第一章　复数和复平面

本章介绍复数的定义、运算，复平面点集和扩充复平面，为后面复变函数的研究作准备.

1.1　复　数

1. 复数的概念

形如

$$z = a + ib \text{ 或 } z = a + bi$$

的数称为复数，其中 a 和 b 为实数，i 称为虚单位，即是满足 $i^2 = -1$.全体复数的集合称为复数集，用ℂ表示.

对于复数 $z = a + ib$，a 与 b 分别称为复数 z 的实部和虚部，记作

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$$

当且仅当虚部 b=0 时，z=a 是实数；当且仅当 a=b=0 时，z 就是实数 0；当虚部 $b\neq0$ 时，z 叫做虚数；当实部 a=0 且虚部 $b\neq0$ 时，z=ib 称为纯虚数.

显然，实数集ℝ是复数集ℂ的真子集.

如果两个复数的实部和虚部分别相等，我们称这两个复数相等.这样，一个复数等于零，当且仅当它的实部和虚部同时等于零.一般情况下，两个复数只能说相等或不相等，而不能比较大小.

2. 复数的向量表示和复平面

根据复数相等的定义，我们知道，任何一个复数 $z = a + ib$，都可以由一个有序实数对(a,b)唯一确定；我们还知道，有序实数对(a,b)与平面直角坐标系中的点是一一对应的.由此，可以建立复数集与平面直角坐标系中的点集之间的一一对应.

如图 1.1 所示，点 z 的横坐标是 a，纵坐标是 b，复数 $z = a + ib$ 可用点 $z(a,b)$表示，这个建立了用直角坐标系表示的复数的平面称为复平面，x 轴叫做实轴，y 轴叫做虚轴.显然，实轴上的点表示实数；除了原点外，虚轴上的点表示纯虚数.今后，我们说点 $z(a,b)$，与复数 $z = a + ib$ 表示同一意义.

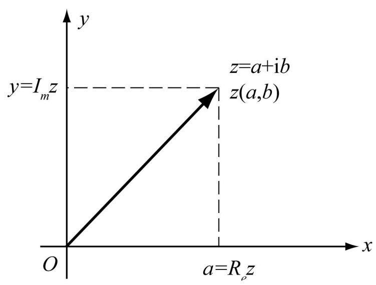

图 1.1　复数 z=a+ib

当两个复数实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为共轭复数.复数 z 的共轭复数用 $\overline{z}$ 表示，即如果 $z=a+ib$，则 $\overline{z}=a-ib$.当复数 $z=a+ib$ 的虚部 b=0 时，有 $z=\overline{z}$，即是任一实数的共轭复数仍是它本身.

每一个平面向量都可以用一对有序实数来表示，而有序实数对与复数是一一对应的.这样我们还可以用平面向量来表示实数.在复平面上，复数 $z=a+ib$ 还可以用由原点引向点 z 的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 来表示，这种表示方式建立了复数集 $\mathbb{C}$ 与平面向量所成的集合的一一对应（实数 0 与零向量对应）.向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的模，记为 $|z|$或 r，因此有

$$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0 \tag{1.1}$$

显然，$|\mathrm{Re}\,z|\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|$，$|\mathrm{Im}\,z|\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|$.

3. 复数的运算

设复数 $z_1=a+ib,z_2=c+id$，则加法由下式定义：

$$z_1+z_2=(a+c)+i(b+d) \tag{1.2}$$

容易看出，这样定义后，复数的加法就可以按照向量的平行四边形法则来进行，如图 1.2 所示.规定复数的减法是加法的逆运算，即是把满足

$$(c+id)+(x+iy)=a+ib$$

的复数 $x+iy$，称为复数 $a+ib$ 减去复数 $c+id$ 的差，记作($a+ib$)-($c+id$).容易得到

$$x+iy=(a-c)+i(b-d). \tag{1.3}$$

复数的乘法定义如下：

$$z_1\cdot z_2=ac+ibc+iad+i^2bd=(ac-bd)+i(bc+ad)\,. \tag{1.4}$$

由乘法的定义，容易得到$|z|^2=z\cdot\overline{z}$.这样，当 $z_2\neq 0$ 时，除法作为乘法的逆运算，可以定义为：

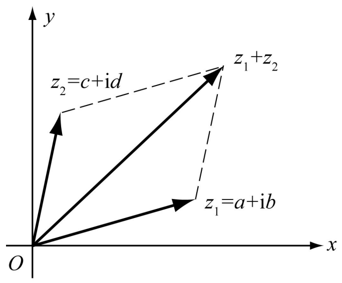

图 1.2 复数的加法

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \tag{1.5}$$

容易验证，加法和乘法满足结合律、交换律及乘法对加法的分配律.所以，全体复数在定义上述运算后称为复数域.在复数域内，我们熟悉的一切代数恒等式仍然成立，例如

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

等.

复数的模和共轭复数有以下性质，其证明留给读者.

（1） $\operatorname{Re} z=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z}), \operatorname{Im} z=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$;

（2） $\overline{(z+w)}=\overline{z}+\overline{w}, \overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}; \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}(w \neq 0)$;

（3） $|zw|=|z||w|$;

（4） $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$;

（5） $|\overline{z}|=|z|$.

4. 复数的三角表示和复数的方根

考虑复平面ℂ的不为零的点 $z=x+iy$.如图 1.3 所示，这个点有极坐标 $(r,\theta): x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$.显然 $r=|z|,\theta$ 是正实轴与从原点 O 到 z 的射线的夹角，称为复数 z 的幅角，记为

$$\theta=\arg z$$

显然有 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$.

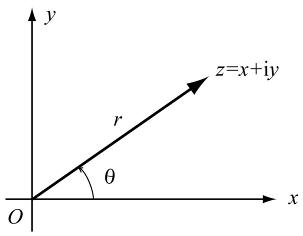

图 1.3　模、幅角

任一非零复数 z 的幅角有无限多个值，这些值相差 2π 的整数倍.通常把满足条件

$$-\pi<\theta \leqslant \pi \tag{1.6}$$

的幅角 θ 称为 $\arg z$ 的主值，记为 $\theta=\arg z$，于是有

$$\theta=\arg z=\arg z+2k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots. \tag{1.7}$$

利用极坐标表示，复数 z 可以表示为

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta). \tag{1.8}$$

式（1.8）称为复数的三角表示.再应用欧拉（Euler）公式 $e^{i\theta}=\cos^{\theta}+i\sin\theta$ ，又可以将复数 z 表示成指数形式

$$z=re^{i\theta}. \tag{1.9}$$

例 1.1　求 $\arg(-3-i4)$.

解：　由式（1.7）可知

$$\arg(-3-i4)=\arg(-3-i4)+2k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

再由 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ ，点 $-3-i4$ 位于第三象限知，

$$\arg(-3-i4)=\arctan\frac{(-4)}{(-3)}-\pi=\arctan\frac{4}{3}-\pi$$

所以有

$$\arg(-3-i4)=\arctan\frac{4}{3}+(2k-1)\pi,\ \ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

例 1.2 计算 $z=\mathrm{e}^{i\pi}$.

解：因为 $\mathrm{e}^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$，所以

$$\mathrm{e}^{i\pi}=-1.$$

例 1.3 把复数 $\sqrt{3}+i$ 表示成三角形式和指数形式.

解：$r=\sqrt{3+1}=2,\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为与 $\sqrt{3}+i$ 对应的点在第一象限，所以 $\arg(\sqrt{3}+i)=\dfrac{\pi}{6}$. 于是

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

于是可得指数表示形式为

$$\sqrt{3}+i=2\mathrm{e}^{i\pi/6}.$$

下面利用复数的三角表示，讨论复数乘法的几何意义.设复数 z_1,z_2 分别写成三角形式

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2).$$

根据复数的乘法法则及正弦、余弦的三角公式，有

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1\cdot r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2))\\&=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_2+\theta_2))\end{aligned}$$

上面我们得到的三角形式的公式，用指数形式表示出来，可得

$$z_1z_2=r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}r_2\mathrm{e}^{i\theta_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}.\qquad（1.10）$$

由此得

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|,\qquad（1.11）$$

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2.\qquad（1.12）$$

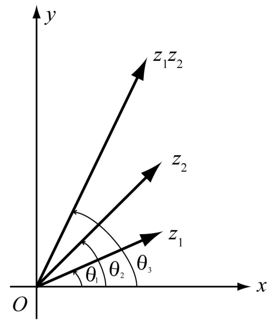

图 1.4 复数的乘法

图 1.4 说明了复数相乘的几何意义，两个复数相乘，积的模等于各复数的模的积，积的幅角等于这两个复数的幅角的和.

注意：式（1.12）不能写成 $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$，这是因为该式两边表示的都是幅角的主值，而式（1.12）表示的是两个无穷的集合相等.

由式（1.11）和式（1.12）可得

$$|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right||z_2|, \arg z_1 = \arg\frac{z_1}{z_2} + \arg z_2,$$

即是

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \arg\frac{z_1}{z_2} - \arg z_2. \tag{1.13}$$

由此可见，两个复数的商的模等于其模的商，商的幅角等于被除数的幅角与除数的幅角的差.

现在我们来讨论复数的乘方和开方问题.设复数 $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$，它的 n 次幂可利用(1.10)由归纳得

$$\begin{aligned} z^n &= (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n \\ &= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n\mathrm{e}^{in\theta}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

从而有

$$|z^n|=|z|^n,$$

其中 n 为正整数.当 r=1 时，得到棣莫拂（de Moivre）公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta))^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \tag{1.15}$$

复数的 n 次方根是复数 n 次乘幂的逆运算.下面我们介绍复数的 n 次方根的定义和求法.

设 $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ 是已知的复数，n 为正整数，则称满足方程

$$\omega^n = z$$

的所有复数 ω 为 z 的 n 次方根，并且记为

$$\omega = \sqrt[n]{z}.$$

我们用复数的指数表示来讨论复数的 n 次方根.步骤是：先假定有 n 次方根，再找出这些根.

设 $\omega = \rho\mathrm{e}^{i\varphi}$，则根据复数 z 的 n 次方根的定义和式（1.13），得

$$\omega^n = \rho^n\mathrm{e}^{in\varphi} = r\mathrm{e}^{i\theta},$$

记 $\theta_0 = \arg z$，则有

$$\rho^n = r, n\varphi = \theta_0 + 2k\pi,\ \ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

解得

$$\rho^n = \sqrt[n]{r}, \varphi = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n},\ \ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,$$

其中 $\sqrt[n]{r}$ 是算术根，所以

$$\omega_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{z}e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}},\ \ k=0,1,2,\cdots,n\text{-}1 \tag{1.16}$$

若记 $\omega_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta_0}{n}}$，则 ω_k 可表示为

$$\omega_k = \omega_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ \ k=1,2,\cdots,n\text{-}1. \tag{1.17}$$

这就是说，复数的 n 次方根是 n 个复数，这些方根的模都等于这个复数的模的 n 次算术根，它们的幅角分别等于这个复数的幅角与 2π 的 $0,1,2,\cdots,n$-1 倍的和的 n 分之一.在复平面上，这 n 个根均匀分布在一个以原点为中心、$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上，它们是内接于该圆周的正 n 边形的 n 个顶点，见图 1.5.

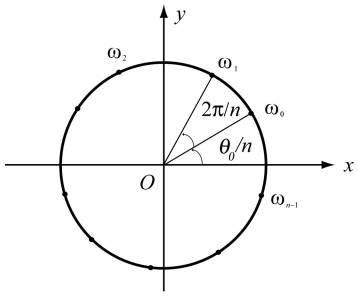

图 1.5　n 次单位根

例 1.4　求 1-i 的立方根.

解：因为$1-i=\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$，所以 1-$i$ 的立方根是

$$\sqrt[6]{2}e^{i\frac{7\pi/4+2k\pi}{3}}=\sqrt[6]{2}e^{i\frac{7\pi+8k\pi}{12}},k=0,1,2.$$

即 1-i 的立方根是

$$\sqrt[6]{2}e^{\frac{7}{12}\pi i},\sqrt[6]{2}e^{\frac{5}{4}\pi i},\sqrt[6]{2}e^{\frac{23}{12}\pi i}.$$

例 1.5　计算 n 次单位根.

解：由于$1=e^{i0}$，式（1.16）式给出如下这些根：

$$1,e^{i\frac{2\pi}{n}},e^{i\frac{4\pi}{n}},\cdots,e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}.$$

特别地，立方单位根是

$$1,\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}).$$

例 1.6　已知$i_1=12.7\sqrt{2}\sin(314t+30^\circ)A$，$i_2=11\sqrt{2}\sin(314t-60^\circ)A$，求$i=i_1+i_2$.

解：$\dot{\boldsymbol{I}}=\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathbf{1}}+\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathbf{2}}=\mathbf{12.7}\ \angle\mathbf{30}^\circ\mathrm{A}+\mathbf{11}\ \ -\angle\mathbf{60}^\circ\mathrm{A}$

$$=12.7(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)A+11(\cos60^\circ-i\sin60^\circ)A$$
$$=(16.5-i3.18)A==\mathbf{16.8}\ \angle-\mathbf{10.9}^\circ\mathbf{A}$$

所以，$i_2=16.8\sqrt{2}\sin(314t-10.9^\circ)A$，有效值$I=16.8A$.

1.2　复平面点集

我们研究的许多对象（解析函数、保角变换等问题），首先遇到的是定义域和值域的问题，这些都是复平面上的一种点集。在此，我们先介绍复平面上的点集.

1. 平面点集的几个概念

（1）邻域

$$D(z_0,\delta)=\{z:\left|z-z_0\right|<\delta\}\tag{1.18}$$

称为 z_0 的 δ 邻域，其中$\delta>0$，

$$D(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}=\{z:0<\left|z-z_0\right|<\delta\}$$

称为 z_0 的去心邻域.

（2）内点、开集　若点集 E 的点 z_0 有一个邻域 $D(z_0,\delta)\subset E$，则称 z_0 为 E 的一个内点；如果点集 E 中的点全为内点，则称 E 为开集.

（3）边界点、边界　如果点 z_0 的任意邻域内，既有属于 E 中的点，又有不属于 E 中的点，则称 z_0 为 E 的边界点；集合 E 所有边界点称为 E 的边界，记作 ∂E.

（4）区域　如果集合 E 内的任何两点可以用包含在 E 内的一条折线连接起来，则称集合 E 为连通集. 连通的开集称为区域.

区域 D 和它的边界 ∂D 的并集称为闭区域，记为 $\bar{D}$.

（5）有界区域　如果存在正数 M，使得对一切 $z\in E$，有

$$|z|\leqslant M,$$

则称 E 为有界集.若区域 D 有界，则称为有界区域.

（6）简单曲线、光滑曲线　设 $x(t)$和 $y(t)$是实变量 t 的两个实函数，它们在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则由方程组

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$$

或由复值函数

$$z(t)=x(t)+iy(t)$$

定义的集合 $\varGamma$ 称为复平面上的一条曲线，上述方程称为曲线 $\varGamma$ 的参数方程.点 $A=z(\alpha)$ 和 $B=z(\beta)$ 分别称为曲线 $\varGamma$ 的起点和终点.如果当 $t_1,t_2\in[\alpha,\beta],t_1\neq t_2$ 时，有 $z(t_1)\neq z(t_2)$，称曲线 $\varGamma$ 为简单曲线，也称为约当（Jordan）曲线. $z(\alpha)=z(\beta)$ 的简单曲线称为简单闭曲线.例如圆周

$$x=r\cos t,y=r\sin t,t\in[0,2\pi]$$

就是简单闭曲线. 如图 1.6 所示，用复数表示为

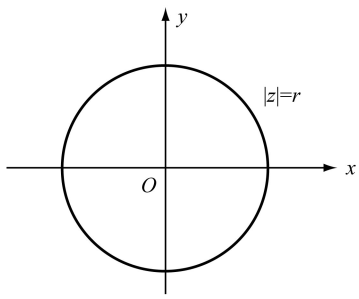

图 1.6　|z|=r

$$|z|=r.$$

我们容易证明圆$|z|=r$ 将平面分为两个不相交的区域，由不等式$|z|<r$ 和$|z|>r$ 规定，这两个区域以圆周为边界.这个结果是以下约当定理的特例.

定理 1.1　一条闭简单曲线将平面分成两个不相交的区域，以曲线为公共边界.

这两个区域中，一个是有界的，称为 $\varGamma$ 的内部；一个是无界的，称为 $\varGamma$ 的外部.

如果曲线 $\varGamma$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 存在且连续，而且不同时为零，则称曲线 $\varGamma$ 为光滑曲线.由有限条光滑曲线连接而成的连续曲线，称为分段光滑的曲线.

（7）单连通区域　设 D 为复平面上的区域，如果在 D 内的任意简单曲线的内部均属于 D，则称 D 为单连通区域，否则就称为多连通区域.

2. 直线和半平面

设 L 表示 $\mathbb{C}$ 中的直线，从初等解析几何知道，L 是由 L 上的一个点和一个方向向量决定的.如果 a 是 L 上的任一点，b 是它的方向向量，那么

$$L\{z=a+tb:-\infty<t<\infty\}.$$

由于 $b\neq 0$，于是对于 L 上的 z，有

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)=0,$$

事实上，如果 z 满足等式

$$0=\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right),$$

那么

$$t=\frac{z-a}{b}$$

蕴涵着 $z=a+tb,-\infty<t<\infty$.因此

$$L=\left\{z:\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)=0\right\}. \tag{1.19}$$

集合

$$\left\{z:\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)>0\right\} \tag{1.20}$$

和

$$\left\{z:\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)<0\right\} \tag{1.21}$$

的轨迹是什么呢？我们首先考虑简单的情形.注意到 b 是一个方向，我们可以假定$|b|=1$，$a=0$ 的情形. 记

$$H_0=\left\{z:\mathrm{Im}\left(\frac{z}{b}\right)>0\right\}.$$

$b=\mathrm{e}^{i\beta}$，如果 $z=r\mathrm{e}^{i\theta}$，则有 $z/b=r\mathrm{e}^{i(\theta-\beta)}$. 于是 $z\in H_0$，当且仅当 $\sin(\theta-\beta)>0$，即 $\beta<\theta<\pi+\beta$.

所以，如果我们“按照 b 的方向沿着 L 前进”，H_0 是位于 L 的左边的半平面.如果我们令

$$H_a=\left\{z:\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)>0\right\},$$

那么容易看出，$H_a=a+H_0=\{a+w:w\in H_0\}$；即 H_a 是由半平面 H_0 平移 a 而得到的，因此，H_a 是位于 L 的左边的半平面.类似地，

$$K_a=\left\{z:\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)<0\right\}$$

是位于 L 的右边的半平面。

1.3　扩充复平面及其球面表示

在复函数中，常常遇到这样一些函数，当自变量趋于一个给定点时，函数值趋向无穷。为了研究这样的情形，有必要将复数系统加以扩充，引入一个数∞.在微积分中，∞不是一个定值，它代表的是变量无限增大的符号；而在我们这里，把它作为一个定值.它的运算规定如下：

设a是异于∞的一个复数，我们规定

（1）$a\neq\infty$，则$a+\infty=\infty+a=\infty$；

（2）$a\neq 0$，则$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty$；

（3）$a\neq\infty$，则$\dfrac{a}{\infty}=0,\dfrac{\infty}{a}=\infty$；

（4）$a\neq 0$，则$\dfrac{a}{0}=\infty$；

（5）$|\infty|=+\infty,\infty$的实部、虚部、幅角都无意义；

（6）为了避免和算术定律相矛盾，对

$$\infty\pm\infty,0\cdot\infty,\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0}$$

不规定其意义.

在复平面上没有一点和∞对应，但是我们可以设想平面上有一个理想点和它对应.这个理想点称为无穷远点.复平面加上∞，称为扩充复平面$\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.为使$|\infty|=+\infty$的规定合理，我们规定扩充复平面上只有一个无穷远点.为使无穷远点的存在得到直观的解释，我们建立扩充复平面$\mathbb{C}_\infty$的球面表示法.

如图1.7所示，记$\mathbb{R}^3$中的单位球面为

$$S=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}.$$

设N=(0,0,1)为S上的北极点，把$\mathbb{C}$等同于$\mathbb{R}^3$中的点集$\{(x_1,x_2,0):x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$，于是$\mathbb{C}$沿赤道切割$S$. 对于复平面$\mathbb{C}$内任意一点$z$，用直线将$z$与北极点$N$相连接，此直线与球面$S$恰好交于一点$z\neq N$.若$|z|>1$，那么$Z$位于北半球面上；若$|z|<1$，$Z$点位于南半球面上；若$|z|=1$，那么$Z=z$.当$|z|\to\infty$时，$Z$ 怎样变化呢？很显然，$Z\to N$.因此，我们就把N与扩充复平面中的∞等同起来，这样，扩充复平面$\mathbb{C}_\infty$就与球面S之间建立了一一对应的关系.这样的球面称为复球面，它是扩充复平面的几何模型.

小结

本章的主要内容是复数的有关概念、复数的代数表示与向量表示、复数的代数形式的运算、复数的三角形式的运算、复指数和开方、复平面点集、扩充复平面.

大多数内容是高中阶段学习过的，我们主要复习一下其中的主要性质.对于复指数和开方运算，特别是开方运算，要重点掌握，因为与后面的幂函数和多值性直接相关.

复平面点集是多元微积分中平面点集的复数表示，可以与平面点集的内容相对照.扩充复平面是一个新的概念，要求读者对其几何意义加深理解.

习题一

1. 用复数的代数形式 $a+ib$ 表示下列复数

$$e^{-i\pi/4};\frac{3+5i}{7i+1};(2+i)(4+3i);\frac{1}{i}+\frac{3}{1+i}.$$

2. 求下列各复数的实部和虚部（$z=x+iy$）

$$\frac{z-a}{z+a}(a\in\mathbb{R});\quad z^3;\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3;\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3;i^n.$$

3. 求下列复数的模和共轭复数

$$-2+i;-3;(2+i)(3+2i);\frac{1+i}{2}.$$

4. 证明：当且仅当 $z=\bar{z}$ 时，z 才是实数.

5. 设 $z,w\in\mathbb{C}$，证明：$|z+w|\leqslant|z|+|w|$.

6. 设 $z,w\in\mathbb{C}$，证明下列等式：

$$|z+w|^2=|z|^2+2\operatorname{Re}z\bar{w}+|w|^2,$$
$$|z-w|^2=|z|^2-2\operatorname{Re}z\bar{w}+|w|^2,$$
$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2).$$

并给出最后一个等式的几何解释.

7. 将下列复数表示为指数形式或三角形式

$$\frac{3+5i}{7i+1};i;-1;-8\pi(1+\sqrt{3}i);\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)^3.$$

8. 计算：①i 的三次根；②-1 的三次根；③ $\sqrt{3}+\sqrt{3}i$ 的平方根.

9. 设 $z=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}},n\geqslant 2$. 证明：

$$1+z+\cdots+z^{n-1}=0$$

10. 证明：若复数 z_1,z_2,z_3 满足等式

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3},$$

则有

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|.$$

并作出几何解释.

11. 设 Γ 是圆周 $\{z:|z-c|=r\},r>0,a=c+r\mathrm{e}^{i\alpha}$.令

$$L_\beta=\left\{z:\operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)=0\right\},$$

其中 $b=\mathrm{e}^{i\beta}$. 求出 L_β 在 a 切于圆周 Γ 的关于 β 的充分必要条件.

12. 指出下列各式中点 z 所确定的平面图形，并作出草图.

（1） $\arg z=\pi$;

（2） $|z-1|=|z|$;

（3） $1<|z+i|<2$;

（4） $\operatorname{Re}z>\operatorname{Im}z$;

（5） $\operatorname{Im}z>1$且$|z|<2$.

第一章 自测训练题

一、选择题:（共 10 小题，每题 3 分，总分 30 分）

1. 当 $z=\dfrac{1+i}{1-i}$时， $z^{100}+z^{75}+z^{50}$ 的值等于（　　　　）.

A. i　　　　B. $-i$

C. 1　　　　D. -1

2. 复数 $z=-1+\sqrt{3}i$ 的辐角主值 $\arg z$ 等于（　　　　）.

A. $\dfrac{21}{3}\pi$　　　　B. $\dfrac{2}{3}\pi$

C. $\dfrac{4}{3}\pi$　　　　D. $\dfrac{5}{3}\pi$

3. 复数 $z=-\sin\dfrac{\pi}{3}-i\cos\dfrac{\pi}{3}$ 化为三角形式是（　　　　）.

A. $\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}$　　　　B. $\sin\dfrac{5\pi}{6}+i\cos\dfrac{5\pi}{6}$

C. $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ D. $\cos(-\frac{5\pi}{6})+i\sin(-\frac{5\pi}{6})$

4. 设复数 z 满足 $\arg(z+2)=\frac{\pi}{3},\arg(z-2)=\frac{5\pi}{6}$，那么 $z=$（　　）.

A. $-1+\sqrt{3}i$ B. $-\sqrt{3}+i$

C. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

5. 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(iz)=$（　　）.

A. x B. y

C. $-x$ D. $-y$

6. 使得 $z^2=|z|^2$ 成立的复数 z 是（　　）.

A. 不存在的 B. 唯一的

C. 纯虚数 D. 实数

7. 方程 $|z+2-3i|=\sqrt{2}$ 所代表的曲线是（　　）.

A. 中心为 $2-3i$ ，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆周 B. 中心为 $-2+3i$ ，半径为 2 的圆周

C. 中心为 $-2+3i$ ，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆周 D. 中心为 $2-3i$ ，半径为 2 的圆周

8. 设 $D=\{z||z-i|>1\}$，则 D 为（　　）.

A. 有界多连通域 B. 无界单连通域

C. 无界多连通区域 D. 有界单连通域

9. 设 $z=x+yi$ ，则 $\omega=\frac{1}{z}$ 将圆周 $x^2+y^2=2$ 映射为（　　）.

A. 通过 $\omega=0$ 的直线 B. 圆周 $|\omega|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

C. 圆周 $|\omega-2|=2$ D. 圆周 $|\omega|=2$

10. $\omega=e^z$ 把带形区域 $0<\mathrm{Im}\,z<2\pi$ 映射成 ω 平面上的（　　）.

A. 上半复平面 B. 整个复平面

C. 割去负实轴及原点的复平面 D. 割去正实轴及原点的复平面

二、填空题:（共 5 小题，每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $z=(2-3i)(-2+i)$ ，则 $\arg z=$______________.

2. 设 $|z|=\sqrt{5},\arg(z-i)=\frac{3\pi}{4}$，则 $z=$______________.

3. 不等式 $|z-2|+|z+2|<5$ 所表示的区域是曲线______________的内部.

4. 方程 $|z+1-2i|=|z-2+i|$ 所表示的曲线是连接点______________和______________的线段的垂直平分线.

5. 设$z=\dfrac{(1+i)(2-i)(3-i)}{(3+i)(2+i)}$，则$|z|=$______________.

三、计算题：（共 5 小题，第 1 题 7 分，第 2~5 题均每题 8 分，共 39 分）

1. 试证：设$\dfrac{z-1}{z+1}$是纯虚数，则必有$|z|=1$.
2. 求$z^4+\sqrt{3}-i=0$的根.
3. 试利用$(5-i)^4(1+i)$，证明：$4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$.
4. 试用$\sin\varphi$和$\cos\varphi$表示$\sin 6\varphi$和$\cos 6\varphi$.
5. 函数$\omega=z^2$把下列曲线映射成ω平面上怎样的曲线？

（1）以原点为中心，2 为半径，在第一象限里的弧.

（2）倾角$\theta=\dfrac{\pi}{3}$的直线.

（3）双曲线$x^2-y^2=4$.