李群和李代数 —— 名字听起来很猛其实也没那么复杂

zhuanlan.zhihu.com/p/358455662

为啥要在SLAM中引入李群和李代数？答：为了求导。

1. 基础部分

1.1. 先说说旋转矩阵和变换矩阵

假如我们有一个坐标系，我们假设它的**单位正交基底**（两两垂直，长度为单位长度1，想象下直角坐标系的三个坐标轴）为：

$$[e_1, e_2, e_3]$$

那么我们就可以用这三个基底乘以某个系数，比如**a1、a2，a3**，来表示空间中的任意一点（或者说从原点指向这个点的向量），比如这样：

$$[e_1, e_2, e_3]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

a1、a2，a3就是这个点在这个坐标系下的坐标值，比如我们最熟悉的直角坐标系。

但问题是：我们的坐标系并不一定是唯一的，比如SLAM中就会有一个表示空间中物体绝对位置的世界坐标系（比如你的学校在解放路与西安路交汇处），也会有一个对于世界坐标系来说，不停在运动的以机器人自身为原点，表示相对位置的机器人坐标系（比如说学校在你前方100米），它的基底和之前坐标系是不同的，假如它是：

$$[e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}]$$

那么自然的，上面那一点，我们也可以用新的基底，乘以一个系数来表示：

$$[e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}]\begin{bmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{bmatrix}$$

因为我们表示的是同一个点（向量），它们是相等的，为了方便描述，我们先假设两个坐标系原点是相同的，即新旧坐标系之间只有旋转关系，没有发生平移：

$$[e_1, e_2, e_3]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}]\begin{bmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{bmatrix}$$

为了能更好的表示这个点，在新旧坐标系下的坐标值的关系，我们整理一下，两边同时左乘一个 $[e_1^T, e_2^T, e_3^T]^T$ ，于是等式变成了：

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T e_1^{'} & e_1^T e_2^{'} & e_1^T e_3^{'} \\ e_2^T e_1^{'} & e_2^T e_2^{'} & e_2^T e_3^{'} \\ e_3^T e_1^{'} & e_3^T e_2^{'} & e_3^T e_3^{'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{bmatrix}$$

这一坨矩阵太难写了，我们用一个$\boldsymbol{R}$来表示(Rotation)，它描述了旋转前后，同一点坐标值的变换关系，我们叫它**旋转矩阵**：

$$a = Ra^{'}$$

这个旋转矩阵，有一些特殊的性质：**它是一个行列式为1的正交矩阵。它的逆就是它自身的转置** $R^{-1} = R^T$ ，表示与其自身相反的旋转（即转过来和转回去的关系）。反之，行列式为1的

正交矩阵，也可以作为一个旋转矩阵，用数学定义表示这类“玩意儿”，就是这样一个集合：

$$\left\{ R \in \mathbb{R}^{n \times n} | R \times R^T = I | det(R) = 1 \right\}$$

这类“玩意儿”，我们给它起个炫酷的名字，**特殊正交群(Special Orthogonal Group)，当然我们要研究的旋转是发生在三维空间的，其中的n = 3，就简称SO(3)。听起来很炫酷，很高大上，不过别怕，我们先不用管所谓的“群”是啥玩意，后面会细说。**

$$SO(3) = \left\{ R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | R \times R^T = I | det(R) = 1 \right\}$$

不过，上面我们只考虑到旋转，还没有说平移。但是也很简单，在得到的**a**的基础上直接加上一个向量**t**来表示平移就好了嘛：

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T e_1^{'} & e_1^T e_2^{'} & e_1^T e_3^{'} \\ e_2^T e_1^{'} & e_2^T e_2^{'} & e_2^T e_3^{'} \\ e_3^T e_1^{'} & e_3^T e_2^{'} & e_3^T e_3^{'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$
$$a = Ra^{'} + t$$

但是这么做，在多次进行坐标变换的时候，存在一个问题，比如我们进行了两次变换**R1，t1**和**R2，t2**，**a -> b -> c** ：

$$b = R_1 a + t_1$$
$$c = R_2 b + t_2$$
$$c = R_2(R_1 a + t_1) + t_2$$

这样在多次变换之后，就会形成“套娃”，越来越复杂，于是我们**引入齐次坐标**：

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T e_1^{'} & e_1^T e_2^{'} & e_1^T e_3^{'} & t_1 \\ e_2^T e_1^{'} & e_2^T e_2^{'} & e_2^T e_3^{'} & t_2 \\ e_3^T e_1^{'} & e_3^T e_2^{'} & e_3^T e_3^{'} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$a = Ta^{'}$$

这样上面的变换就能很容易的表示了：

$$b = T_1 a$$
$$c = T_2 b$$
$$c = T_2 T_1 a$$

我们把这个**T**称为**变换矩阵（Transform Matrix）**，它也有一些特殊的性质，左上角是旋转矩阵R，右侧是平移向量t，左下角为0块，右下角为1。因为我们上面说到的旋转平移都是**欧式变换**，我们给这类玩意取个同样炫酷的名字：**特殊欧式群（Special Euclidean Group），简称SE(3)**，用数学来描述就是这样一个集合：

$$SE(3) = \left\{ T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} | R \in SO(3), t \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

它的逆，与表示旋转的SO(3)一样，表示与它相反的变换（变过去，和变回来）：

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

通过旋转矩阵和变换矩阵，我们可以把一个坐标（向量），从一个坐标系转换到另一个坐标系。而我们的机器人坐标系（相机坐标系）是以机器人（相机）自身为原点的，也就是说，变换矩阵就表示了当前机器人（相机)的位置（坐标原点的移动）和姿态（两个坐标系之间的旋转）。

SLAM的核心问题之一就是位姿的估计与优化，所以说这部分是怎么都躲不过去的。然而现在位姿是能表示了，用矩阵表示的时候，还是有些问题没有解决。

1.2. 旋转矩阵和变换矩阵存在的问题

1.2.1. 旋转矩阵的冗余问题

首先的一个问题就是：对于“旋转”，它只有3个自由度，而为了表示它，我们用了3*3 = 9个量，显然用旋转矩阵来表达旋转是“冗余”的。理论上我们可以用3个量来表示一次旋转。

比如我们可以用一个向量来表示旋转，它的方向是旋转的轴心，而它的长度，是旋转的角度，这种向量我们称为**旋转向量（Axis-Angle）**。

它的转轴比较好理解，在旋转前后，转轴的方向不应该发生改变，我们假设转轴向量为**n**即：

$$Rn = n$$

所以很容易理解，转轴向量**n**，应该是旋转矩阵**R**特征值1对应的特征向量（不明白的去看特征值特征向量的定义）。而旋转角则不太好求，由**罗德里格斯公式（Rodrigues’s Formula）**求出：

$$\begin{aligned} R &= cos\theta I + (1 - cos\theta) nn^T + sin\theta n^\wedge \\ tr(R) &= cos\theta tr(I) + (1 - cos\theta) tr(nn^T) + sin\theta tr(n^\wedge) \\ &= 1 + 2cos\theta \\ \theta &= arccos(\frac{tr(R) - 1}{2}) \end{aligned}$$

先不用管里面的 $n^\wedge$ 是个啥，只要明白**我们有更紧凑的方式来描述“旋转”，并且它能从旋转矩阵变换得来**就好了。

因为后面这个问题才我们引入李群和李代数的原因。

1.2.2.最小二乘优化时，旋转/变换矩阵的问题

先来看一下最简单的最小二乘问题，熟悉的可以跳过：

$$\min_x \frac{1}{2} \|f(x)\|_2^2$$

简单来说，我们要找到一个 x ，使函数达到极值，换成SLAM的情景，就是我们要找到一个位姿，让它最“合理”，至于什么叫“合理”，怎么评价，后面再说。

还是先从简单的例子开始考虑，如果函数是像 $f(x) = x^2$ 这种很简单的形式，那么很容易通过求导数为0点，通过解析形式求出结果。然而一旦函数变得复杂，无法以解析形式求解，就需要用**迭代**的方式进行求解了：

- 先给定一个初始值 x_0
- 寻找一个增量 Δx ，使 $\|f(x_i + \Delta x)\|_2^2 < \|f(x_i)\|_2^2$ （其实就是寻找函数降低的方向）
- 若 Δx 足够小，则停止迭代
- 否则令 $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ ，继续迭代

问题就出在第二步上，求取函数的下降方向就需要对函数求导，回想一下导数的定义，再看看第二步做了什么，怎么都绕不开一件事 $x_i + \Delta x$ ，然而问题是，连续变换时，旋转矩阵R更新的方式是不断**左乘**新的旋转矩阵，而不是**加**。

回顾一下旋转矩阵R的性质：**它是一个行列式为1的正交矩阵。**即**它的逆就是它自身的转置** $R^{-1} = R^T$ 。一个旋转矩阵**加**另一个旋转矩阵，得到的那一坨东西并不一定还能满足旋转矩阵（特殊正交群SO(3)）的性质，我们管这个叫：

特殊正交群对加法不封闭。

然而，**特殊正交群是李群的一种，因此我们可以将其映射为李代数来化乘为加**，解决这个问题。

2. 李群和李代数的引出

2.1. 啥是群？

中学的时候肯定都接触过**集合**这个概念，比如所有实数的集合 $\mathbb{R}$ ，或者我们可以自己定义一个集合，比如所有正方型的集合，不太严谨的说，其实就规定一些条件，所有满足这些条件的“东西”，就组成了一个集合。

而群（Group），则是**一种集合**，加上**一种运算**组成的结构。假如我们把集合记作G，运算记作·，它要求集合和运算满足下面几个条件：

- 封闭性：对于所有G中a, b，运算a·b的结果也在G中
- 结合律：对于所有G中的a, b和c，等式 (a·b)·c = a· (b·c)成立
- 幺元：存在G中的一个元素e，使得对于所有G中的元素a，总有等式e·a = a·e = a 成立
- 逆元：对于每个G中的a，存在G中的一个元素b使得总有a·b = b·a = e，此处e为单位元

看起来挺复杂，举个例子就很容易整明白了，**整数（集合）和加法（运算），就可以构成一个群。**

- 封闭性：对于任何两个整数a和b，它们的和a + b也是整数
- 结合律：对于任何整数a, b和c，(a + b) + c = a + （b + c）
- 幺元：如果a是任何整数，那么0 + a = a + 0 = a
- 逆元：对于任何整数a，存在另一个整数b使得a + b = b + a = 0，整数b叫做整数a的逆元，记为?a

所以说，群这玩意也不那么神秘，任何满足这些条件的集合和运算，都能构成一个群。

上面提到的特殊正交群和特殊欧式群就是一种群，只不过他们对应的运算并不是加法，而是矩阵乘法，所以说它们对加法不封闭。

什么叫“对加法不封闭”？举个例子，比如我们定义一种运算“加”，是把两个图形拼接在一起（把一个图形拼接到另一个图形，我们叫它“图形A加图形B”），那么对于等边三角形这个“集合”来说，它和“加”运算组合在一起，就不能构成一个群，因为它对“加”这个运算不封闭。（当然，不妨碍它和其他运算可以满足封闭，构成群）。

2.2. 啥是李群

简单来说，李群是连续的群。上面的特殊正交群、特殊欧式群，都是对时间连续的群，都是李群的一种。

对于旋转矩阵R，它会随着时间连续的变化，即为时间的函数R(t)，并且有：

于是便可以两边对时间求导：

$$R(t)R(t)^T = I$$

$$\dot{R}(t)R(t)^T + R(t)\dot{R}(t)^T = 0$$
$$\dot{R}(t)R(t)^T = -(\dot{R}(t)R(t)^T)^T$$

可以看出 $\dot{R}(t)R(t)^T$ 是一个反对称矩阵。而对于一个反对称矩阵，我们能找到一个向量与之对应，我们用 $a^\wedge$ 来表示，**后面我们也会用一个向量加一个尖尖的方式来表示该向量对应的反对称矩阵**：

$$a = [a_1, a_2, a_3]^T$$
$$a^\wedge = A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

我们用一个三维向量 $\phi(t)$ 来与 $\dot{R}(t)R(t)^T$ 对应，于是：

左右同时右乘 $R(t)$ ，则：

$$\dot{R}(t)R(t)^T = \phi(t)^\wedge$$

然后我们把它在 $t_0 = 0$ 附近进行一阶泰勒展开：

$$\dot{R}(t) = \phi^\wedge R(t)$$

$$R(t) \approx R(t_0) + \dot{R}(t_0)(t - t_0)$$
$$= I + \phi(t_0)^\wedge(t)$$

在 t_0 附近， ϕ 保持常数 $\phi(t_0) = \phi_0$ ，那么：

上式是一个关于R的微分方程，并且 $R(0) = I$ ，解得：

$$\dot{R}(t) = \phi(t_0)^\wedge R(t) = \phi_0^\wedge R(t)$$

> 有关线性微分方程求解可以参考下面的连接：
> 如何通俗地解释李群和李代数的关系？—— 知乎，李狗嗨

于是我们有了一个向量 ϕ ，它与旋转矩阵向对应，描述了R在局部的导数关系，实际上 ϕ 正是特殊正交群 $SO(3)$ 对应的李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 。

$$R(t) = exp(\phi_0^{\wedge} t)$$

> 别被 $SO(3)$ ， $\mathfrak{so}(3)$ 这些符号绕晕啦，完全可以用汉字“特殊正交群”，“特殊正交群的李代数”来描述，它们只是方便书写的代号。

李代数是李群在幺元处的正切空间，切空间本身是一个向量空间。什么叫“正切空间”？以不太严谨的例子来说明的话，李群就像一个无法定义加运算的曲面，对于曲面上的两点，相加后不一定还在这个曲面上了。而李代数就像这个曲面对应的切面，在切线附近具有和原曲面相近的性质。

就像我们可以用某个曲线的切线，来近似代替切点附近的曲线，进行一些操作。于是通过李代数，我们终于可以进行求导等操作了。

2.3. 啥是李代数

李代数是一个代数结构，主要用于研究象李群和微分流形之类的几何对象。李代数因研究无穷小变换的概念而引入。

说人话就是：每个李群都有与之对应的李代数，**李代数描述了李群的局部性质**（想象一下刚刚曲面与切面的关系）。上面提到的 $\mathfrak{so}(3)$ ，正是满足这个条件。

想要对作为李群的旋转矩阵求导，就需要用到李代数。

李代数由**一个集合**，**一个数域**，和**一个二元运算**组成，其中的二元运算被称为**李括号**，用这样来表示：[X, Y]。

对于上面的 $\mathfrak{so}(3)$ ，我们这样定义它的二元运算，其中的 $\vee$ 表示将反对称矩阵转换回向量的形式：

$$\Phi = \phi^{\wedge} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$[\phi_1, \phi_2] = (\Phi_1\Phi_2 - \Phi_2\Phi_1)^{\vee}$$

于是完整的数学定义如下：

$$\mathfrak{so}(3) = \{\phi \in \mathbb{R}^3, \Phi = \phi^{\wedge} \in \mathbb{R}^{3\times3}\}$$

于是总结一下：

- 旋转矩阵特殊正交群 $SO(3)$ 对应的李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 的元素是**实数域的三维向量**（三维反对称矩阵）
- $\mathfrak{so}(3)$ 的李括号为：
  $$[\phi_1, \phi_2] = (\Phi_1\Phi_2 - \Phi_2\Phi_1)^{\vee}$$
- $\mathfrak{so}(3)$ 与 $SO(3)$ 的关系由指数映射给定：$R = exp(\phi^{\wedge})$

下面就说说具体这个指数映射是如何计算的，也就是，具体如何从 $SO(3)$ 的旋转矩阵 R 来求出对应的李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 的向量 ϕ 的。

2.4. 指数映射

任意矩阵的指数映射可以写成一个泰勒展开,但是只有在收敛的情况下才会有结果，其结果仍是一个矩阵。比如对于矩阵 A ：

$$exp(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$$

同样的，对于旋转矩阵 R ：

$$R=exp(\phi^\wedge)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\phi^\wedge)^n$$

由于 ϕ 是一个三维向量，我们可以用它的模长 θ ，和表示方向的单位向量 a 来表示，即 $\phi=\theta a$ ，并且会有下面两个性质：

$$\begin{aligned} a^\wedge a^\wedge &= aa^T-I \\ a^\wedge a^\wedge a^\wedge &= -a^\wedge \end{aligned}$$

这样我们就可以处理上面式子的高阶项了，于是上面的指数映射可以写成：

$$\begin{aligned} R=exp(\phi^\wedge)=exp(\theta a^\wedge)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\theta a^\wedge)^n \\ &=I+\theta a^\wedge+\frac{1}{2!}\theta^2a^\wedge a^\wedge+\frac{1}{3!}\theta^3a^\wedge a^\wedge a^\wedge+\frac{1}{4!}\theta^4(a^\wedge)^4+\ldots \\ &=aa^T-a^\wedge a^\wedge+\theta a^\wedge+\frac{1}{2!}\theta^2a^\wedge a^\wedge-\frac{1}{3!}\theta^3a^\wedge-\frac{1}{4!}\theta^3(a^\wedge)^2+\ldots \\ &=a^\wedge a^\wedge+Isin\theta a^\wedge-cos\theta a^\wedge a^\wedge \\ &=(1-cos\theta)a^\wedge a^\wedge+I+sin\theta a^\wedge \\ &=cos\theta I+(1-cos\theta)aa^T+sin\theta a^\wedge \end{aligned}$$

诶？我们好像得到了一个似曾相识的东西。这个公式正是**1.2.1**中的罗斯里格斯公式。

这表明 $\mathfrak{so}(3)$ 正是旋转向量组成的空间，而指数映射正是罗斯里格斯公式，因此我们可以用1.2.1中的方法来计算指数映射。

> 不过需要注意的是，指数映射是一个满射，对于任意的 R ，可能有不止一个 ϕ 与之对应，这一点也很好理解，旋转360度和旋转0度的效果是一样的，旋转具有周期性。

这样一来，我们就能由特殊正交群 $SO(3)$ 的旋转矩阵 R ，通过指数映射，得到对应的李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 了，下面我们来具体说说，当我们连续旋转，即在一个旋转 R_1 的基础上，左乘另一个旋转 R_2 时，对应的李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 中发生了什么。

3. 李代数求导 & 扰动模型

回想一下文章开头，我们说过，因为特殊正交群对于加法不封闭，给我们求导带来了困难。

因此引入李代数，正是为了解决这个问题。不难发现，李代数是李群的指数映射，而两个指数函数相乘是可以转化成加法操作的。

实际上我们想做的是类似这样的事情（注意这个式子并不成立，只是为了表述为什么引入李代数可以化乘为加）：

即，将连续旋转时，旋转矩阵的乘法，转换为李代数的指数映射的加法，以便于我们后续求导。

$$R_1R_2 = exp(\phi_1^\wedge)exp(\phi_2^\wedge) = exp((\phi_1+\phi_2)^\wedge)$$

不过，上面的公式里，如果 ϕ_1, ϕ_2 是标量，上面式子会成立，然而我们计算的是**三维向量（三维反对称矩阵）的指数函数**，因此上面的等式并不成立。

如何计算两个李代数指数映射的乘积，由Baker-Campbell-Hausdorff公式（BCH公式）给出。

3.1. BCH公式 —— 化乘为加

> 有关Baker-Campbell-Hausdorff公式的详细可以查看维基百科，此处掠过了一些内容，毕竟我们只需要用到最后的结论。
> Baker–Campbell–Hausdorff formula —— Wiki

BCH公式告诉我们，对于李代数指数映射 A, B ，可以展开成以下形式：

$$ln(exp(A)exp(B)) = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] - \frac{1}{12}[B[A,B]] + ...$$

其中[]为李括号，上面我们已经定义过，这种运算的规则：

$$\Phi = \phi^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\phi_1, \phi_2] = (\Phi_1\Phi_2 - \Phi_2\Phi_1)^\vee$$

上面的式子，在 ϕ_1 或者 ϕ_2 为小量时，后面的高阶项可以忽略不计，此时公式的线性近似表达是：

$$ln(exp(\phi_1^\wedge)exp(\phi_2^\wedge)) \approx \begin{cases} J_l(\phi_2)^{-1}\phi_1 + \phi_2 & if \quad \phi_1 \quad is \quad small \\ J_r(\phi_1)^{-1}\phi_2 + \phi_1 & if \quad \phi_2 \quad is \quad small \end{cases}$$

上面的两个式子，分别表示左乘一个微小增量和右乘一个微小增量的情况，以左乘为例， J_l 为：

$$J_l = J = \frac{sin\theta}{\theta}I + (1 - \frac{sin\theta}{\theta})aa^T + \frac{1-cos\theta}{\theta}a^\wedge$$

它的逆：

$$J_l^{-1} = \frac{\theta}{2}cot\frac{\theta}{2}I + (1 - \frac{\theta}{2}cot\frac{\theta}{2})aa^T - \frac{\theta}{2}a^\wedge$$

而右乘的 $J_r(\phi)$ ，对自变量取负号即可：

$$J_r(\phi) = J_l(-\phi)$$

于是，当我们在当前旋转 R 上，进行了另一次微小的旋转 ΔR 时，在李群的结果是 $\Delta R \cdot R$ ，在李代数上，根据BCH公式：

$$\Delta R \cdot R = exp(\Delta\phi^\wedge)exp(\phi^\wedge) = exp((\phi + J_l^{-1}(\phi)\Delta\phi)^\wedge)$$

相反的，在李代数上进行加法，在 ϕ 上加一个 $\Delta\phi$ ，可以近似为：

$$exp((\phi+\Delta\phi)^\wedge)=exp((J_l\Delta\phi)^\wedge)exp(\phi^\wedge)=exp(\phi^\wedge)exp((J_r\Delta\phi)^\wedge)$$

由此我们得到了特殊正交群 $SO(3)$ 在连续旋转，不断相乘时，对应李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 上的变化情况。

最终 $SO(3)$ 上的乘法被转化为了李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 上的加法，通过这一通操作，我们成功的“化乘为加”，给后面求导铺好了路。

3.2. 李代数求导

假设我们对一个空间点 p 进行了一次旋转，得到了 Rp ，现在为了优化我们的旋转 R ，我们需要计算旋转后的点坐标，对旋转的导数，像是这样：

$$\frac{\partial Rp}{\partial R}$$

但是这个操作并不可行，因为 $SO(3)$ 并没有加法，所以这个式子其实应该是这样：

$$\frac{\partial(exp(\phi^\wedge)p)}{\partial\phi}$$

按照导数的定义：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(exp(\phi^\wedge)p)}{\partial\phi}\\
&=\lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{exp((\phi+\Delta\phi)^\wedge)p-exp(\phi^\wedge)p}{\Delta\phi}\\
&=\lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{exp((J_l\Delta\phi)^\wedge)exp(\phi^\wedge)p-exp(\phi^\wedge)p}{\Delta\phi}\\
&\approx\lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{(I+(J_l\Delta\phi)^\wedge)exp(\phi^\wedge)p-exp(\phi^\wedge)p}{\Delta\phi}\\
&=\lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{(J_l\Delta\phi)^\wedge exp(\phi^\wedge)p}{\Delta\phi}\\
&=\lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{-(exp(\phi^\wedge)p)^\wedge J_l\Delta\phi}{\Delta\phi}\\
&=(Rp)^\wedge J_l
\end{aligned}$$

其中第二行是BCH公式的线性近似，第三行是泰勒展开后舍去高阶项的近似，第四第五行是将反对称符号看做两个向量的叉积（这点很容易证明），交换之后变号。于是我们得到了旋转后的点对于李代数的导数。

不过这个式子例还有一个形式复杂的雅克比矩阵 J_l ，其实还有一个更加简单的计算方式，可以避过它，就是扰动模型。

对 R 进行一次扰动 ΔR ，以左扰动（左乘）为例，假设左扰动 ΔR 对应的李代数为 $\Delta\phi$ ，对其求导为：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(exp(\phi^\wedge)p)}{\partial\Delta\phi} \\
&= \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{exp(\Delta\phi^\wedge)p - exp(\phi^\wedge)p}{\Delta\phi} \\
&\approx \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{(1+\Delta\phi^\wedge)exp(\phi^\wedge)p - exp(\phi^\wedge)p}{\Delta\phi} \\
&= \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{\Delta\phi^\wedge exp(\phi^\wedge)p}{\Delta\phi} \\
&= \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{-(exp(\phi^\wedge)p)^\wedge\Delta\phi}{\Delta\phi} \\
&= -(Rp)^\wedge
\end{aligned}
$$

这里就把雅克比 J_l 的计算省去了（上它和直接求导的区别，就是一个对 $\Delta\phi$ ，而一个对 ϕ 求导），在后面计算BA求导的时候，我们会使用这种方式来求导。

3.3. SE(3)上的李代数求导

假设某空间点 p ，经过一次变换 T ，它和 $SO(3)$ 一样，也有对应的李代数：

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

它的李括号也类似 $\mathfrak{so}(3)$ ：

$$[\xi_1,\xi_2] = (\xi_1^\wedge\xi_2^\wedge - \xi_2^\wedge\xi_1^\wedge)^\vee$$

它对应的指数映射是：

$$
\begin{aligned}
exp(\xi^\wedge) &= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\phi^\wedge)^n & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n\rho \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R & J\rho \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = T
\end{aligned}
$$

其中的 ϕ 就是之前旋转的李代数 $\mathfrak{so}(3)$ ，而 ρ 表示平移（实际上 $t = J\rho$ ）， J 是一个雅克比矩阵：

$$J = \frac{sin\theta}{\theta}I + (1-\frac{sin\theta}{\theta})aa^T + \frac{1-cos\theta}{\theta}a^\wedge$$

当我们添加一个左扰动 ，则：

$$\Delta T = exp(\Delta\xi^\wedge)$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(exp(\xi^\wedge)p)}{\partial\Delta\xi} \\
&= \lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{exp(\Delta\xi^\wedge)p - exp(\phi^\wedge)p}{\Delta\xi} \\
&\approx \lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{(1+\Delta\xi^\wedge)exp(\xi^\wedge)p - exp(\xi^\wedge)p}{\Delta\xi} \\
&= \lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{\Delta\xi^\wedge exp(\xi^\wedge)p}{\Delta\xi} \\
&= \lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{\begin{bmatrix}\Delta\phi^\wedge & \Delta\rho \\ 0^T & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}exp(\phi^\wedge)+t \\ 1\end{bmatrix}}{\Delta\xi} \\
&= \lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{\begin{bmatrix}\Delta\phi^\wedge(exp(\phi^\wedge)p+t)+\Delta\rho \\ 0\end{bmatrix}}{\Delta\xi} \\
&= \begin{bmatrix} I & -(Rp+t)^\wedge \\ 0^T & 0^T\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

由此我们知道了三维点在旋转或变换之后的坐标，对位姿（旋转+平移）的导数，这样在后面计算Bundle Adjustment的时候，就不用担心无法求得位姿的导数，也就能够求取最小二乘法优化问题中对应的雅克比矩阵或者海塞矩阵，从而求解增量方程 $H\Delta x = g$ ，进而迭代更新啦！

参考文献

[1] 高翔，张涛，"视觉SLAM十四讲".

[2] WikiPedia，"Baker–Campbell–Hausdorff formula"，
en.wikipedia.org/wiki/B
.

[3] 李狗嗨，"如何通俗地解释李群和李代数的关系？"，
zhihu.com/question/3564

编辑于 03-22

李代数

线性代数

矩阵

文章被以下专栏收录

VSLAM

涉及VSLAM的知识点，用于之后回顾。小白的血泪史