ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

គណិតវិទ្យា

វិធីមួយចំនួនសម្រាប់

ដោះស្រាយលំហាត់ ជាជំនួយដល់សិស្ស

ថ្នាក់ទី ១២

២០១៥-២០១៦

អារម្ភកថា

វិធីដោះស្រាយលំហាត់នេះគ្រាន់តែជាការបំពេញបន្ថែមទៅលើមេរៀនដែលអ្នកបានសិក្សាលើគ្រប់មូលដ្ឋានគ្រឹះនៃគណិតវិទ្យា។ ការលើកឡើងនូវវិធីមួយចំនួនក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់គឺគ្រាន់តែជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សាដើម្បីមានលទ្ធភាពយល់បានលឿន និងបានច្រើនរបៀបបន្ថែមលើអ្វីដែលអ្នកបានជួបប្រទះហើយ។

ក្នុងការរៀបចំឯកសារនេះ យើងខ្ញុំបានចែកជាពីរផ្នែកគឺ ផ្នែកខាងឆ្វេងជាចម្លើយដោយមានការបកស្រាយ ឯផ្នែកខាងស្តាំគឺជាការលើកឡើងនូវវិធីសម្រាប់ដោះស្រាយលំហាត់នេះ។ បន្តពីចម្លើយ និងការលើកឡើងនូវវិធីសម្រាប់ដោះស្រាយនៅខាងក្រោមយើងខ្ញុំបានរៀបចំជាលំហាត់អនុវត្តន៍នៃវិធីដោះស្រាយនេះ។

សូមបញ្ជាក់ជូនថាអ្នកសិក្សាពិតជានឹងអាចរកឃើញវិធីប្លែកៗ និងល្អជាងការរៀបរៀងរបស់យើងខ្ញុំ។

ដើម្បីឲ្យឯកសារនេះកាន់តែល្អប្រសើរ យើងខ្ញុំរង់ចាំទទួលនូវមតិរិះគន់ និងកែលម្អបន្ថែមអំពីលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងអ្នកសិក្សាទាំងឡាយដោយក្តីសោមនស្សរីករាយបំផុត។

ក្រុមអ្នករៀបរៀង

មាតិកា

វិធីដោះស្រាយលំហាត់តាមគោលការណ៍នៃវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

លំហាត់៖ គេមាន a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ស្រាយបំភ្លឺដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n , $(1+a)^n \ge 1+na$ ។

ចម្លើយ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n យើងតាង $P(n)$ លក្ខណៈ " $(1+a)^n \ge 1+na$ " ។ យើងចង់ស្រាយបំភ្លឺដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n , $P(n)$ ពិត ។

- ផ្តើម : ចំពោះ $n=0$ គេបាន $(1+a)^0=1$ និង $1+0\times a=1$ ។ ដូច្នេះ $(1+a)^0 \ge 1+0\times a$ ។ លក្ខណៈនេះពិតចំពោះ $n=0$
- បន្ត : យើងឧបមាថា $P(n)$ ពិតចំពោះតម្លៃ $n\ge 0$ (យើងហៅថាសមតិកម្មនៃវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា) ។ យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិតនាំឲ្យ $P(n+1)$ ពិត។
  $P(n+1):(1+a)^{n+1} \ge 1+(n+1)a$ ។ តែ $(1+a)^{n+1}=(1+a)(1+a)^n$ និង តាមសមតិកម្មនៃវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា $(1+a)^n \ge 1+na$ ។ ដោយគុណអង្គទាំងពីរដោយ $(1+a)$ ដែលវិជ្ជមានដាច់ខាតយើងបាន : $(1+a)(1+a)^n \ge (1+a)(1+na)$
  ឬ $(1+a)^{n+1} \ge 1+na+a+na^2$
  ឬ $(1+a)^{n+1} \ge 1+(n+1)a+na^2$ (1)
  តែ $na^2 \ge 0$ ដូច្នេះ
  $1+(n+1)a+na^2 \ge 1+(n+1)a$ (2)
  តាមវិសមភាព (1) និង (2) យើងបាន $(1+a)^{n+1} \ge 1+(n+1)a$ បានន័យថា $P(n+1)$ ពិត ។ ដូច្នេះ $P(n)$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

វិធីដោះស្រាយលំហាត់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ៖

- ដើម្បីងាយយល់យើងតាងលក្ខណៈដោយ $P(n)$, n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ ក្រោយពីតាងឲ្យ $P(n)$ រួចស្វែងយល់តើលក្ខណៈ $P(n)$ ពិតឬទេ?
- កំណត់សម្គាល់៖ កាលណាយើងប្រើសម្មតិកម្មនៃវិចារអនុមានរួមយើងត្រូវតែយល់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះ n តែមួយមិនមែនចំពោះគ្រប់ n នោះទេ ។ បើពុំនោះទេគឺយើងបានអនុមតិរួចជាស្រេចនូវលក្ខណៈដែលយើងត្រូវស្រាយបំភ្លឺ ។
- យើងសរសេរ $P(n+1)$ និងសាកល្បងធ្វើឲ្យឃើញលក្ខណៈ $P(n)$ ដែលយើងឧបមាថាវាពិត ដើម្បីឲ្យយើងអាចប្រើសមតិកម្មនៃវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ។

លំហាត់អនុវត្តន៍វិធីដោះស្រាយលំហាត់តាមគោលការណ៍នៃវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

លំហាត់ទី១៖ ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\ge 1$,

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

លំហាត់ទី២៖ ស្រាយបំភ្លឺដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n , $2^{3n}-1$ ជាពហុគុណនៃ 7 ។

លំហាត់ទី៣៖ គេមានស្វ៊ីត u កំណត់ដោយ $u_0=1$ និងចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n , $u_{n+1}=u_n+2n+3$ ។

ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n, u_n=(n+1)^2$ ។

លំហាត់ទី៤៖ ស្រាយបំភ្លឺតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq 1$:

1. $1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ។
2. $\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ ។

វិធីកំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីត

លំហាត់៖ គេមានស្វ៊ីត u,v,w កំណត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយ៖ $u_n=2n^2+3n+1$, $v_n=3n^3-4n+2$ និង $w_n=\dfrac{2n+3}{-n-5}$ ។

1. កំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីត u ។
2. a.កំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីត v ។
   b.បញ្ជាក់ថាស្វ៊ីត v ជាស្វ៊ីតកើនចាប់ពី $n=1$ ។
3. កំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីត w ។

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}2n^2=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}3n=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}1=1$

ដោយប្រើលទ្ធផលនៃផលបូក យើងបាន៖

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

2.a.ដោយទម្រង់ដើមនៃ v_n មានរាងមិនកំណត់ ។ យើងត្រូវដាក់ជាកត្តារួមតួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួន $n\neq0$, $v_n=n^3\times\left(\dfrac{3n^3}{n^3}-\dfrac{4n}{n^3}+\dfrac{2}{n^3}\right)$

$$v_n=n^3\times\left(3-\frac{4}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}n^3=+\infty$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}\right)=3$

យើងប្រើលីមីតនៃផលគុណយើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

b. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n , $v_n=f(n)$ ដែល f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=3x^3-4x+2$ និង f មានដេរីវេ $f'(x)=9x^2-4$ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\geq\dfrac{2}{3}$,

ដើម្បីកំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីតមួយ

1. កាលណាពុំមានរាងមិនកំណត់យើងធ្វើការសន្និដ្ឋានតាមទ្រឹស្តីបទនៃមេរៀន ។
2. យើងបម្លែងកន្សោមដើម្បីបំបាត់រាងមិនកំណត់ ។ ជាទូទៅយើងដាក់ជាកត្តារួមតួណាដែលគ្របសង្កត់គេនៅ $+\infty$ ។

$f'(x)\ge 0$; f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$ ។

ដូច្នេះ v ជាស្វ៊ីតកើនចាប់ពី $n=1$ ឡើងទៅ ។

3.ទម្រង់ដើមនៃ w_n មានរាងមិនកំណត់យើងដាក់ជាកត្តាភាគយកនិងភាគបែងដោយកត្តាដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនិងយើងសម្រួលចំពោះ n ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\neq 0$, $w_n=\dfrac{n\left(\frac{2n}{n}+\frac{3}{n}\right)}{n\left(-\frac{n}{n}-\frac{5}{n}\right)}=\dfrac{2+\frac{3}{n}}{-1-\frac{5}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)=2$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-1-\frac{5}{n}\right)=-1$ ដោយប្រើលីមីតនៃផលចែកយើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=-2$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍វិធីកំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីត

លំហាត់ទី១៖ កំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីតដែលមានតួទូទៅ u_n :

a. $u_n=(2n+1)^2$ b. $u_n=\dfrac{3}{2\sqrt{n}+5}$

លំហាត់ទី២៖ កំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីតនៅអនន្តនៃស្វ៊ីតដែលមានតួទូទៅ u_n :

a. $u_n=\dfrac{4n-1}{n+4}$ b. $u_n=\dfrac{2n^2-5n+3}{n+4}$

លំហាត់ទី៣៖ កំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីត u និង v ដែលមានតួទូទៅ :

a. $u_n=-4n+6$ b. $v_n=n^2-3n+5$

c. $u_n=n\sqrt{n}$ d. $v_n=n^3-n^2$

e. $u_n=\dfrac{3}{2n+1}$ f. $v_n=5-\dfrac{2}{n+1}$

g. $u_n=\dfrac{3n-5}{2n+1}$ h. $v_n=\dfrac{n^2-2n}{3+n}$

i. $u_n=(-1)^n$ j. $v_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

k. $u_n=n^2-\dfrac{1}{n+1}$ l. $v_n=\dfrac{1}{n^2}-2\sqrt{n}$

m. $u_n=2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{3}{n^2}$ n. $v_n=\sqrt{n}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

o. $u_n=\dfrac{3n-1}{n^2}$ p. $v_n=\dfrac{3n^2+n+1}{n^2+2n-1}$

q. $u_n=\dfrac{(n+1)(3-n)}{2n^2+1}$ r. $v_n=\left(n-\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{n+1}{2n^2}\right)$

វិធីកំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីតដោយធ្វើការប្រៀបធៀប

លំហាត់៖ កំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីត u , v និង w ដែលគេឲ្យតួទូទៅរបស់វាខាងក្រោម ៖

a. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ b. $v_n = \dfrac{n+\cos(n)}{n+3}$ c. $w_n = \dfrac{n^2+(-1)^n}{n+5}$

ចម្លើយ

a.ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n , $-1 \le (-1)^n \le 1$

ដោយចែកដោយ $(n+1)$ វិជ្ជមានដាច់ខាត

$\dfrac{-1}{n+1} \le \dfrac{(-1)^n}{n+1} \le \dfrac{1}{n+1}$ តែ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

តាមវិធីអមយើងបានស្វ៊ីត u ទោទៅរក 0 ។

ដូច្នេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} = 0$ ។

b. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n , $-1 \le \cos(n) \le 1$

នោះយើងបាន $n-1 \le n+\cos(n) \le n+1$ ដោយចែកនឹង $n+3$ (វិជ្ជមានដាច់ខាត) យើងបាន

$\dfrac{n-1}{n+3} \le \dfrac{n+\cos(n)}{n+3} \le \dfrac{n+1}{n+3}$ ឬ $\dfrac{n-1}{n+3} \le v_n \le \dfrac{n+1}{n+3}$

ចំពោះគ្រប់ $n>0$, $\dfrac{n-1}{n+3} = \dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$ និង $\dfrac{n+1}{n+3} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$

នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n+3} = 1$

តាមវិធីអមយើងបានស្វ៊ីត v ទោទៅរក 1 ។

ដូច្នេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ ។

c. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n , $-1 \le (-1)^n \le 1$

យើងបាន $n^2-1 \le n^2+(-1)^n \le n^2+1$ ។ ដោយចែកនឹង $n+5$ (វិជ្ជមានដាច់ខាត) គេបាន ៖

$\dfrac{n^2-1}{n+5} \le w_n \le \dfrac{n^2+1}{n+5}$

ចំពោះគ្រប់ $n>0$, $\dfrac{n^2-1}{n+5} = \dfrac{n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{5}{n}}$

នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-1}{n+5} = +\infty$ ដោយតួតូចទោទៅរក $+\infty$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$ ។

វិធីកំណត់លីមីតដោយធ្វើការប្រៀបធៀប ឬ វិធីអម ។

- យើងប្រើវិធីប្រៀបធៀបងាយៗ ឧទាហរណ៍ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n:
  $-1 \le (-1)^n \le 1$
  $-1 \le \cos(n) \le 1$
  $-1 \le \sin(n) \le 1$
- យើងដាក់ចំនួនអមឬប្រៀបធៀបទៅនឹងចំនួនមួយដែលធំជាង ឬ ទៅនឹងចំនួនមួយដែលតូចជាងស្វ៊ីតដែលយើងត្រូវរកលីមីតរបស់វា ។
- រាល់ការសន្និដ្ឋានយើងប្រើទ្រឹស្តីបទ ធៀបនឹងចំនួនធំជាង ឬ តូចជាង ឬ អម ។

កំណត់សម្គាល់៖ វិសមភាព $w_n \le \frac{n^2+1}{n+5}$ មិនអាចឲ្យយើងសន្និដ្ឋានបានទេ ។	

លំហាត់អនុវត្តន៍វិធីកំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីតដោយធ្វើការប្រៀបធៀប

លំហាត់ទី១៖ កំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម ៖

a. $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$ b. $v_n = \frac{n+\cos(n)}{n}$

លំហាត់ទី២៖ គេមានស្វ៊ីត u កំណត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយ $u_n = \frac{n^2-3n+5}{n+3}$

1.a.ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n , $u_n \ge n-6$ ។

b.ទាញយកលីមីតនៃស្វ៊ីត u ។

2.កំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីត u ដោយដាក់ជាកត្តាភាគយកនិងភាគបែងដោយ n ។

លំហាត់ទី៣៖ គេមានស្វ៊ីត u ។ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោមកំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីត u ។

a. $u_n = n^2 + (-1)^n n$ b. $u_n = (\cos(n) - 2) \times n$

លំហាត់ទី៤៖ គេមានស្វ៊ីត u កំណត់លើ $\mathbb{N}^*$ ដោយ ៖

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ។}$$

1. យកចំនួនគត់ $n \ge 1$ ។ បញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $k, 1 \le k \le n$ គេបាន $\frac{1}{\sqrt{k}} \ge \frac{1}{\sqrt{n}}$ ។
2. ទាញបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \ge 1$, $u_n \ge \sqrt{n}$ ។
3. កំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីត u ។

លំហាត់ទី៥៖ កំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីត u និង v ខាងក្រោម ៖

a. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ b. $v_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$

លំហាត់ទី៦៖ គេមានស្វ៊ីត u កំណត់លើ $\mathbb{N}^*$ ដោយ ៖

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មិនសូន្យ :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \le u_n \le \frac{n}{n+1}$$

2. កំណត់លីមីតនៃស្វ៊ីត u ។

វិធីកំណត់លីមីតដោយប្រើប្រមាណវិធី

លំហាត់៖

1. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ : $f(x)=x^2-2x$ ។
   គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។
2. គេមានអនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\neq 1$ ដោយ $g(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$ ។
   a. គណនាលីមីតនៃ g ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។
   b. គណនាលីមីតខាងស្តាំ និង ខាងឆ្វេងនៃ g ត្រង់ 1 ។

ចម្លើយ

1.

- គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-2x\right)$ សម្រាប់អនុគមន៍ $f(x)=x^2-2x$ ពុំមានរាងមិនកំណត់ទេ ។ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$ ។ ដូច្នេះយើងប្រើផលបូកនៃពីរអនុគមន៍យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$
- គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x\right)$ យើងនៅចំពោះមុខនៃរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$ ។ យើងដាក់ x^2 ជាកត្តា :

ចំពោះ $x\neq 0$, $f(x)=x^2\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)=1$

តែ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ ។ ដូច្នេះ ដោយប្រើផលគុណនៃពីរអនុគមន៍ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ។

2.

- គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

យើងឃើញរាងមិនកំណត់ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ។

ចំពោះ $x\neq 0$, $g(x)=\dfrac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)=1$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)=1$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$

វិធីកំណត់លីមីតដោយប្រើប្រមាណវិធី

- បើពុំមានរាងមិនកំណត់ទេយើងគណនាតាមប្រមាណវិធីលីមីតធម្មតាដូចករណីត្រង់ $-\infty$ យើងប្រើវិធីបូកលីមីត ។
- បើមានរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$ គេដាក់ជាកត្តាតួណាដែលដឺក្រេធំជាងគេ ។
- បើមានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{\infty}{\infty}$ គេដាក់កត្តាភាគយកនិងភាគបែងតួដែលមានដឺក្រេធំរួចសម្រួល ។
- បើមានរាង $\dfrac{k}{0}$ ត្រូវសិក្សាសញ្ញានៃភាគបែងដើម្បីធ្វើការសន្និដ្ឋាន ។ កាលណាកន្សោមមួយទោទៅរកសូន្យវាអាចពេលខ្លះវារក្សាតម្លៃវិជ្ជមាន(គេតាង 0^+) ឬពេលខ្លះវារក្សាតម្លៃអវិជ្ជមាន(គេតាង 0^-) ។ យើងសន្និដ្ឋានដោយប្រើក្បួនសញ្ញានៃផលចែក ។

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

- គណនា $\lim\limits_{x\to1} g(x)$ គេបាន

$\lim\limits_{x\to1}(x-2)=-1$ និង $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$

ដោយសិក្សាសញ្ញានៃ $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

ដោយសញ្ញានៃ $x-1$ ដូរត្រង់ 1 ។ អនុគមន៍ g គ្មានលីមីតត្រង់ 1 តែយើងអាចសិក្សាលីមីតខាងឆ្វេងនិង ខាងស្តាំវាបាន ។ ដោយ $\lim\limits_{x\to1}(x-2)=-1$ (អវិជ្ជមាន) និង $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x-1)=0^+$ ជាផលចែក

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} g(x)=-\infty$ ។ ដូចគ្នាដែរ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(x-1)=0^-$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x)=+\infty$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍វិធីកំណត់ ឬគណនាលីមីតដោយប្រើប្រមាណវិធី

លំហាត់ទី១៖ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x}{x+2}$

លំហាត់ទី២៖ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$

លំហាត់ទី៣៖ គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(x-3)$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x^2(x+2)+1\right]$

លំហាត់ទី៤៖ កំណត់លីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}\right)\right]$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-3x\left(x+\dfrac{3}{x}\right)\right]$

លំហាត់ទី៥៖ គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3)\left(\dfrac{1}{x}-4\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x}(x+5)\right]$

លំហាត់ទី៦៖ កំណត់លីមីតត្រង់ $-\infty$ និង ត្រង់ $+\infty$ នៃអនុគមន៍ f , g និង h ដែលកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ។

a. $f(x)=-x^3+2x^2-4$ b. $g(x)=\dfrac{x}{2+3x^2}$ c. $h(x)=\dfrac{9x^3+1}{x^2-4x+5}$

លំហាត់ទី៧៖ កំណត់លីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\dfrac{x}{4-x^2}$ b. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\dfrac{x}{4-x^2}$ c. $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\dfrac{x}{4-x^2}$ d. $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\dfrac{x}{4-x^2}$ e. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{4-x^2}$

វិធីគណនាលីមីត

លំហាត់៖ គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sin x\right)$ 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

ចម្លើយ

1. យើងតាង $f(x)=3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}$ កាលណា x ខិតជិត 0 ខាងស្តាំមានរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$ ពីព្រោះ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2}{x}=+\infty$ និង $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{5}{x^2}=+\infty$ យើងតម្រូវភាគបែង ។ យើងបានចំពោះ គ្រប់ $x\neq 0$, $f(x)=\frac{3x^2+2x-5}{x^2}$
គេបាន $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(3x^2+2x-5\right)=-5$ (អវិជ្ជមាន)
និង $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^2=0^+$ ។ ដូច្នេះដោយប្រើប្រមាណវិធីនៃលីមីត $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=-\infty$ ។
2. យើងតាង $g(x)=\sqrt{x^2+x+1}$
ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x+1\right)$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]=+\infty$$
និង $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$
យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ ។
3. យើងតាង $h(x)=x+\sin x$
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $-1\le\sin x\le 1$
ដូច្នេះគ្រប់ចំនួនពិត x,
$x-1\le x+\sin x\le x+1$ ឬ $x-1\le h(x)\le x+1$
ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ គេទាញបានដោយវិធីប្រៀបធៀប $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ ។
4. យើងតាង $k(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ កាលណា $x\to+\infty$ វាមានរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$ ។
ពីព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$
ដោយគុណនិងចែកដោយកន្សោមឆ្លាស់នៃ

វិធីគណនាលីមីត

1. -យើងត្រូវចេះប្រើប្រមាណវិធីលើលីមីត ។
-យើងបម្លែងកន្សោមនៃ $f(x)$ ។
-បើជួបរាងមិនកំណត់យើងមិនអាចសន្និដ្ឋានបានទេ ។ គេអាចប្រើវិធីផ្សេងៗទៅតាមទម្រង់នៃអនុគមន៍ ។
2. គេសាកល្បងសរសេរអនុគមន៍ជាបណ្តាក់នៃពីរអនុគមន៍ គឺ អនុគមន៍ x^2+x+1 និង អនុគមន៍ឬសការ៉េ រួចយើងអនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទ ។
3. ប្រៀបធៀបអនុគមន៍ទៅនឹងអនុគមន៍គោលរួចអនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទនៃការប្រៀបធៀប ។
4. កន្សោមនៃអនុគមន៍មានឬសការ៉េត្រូវគិតដល់ការគុណកន្សោមឆ្លាស់ ។

$k(x)$ យើងបាន ៖ $k(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ $=\dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ តែ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=+\infty$ ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=0$ ។	

លំហាត់អនុវត្តន៍វិធីគណនាលីមីត

លំហាត់ទី១៖ គេមានអនុគមន៍ $f:x\mapsto\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ ។

គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

លំហាត់ទី២៖ រកលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)$

លំហាត់ទី៣៖ កំណត់ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{2x^2-3}\right)$

លំហាត់ទី៤៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(1;+\infty)$ ដោយ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ ។

គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $+\infty$ និងត្រង់ 1 ។

លំហាត់ទី៥៖ កំណត់លីមីតខាងក្រោម ៖

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+5}{4x+1}}$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}}$ d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

លំហាត់ទី៦៖ គេមានអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\sqrt{x^2+4}-x$ ។

1. កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ ។
2. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$

   ទាញយកលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $+\infty$ ។

លំហាត់ទី៧៖ កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម ៖

a. $f(x)=\left(2-\sin x\right)\times x^2$

b. $f(x)=\dfrac{3x}{\cos x-3}$

លំហាត់ទី៨៖

1. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\cos x}\le 1$
2. ទាញយកលីមីតខាងក្រោម

   a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-\cos x}$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\cos x}{2-\cos x}$

លំហាត់ទី៩៖

1. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\geq 1$ គេបាន $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$
2. ទាញយកលីមីតខាងក្រោម ៖

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}$

វិធីប្រើលក្ខណៈពិជគណិតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

លំហាត់៖

1. សម្រួលកន្សោមខាងក្រោមដែល x ជាចំនួនពិត ៖

$A=\frac{e^{2x}}{e^{3x}}\qquad B=e^{x}\left(1+2e^{-x}\right)\qquad C=\frac{e^{x+2}}{e^{x+1}}\qquad D=\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}\qquad E=\frac{e^{2x-1}}{\left(e^{x}\right)^{2}}$

2. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $f(2x)=2(f(x))^{2}-1$ ។

ចម្លើយ

1. $A=\frac{e^{2x}}{e^{3x}}=e^{2x-3x}=e^{-x}$

$B=e^{x}\left(1+2e^{-x}\right)=e^{x}+2e^{x}e^{-x}=e^{x}+2$

$C=\frac{e^{x+2}}{e^{x+1}}=e^{(x+2)-(x+1)}=e^{1}=e$

$D=\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}=\left(e^{x}\right)^{2}+2e^{x}e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^{2}$

$=e^{2x}+2+e^{-2x}$

$E=\frac{e^{2x-1}}{\left(e^{x}\right)^{2}}=\frac{e^{2x-1}}{e^{2x}}=e^{2x-1-2x}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

2. $f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

$2(f(x))^{2}-1=2\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^{2}-1$

$=2\left(\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}\right)-1$

$=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}=f(2x)$

វិធីប្រើលក្ខណៈពិជគណិតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ។

1. A.គ្រប់ចំនួនពិត x , គ្រប់ចំនួនពិត y

$\frac{e^{x}}{e^{y}}=e^{x-y}$ ។

B.គ្រប់ចំនួនពិត x , $e^{x}e^{-x}=1$ ។

C.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $e^{nx}=\left(e^{x}\right)^{n}$ ។

យើងប្រើរង្វង់ក្រចក :

$\left(e^{x}\right)^{2}=\left(e^{x}\right)\left(e^{x}\right)=e^{2x}$

E.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $e^{-x}=\frac{1}{e^{x}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍ វិធីប្រើលក្ខណៈពិជគណិតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

លំហាត់ទី១៖ សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម ៖

a. $A=e^{2x}\times e^{-2x}$ b. $B=e^{2x+1}\times e^{1-x}$ c. $C=\frac{e^{x+2}}{e^{-x+2}}$ d. $D=\frac{e^{3x}+e^{x}}{e^{2x}+1}$

លំហាត់ទី២៖ ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន

1. $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ 2. $\dfrac{e^x-1}{e^{2x}}=e^{-x}-e^{-2x}$

លំហាត់ទី៣៖ ចូរឆ្លើយថាពិត ឬមួយមិនពិត ៖

a. $\left(\dfrac{1}{e^x}\right)^3=e^{-3x}$ b. $\dfrac{\left(e^x\right)^2}{e}=e^{2x-1}$ c. $e^{x-1}\times e^{1-x}=1$ d. $\dfrac{e^{3x}}{e^x}=e^3$

លំហាត់ទី៤៖ គេកំណត់លើ $\mathbb{R}$ អនុគមន៍ ៖

$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ និង $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ៖

a. $[f(x)]^2-[g(x)]^2=1$

b. $2[f(x)]^2-1=f(2x)$

c. $g(2x)=2g(x)\times f(x)$

លំហាត់ទី៥៖ សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម ៖

a. $\dfrac{\left(e^2\right)^5}{e^9}$ b. $\sqrt{e^2}\times\dfrac{1}{e^{-2}}$ c. $\dfrac{1}{1+e}-\dfrac{e^{-1}}{1+e^{-1}}$

លំហាត់ទី៦៖ សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម ៖

a. $f(x)=\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2$

b. $g(x)=\dfrac{1+e^{2x}}{1-e^x}+\dfrac{e^{-x}+e^x}{1-e^{-x}}$

c. $h(x)=\left(e^x+1\right)^2-\sqrt{e^{4x}}-1$

វិធីសិក្សាអនុគមន៍ដោយបញ្ចូលអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

លំហាត់៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ ។ គេតាង (C) ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយ $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ ។ ទាញបង្ហាញថាខ្សែកោង (C) មានអាស៊ីមតូតត្រង់ $-\infty$ ដែលគេបញ្ជាក់សមីការវា ។
2. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញបង្ហាញថាខ្សែកោង (C) មានអាស៊ីមតូតត្រង់ $+\infty$ ដែលគេបញ្ជាក់សមីការវា ។
3. ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $f(-x)=-f(x)$ ។ តើគេអាចទាញបានយ៉ាងណាចំពោះអនុគមន៍ f និងចំពោះខ្សែកោងរបស់វា ។
4. គណនាដេរីវេ f' នៃ f និង បញ្ជាក់សញ្ញារបស់វា ។ ទាញយកតារាងអថេរភាពនៃ f ។

ចម្លើយ

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ ។ យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា (C) មានអាស៊ីមតូតត្រង់ $-\infty$ គឺបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=-1$ (អាស៊ីមតូតដេក) ។

2. កន្សោម $f(x)$ មានរាងមិនកំណត់ត្រង់ $+\infty$ ដូច្នេះគេសរសេរ

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x\left(1-e^{-x}\right)}{e^x\left(1+e^{-x}\right)}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ ពីព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ និង (C) មានត្រង់ $+\infty$ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

3. $$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{e^x\left(\frac{1}{e^x}-1\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}$$

$$=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-f(x)$$

ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍សេស ។ ខ្សែកោង (C) តាង f មាន O ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។

4. $$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)>0$ ។ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$ ។

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow 1$

វិធីដែលយើងប្រើ

1. បើ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ ដែល a ជាចំនួនពិតនោះខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f មាននៅ $-\infty$ អាស៊ីមតូតដេកដែលមានសមីការ $y=a$ ។
2. ត្រង់ $+\infty$ យើងឃើញតួដែលគ្របដណ្តប់គឺ e^x ទាំងនៅភាគយកនិងនៅភាគបែង ។ យើងត្រូវដាក់ e^x ជាកត្តាទាំងភាគយកនិងភាគបែង ។
3. បើចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $f(-x)=-f(x)$ នោះ f ជាអនុគមន៍សេស ។
4. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $e^x>0$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍វិធីសិក្សាអនុគមន៍ដោយបញ្ចូលអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

លំហាត់ទី១៖ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=e^x+x-1$ ។

កំណត់សមីការបង្រួមនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស 1 ។

លំហាត់ទី២៖ គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-\sqrt{x}\right)$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-e^{-x}}$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)e^x$

លំហាត់ទី៣៖ គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2+x+1}$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}+1}{e^x+2}$ d. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}$

លំហាត់ទី៤៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=1-e^{-x}$ ។

a. ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x<0, f(x)<0$ ។

b. ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\ge 0, 0\le f(x)<1$ ។

លំហាត់ទី៥៖ គណនាលីមីតត្រង់ a កន្សោមខាងក្រោម ៖

a. e^{x^2} ចំពោះ $a=-\infty$ ។

b. $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ ចំពោះ $a=-\infty$ ។

c. $e^{\frac{1}{x^2}}$ ចំពោះ $a=+\infty$ ។

d. $\dfrac{1}{1+e^x}$ ចំពោះ $a=+\infty$ ។

លំហាត់ទី៦៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $[0;2]$ ដោយ $f(x)=x+3-e^x$ ។

1. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេរបស់ f ។
2. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
3. ស្រាយបំភ្លឺថាសមីការ $f(x)=0$ មានចម្លើយ α តែមួយគត់លើ $[0;2]$ ។

វិធីសិក្សាអនុគមន៍ប្រភេទ $f(x)=e^{u(x)}$

លំហាត់៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=e^{x^2-2x}$ ។ គេតាងដោយ (C) ខ្សែកោងរបស់វាក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. គណនាលីមីតរបស់ $f(x)$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។
2. គណនា $f'(x)$ និង កំណត់សញ្ញារបស់វា ។
3. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
4. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=1$ ។

ចម្លើយ

1. -គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)$

តែ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=1$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x\right)=+\infty$ ។

យើងដឹងថា $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2-2x}=+\infty$ ។

-គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-2x\right)=+\infty$ (មិនមានរាងមិនកំណត់ទេ) ។ រួច $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^2-2x}=+\infty$ ។

2. $f'(x)=(2x-2)e^{x^2-2x}$ យើងដឹងថាគ្រប់ចំនួនពិត x , $e^{x^2-2x}>0$ ដូច្នេះសញ្ញានៃ $f'(x)$ គឺសញ្ញានៃ $(2x-2)$ ។

3. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

$f(1)=e^{1^2-2}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. $f(x)=1\Leftrightarrow e^{x^2-2x}=1$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-2x}=e^0\Leftrightarrow x^2-2x=0$$

សមីការ $x^2-2x=0$ មានចម្លើយ $x=0$ ឬ $x=2$ ។ ដូច្នេះសំណុំចម្លើយរបស់សមីការ $S=\{0;2\}$ ។

វិធីសិក្សាអនុគមន៍ប្រភេទ $f(x)=e^{u(x)}$

1. ដើម្បីបំបាត់រាងមិនកំណត់នៅអនន្តក្នុងករណីពហុធាយើងទាញកត្តាដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេដាក់ជាកត្តាដែលវាគ្រប់ដណ្ដប់លើតួដទៃ ។
2. $\left(e^u\right)'=u'\times e^u$
3. $e^a=e^b\Leftrightarrow a=b$
4. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=1$ គឺរកអាប់ស៊ីសនៃចំណុចដែលមានអរដោនេ 1 នៅលើខ្សែកោង ។

លំហាត់អនុវត្តន៍វិធីសិក្សាអនុគមន៍ប្រភេទ $f(x)=e^{u(x)}$

លំហាត់ទី១៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម ៖

a.គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=e^{1-2x}$ b.គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}e^{-x^2}$

c.គ្រប់ $x\in(0;+\infty)$, $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ d.គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\cos x}$

លំហាត់ទី២៖

1. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=e^{x^3+x^2}$ ។
2. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅខ្សែកោងតាងអនុគមន៍នេះត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស -1 ។

លំហាត់ទី៣៖ គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)$ b. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\left(x+5\right)$ d. $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-\frac{1}{x}}$

លំហាត់ទី៤៖

a. ស្រាយបំភ្លឺថាអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=e^{-3x}$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $\mathbb{R}$ ។

b. ស្រាយបំភ្លឺថាអនុគមន៍ $f(x)=e^{\frac{-1}{x}}$ ជាអនុគមន៍កើនលើ $(0;+\infty)$ និង លើ $(-\infty;0)$ ។

c. ស្រាយបំភ្លឺថាអនុគមន៍ $f(x)=e^{\cos x}$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $[0;\pi]$ ។

លំហាត់ទី៥៖ តើពិត ឬមួយមិនពិត ? ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោមដែលគេឲ្យកន្សោមអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ I និង អនុគមន៍ដេរីវេ f' របស់វា ។ បញ្ជាក់តើកន្សោមនៃ $f'(x)$ ត្រឹមត្រូវឬទេ ?

1. $f(x)=e^{3x-1}$, $f'(x)=e^{3x-1}$, $I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=e^{\sqrt{x}}$, $f'(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, $I=(0;+\infty)$
3. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, $I=(-\infty;0)$
4. $f(x)=e^{\cos x}$, $f'(x)=e^{\cos x}\sin x$, $I=\mathbb{R}$

វិធីប្រើអនុគមន៍លោការីតនេពែដើម្បីដោះស្រាយសមីការ ឬ វិសមីការ

លំហាត់៖ យើងមាន k ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដាច់ខាត ។ គេមានអនុគមន៍កំណត់លើ $[0;+\infty)$ ដោយ ៖ $f_k(x)=e^x-kx$ ។

1. នៅក្នុងសំណួរនេះគេតាង $k=2$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f_2(x)=e^x-2x$ នៅលើ $[0;+\infty)$ ។
2. ក្នុងករណីទូទៅ ។
   a. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f_k មានអប្បបរមាលើ $[0;+\infty)$ ត្រង់ចំនួនពិត α_k ដែលគេនឹងបញ្ជាក់ ។
   b. គេតាង $u_k=f(\alpha_k)$ ។ គណនា u_k ជាអនុគមន៍នៃ k ។
   c. កំណត់លីមីតនៃ u_k ត្រង់ $+\infty$ ។

ចម្លើយ

1. f_2 មានដេរីវេលើ $[0;+\infty)$ និងគេបាន $f_2'(x)=e^x-2$ ។ គេបាន $f_2'(x)=0\Leftrightarrow e^x=2\Leftrightarrow x=\ln 2$	វិធីប្រើអនុគមន៍លោការីតនេពែដើម្បីដោះស្រាយសមីការ ឬ វិសមីការ

គេក៏បាន $f_2'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>2$

$$\Leftrightarrow e^x > e^{\ln 2} \Leftrightarrow x>\ln 2$$

$f_2(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2$

ដូច្នេះគេបានតារាងអថេរភាពខាងក្រោម ៖

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	1	$\searrow$	$(2-2\ln 2)$	$\nearrow$	

2. a. f_k មានដេរីវេលើ $[0;+\infty)$ និងគេបាន

$f_k'(x)=e^x-k$ ។

ដូច្នេះ $f_k'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=k \Leftrightarrow x=\ln k$

គេបាន $f_k'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>k$

$$\Leftrightarrow e^x>e^{\ln k} \Leftrightarrow x>\ln k$$

យើងបានតារាងអថេរភាពខាងក្រោម ៖

x	0		$\ln k$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_k(x)$	1	$\searrow$	$f(\ln k)$	$\nearrow$	

ដូច្នេះ f_k មានអប្បបរមាមួយនៅលើ $[0;+\infty)$ ត្រង់ $\alpha_k=\ln k$ ។

b.យើងបាន

$u_k=f(\ln k)=e^{\ln k}-k\ln k=k-k\ln k$

c. $u_k=k(1-\ln k)$ ។ តែ $\lim\limits_{k\to+\infty}\ln k=+\infty$

នោះ $\lim\limits_{k\to+\infty}(-\ln k)=-\infty$ ។

ដូច្នេះយើងបាន $\lim\limits_{k\to+\infty}u_k=-\infty$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការរាង $e^x=a$

- បើ $a\le 0$ សមីការជាសមីការមិនអាច ។
- បើ $a>0$ យើងអនុវត្តន៍អនុគមន៍ ln ទៅអង្គទាំងពីររបស់សមីការដែលយើងបាន $\ln e^x=\ln a$ មានន័យថា $x=\ln a$ ។

ដើម្បីដោះស្រាយវិសមីការរាង $e^x>a$

- បើ $a\le 0$ នោះគ្រប់ចំនួនពិតជាចម្លើយរបស់វិសមីការ ។
- បើ $a>0$ យើងអនុវត្តន៍អនុគមន៍ ln ដែលជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត ទៅអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការយើងបាន $\ln e^x>\ln a$ ឬ $x>\ln a$ ។
- សម្រាប់ការគណនាលីមីតយើងប្រើមេរៀនលើលីមីត ។

លំហាត់អនុវត្តន៍វិធីប្រើអនុគមន៍លោការីតនេពែដើម្បីដោះស្រាយសមីការឬវិសមីការ

លំហាត់ទី១៖ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ សមីការខាងក្រោម ៖

a. $e^x=5$ b. $e^{x^2}=4$ c. $e^{-x}=2$ d. $e^x=-2$

លំហាត់ទី២៖ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ សមីការខាងក្រោម ៖

a. $\ln x=5$ b. $\ln x=-4$ c. $\ln x=\ln(x+1)$ d. $\ln 2x=\ln(x-1)$

លំហាត់ទី៣៖ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=e^{x^2}-2x^2$ ។

លំហាត់ទី៤៖ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+2}$ ។

លំហាត់ទី៥៖ ឆ្លើយពិត ឬមួយមិនពិតចំពោះអំណះអំណាងខាងក្រោម ៖

a. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $\ln\left(e^{x}\right)=x$

b. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $e^{\ln x}=x$

c. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $\ln\left(e^{-x}\right)\leq 0$

d. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមានដាច់ខាត x , $e^{-\ln x}=-x$

e. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមានដាច់ខាត x , $e^{2\ln x}=2x$

លំហាត់ទី៦៖ គណនាចំនួនពិតខាងក្រោម ៖

a. $\ln\left(e^{2}\right)$ b. $\ln\left(e^{-3}\right)$ c. $e^{\ln 5}$ d. $e^{-\ln 3}$ e. $e^{2\ln 7}$ f. $e^{-3\ln 2}$

លំហាត់ទី៧៖ ដោះស្រាយក្នុង ℝ សមីការខាងក្រោម ៖

a. $\ln x=3$ b. $2\ln x+6=0$ c. $1-4\ln x=\ln x-9$ d. $(\ln x)^{2}=1$

លំហាត់ទី៨៖ ដោះស្រាយក្នុង ℝ សមីការខាងក្រោម ៖

a. $e^{x}=4$ b. $5e^{x}+2=8$ c. $e^{2x}-2=0$ d. $e^{x}-3=2e^{x}-1$

លំហាត់ទី៩៖ ដោះស្រាយក្នុង ℝ សមីការខាងក្រោមក្រោយពីរកដែនកំណត់របស់វា ៖

a. $\ln(x+2)=\ln 2$ b. $\ln(2x-5)=1$ c. $4\ln(1-x)=8$ d. $\ln(3x+8)=\ln x$

លំហាត់ទី១០៖ ដោះស្រាយក្នុង ℝ សមីការខាងក្រោមក្រោយពីរកដែនកំណត់របស់វា ៖

a. $\ln(x+1)+\ln x=0$ b. $\ln\left(x^{2}+1\right)=\ln x$

c. $\ln(3-x)\times\ln(x+1)=0$ d. $\ln(5x-6)-2\ln x=0$

លំហាត់ទី១១៖ ដោះស្រាយក្នុង ℝ សមីការខាងក្រោម ៖

a. $\ln\left(e^{x}+1\right)=\ln 2$ b. $\ln\left(2e^{x}+1\right)=1$ c. $e^{1+\ln x}=2x-1$ d. $e^{2\ln x-3}=x$

លំហាត់ទី១២៖ ដោះស្រាយក្នុង ℝ សមីការខាងក្រោម ៖

a. $e^{x+2}=3$ b. $4e^{2x-1}=1$ c. $24e^{2-x}=10$

លំហាត់ទី១៣៖

1. ដោះស្រាយក្នុង ℝ សមីការ $X^{2}-3X+2=0$
2. ទាញយកចម្លើយក្នុង ℝ របស់សមីការខាងក្រោម ៖

   a. $(\ln x)^{2}-3\ln x+2=0$ b. $e^{2x}-3e^{x}+2=0$

លំហាត់ទី១៤៖

1. ដោះស្រាយក្នុង ℝ សមីការ $X^{2}-6=0$
2. ទាញយកចម្លើយក្នុង ℝ របស់សមីការខាងក្រោម ៖

   a. $(\ln x)^{2}-6=0$ b. $e^{2x}-6=0$

វិធីសិក្សាអនុគមន៍ដែលមានអនុគមន៍លោការីតនេពៃ

លំហាត់៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0;+\infty)$ ដោយ $f(x)=(\ln x+1)^2$ ។

1. កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង ត្រង់ $+\infty$ ។
2. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x នៃ $(0;+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{2\ln x+2}{x}$ ។
3. សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេរបស់អនុគមន៍ f ។

ចម្លើយ

1. គេដឹងថា $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ នោះ $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x+1)=-\infty$

តែ $\lim\limits_{X\to-\infty}X^2=+\infty$ ។ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x+1)^2=+\infty$ ។

គេដឹងថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ នោះ៖

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+1)=+\infty$ តែ $\lim\limits_{X\to+\infty}X^2=+\infty$

ដូច្នេះ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+1)^2=+\infty$ ។

2. $f'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\times(\ln x+1)=\dfrac{2\ln x+2}{x}$

3. គេដឹងថា $x>0$ ដូច្នេះ៖ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(2\ln x+2)$ ។

$2\ln x+2\ge 0\Leftrightarrow 2\ln x\ge -2$

$\Leftrightarrow \ln x\ge -1\Leftrightarrow x\ge e^{-1}$

យើងបានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម៖

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

វិធីសិក្សាអនុគមន៍ដែលមានអនុគមន៍លោការីតនេពៃ ។

1. ដើម្បីគណនាលីមីតគេប្រើបណ្ដាក់នៃអនុគមន៍ដោយគត់សម្គាល់ថា $f(x)$ មានតំណាក់កាលពីរបន្តបន្ទាប់ ៖ $x\mapsto(\ln x+1)\mapsto(\ln x+1)^2$ ។
2. យើងអនុវត្តន៍រូបមន្តនៃដេរីវេ $(u^2)'=2u'u$ ។
3. ដើម្បីដោះស្រាយវិសមីការប្រភេទ $\ln x\ge a$ គេត្រូវដឹងថាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង អនុគមន៍លោការីតនេពៃជាអនុគមន៍ច្រាស់ទៅវិញទៅមក និងអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត ។

$\ln x\ge a\Leftrightarrow e^{\ln x}\ge e^{a}\Leftrightarrow x\ge e^{a}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍វិធីសិក្សាអនុគមន៍ដែលទាក់ទងអនុគមន៍លោការីតនៃពៃ

លំហាត់ទី១៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0;+\infty)$ ដោយ $f(x)=(\ln x)^2$ ។

a.កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។

b.សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។

c.សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

លំហាត់ទី២៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0;+\infty)$ ដោយ $f(x)=\ln x+(\ln x)^2$ ។

a.រកលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។

b.គេកត់សម្គាល់ឃើញថាចំពោះគ្រប់ $x>0$, $f(x)=(\ln x)(1+\ln x)$ ។ កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ 0 ។

c.សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។

លំហាត់ទី៣៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0;+\infty)$ ដោយ $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ ។

a.កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង ត្រង់ $+\infty$ ។

b.សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។

លំហាត់ទី៤៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0;+\infty)$ ដោយ $f(x)=x-\ln x$ ។

a.កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ 0 ។

b.គេកត់សម្គាល់ឃើញថាចំពោះគ្រប់ $x>0$, $f(x)=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$ ។

កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។

c.សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។

លំហាត់ទី៥៖ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោមគេឧបមាថាគេសិក្សាអនុគមន៍ f នៅលើចន្លោះមួយ ដែល f មានដេរីវេ ។ ចូរបញ្ជាក់ថាចម្លើយខាងក្រោមពិត ឬ មួយមិនពិត ។

a.បើ $f(x)=\ln(4x-1)$ នោះ $f'(x)=\frac{4}{4x-1}$ ។

b.បើ $f(x)=\ln\left(x^2\right)$ នោះ $f'(x)=\frac{1}{x^2}$ ។

c.បើ $f(x)=\ln\left(3x^2+x+1\right)$ នោះ $f'(x)=\frac{6x+1}{\ln\left(3x^2+x+1\right)}$ ។

d.បើ $f(x)=\ln\left(x^3+x^2\right)$ នោះ $f'(x)=\frac{3x+2}{x^2+x}$

លំហាត់ទី៦៖ ចូរជ្រើសរើសចម្លើយដែលពិត

1. $f(x)=\ln\left(1+x+x^2\right)$

ចម្លើយ ៖ a. $f'(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$ b. $f'(x)=\frac{1+2x}{1+x+x^2}$ c. $f'(x)=\frac{1}{1+2x}$

2. $f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)$

ចម្លើយ ៖ a. $f'(x)=\frac{1}{e^x-e^{-x}}$ b. $f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$ c. $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

លំហាត់ទី៧៖

1.ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ សមីការខាងក្រោម ៖

a. $(\ln x)^2+\ln\left(\frac{1}{x}\right)=1$ b. $(\ln x)^3+3\ln x=0$

2.បង្ហាញថាសមីការ $e^{2x}-5e^x+7=0$ គ្មានចម្លើយក្នុង $\mathbb{R}$ ។

លំហាត់ទី៨៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0;+\infty)$ ដោយ $f(x)=\ln x-(\ln x)^2$ ។

1.កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង ត្រង់ $+\infty$ ។

2.គណនា $f'(x)$ ។

3.a.ដោះស្រាយវិសមីការ $1-2\ln x\geq 0$

b.ទាញយកសញ្ញានៃដេរីវេរបស់ f រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍នេះ ។

4.សង់ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ ។

5.កំណត់ជាអនុគមន៍នៃចំនួនពិត k ចំនួននៃចម្លើយរបស់សមីការ $f(x)=k$ ។

លំហាត់ទី៩៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0;+\infty)$ ដោយ $f(x)=(\ln x)^2$ ។

1.កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង ត្រង់ $+\infty$ ។

2.គណនា $f'(x)$, សិក្សាសញ្ញារបស់វា រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

3.ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $k>0$, សមីការ $f(x)=k$ មានចម្លើយពីរ ។

4.ឲ្យជាអនុគមន៍នៃ k ចម្លើយរបស់សមីការនេះ ។

វិធីកំណត់ព្រីមីទីវ

លំហាត់៖ 1.ស្រាយបំភ្លឺថាអនុគមន៍ $F:x\mapsto xe^x-e^x+2$ ជាព្រីមីទីវមួយនៅលើ $\mathbb{R}$ នៃអនុគមន៍ $f:x\mapsto xe^x$ ។

2.កំណត់ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a. $f(x)=3x^3-2x$ នៅលើ $\mathbb{R}$ ។

b. $g(x)=\sin 2x-\cos x$ នៅលើ $\mathbb{R}$ ។

c. $h(x)=xe^{x^2}-3x$ នៅលើ $\mathbb{R}$ ។

d. $j(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^3}$ នៅលើ $I=(-1;+1)$ ។

ចម្លើយ

1. យើងប្រើរូបមន្តនៃដេរីវេយើងបានចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=xe^x+e^x-e^x$ $=xe^x=f(x)$ ដូច្នេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។ 2. a.យើងគិតដល់រូបមន្ត $(x^n)'=nx^{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f(x)=\frac{3}{4}(4x^3)-2x$ ។ ដូច្នេះព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ ៖ $F(x)=\frac{3}{4}x^4-x^2+k$, k ជាចំនួនពិតណាមួយ ។ b.យើងគិតដល់រូបមន្ត $(\cos 2x)'=-2\sin 2x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន៖ $g(x)=-\frac{1}{2}(-2\sin 2x)-\cos x$ ដូច្នេះព្រីមីទីវ $G(x)$ នៃ $g(x)$ លើ $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ ៖ $G(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x+k$, k ជាចំនួនពិតណាមួយ ។	វិធីកំណត់ព្រីមីទីវ 1.ដើម្បីស្រាយបំភ្លឺថាអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើចន្លោះ I ណាមួយគេត្រូវបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x\in I, F'(x)=f(x)$ ។ 2.a.គេត្រូវសាកល្បងធ្វើឲ្យឃើញរូបមន្តនៅលើតារាងរូបមន្តនៃដេរីវេដែលយើងប្រើជាញឹកញាប់ ។ c.គេត្រូវសាកល្បងធ្វើឲ្យឃើញរូបមន្តដែលយើងបានសិក្សា ។ d.យើងនឹកដល់ $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ ជាព្រីមីទីវនៃ $u'\times u^n$ ដែល $n\in\mathbb{Z}$ និង $n\neq -1$ នៅលើចន្លោះដែល u មិនយកតម្លៃសូន្យ ។

<table>
<tr>
<td>
c.បើយើងតាង $u(x)=x^2$ នោះ $u'(x)=2x$
និងគេអាចសរសេរចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x,
$h(x)=\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}-3x$ ។ ដូច្នេះព្រីមីទីវ
$H(x)$ នៃ $h(x)$ លើ $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ៖
$H(x)=\frac{1}{2}e^{u(x)}-\frac{3}{2}x^2+k$ ឬ
$H(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{3}{2}x^2+k$ ដែល k ជាចំនួន
ពិតណាមួយ ។
d.យើងអាចសរសេរ $j(x)=2x\left(x^2-1\right)^{-3}$ ។
ដោយតាង $u(x)=x^2-1$ គេបាន $u'(x)=2x$
និង $j(x)=u'(x)\cdot(u(x))^{-3}$ ដែលវាមានរាង
$u'\times u^n$ ដោយ $n=-3$ ដូច្នេះព្រីមីទីវ $J(x)$
នៃ $j(x)$ លើ $(-1;1)$ កំណត់ដោយ
$J(x)=\frac{(u(x))^{-2}}{-2}+k$ ។
ដូច្នេះ $J(x)=-\frac{1}{2\left(x^2-1\right)^2}+k$ ដែល k ជា
ចំនួនពិតណាមួយ ។
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

លំហាត់អនុវត្តន៍វិធីកំណត់ព្រីមីទីវ

លំហាត់ទី១៖ កំណត់ព្រីមីទីវលើចន្លោះ I នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a. $f(x)=3x^3-2x+2$ លើ $I=\mathbb{R}$ ។

b. $g(x)=x+2+\frac{1}{x^3}$ លើ $I=(0;+\infty)$ ។

c. $h(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ លើ $I=(0;+\infty)$ ។

លំហាត់ទី២៖ កំណត់ព្រីមីទីវលើចន្លោះ I នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

a. $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ លើ $I=\mathbb{R}$ ។

b. $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ លើ $I=(0;+\infty)$ ។

លំហាត់ទី៣៖ រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមនៅលើចន្លោះដែលវាជាអនុគមន៍ជាប់ ។

a. $f(x)=x^3-2x+2$ b. $f(x)=x+2+\frac{1}{x^3}$ c. $f(x)=3e^x+3x-1$

d. $f(x)=4e^{3x}-1$ e. $f(x)=\frac{3x^2+4x-2}{x^4}$ f. $f(x)=\frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}$

លំហាត់ទី៨៖ រកព្រីមីទីវ F នៃអនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម ៖

1. $f(x)=\frac{x}{4}-\cos x$ និង $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$
2. $f(x)=2x-5$ និង $F(0)=1$
3. $f(x)=e^{x}$ និង $F(2)=0$
4. $f(x)=3x^2+2$ និងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ F កាត់តាមចំណុច $A(-1;3)$ ។

វិធីប្រើទម្រង់ពីជគណិតនៃចំនួនកុំផ្លិច

លំហាត់៖ 1.ដោះស្រាយនៅក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ សមីការដែលមាន z ជាអញ្ញាតខាងក្រោម៖

a. $3z+1-i=7+3i$ b. $2z+i\bar{z}=5-2i$

2.គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=a+2i$ ដោយ $a\in\mathbb{R}$ ។ កំណត់ក្នុងករណីខាងក្រោម ៖

a. $z^2\in i\mathbb{R}$ b. $z+a\bar{z}\in\mathbb{R}$

ចម្លើយ

1. a. $3z+1-i=7+3i\Leftrightarrow 3z=7+3i-1+i$ $3z=6+4i\Leftrightarrow z=\frac{6+4i}{3}=2+\frac{4}{3}i$ ដូច្នេះសំណុំចម្លើយ $S=\left\{2+\frac{4}{3}i\right\}$ b.គេតាង $z=x+iy$ ដែល x និង y ជាចំនួនពិត ។ $2z+i\bar{z}=5-2i\Leftrightarrow 2(x+iy)+i(x-iy)=5-2i$ $\Leftrightarrow 2x+2iy+ix+y=5-2i$ $\Leftrightarrow (2x+y)+(x+2y)i=5-2i$ $\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=5\\x+2y=-2\end{cases}$ ពីព្រោះ $2x+y$ និង $x+2y$ ជាចំនួនពិត ។ យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការតាមវិធីជំនួស $\begin{cases}2x+y=5\\x+2y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-2x\\x+2(5-2x)=-2\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-2x\\-3x=-12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-3\end{cases}$ នោះ $z=4-3i$ ។ ដូច្នេះសំណុំចម្លើយ $S=\{4-3i\}$ ។ 2. a. $z^2=(a+2i)^2=a^2+4ai-4=a^2-4+4ai$ ដោយ a ជាចំនួនពិត (a^2-4) និង $4a$ ជាចំនួនពិត និង $(a^2-4)+4ai$ ជាទម្រង់ពីជគណិតនៃ z^2 ។	1. ដូចគ្នានឹងការដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{R}$ យើងប្រើការគណនាចាំបាច់ដោយបំបែកអញ្ញាតឲ្យនៅក្នុងអង្គមួយនៃសមភាព ។ - ដើម្បីអាចប្រើចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គេត្រូវប្រើទម្រង់ពីជគណិតរបស់ z ។ - ចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នាលុះត្រាតែវាមានផ្នែកពិតដូចគ្នានិងផ្នែកនិមិត្តដូចគ្នា ។ 2. a.ចំនួនកុំផ្លិចមួយវានិមិត្តសុទ្ធលុះត្រាតែផ្នែកពិតរបស់វាស្មើសូន្យ ។ b.ចំនួនកុំផ្លិចមួយវាពិតលុះត្រាតែផ្នែកនិមិត្តរបស់វាស្មើសូន្យ ។

$z^2 \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ ឬ $a = -2$ b. $z + a\bar{z} = a + 2i + a(a - 2i)$ $= a^2 + a + i(2 - 2a)$ យើងបានទម្រង់ពីជគណិតនៃ $z + a\bar{z}$ ។ $z + a\bar{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 1$ ។	

លំហាត់អនុវត្តន៍វិធីប្រើទម្រង់ពីជគណិតនៃចំនួនកុំផ្លិច

លំហាត់ទី១៖ កំណត់ផ្នែកពិត ផ្នែកនិមិត្ត និងចម្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ៖

$z_1 = -2i + 5$; $z_2 = 15$; $z_3 = 3i$; $z_4 = i(2 + 3i)$; $z_5 = (1 - 5i)^2$

លំហាត់ទី២៖ សរសេរជាទម្រង់ពីជគណិតចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ៖

$z_1 = (2 + 5i) + (i + 3)$; $z_2 = (3 - 11i) - (-8 + 9i)$; $z_3 = (7 + 5i)(-4 + 3i)$

$z_4 = (1 - 5i)^2$; $z_5 = i(1 - 3i)^2$; $z_6 = 1 + i + i^2$

លំហាត់ទី៣៖ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការខាងក្រោម ៖

a. $2z + i = 3 + 2i$ b. $iz + 3 = -1 + 2i$ c. $z^2 + 2iz - 1 = 0$ d. $z + i = 2\bar{z} + 1$

លំហាត់ទី៤៖ គេមាន $z = x + iy$ ដោយ x និង y ជាចំនួនពិត ។ កំណត់ផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្ត នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ៖

a. $5z - i$ b. $(3 - 2i)z$ c. z^2 d. $3\bar{z} - 5z$ e. $(2 + i)(2i - \bar{z})$ f. $(z - 1)(\bar{z} - i)$

លំហាត់ទី៥៖ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោមកំណត់ផ្នែកពិតនិងផ្នែកនិមិត្តនៃចំនួនកុំផ្លិច z ។

1. $z = (3 - i)^2$ 2. $z = (2i - 1)(3 + i)$ 3. $z = 3i(1 + i) - 5(2 - 3i)$

លំហាត់ទី៦៖ ដោះស្រាយនៅក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការខាងក្រោម ៖

a. $3z + 2 - i = z + 5 + 4i$ b. $(1 + i)z = 3 - 2i$ c. $-1 - z^2 = 0$

d. $z^2 = \bar{z}$ e. $2z + i = \bar{z} + 1$

វិធីដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{C}$ សំណុំចំនួនកុំផ្លិច

លំហាត់៖ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការខាងក្រោមដោយផ្តល់ចម្លើយជាទម្រង់ពីជគណិត ៖

1. $(-1 + 2i)z = 3 + i$
2. $z^2 = -9$
3. $4z^2 + 16z + 25 = 0$
4. $\dfrac{3z - 2}{z + 1} = z$

ចម្លើយ

1. $(-1 + 2i)z = 3 + i \Leftrightarrow z = \dfrac{3 + i}{-1 + 2i}$ យើងដាក់ចម្លើយជារាងពីជគណិត $z = \dfrac{(3 + i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} = \dfrac{-3 - 6i - i + 2}{1 + 4}$	វិធីដោះស្រាយសមីការនៅក្នុង $\mathbb{C}$ 1. គេគណនាទាល់តែ z មានទម្រង់ពីជគណិត ។ គេគុណភាគយកនិងភាគបែងដោយកន្សោមឆ្លាស់គឺ $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

$=-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$ ដូច្នេះសំណុំចម្លើយ $S=\left\{-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i\right\}$ ។ 2. $z^2=-9 \Leftrightarrow z^2=(3i)^2 \Leftrightarrow z^2-(3i)^2=0$ $\Leftrightarrow (z-3i)(z+3i)=0 \Leftrightarrow z=3i$ ឬ $z=-3i$ ដូច្នេះសំណុំចម្លើយ $S=\{-3i;3i\}$ ។ 3. យើងមានសមីការ $4z^2+16z+25=0$ សមីការនេះជាសមីការដឺក្រេទី២ដែលមានមេគុណជាចំនួនពិត ។ វាមាន $\Delta=16^2-4\times4\times25=-144=-12^2$ សមីការមានចម្លើយពីរនៅក្នុង $\mathbb{C}$ ។ $z_1=\frac{-16-12i}{8}=-2-\frac{3}{2}i$ ឬ $z_2=\frac{-16+12i}{8}=-2+\frac{3}{2}i$ ដូច្នេះសំណុំចម្លើយ $S=\left\{-2-\frac{3}{2}i;-2+\frac{3}{2}i\right\}$ 4. ចំពោះចំនួនកុំផ្លិច $z\neq-1$: $\frac{3z-2}{z+1}=z \Leftrightarrow (3z-2)=z(z+1)$ $\Leftrightarrow -z^2+2z-2=0$ $\Delta=2^2-4\times(-1)\times(-2)=-4=-2^2$ ដូច្នេះសមីការមានចម្លើយពីរក្នុង $\mathbb{C}$ $z_1=\frac{-2-2i}{-2}=1+i$ ឬ $z_2=\frac{-2+2i}{-2}=1-i$ សំណុំចម្លើយ $S=\{1+i;1-i\}$ ។	2. -9 ជាការេនៃ $3i$ ។ ដូច្នេះគេអាចបំបែកជាផលគុណកត្តាដោយប្រើឯកលក្ខណៈភាព $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ។ ដូចនៅក្នុង $\mathbb{R}$ ដែរ ផលគុណកត្តាណាមួយស្មើសូន្យ ។ 3. ឌីសគ្រីមីណង់ Δ ជាចំនួនអវិជ្ជមានសមីការមានឫសពីរក្នុង $\mathbb{C}$: $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ឬ $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ 4. ដូចក្នុង $\mathbb{R}$ ដែរគេត្រូវដកចេញតម្លៃដែលធ្វើឲ្យភាគបែងយកតម្លៃសូន្យ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍វិធីដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{C}$ សំណុំចំនួនកុំផ្លិច

លំហាត់ទី១៖ សរសេរជារាងពីជគណិត ចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ៖

$z_1=\frac{1}{i}$; $z_2=\frac{1}{2-i}$; $z_3=\frac{1}{2i+1}$

លំហាត់ទី២៖ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការខាងក្រោមដោយផ្តល់ចម្លើយជាទម្រង់ពីជគណិត ។

a. $i(z-1)=1$ b. $(2+i)z=3z-i$

លំហាត់ទី៣៖ z ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យដែលមានរាង $x+iy$ ។ កំណត់ផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្តនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ៖

a. $z_1=\frac{\overline{z}}{z}$ b. $z_2=\frac{iz}{z}$

លំហាត់ទី៤៖ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការខាងក្រោមដោយមិនបាច់គណនាឌីសគ្រីមីណង់ ៖

a. $z^2+16=0$ b. $z^2-5=0$ c. $z^4=81$ d. $z^2+2iz-1=0$

លំហាត់ទី៥៖ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការខាងក្រោម ៖

1. $z^2-5z+6=0$ 2. $z^2-5z-6.5=0$ 3. $4z^2-4z+17=0$ 4. $-z^2+2z-5=0$

លំហាត់ទី៦៖ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការខាងក្រោម ៖

a. $\dfrac{z-i}{z+i}=z-i$ b. $\dfrac{z+2}{z}=-\dfrac{z}{z+2}$

លំហាត់ទី៧៖ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការខាងក្រោមដោយផ្តល់ចម្លើយជាទម្រង់ពីជគណិត ៖

1. $(2-i)z+1=(3+2i)z-i$ 2. $z+2i=iz-1$ 3. $(3+2i)(z-1)=i$

លំហាត់ទី៨៖ សរសេរជាទម្រង់ពីជគណិតចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ៖

1. $z_1=\dfrac{1-2i}{3+i}$ 2. $z_2=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}$ 3. $z_3=\dfrac{(1-i)^2}{2+2i}$

លំហាត់ទី៩៖ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការខាងក្រោម ៖

1. $2z^2+6z+5=0$ 2. $z^2-6z+13=0$ 3. $4z^2-12z+9=0$

4. $z^2-6z-7=0$ 5. $\dfrac{3z+2}{z+1}=z+3$ 6. $z^4=16$