+\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\cos n^\circ}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\sin n^\circ}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\cos n^\circ}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}}{\sin n^\circ}+\frac{\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\cos n^\circ}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin n^\circ}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos n^\circ}=2$$

$$\Leftrightarrow \cos n^\circ\sin\frac{\pi}{12}+\sin n^\circ\cos\frac{\pi}{12}=2\sin n^\circ\cos n^\circ$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(n^\circ+\frac{\pi}{12}\right)=\sin 2n^\circ$$

$$\Leftrightarrow n^\circ+\frac{\pi}{12}=2n^\circ+2k\pi \ ; \ k\in\mathbb{Z}$$

ដើម្បីឲ្យ n មានតម្លៃតូចបំផុតកាលណា $k=0$

$$n^\circ+\frac{\pi}{12}=2n^\circ\Rightarrow n^\circ=\frac{\pi}{12}=15^\circ$$

ដូចនេះ $n=15$ ជាតម្លៃតូចបំផុត ។

លំហាត់ទី១០៧

កំណត់ចំនួនថេរ a,b,c ដែល:

$$\sqrt{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[3]{\sqrt{ak^3+bk^2+ck+1}-\sqrt{ak^3+bk^2+ck}}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១

កំណត់ចំនួនថេរ a,b,c ដែល:

$$\sqrt{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[3]{\sqrt{ak^3+bk^2+ck+1}-\sqrt{ak^3+bk^2+ck}}$$

យើងមាន:

$$\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^3$$

$$=(k+1)\sqrt{k+1}-3\sqrt{k(k+1)^2}+3\sqrt{k^2(k+1)}-k\sqrt{k}$$

$$=(k+1)\sqrt{k+1}-3(k+1)\sqrt{k}+3k\sqrt{(k+1)}-k\sqrt{k}$$

$$=(4k+2)\sqrt{k+1}-(4k+3)\sqrt{k}$$

$$=\sqrt{(k+1)(4k+2)^2}-\sqrt{k(4k+3)^2}$$

$$=\sqrt{(k+1)(16\mathrm{k}^2+16k+4)}-\sqrt{k(16k^2+24k+9)}$$

$$=\sqrt{16k^3+24k^2+9k+1}\sqrt{16k^3+24k^2+9k}$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\sqrt[3]{\sqrt{16k^3+24k^2+9k+1}\sqrt{16k^3+24k^2+9k}}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[3]{\sqrt{16k^3+24k^2+9k+1}\sqrt{16k^3+24k^2+9k}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[3]{\sqrt{16k^3+24k^2+9k+1}\sqrt{16k^3+24k^2+9k}}$$

$$\Rightarrow a=16,\ b=24\ ,\ c=9$$

ដូចនេះ $a=16, b=24 , c=9$ ។

របៀបទី២

កំណត់ចំនួនថេរ a,b,c ដែល:

$$\sqrt{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[3]{\sqrt{ak^3+bk^2+ck+1}-\sqrt{ak^3+bk^2+ck}}$$

យើងមាន: $\sqrt{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[3]{\sqrt{ak^3+bk^2+ck+1}-\sqrt{ak^3+bk^2+ck}}$

យក $n=2:\sqrt{2}=\sum_{k=0}^{1}\sqrt[3]{\sqrt{ak^3+bk^2+ck+1}-\sqrt{ak^3+bk^2+ck}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}=1+\sqrt[3]{\sqrt{a+b+c+1}-\sqrt{a+b+c}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^3=\sqrt{a+b+c+1}-\sqrt{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{50}-\sqrt{49}=\sqrt{a+b+c+1}-\sqrt{a+b+c}$$

$$\Rightarrow a+b+c=49 \quad (1)$$

យក $n=3:\sqrt{3}=\sum_{k=0}^{2}\sqrt[3]{\sqrt{ak^3+bk^2+ck+1}-\sqrt{ak^3+bk^2+ck}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}=1+\sqrt{2}-1+\sqrt[3]{\sqrt{8a+4b+2c+1}-\sqrt{8a+4b+2c}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^3=\sqrt{8a+4b+2c+1}-\sqrt{8a+4b+2c}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{243}-\sqrt{242}=\sqrt{8a+4b+2c+1}-\sqrt{8a+4b+2c}$$

$$\Rightarrow 8a+4b+2c=242$$

$$\Leftrightarrow 4a+2b+c=121 \quad (2)$$

យក $n=4:2=\sum_{k=0}^{3}\sqrt[3]{\sqrt{ak^3+bk^2+ck+1}-\sqrt{ak^3+bk^2+ck}}$

$$\Leftrightarrow 2=1+\sqrt{2}-1+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\sqrt[3]{\sqrt{27a+9b+3c+1}-\sqrt{27a+9b+3c}}$$

$$\Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^3=\sqrt{27a+9b+3c+1}-\sqrt{27a+9b+3c}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{676}=\sqrt{675}=\sqrt{27a+9b+3c+1}-\sqrt{27a+9b+3c}$$

$\Rightarrow 27a+9b+3c=675$

$\Leftrightarrow 9a+3b+c=225 \quad (3)$

តាម $(1),(2),(3)$ គេបាន:

$$\begin{cases} a+b+c=49 \\ 4a+2b+c=121 \\ 9a+3b+c=225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+b=72 \\ 5a+b=104 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=16 \\ b=24 \\ c=9 \end{cases}$$

ដូចនេះ $a=16,\ b=24,\ c=9$ ។

លំហាត់ទី១០៨

គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4} \\ x_n = \dfrac{x_1+4x_2+9x_3++(n-1)^2x_{n-1}}{n^2(n-1)} \end{cases}$

គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(12n^2-31n+2015\right)x_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(12n^2-31n+2015\right)x_n$

យើងមាន: $x_n = \dfrac{x_1+4x_2+9x_3+\cdots+(n-1)^2x_{n-1}}{n^2(n-1)}$

$$\Leftrightarrow x_1+4x_2+9x_3+\cdots+(n-1)^2x_{n-1} = n^2(n-1)x_n$$

$$\Leftrightarrow x_1+4x_2+9x_3+\cdots+(n-1)^2x_{n-1}+n^2x_n = n^3x_n \quad (1)$$

$$\Rightarrow x_1+4x_2+9x_3+\cdots+(n-1)^2x_{n-1} = (n-1)^3x_{n-1} \quad (2)$$

យក $(1)-(2)$:

$n^2x_n = n^3x_n-(n-1)^3x_{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{(n-1)^2}{n^2} \Rightarrow \prod_{k=2}^{n} \frac{x_k}{x_{k-1}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{k^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_n}{x_1} = \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{n^2} x_1 = \frac{1}{4n^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(12n^2 - 31n + 2015\right) x_n$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(12n^2 - 31n + 2015\right) \cdot \frac{1}{4n^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n^2\left(12 - \frac{31}{n} + \frac{2015}{n^2}\right)}{4n^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(12 - \frac{31}{n} + \frac{2015}{n^2}\right)}{4} = 3$$

$$\Leftrightarrow (n-1)^3 x_{n-1} = (n^3 - n^2) x_n \Rightarrow (n-1)^2 x_{n-1} = n^2 x_n$$

ព្រោះ៖ $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{31}{n}\right) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2015}{n^2}\right) = 0$

ដូចនេះ៖ $\lim_{x\to+\infty} \left(12n^2 - 31n + 2015\right) x_n = 3$

លំហាត់ទី១០៩

ស្រាយថា: $\left(\frac{\sin a + \cot a}{1 + \sin a \tan a}\right)^n = \frac{\sin^n a + \cot^n a}{1 + \sin^n a \tan^n a}$; $n \in \mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\left(\frac{\sin a + \cot a}{1 + \sin a \tan a}\right)^n = \frac{\sin^n a + \cot^n a}{1 + \sin^n a \tan^n a}$; $n \in \mathbb{N}$

យើងមាន: $\left(\frac{\sin a+\cot a}{1+\sin a\tan a}\right)^n=\left(\frac{\sin a+\cot a}{1+\sin a\cdot\frac{1}{\cot a}}\right)^n=\cot^n a\ (*)$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{\sin^n a+\cot^n a}{1+\sin^n a\tan^n a}=\frac{\sin^n a+\cot^n a}{1+\sin^n a\cdot\frac{1}{\cot^n a}}=\cot^n a\quad(**)$

តាម (*) និង (**): $\left(\frac{\sin a+\cot a}{1+\sin a\tan a}\right)^n=\frac{\sin^n a+\cot^n a}{1+\sin^n a\tan^n a}$

ដូចនេះ $\left(\frac{\sin a+\cot a}{1+\sin a\tan a}\right)^n=\frac{\sin^n a+\cot^n a}{1+\sin^n a\tan^n a}$ ។

លំហាត់ទី១១០

គណនាផលបូក:

$$S=\frac{2}{2015+1}+\frac{2^2}{2015^2+1}+\frac{2^3}{2015^4+1}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{2015^{2^n}+1}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក:

$$S=\frac{2}{2015+1}+\frac{2^2}{2015^2+1}+\frac{2^3}{2015^4+1}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{2015^{2^n}+1}$$

យើងមាន: $\frac{1}{m+1}=\frac{(m-1)}{(m-1)(m+1)}\ ;\forall m\in\mathbb{N}\ ,m>1$

$$=\frac{m}{(m-1)(m+1)}-\frac{1}{m^2-1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{m+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m-1}\right)-\frac{1}{m^2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{m+1}=\frac{2}{m-1}-\frac{2^2}{m^2-1}$$

យក $m=2015,2015^2\ldots,2015^{2^n}$ បន្ទាប់មកបូកគេបាន:

$$\frac{2}{2015+1}=\frac{2}{2015-1}-\frac{2^2}{2015^2-1}$$

$$\frac{2^2}{2015^2+1}=\frac{2^2}{2015^2-1}-\frac{2^3}{2015^4-1}$$

$\vdots$

$$\frac{2^{2^{n+1}}}{2015^{2^{n+1}}+1}=\frac{2^{2^{n+1}}}{2015^{2^{n+1}}-1}-\frac{2^{2^{n+2}}}{2015^{2^{n+1}}-1}$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{2}{2014}-\frac{2^{2^{n+2}}}{2015^{2^{n+1}}-1}$$

ដូចនេះ $S=\frac{2}{2014}-\frac{2^{2^{n+2}}}{2015^{2^{n+1}}-1}$ ។

លំហាត់ទី១១១

គេឲ្យ a ជាចំនួនមួយគត់ដែល $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{23}=\frac{a}{23!}$ កំណត់សំណល់ពេល a ចែកនឹង13 ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់សំណល់ពេល a ចែកនឹង13

យើងមាន: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{23}=\frac{a}{23!}$

$$\Leftrightarrow 23!+\frac{23!}{2}+\frac{23!}{3}+\cdots+\frac{23!}{23}=a$$

យើងសង្កេតឃើញថានៅសងខាង $\frac{23!}{13}$ សុទ្ធតែជាចំនួនចែកដាច់នឹង 13 ។

$\Rightarrow a \equiv \frac{23!}{13} \equiv 12!.14.15.....23 \equiv 12!.10! \ \pmod{13}$

តាមទ្រឹស្តីបទ *Fermat* គេបាន:

$\Rightarrow a \equiv (13-1)! \cdot \frac{(13-1)!}{11.12} \equiv \frac{1}{11.12} \equiv 7 \ \pmod{13}$

ដូចនេះ សំណល់ពេល a ចែកនឹង13 គឺ 7 ។

លំហាត់ទី១១២

រកលេខខ្ទង់ចុងក្រោយនៃផលបូក:

$A = 1 + \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{2015} + \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}_{2015} + \underbrace{4^{4^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}_{2015} + \underbrace{5^{5^{\cdot^{\cdot^{5}}}}}_{2015} + \underbrace{6^{6^{\cdot^{\cdot^{6}}}}}_{2015} + \underbrace{7^{7^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}_{2015}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកលេខខ្ទង់ចុងក្រោយនៃផលបូក:

$A = 1 + \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{2015} + \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}_{2015} + \underbrace{4^{4^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}_{2015} + \underbrace{5^{5^{\cdot^{\cdot^{5}}}}}_{2015} + \underbrace{6^{6^{\cdot^{\cdot^{6}}}}}_{2015} + \underbrace{7^{7^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}_{2015}$

ដោយ $2^2 \equiv 4 \ (\text{mod}10) \Rightarrow 2^{4k} \equiv 6 \ (\text{mod}10) \Rightarrow \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{2015} \equiv 6 \ (\text{mod}10)$

$3^4 \equiv 1 (\text{mod}\,4) \Rightarrow 3^{4k+1} \equiv 3 \ (\text{mod}\,4) \Rightarrow \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}_{2015} = 3^{4k+1} \equiv 3^3 \equiv 7 (\text{mod}10)$

$4^2 \equiv 6 \ (\text{mod}10) \Rightarrow 4^{2k} \equiv 6 \ (\text{mod}10) \Rightarrow \underbrace{4^{4^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}_{2015} \equiv 6 \ (\text{mod}10)$

$\underbrace{5^{5^{\cdot^{\cdot^{5}}}}}_{2015} \equiv 5 (\text{mod}10)$

$\underbrace{6^{6^{\cdot^{\cdot^{6}}}}}_{2015} \equiv 6 (\text{mod}10)$

$$7^4 \equiv 1(\text{mod}\,4) \Rightarrow 7^{4k+1} \equiv 3(\text{mod}\,4) \Rightarrow \underbrace{7^{7^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}_{2015} \equiv 3^{4k+1} \equiv 7^3 \equiv 3(\text{mod}10)$$

$$\Rightarrow 1+\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{2015}+\underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}_{2015}+\underbrace{4^{4^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}_{2015}+\underbrace{5^{5^{\cdot^{\cdot^{5}}}}}_{2015}+\underbrace{6^{6^{\cdot^{\cdot^{6}}}}}_{2015}+\underbrace{7^{7^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}_{2015} \equiv 4(\text{mod}10)$$

ដូចនេះ លេខខ្ទង់ចុងក្រោយនៃផលបូកគឺ 4 ។

លំហាត់ទី១១៣

ក-ដាក់ជាផលគុណកត្តាចំពោះកន្សោម $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

ខ-បង្ហាញថា $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$ ចែកដាច់នឹង 24 ចំពោះគ្រប់ $a\,,b\,,c \in \mathbb{Z}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ដាក់ជាផលគុណកត្តាចំពោះកន្សោម $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

យើងមាន:

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3y^2(x+z)+3z^2(x+y)+6xyz$$

យើងបាន:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3 = 3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+2xyz)$$

$$=3\left[(x^2y+xyz)+(x^2z+z^2x)+(y^2z+y^2x)+(z^2y+xyz)\right]$$

$$=3\left[xy(x+z)+xz(x+z)+y^2(x+z)+yz(x+z)\right]$$

$$=3(x+z)(xy+xz+y^2+yz)$$

$$=3(x+z)\left[x(y+z)+y(y+z)\right]$$

$$=3(x+y)(y+z)(x+z)$$

ដូចនេះ $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3 = 3(x+y)(y+z)(x+z)$

ខ-បង្ហាញថា $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$

ចែកដាច់នឹង 24 ចំពោះគ្រប់ $a\,,b\,,c\in\mathbb{Z}$

តាង $a+b-c=x\,,b+c-a=y\,,c+a-b=z$ នោះ

$a+b+c=x+y+z\,,x+y=2b\,,x+z=2a\,,y+z=2c$

គេបាន: $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$

$=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

$=3(x+y)(y+z)(z+x)$

$=24abc$

ដូចនេះ $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$

ចែកដាច់នឹង 24 ចំពោះគ្រប់ $a\,,b\,,c\in\mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ទី១១៤

រកសំណល់ពេលចែក $A=a^{2n}+a^n+1$ ជាមួយ a^2+a+1 ទៅតាមចំនួនគត់ n ដែល $a\in\mathbb{Z}\,,a\neq 1$ ។ ទាញរកសំណល់ពេលចែក $2015^{2n}+2015^n+1$ ជាមួយ $2015^2+2015+1$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកសំណល់ពេលចែក $A=a^{2n}+a^n+1$ ជាមួយ a^2+a+1 :

យក $n=3k+r$, $k\in\mathbb{N}$ និង $r=0\,,1\,,2$ គេបាន:

$A=a^{2n}+a^n+1=a^{2(3k+r)}+a^{3k+r}+1$

$=a^{2r}(a^{6k}-1)+a^r(a^{3k}-1)+a^{2r}+a^r+1$

ដោយ $a^{6k}-1$ និង $a^{3k}-1$ ចែកដាច់នឹង $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$

នោះ A ចែកដាច់នឹង a^2+a+1 លុះត្រាតែ $a^{2r}+a^r+1$ ចែកដាច់នឹង a^2+a+1 ។

បើ $r=0\,(n=3k)$ នោះ A ចែកនឹង a^2+a+1 បានសំណល់ 3

បើ $r=1$ ឬ $r=2$ នោះ A ចែកដាច់នឹង a^2+a+1 បានសំណល់ 0 ។
ទាញរកសំណល់ពេលចែក $2015^{2n}+2015^n+1$
ជាមួយ $2015^2+2015+1$:
យក $a=2015$ ស្រាយដូចខាងលើ ។

លំហាត់ទី១១៥

គេឲ្យ $a_1+a_2+\cdots+a_{2015}=1$ ។ ស្រាយថា $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2015}^2\geq\frac{1}{2015}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $a_1=x_1+\frac{1}{2015}$, $a_2=x_2+\frac{1}{2015}$, $\cdots, a_{2015}=x_{2015}+\frac{1}{2015}$

គេបាន: $\sum_{i=1}^{2015}a_i=\sum_{i=1}^{2015}x_i+1=1$ នោះ $\sum_{i=1}^{2015}x_i=0$

យើងបាន: $\sum_{i=1}^{2015}a_i^2=\sum_{i=1}^{2015}x_i^2+2.\frac{1}{2015}\sum_{i=1}^{2015}x_i+\frac{1}{2015}$

$$=\sum_{i=1}^{2015}x_i^2+\frac{1}{2015}\geq\frac{1}{2015}$$

គេបាន: $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2015}^2\geq\frac{1}{2015}$

ដូចនេះ: $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2015}^2\geq\frac{1}{2015}$ ។

លំហាត់ទី១១៦

គេឲ្យ $a, b, c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $a^{2016}+b^{2016}+c^{2016}=3$
រកតម្លៃធំបំផុតនៃ $A=a^2+b^2+c^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃធំបំផុតនៃ $A=a^2+b^2+c^2$

តាមវិសមភាព *Cauchy* 2016 តួ

យក $1+1+1+\cdots+1$ ចំនួន 2014 តួ

$1+1+1+\cdots+1+a^{2016}+a^{2016}\geq 2\sqrt[2016]{(a^2)^{2016}}$

$2014+2a^{2016}\geq 2a^2$ ឬ $a^2\leq a^{2016}+1008$

ស្រាយដូចគ្នា: $b^2\leq b^{2016}+1008$, $c^2\leq c^{2016}+1008$

យើងបាន: $a^2+b^2+c^2\leq(a^{2016}+b^{2016}+c^{2016})+3.1008$

$a^2+b^2+c^2\leq 3+3024=3027$

ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃ $A=a^2+b^2+c^2$ គឺ 3027 ។

លំហាត់ទី១១៧

បង្ហាញថា $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots\cdot+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots\cdot+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$

យើងមាន: $(1+x)^{2n}=(1+x)^n.(1+x)^n$

$=\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots\cdot+C_n^nx^n\right)\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots\cdot+C_n^nx^n\right)$

$=\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots\cdot+C_n^nx^n\right)\left(C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots\cdot+C_n^n\right)$

មេគុណនៃ x^n ក្នុងការពន្លាត $(1+x)^{2n}$ គឺ: $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\cdots\cdot+\left(C_n^n\right)^2$ (1)

យើងមាន: $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+\cdots\cdot+C_{2n}^nx^n+\cdots\cdot+C_{2n}^{2n}x^{2n}$

មេគុណនៃ x^n ក្នុងការពន្លាត $(1+x)^{2n}$ គឺ: C_{2n}^n (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន: $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots\cdot+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$ ពិត ។

ដូចនេះ $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$ ។

លំហាត់ទី១១៨

គេមាន z_1 , z_2 , z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r>0$

និង $z_1+z_2+z_3\neq 0$ ។ បង្ហាញថា $\left|\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=r$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\left|\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=r$

យើងមាន: $z_1.\bar{z}_1=z_2.\bar{z}_2=z_3.\bar{z}_3=r^2$ នោះគេបាន:

$$\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|^2=\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\cdot\frac{\overline{z_1z_2}+\overline{z_2z_3}+\overline{z_3z_1}}{\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3}$$

$$=\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\cdot\frac{\frac{r^2}{z_1}\cdot\frac{r^2}{z_2}+\frac{r^2}{z_2}\cdot\frac{r^2}{z_3}+\frac{r^2}{z_3}\cdot\frac{r^2}{z_1}}{\frac{r^2}{z_1}+\frac{r^2}{z_2}+\frac{r^2}{z_3}}=r^2$$

$$\Rightarrow\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=r$$ ពិត ។

ដូចនេះសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១១៩

គេយក x , y , z ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

$\sin x+\sin y+\sin z=0$ និង $\cos x+\cos y+\cos z=0$ ។

ស្រាយថា: $\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=0$ និង $\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=0$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=0$ និង $\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=0$

តាង $z_1=\cos x+i\sin x$, $z_2=\cos y+i\sin y$, $z_3=\cos z+i\sin z$

យើងបាន: $z_1+z_2+z_2=0$ និង $z_1\overline{z}_1=z_2\overline{z}_2=z_3\overline{z}_3=1$

យើងមាន: $z_1^2+z_2^2+z_3^2=(z_1+z_2+z_3)^2-2(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)$

$$=-2z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=-2z_1z_2z_3(\overline{z}_1+\overline{z}_2+\overline{z}_3)$$

$$=-2z_1z_2z_3(\overline{z_1+z_2+z_3})=0$$

យើងបាន: $(\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z)+i(\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z)=0$

គេទាញបាន: $\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=0$

$$\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=0$$

ដូចនេះសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១២០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានរង្វាស់ជ្រុង a , b , c និងក្រឡាផ្ទៃ S ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $a^2+b^2+c^2\geq 4S\sqrt{3}$

តើសមភាពកើតមាននៅពេលណា ?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $a^2+b^2+c^2\geq 4S\sqrt{3}$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$

តាមវិសមភាព ចំពោះបីចំនួនវិជ្ជមាន យើងបាន:

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)\geq 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p\geq 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\frac{a+b+c}{2} \geq 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3 \geq 27(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^4 \geq 27p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 \geq 3\sqrt{3}.\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$(a+b+c)^2 \geq 12\sqrt{3}.S \quad (1)$

តែ $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$ ព្រោះ

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$

$2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2ac+2bc$

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$ ពិត

យើងបាន:

$2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2ac+2bc$

$3a^2+3b^2+3c^2 \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន:

$3(a^2+b^2+c^2) \geq 12\sqrt{3}.S$

$a^2+b^2+c^2 \geq 4.S\sqrt{3}$ ពិត

សមភាពកើតមានពេល $p-a=p-b=p-c$ ឬ $a=b=c$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2 \geq 4.S\sqrt{3}$ ហើយសមភាពកើតមានកាលណា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

លំហាត់ទី១២១

គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន x , y , z ដែល $x \geq y \geq z$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\geq x^2+y^2+z^2$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\geq x^2+y^2+z^2$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ យើងបាន:

$$\left(\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\right)\left(\frac{x^2z}{y}+\frac{y^2x}{z}+\frac{z^2y}{x}\right)\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \quad (1)$$

ដំបូងត្រូវបង្ហាញថា: $\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\geq\frac{x^2z}{y}+\frac{y^2x}{z}+\frac{z^2y}{x}$

វិសមភាពសមមូល:

$$x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2\geq x^3z^2+y^3x^2+z^3y^2$$

$$\left(x^3y^2-y^3x^2\right)+\left(y^3z^2-x^3z^2\right)+\left(z^3x^2-z^3y^2\right)\geq 0$$

$$x^2y^2(x-y)-z^2(x^3-y^3)+z^3(x^2-y^2)\geq 0$$

$$(x-y)\left[x^2y^2-z^2(x^2+xy+y^2)+z^3(x+y)\right]\geq 0$$

$$(x-y)\left(x^2y^2-x^2z^2-xyz^2-y^2z^2+xz^3+yz^3\right)\geq 0$$

$$(x-y)\left[\left(x^2y^2-x^2z^2\right)-\left(xyz^2-xz^3\right)-\left(y^2z^2-yz^3\right)\right]\geq 0$$

$$(x-y)(y-z)\left[x^2(y+z)-xz^2-yz^2\right]\geq 0$$

$$(x-y)(y-z)\left(x^2y+x^2z-yz^2\right)\geq 0$$

$$(x-y)(y-z)\left[y\left(x^2-z^2\right)+xz\left(x-z\right)\right]\geq 0$$

$$(x-y)(y-z)(x-z)\left[y(x+z)+xz\right]\geq 0$$

$$(x-y)(y-z)(x-z)(xy+yz+xz)\geq 0 \quad \text{ពិត}$$

ព្រោះ $x \geq y \geq z > 0 \Rightarrow x - y \geq 0$, $y - z \geq 0$, $x - z \geq 0$, $xy + yz + xz > 0$

នាំឲ្យ $\frac{x^2 y}{z} + \frac{y^2 z}{x} + \frac{z^2 x}{y} \geq \frac{x^2 z}{y} + \frac{y^2 x}{z} + \frac{z^2 y}{x}$

$$\left(\frac{x^2 y}{z} + \frac{y^2 z}{x} + \frac{z^2 x}{y}\right)^2 \geq \left(\frac{x^2 y}{z} + \frac{y^2 z}{x} + \frac{z^2 x}{y}\right)\left(\frac{x^2 z}{y} + \frac{y^2 x}{z} + \frac{z^2 y}{x}\right) \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន: $\left(\frac{x^2 y}{z} + \frac{y^2 z}{x} + \frac{z^2 x}{y}\right)^2 \geq \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2$

$$\frac{x^2 y}{z} + \frac{y^2 z}{x} + \frac{z^2 x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2$$ ពិត

ដូចនេះ បើ $x \geq y \geq z > 0$ គេបាន: $\frac{x^2 y}{z} + \frac{y^2 z}{x} + \frac{z^2 x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2$ ។

លំហាត់ទី១២២

សន្មតថាចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c , x , y , z ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$cy + bz = a$, $az + cx = b$ និង $bx + ay = c$ ។

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x , y , z) = \frac{x^2}{1+x} + \frac{y^2}{1+y} + \frac{z^2}{1+z}$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x , y , z) = \frac{x^2}{1+x} + \frac{y^2}{1+y} + \frac{z^2}{1+z}$

យើងមាន: $cy + bz = a$, $az + cx = b$, $bx + ay = c$

យើងបាន: $b(az + cx - b) + c(bx + ay - c) - a(cy + bz - a) = 0$

$$2bcx + a^2 - b^2 - c^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន៖ $y=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $z=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

ដោយ $a\,,b\,,c\,,x\,,y\,,z$ ជាចំនួនវិជ្ជមាននោះតាមសម្រាយខាងលើ

គេបាន៖ $b^2+c^2>a^2$, $a^2+c^2>b^2$ និង $a^2+b^2>c^2$ នោះ $a\,,b\,,c$

ជាជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។

យើងបាន៖ $x=\cos A\,,\ y=\cos B\,,\ z=\cos C$

នាំឲ្យអនុគមន៍ដែលត្រូវរកតម្លៃតូចបំផុតទៅជា៖

$$f(\cos A\,,\cos B\,,\cos C)=\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}$$

តាង $u=\cot A\,,\ v=\cot B\,,\ w=\cot C$ នោះ $u\,,v\,,w\in\mathbb{R}^+$

$uv+vw+wu=1$, $u^2+1=(u+v)(u+w)$, $v^2+1=(u+v)(v+w)$

និង $w^2+1=(u+w)(v+w)$ ។

យើងបាន៖ $$\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}=\frac{\dfrac{u^2}{1+u^2}}{1+\dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}}=\frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}\left(\sqrt{u^2+1}+u\right)}$$

$$=\frac{u^2\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)}{\sqrt{u^2+1}}=u^2-\frac{u^3}{\sqrt{u^2+1}}=u^2-\frac{u^3}{\sqrt{(u+v)(u+w)}}$$

$$\geq u^2-\frac{u^3}{2}\left(\frac{1}{u+v}+\frac{1}{u+w}\right)$$

ស្រាយដូចគ្នា $$\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}\geq v^2-\frac{v^3}{2}\left(\frac{1}{u+v}+\frac{1}{v+w}\right)$$

$$\frac{\cos^2 C}{1+\cos C}\geq w^2-\frac{w^3}{2}\left(\frac{1}{u+w}+\frac{1}{v+w}\right)$$

នាំឲ្យ $$f\geq u^2+v^2+w^2-\frac{1}{2}\left(\frac{u^3+v^3}{u+v}+\frac{w^3+v^3}{w+v}+\frac{u^3+w^3}{u+w}\right)$$

$$=u^2+v^2+w^2-\frac{1}{2}\left[\left(u^2-uv+v^2\right)\left(v^2-vw+w^2\right)\left(u^2-uw+w^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(uv+vw+uw)=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x,y,z)$ គឺ $\frac{1}{2}$

ពេល $u=v=w$, $a=b=c$, $x=y=z=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី១២៣

គណនាផលបូក: $A=\tan^6\frac{\pi}{18}+\tan^6\frac{5\pi}{18}+\tan^6\frac{7\pi}{18}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក: $A=\tan^6\frac{\pi}{18}+\tan^6\frac{5\pi}{18}+\tan^6\frac{7\pi}{18}$

ដោយ $\tan^2 3\cdot\frac{\pi}{18}=\tan^2 3\cdot\frac{5\pi}{18}=\tan^2 3\cdot\frac{7\pi}{18}=\frac{1}{3}$

នោះ $\Rightarrow \frac{\pi}{18}$, $\frac{5\pi}{18}$, $\frac{7\pi}{18}$ ជាឫសនៃសមីការ $\tan^2 3a=\frac{1}{3}$

$$\left(\frac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}\right)^2=\frac{1}{3}$$

$$3\left(3\tan a-\tan^3 a\right)^2=\left(1-3\tan^2 a\right)^2$$

$$3\left(9\tan^2 a-6\tan^4 a-\tan^6 a\right)=1-6\tan^2 a+9\tan^4 a$$

$$27\tan^2 a-18\tan^4 a-3\tan^6 a=1-6\tan^2 a+9\tan^4 a$$

$$3\tan^6 a-27\tan^4 a+33\tan^2 a-1=0$$

$\Rightarrow y$ ជាឫសនៃសមីការ $3x^3-27x^2+33x-1=0$, $y=\tan^2 a$

$$\Rightarrow A=y_1^3+y_2^3+y_3^3$$

$$=\left(y_1+y_2+y_3\right)^3-3\left(y_1+y_2+y_3\right)\left(y_1y_2+y_3y_2+y_1y_3\right)+3y_1y_2y_3$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន:

$y_1+y_2+y_3=9$

$y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3=11$

$y_1y_2y_3=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow A=9^3-3.9.11+3\cdot\dfrac{1}{3}=433$

ដូចនេះ $A=433$ ។

លំហាត់ទី១២៤

គណនាផលបូក:

$A=\binom{n}{1}\cos x+\binom{n}{2}\cos 2x+\binom{n}{3}\cos 3x+\cdots+\binom{n}{n}\cos nx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក: $A=\binom{n}{1}\cos x+\binom{n}{2}\cos 2x+\binom{n}{3}\cos 3x+\cdots+\binom{n}{n}\cos nx$

តាង $A_1=\binom{n}{1}\sin x+\binom{n}{2}\sin 2x+\binom{n}{3}\sin 3x+\cdots+\binom{n}{n}\sin nx$

$\Rightarrow 1+A+iA_1=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}e^{ix}+\binom{n}{2}e^{2ix}++\binom{n}{n}e^{nix}$

តាមទ្វេធាញូតុន:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{ix}\right)^k=\left(1+e^{ix}\right)^n=\left(1+\cos x+i\sin x\right)^n=\left(2\cos^2\frac{x}{2}+2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{ix}\right)^k=2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)^n$$

តាមចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នាកាលណា:

$1+A=2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}$

$\Rightarrow A=2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}-1$

ដូចនេះ $A=2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}-1$ ។

លំហាត់ទី១២៥

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ x,y,z,v,t ដែល:

$x+y+z+v+t=xyvt+(x+y)(v+t)$

$xy+z+vt=xy(v+t)+vt(x+y)$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ x,y,z,v,t

យើងមាន:

$x+y+z+v+t=xyvt+(x+y)(v+t) \quad (*)$

$xy+z+vt=xy(v+t)+vt(x+y) \qquad (**)$

យក $(*)-(**)$ គេបាន:

$(x+y-xy)+(v+t-vt)=xy(vt-v-t)+(x+y)(v+t-vt)$

$(x+y-xy)+(v+t-vt)=(vt-v-t)(xy-x-y)$

$(x+y-xy)+(v+t-vt)+(v+t-vt)(xy-x-y)=0$

$(x+y-xy-1)-(v+t-vt)(x+y-xy-1)=-1$

$(x+y-xy-1)(1-v-t+vt)=-1$

$(x-1)(\text{y}-1)(v-1)(t-1)=1$

ដោយ $1=1.1.1.1=(-1)(-1)(-1)(-1)=(-1).1.1(-1)=(-1).1(-1).1$

$=(-1)(-1).1.1=1.(-1)(-1).1=1.(-1).1(-1)=1.1(-1)(-1)$

គេបាន:

$$(x,y,z,v,t)=(2,2,24,2,2);(0,0,0,0,0);(0,2,0,2,0);(0,2,0,0,2)$$
$$(0,0-4,2,2);(2,0,0,0,2);(2,0,0,2,0);(2,2,-4,0,0)$$

ដូចនេះ

$$(x,y,z,v,t)=(2,2,24,2,2);(0,0,0,0,0);(0,2,0,2,0);(0,2,0,0,2)$$
$$(0,0-4,2,2);(2,0,0,0,2);(2,0,0,2,0);(2,2,-4,0,0)$$

លំហាត់ទី១២៦

យក x_0 ជាឫសនៃសមីការ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ដែល $ad\neq 0$ ។

តាង $\alpha=\max\left\{\left|\frac{b}{a}\right|,\left|\frac{c}{a}\right|,\left|\frac{d}{a}\right|\right\}$ និង $\beta=\left\{\left|\frac{a}{d}\right|,\left|\frac{c}{d}\right|,\left|\frac{c}{d}\right|\right\}$ ។

បង្ហាញថា: $\frac{1}{1+\beta}\leq|x_0|\leq 1+\alpha$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ x_0 ជាឫសនៃសមីការ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ គេបាន:

$ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d=0\ ,ad\neq 0$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_0^3+\frac{b}{a}x_0^2+\frac{c}{a}x_0+\frac{d}{a}=0\\ \frac{a}{d}x_0^3+\frac{b}{d}x_0^2+\frac{c}{d}x_0+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0^3=\frac{b}{a}x_0^2+\frac{c}{a}x_0+\frac{d}{a} & (*)\\ -1=\frac{a}{d}x_0^3+\frac{b}{d}x_0^2+\frac{c}{d}x_0 & (**)\end{cases}$$

តាម $(*):|x_0|^3=\left|\frac{b}{a}x_0^2+\frac{c}{a}x_0+\frac{d}{a}\right|\leq\left|\frac{b}{a}\right|x_0^2+\left|\frac{c}{a}\right|x_0+\left|\frac{d}{a}\right|\leq\alpha\left(x_0^2+|x_0|+1\right)$

$$\Rightarrow\alpha\geq\frac{|x_0|^3}{x_0^2+|x_0|+1}\Rightarrow\alpha+1\geq\frac{|x_0|^3+x_0^2+|x_0|+1}{x_0^2+|x_0|+1}=|x_0|+\frac{1}{x_0^2+|x_0|+1}\geq|x_0|\ (1)$$

តាម $(**):$

$$|-1|=\left|\frac{a}{d}x_0^3+\frac{b}{d}x_0^2+\frac{c}{d}x_0\right|\leq\left|\frac{a}{d}\right||x_0|^3+\left|\frac{b}{d}\right|x_0^2+\left|\frac{c}{d}\right||x_0|\leq\beta\left(|x_0|^3+x_0^2+|x_0|\right)$$

$$\Rightarrow \beta \geq \frac{1}{|x_0|^3 + x_0^2 + |x_0|} \Rightarrow \beta + 1 \geq \frac{|x_0|^3 + x_0^2 + |x_0| + 1}{|x_0|^3 + x_0^2 + |x_0|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta+1} \leq \frac{|x_0|^3 + x_0^2 + |x_0|}{|x_0|^3 + x_0^2 + |x_0| + 1} \leq \frac{|x_0|^4 + |x_0|^3 + x_0^2 + |x_0|}{|x_0|^3 + x_0^2 + |x_0| + 1} \leq |x_0| \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន: $\frac{1}{1+\beta} \leq |x_0| \leq 1 + \alpha$ ពិត

ដូចនេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១២៧

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^3-1} + \frac{1}{4^4-1} + + \frac{1}{2015^{2015}-1} \leq \frac{2014}{2015}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^3-1} + \frac{1}{4^4-1} + + \frac{1}{2015^{2015}-1} \leq \frac{2014}{2015}$

តាមវិសមភាព *Bernoulli* គេបាន:

ចំពោះ $a \geq 2$

$$a^a = (1 + a - 1)^a \geq 1 + a(a-1)$$

$$\Rightarrow a^a - 1 \geq a(a-1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^a - 1} \leq \frac{1}{a(a-1)} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \sum_{a=2}^{2015} \frac{1}{a^a - 1} \leq \sum_{a=2}^{2015} \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^3-1} + \frac{1}{4^4-1} + + \frac{1}{2015^{2015}-1} \leq 1 - \frac{1}{2015} = \frac{2014}{2015}$$ ពិត

ដូចនេះ: $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^3-1} + \frac{1}{4^4-1} + + \frac{1}{2015^{2015}-1} \leq \frac{2014}{2015}$ ។

លំហាត់ទី១២៨

គណនាតម្លៃ: $A=9\left(\sqrt[4]{23-\sqrt{448}}\right)^{-\frac{2}{3}\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\dots}}}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ: $A=9\left(\sqrt[4]{23-\sqrt{448}}\right)^{-\frac{2}{3}\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\dots}}}}$

តាង $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\dots}}}$

$\Rightarrow x^2=6+x$

$\Leftrightarrow x^2-x-6=0$

$\Rightarrow x=3, x=-2$ (មិនពិត)

$\Rightarrow A=9\left(\sqrt[4]{23-\sqrt{448}}\right)^{-2}=9\left(23-\sqrt{448}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{9}{\sqrt{23-\sqrt{448}}}$

$=\dfrac{9}{\sqrt{23-2\sqrt{112}}}$

$\dfrac{9}{\sqrt{(\sqrt{16})^2+(\sqrt{7})^2-2\sqrt{16}\sqrt{7}}}$

$=\dfrac{9}{4-\sqrt{7}}=4+\sqrt{7}$

ដូចនេះ $A=4+\sqrt{7}$ ។

លំហាត់ទី១២៩

គេឲ្យ n និង p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ស្រាយថា:

$$\frac{1}{(1+1)\sqrt[p]{1}}+\frac{1}{(2+1)\sqrt[p]{2}}+\frac{1}{(3+1)\sqrt[p]{3}}++\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}<p$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\frac{1}{(1+1)\sqrt[p]{1}}+\frac{1}{(2+1)\sqrt[p]{2}}+\frac{1}{(3+1)\sqrt[p]{3}}++\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}<p$

យើងមាន: $\frac{1}{\sqrt[p]{k}}-\frac{1}{\sqrt[p]{k+1}}=\frac{\sqrt[p]{k+1}-\sqrt[p]{k}}{\sqrt[p]{k(k+1)}}$

$$=\frac{1}{\sqrt[p]{k(k+1)}\left(\sqrt[p]{(k+1)^{p-1}}+\sqrt[p]{k(k+1)^{p-2}}+\cdots+\sqrt[p]{k^{p-1}}\right)}$$

$$>\frac{1}{\sqrt[p]{k(k+1)}\left(p\sqrt[p]{(k+1)^{p-1}}\right)}=\frac{1}{p\left(k+1\right)\sqrt[p]{k}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\left(k+1\right)\sqrt[p]{k}}<p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{k}}-\frac{1}{\sqrt[p]{k+1}}\right)$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(k+1\right)\sqrt[p]{k}}<p\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{k}}-\frac{1}{\sqrt[p]{k+1}}\right)=p\left(1-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)<p$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{(1+1)\sqrt[p]{1}}+\frac{1}{(2+1)\sqrt[p]{2}}+\frac{1}{(3+1)\sqrt[p]{3}}++\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}<p$ ។

លំហាត់ទី១៣០

ដោះស្រាយសមីការ: $\left\lfloor\frac{25x-2}{4}\right\rfloor=\frac{13x+4}{3}$ ដែល $\lfloor a\rfloor$ ជាផ្នែកគត់នៃចំនួនពិត a ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ: $\left\lfloor \frac{25x-2}{4} \right\rfloor = \frac{13x+4}{3}$

តាង $y = \frac{13x+4}{3}$;$y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{3y-4}{13}$

សមីការទៅជា: $\left\lfloor \frac{\frac{25}{13}(3y-4)-2}{4} \right\rfloor = y \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{75y-126}{52} \right\rfloor = y$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a, \lfloor a \rfloor \le a < \lfloor a \rfloor + 1$ គេបាន:

$y \le \frac{75y-126}{52} < y+1$

$\Leftrightarrow 52y+126 \le 75y < 52y+178$

$\Leftrightarrow \frac{126}{23} \le y < \frac{178}{23}$

$\Leftrightarrow 5.47 \le y < 7.73$

ដោយ $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 6,7$

$\Rightarrow x = \frac{14}{13}$;$x = \frac{17}{13}$

ដូចនេះ $x = \frac{14}{13}$ រឺ $x = \frac{17}{13}$ ។

លំហាត់ទី១៣១

គេឲ្យពហុធានៃ x កំណត់ដោយ: $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{19} + x^{20}$

អាចសរសេរជាទម្រង់ នៃពហុធា

$y : g(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + + a_{19} y^{19} + a_{20} y^{20}$ ដែល $y = x - 4$

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម: $A = a_0 + a_1 + a_3 + + a_{20}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម: $A = a_0 + a_1 + a_3 + + a_{20}$

យើងមាន: $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{19} + x^{20}$

$\Rightarrow xf(x) = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots - x^{20} + x^{21}$

$\Rightarrow (x+1)f(x) = 1 + x^{21}$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1+x^{21}}{x+1}$

តែ $x = y + 4$

$\Rightarrow f(y) = \dfrac{1+(y+4)^{21}}{y+5}$

$\Rightarrow f(1) = g(1) = a_0 + a_1 + a_3 + + a_{20} = \dfrac{1+5^{21}}{6}$

ដូចនេះ $a_0 + a_1 + a_3 + + a_{20} = \dfrac{1+5^{21}}{6}$ ។

លំហាត់ទី១៣២

ស្រាយថា: $\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \max\left(a^2+b, b^2+a\right) = -\dfrac{1}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \max\left(a^2+b, b^2+a\right) = -\dfrac{1}{4}$

តាង $M(a,b) = \max\left(a^2+b, b^2+a\right)$

$\Rightarrow M(a,b) \geq a^2 + b \;,\; M(a,b) \geq b^2 + a$

$\Leftrightarrow 2M(a,b) + \dfrac{1}{2} \geq a^2 + a + \dfrac{1}{4} + b^2 + b + \dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow 2M(a,b)+\frac{1}{2}\geq\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$$

$$\Rightarrow M(a,b)\geq -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \min_{a,b\in\mathbb{R}} M(a,b)=-\frac{1}{4}$$ ពិត

ដូចនេះ $\min_{a,b\in\mathbb{R}}\max\left(a^2+b,b^2+a\right)=-\frac{1}{4}$ ។

លំហាត់ទី១៣៣

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដែលមានមេគុណជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។

ស្រាយថា: $\sqrt{P(a)P(b)}\geq P(\sqrt{ab})$ ចំពោះ a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\sqrt{P(a)P(b)}\geq P(\sqrt{ab})$

សន្មត់ថា n ជាដឺក្រេខ្ពស់បំផុតនៃពហុធា $P(x)$ និង $c_0,c_1,c_2,\ldots,c_n$ ជាមេគុណជាចំនួនពិតវិជ្ជមានរបស់ពហុធា

$$P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$$

$$\Rightarrow P(a)=c_0+c_1a+c_2a^2+\cdots+c_na^n$$

$$P(b)=c_0+c_1b+c_2b^2+\cdots+c_nb^n$$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន:

$$P(a)P(b)=\left(c_0+c_1a+c_2a^2+\cdots+c_na^n\right)\left(c_0+c_1b+c_2b^2+\cdots+c_nb^n\right)$$

$$\geq\left(c_0+c_1\sqrt{ab}+c_2\sqrt{a^2b^2}++c_n\sqrt{a^nb^n}\right)^2=P^2(\sqrt{ab})$$

$\Rightarrow \sqrt{P(a)P(b)} \geq P(\sqrt{ab})$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{P(a)P(b)} \geq P(\sqrt{ab})$ ។

លំហាត់ទី១៣៤

បើ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n$ ។ ស្រាយថា: $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \cdots + a_n^4 \geq n$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \cdots + a_n^4 \geq n$

តាមវិសមភាព $Cauchy - Schwarz$ គេបាន:

$$\left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\right)^2 \leq \left(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2\right)\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)$$

$$\Leftrightarrow n^2 \leq n\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)$$

$$\Rightarrow \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) \geq n$$

តាមវិសមភាព $Cauchy - Schwarz$ គេបាន:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)^2 \leq \left(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2\right)\left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \cdots + a_n^4\right)$$

$$\Leftrightarrow n^2 \leq n\left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \cdots + a_n^4\right)$$

$\Rightarrow a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \cdots + a_n^4 \geq n$ ពិត

ដូចនេះ $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \cdots + a_n^4 \geq n$ ។

លំហាត់ទី១៣៥

រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n + 18$ ជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n

យើងមាន: $n^4-4n^3+22n^2-36n+18$

$$=n^4-4n^3+4n^2+18n^2-36n+18$$

$$=(n^2-2n)^2+18(n^2-2n)+18$$

$$=(n^2-2n)^2+18(n^2-2n)+81-63$$

តាង $x=n^2-2n$ ហើយ $n^4-4n^3+22n^2-36n+18=y^2$ ជាការេប្រាកដ។ គេបាន:

$y^2=(x+9)^2-63$

$\Leftrightarrow (x+9)^2-y^2=63$

$\Leftrightarrow (x+y+9)(x-y+9)=63$

ដោយ $x-y+9<x+y+9$ និង $63=1\times 63=3\times 21=9\times 7$ គេបាន:

$\begin{cases} x-y+9=1 \\ x+y+9=63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-8 \\ x+y=54 \end{cases} \Rightarrow x=23\,,y=31$ មិនពិតព្រោះ31 មិនមែនជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់

$\begin{cases} x-y+9=3 \\ x+y+9=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-6 \\ x+y=12 \end{cases} \Rightarrow x=3\,,\ y=9$

$\begin{cases} x-y+9=7 \\ x+y+9=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-1\,,y=1$

បើ $x=3: n^2-2n=3 \Rightarrow n=3,\ n=-1$ មិនយក

បើ $x=-1: n^2-2n=-1 \Rightarrow n=1$

ដូចនេះ $n=1\ ,n=3$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលត្រូវរក ។

ជីវិតខ្ញុំ ខ្ញុំជាអ្នកសម្រេច

លំហាត់ទី១៣៦

គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតខុសពី$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

បើ $abc=a+b+c$ នោះ

$\frac{3a-a^3}{3a^2-1}\cdot\frac{3b-b^3}{3b^2-1}\cdot\frac{3c-c^3}{3c^2-1}=\frac{3a-a^3}{3a^2-1}+\frac{3b-b^3}{3b^2-1}+\frac{3c-c^3}{3c^2-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{3a-a^3}{3a^2-1}\cdot\frac{3b-b^3}{3b^2-1}\cdot\frac{3c-c^3}{3c^2-1}=\frac{3a-a^3}{3a^2-1}+\frac{3b-b^3}{3b^2-1}+\frac{3c-c^3}{3c^2-1}$

$\Leftrightarrow \frac{3a-a^3}{1-3a^2}\cdot\frac{3b-b^3}{1-3b^2}\cdot\frac{3c-c^3}{1-3c^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}+\frac{3b-b^3}{1-3b^2}+\frac{3c-c^3}{1-3c^2}$

តាង $a=\tan\alpha\ ,b=\tan\beta,c=\tan\lambda$ ដែល $\left(\alpha,\beta,\lambda\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\tan(\alpha+\beta+\lambda)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\lambda-\tan\alpha\tan\beta\tan\lambda}{1-(\tan\lambda\tan\alpha+\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\lambda)}$

តាមបម្រាប់ $abc=a+b+c\Leftrightarrow\tan\alpha+\tan\beta+\tan\lambda=\tan\alpha\tan\beta\tan\lambda$

$\Rightarrow\alpha+\beta+\lambda=k\pi\ \ ,k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 3\alpha+3\beta+3\lambda=3k\pi$

$\Rightarrow\tan(3\alpha+3\beta+3\lambda)=\tan 3k\pi=0$

$\Leftrightarrow\tan(3\alpha+3\beta+3\lambda)=\frac{\tan3\alpha+\tan3\beta+\tan3\lambda-\tan3\alpha\tan3\beta\tan3\lambda}{1-(\tan3\lambda\tan3\alpha+\tan3\alpha\tan3\beta+\tan3\beta\tan3\lambda)}$

$\Rightarrow\tan3\alpha+\tan3\beta+\tan3\lambda=\tan3\alpha\tan3\beta\tan3\lambda$

$\Leftrightarrow \frac{3a-a^3}{1-3a^2}\cdot\frac{3b-b^3}{1-3b^2}\cdot\frac{3c-c^3}{1-3c^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}+\frac{3b-b^3}{1-3b^2}+\frac{3c-c^3}{1-3c^2}$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{3a-a^3}{3a^2-1}\cdot\frac{3b-b^3}{3b^2-1}\cdot\frac{3c-c^3}{3c^2-1}=\frac{3a-a^3}{3a^2-1}+\frac{3b-b^3}{3b^2-1}+\frac{3c-c^3}{3c^2-1}$ ។

លំហាត់ទី១៣៧

គេឲ្យ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ និង $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។

ស្រាយថាកន្សោម:

$$f_1x_1^2 + f_1x_1^2 + f_1x_1^2 + \cdots + f_1x_1^2 - \frac{\left(f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \cdots + f_nx_n\right)^2}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}$$

មិនមែនជាចំនួនអវិជ្ជមាន។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាកន្សោម:

$$f_1x_1^2 + f_1x_1^2 + f_1x_1^2 + \cdots + f_1x_1^2 - \frac{\left(f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \cdots + f_nx_n\right)^2}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}$$

មិនមែនជាចំនួនអវិជ្ជមាន

តាមវិសមភាព $Cauchy - Schwarz$ គេបាន:

$$\left(f_1x_1^2 + f_1x_1^2 + f_1x_1^2 + \cdots + f_1x_1^2\right)\left(f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n\right) \geq \left(f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \cdots + f\right.$$

$$\Rightarrow f_1x_1^2 + f_1x_1^2 + f_1x_1^2 + \cdots + f_1x_1^2 \geq \frac{\left(f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \cdots + f_nx_n\right)^2}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}$$

$$\Rightarrow f_1x_1^2 + f_1x_1^2 + f_1x_1^2 + \cdots + f_1x_1^2 - \frac{\left(f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \cdots + f_nx_n\right)^2}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n} \geq 0$$

ពិត

ដូចនេះ $f_1x_1^2 + f_1x_1^2 + f_1x_1^2 + \cdots + f_1x_1^2 - \frac{\left(f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \cdots + f_nx_n\right)^2}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}$

មិនមែនជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

លំហាត់ទី១៣៨

រកត្រីធាតុ (x,y,z)ជាចំនួនពិតរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ:$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{4x^2+1}=y \\ \dfrac{4y^2}{4y^2+1}=z \\ \dfrac{4z^2}{4z^2+1}=x \end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកត្រីធាតុ (x,y,z)

យើងឃើញថាគូចម្លើយ$(x,y,z)=(0,0,0)$ ជាចម្លើយងាយ

ប្រព័ន្ធសមីការអាចសរសេរ:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{1}{4x^2}=\dfrac{1}{y} \ (1) \\ 1+\dfrac{1}{4y^2}=\dfrac{1}{z} \ (2) \\ 1+\dfrac{1}{4z^2}=\dfrac{1}{x} \ (3) \end{cases}$$

យក$(1)+(2)+(3)$ គេបាន:

$$\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{x}+1+\frac{1}{4y^2}-\frac{1}{y}+1+\frac{1}{4z^2}-\frac{1}{z}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2x}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2y}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2z}-1\right)^2=0$$

$$\Rightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

ដូចនេះ គូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការគឺ: $(x,y,z)=(0,0,0)\ ;\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

លំហាត់ទី១៣៩

គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) មួយកំណត់ដោយ:

$$\begin{cases} a_1=2\ ,\ a_2=9 \\ n(n+1)a_{n+1}=6n(n+2)a_{n}-9(n+1)(n+2)a_{n-1}\ ,\ n\ge 2 \end{cases}$$

ស្រាយថា: $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}=\binom{n}{0}2^{n-1}+\binom{n}{1}2^{n-2}+\binom{n}{2}2^{n-3}+\cdots+\binom{n}{n-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}=\binom{n}{0}2^{n-1}+\binom{n}{1}2^{n-2}+\binom{n}{2}2^{n-3}+\cdots+\binom{n}{n-1}$

យើងមាន: $n(n+1)a_{n+1}=6n(n+2)a_{n}-9(n+1)(n+2)a_{n-1}$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $n(n+1)(n+2)$ គេបាន:

$$\frac{a_{n+1}}{n+2}=6\frac{a_n}{n+1}-9\frac{a_{n-1}}{n}$$

តាង $y_n=\frac{a_n}{n+1}$ ដែល $y_1=1\,,y_2=3$ គេបាន:

$$y_{n+1}=6y_n-9y_{n-1}$$

$$y_{n+1}-6y_n+9y_{n-1}=0$$

សមីការសម្គាល់ស្វ៊ីត: $x^2-6x+9=0\Rightarrow x_1=x_2=3$

$$y_n=(An+B)3^n$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y_1=3A+3B=1 \\ y_2=18A+9B=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 3A+3B=1 \\ 6A+3B=1 \end{cases}\Rightarrow A=0\ ,\ B=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y_n = 3^{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$= \frac{(2+1)^n - 1}{2}$$

$$= \frac{\binom{n}{0}2^n + \binom{n}{1}2^{n-1} + + \binom{n}{n-1}2}{2}$$

$$= \binom{n}{0}2^{n-1} + \binom{n}{1}2^{n-2} + \binom{n}{2}2^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-1}$$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1} == \binom{n}{0}2^{n-1} + \binom{n}{1}2^{n-2} + \binom{n}{2}2^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-1}$ ពិត

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1} == \binom{n}{0}2^{n-1} + \binom{n}{1}2^{n-2} + \binom{n}{2}2^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-1}$ ។

សូមរង់ចាំអានភាគទី២ជាបន្តទៀត!

សូមអរគុណ

ឯកសារយោង:

1.សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២ កម្រិតខ្ពស់ របស់ក្រសួងអប់រំ ។

2.Mathematical Olympiad in China.

3.360 Problems for Mathematical Contest.

4.104 Number Theory Problems.

5.Complex Number from A to Z.

6.Inequalities Theory Techniques Seleted Problems.

7.Red Book.

8.An Introduction to Diophantine Equations.

9.សៀវភៅត្រីកោណមាត្រវៀតណាម និង សៀវភៅមួយចំនួនទៀតសរសេរជាភាសាវៀតណាម ។