

## ◎博士论坛◎

## 广义 Voronoi 图求解多机器人运动规划

冯洪奎<sup>1</sup>, 鲍劲松<sup>1,2</sup>, 金 烨<sup>1,2</sup>FENG Hong-kui<sup>1</sup>, BAO Jin-song<sup>1,2</sup>, JIN Ye<sup>1,2</sup>

1. 上海交通大学 计算机集成制造研究所, 上海 200240

2. 上海市网络化制造与企业信息化重点实验室, 上海 200240

1. Institute of Computer Integrated Manufacturing, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China

2. Shanghai Key Laboratory of Advanced Manufacturing Environment, Shanghai 200240, China

E-mail: fenghongkui@yahoo.com.cn

FENG Hong-kui, BAO Jin-song, JIN Ye. Generalized Voronoi diagrams for multiple robots motion planning. Computer Engineering and Applications, 2010, 46(22): 1-3.

**Abstract:** In a populated environment, boundaries of obstacles are complex, and Generalized Voronoi Diagrams (GVDs) are employed to represent the spatial environment. In the motion planning for multiple robots, it must be considered for coordinating these robots according to passage width in the constructed GVDs. Thus an algorithm for computing the passage width in the constructed GVDs according to the populated environment is proposed. A\* algorithm is employed for planning paths for multiple robots in the constructed GVDs, and a distributed method is used for coordinating motions of multiple robots. An instance for coordinating two robots is given and simulated. The simulation results show that the multiple robot motion planning can be completed based on the GVDs with passage width.

**Key words:** generalized Voronoi diagrams; multiple robots; motion planning; passage width

**摘 要:** 在拥挤环境中, 由于障碍物的边界形状比较复杂, 需要使用广义 Voronoi 图表示空间环境。且在多移动机器人的运动规划过程中, 需要协调多个机器人的运动, 必须得到 Voronoi 图通道的宽度。为此提出了一种计算拥挤障碍物环境中生成的广义 Voronoi 图及其通道宽度的算法。并在生成的 Voronoi 图上利用 A\* 算法对多个机器人进行路径规划, 并利用分布式方法协调多个机器人运动。对协调两个机器人运动的过程进行了仿真, 仿真结果表明利用提出的算法生成的具有通道宽度信息的 Voronoi 图能够满足多移动机器人运动规划的需要。

**关键词:** 广义 Voronoi 图; 多机器人; 运动规划; 通道宽度

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2010.22.001 文章编号: 1002-8331(2010)22-0001-03 文献标识码: A 中图分类号: TP24

## 1 引言

在多移动机器人运动规划问题中, 需要即时规划出多移动机器人运动的路径, 并协调多个机器人在空间中无碰撞的运动, 这对求解算法的效率提出了较高的要求。为了提高多移动机器人路径规划的效率, 希望能够在已经获得的构造空间中规划多移动机器人的路径。显然势场法不满足这个条件, 该法在规划一个机器人路径时, 需要用到该机器人的起始点和终止点信息。由于同样的原因, 可视图法也不合适。且人工势场法<sup>[1]</sup>在相近障碍物之间不能发现路径, 在障碍物前震荡, 在狭窄通道中摆动, 不适合在障碍物密集的环境中规划路径。栅格法<sup>[2]</sup>是对环境本质的一种描述方法, 具有很好的通用性, 但是栅格法计算速度慢, 花费的内存多, 满足不了多实体

路径规划在速度上的要求。Voronoi 图法由于只在初始阶段构造网图花费时间比较大, 但是该过程将空间二维信息抽象为路图信息, 大大提高了空间的表示效率, 所以在此采用 Voronoi 图的方法表示空间环境。

许松清等<sup>[3]</sup>研究了一种在随机静态环境条件下移动机器人的路径规划方法。在环境地图信息的基础上, 运用 Voronoi 图理论, 建立了单移动机器人运行的无碰撞路径网络。Garrido 等<sup>[4]</sup>使用 Voronoi 图表示环境中实体可以运动的安全区域, 然后在 Voronoi 图上搜索最短路径。Masehian 等<sup>[5]</sup>将 Voronoi 图、可视图法、势场法集成起来提出了一种求解路径规划的算法。Storer 等<sup>[6]</sup>提出了一种在多边形障碍物环境中求解最短路径的方法。在该问题的求解过程中没有考虑移动实体的形

基金项目: 上海市科委项目 (No.08DZ1120102, No.08DZ1110303); 机械系统与振动国家重点实验室开放课题资助项目 (No.MSV-2010-10)。

作者简介: 冯洪奎 (1978-), 男, 博士研究生, 主要研究领域为视景仿真、虚拟现实技术、车辆调度技术; 鲍劲松 (1972-), 男, 博士, 主要研究领域为视景仿真、虚拟样机技术、科学计算可视化; 金烨 (1945-), 男, 教授, 博导, 主要研究领域为虚拟现实技术、CIMS 系统集成技术。

收稿日期: 2010-01-05 修回日期: 2010-05-31

状,以及该形状对于求解最短路径的影响。

在上述文献中建立的 Voronoi 图,都将障碍物简化为一个点,而忽略了障碍物边界形状对于路图通道宽度的影响。但是在拥挤的环境中,障碍物边界形状复杂,需要使用广义 Voronoi 图来抽象表示拥挤的空间环境。

Kalra 等<sup>[7]</sup>提出了一种基于网格点的增量算法用于构造广义 Voronoi 图,用于机器人规划路径。吴海彬等<sup>[8]</sup>针对移动机器人在部分环境信息已知下的路径规划问题,运用广义 Voronoi 图理论及动态路径最优算法(D\*算法)理论,研究了一种基于传感器信息的移动机器人在线路径规划的方法。

然而在当前的算法中没有考虑 Voronoi 图中通道的宽度,该宽度用于确定允许通过的机器人的宽度。由于在多移动机器人运动规划中,有多个机器人同时在运动,需要协调它们的运动,以使得其在运动过程中不发生碰撞。而在特别拥挤的障碍物环境中,需要考虑生成的 Voronoi 图中通道的宽度。如果通道宽度能够允许两个机器人通过,则当两个机器人在该通道上交汇通过时,不用等待另一个机器人,即可使得机器人同时通过该路段。如果通道的宽度只允许一个机器人通过,则当有两个机器人相向通过时,必须有一个机器人等待另一个机器人通过之后,该机器人才能通过该通道。如果通道的宽度小于一个机器人的宽度,则该通道是不允许通过机器人。这样,在拥挤的环境中,计算由 Voronoi 图生成的通道宽度是非常有必要的,它是后续运动规划必不可少的信息。

为了求解多移动机器人在拥挤环境中的运动规划问题,使用广义 Voronoi 图表示拥挤的环境,并在得到广义 Voronoi 图的基础上,进一步计算 Voronoi 图上各个通道的宽度。

## 2 Voronoi 图

### 2.1 Voronoi 图的定义

Voronoi 图的定义<sup>[9]</sup>如下。设  $P_i(i=1, 2, \dots, n)$  为平面上的  $n$  个点,将由

$$V_n(P_i) = \bigcup_{j \neq i} \{P | d(P, P_i) < d(P, P_j)\} (i=1, 2, \dots, n)$$

所给出的对平面的分割,称为以  $P_i(i=1, 2, \dots, n)$  为母点的 Voronoi 图,通常简称为 Voronoi 图。称  $V_n(P_i)$  为 Voronoi 多边形。其中  $d(P, P_i)$  表示  $P$  和  $P_i$  间的欧几里德距离。

### 2.2 Delaunay 三角剖分

生成 Voronoi 图的方法是通过首先生成其对偶图 Delaunay 三角网实现的,并采用 Lawson<sup>[10]</sup>提出的逐点插入方法进行 Delaunay 三角剖分。在逐点插入生成 Delaunay 三角网方法中,首先建立一个大的三角形或多边形,将所有数据点包围到其中,然后将点逐个地添加到这个大的三角形或多边形中,从而生成 Delaunay 三角网。采用 Lawson 的方法进行 Delaunay 三角剖分的优点是可以动态地向 Delaunay 三角网中添加点或者删除点,适合于空间环境动态变化的情况。

在 Delaunay 三角剖分中,采用的表示几何边的数据结构为 Quad-Edge<sup>[11-12]</sup>。该数据结构中包含有四个四边形,分别指向两个顶点和两个相邻的面。该数据结构的优点在于所有的操作都可以通过指针的方式完成。图1给出了该数据结构及其基本操作。

### 2.3 广义 Voronoi 图的生成及其通道宽度的计算

在拥挤环境中,由于障碍物的边界形状比较复杂,用简单

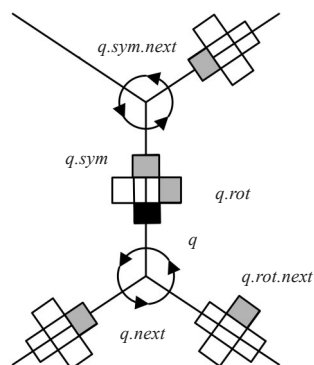


图1 Quad-Edge 数据结构及其基本

操作:rot,sym,next

的点不能很好地表示复杂障碍物,需要使用多边形表示复杂障碍物。为了对具有多边形障碍物的空间环境进行抽象,需要使用广义 Voronoi 图来描述。在通常由离散点生成的 Voronoi 图中只包含有直线段,然而在广义 Voronoi 图中的边包含有抛物线和直线。这是由于在生成 Voronoi 图的过程中,有三种不同的 Voronoi 边的生成情况。每一个二维的障碍物,可以表示为凸多边形和凹多边形,利用直线作为边界,点作为角。当 Voronoi 边距离两个障碍物的边界(线-线)、或者两个障碍物的转角(点-点)距离相等时,将生成直线段。然而,当 Voronoi 边距离一个障碍物的转角和另一个障碍物的边界(点-线)距离相等时,将会生成抛物线。生成这样的具有抛物线和直线的 Voronoi 图是很困难的。即使生成了非常精确的广义 Voronoi 图,也不得不通过线段来近似描述每个抛物线,从而生成机器人运动控制可以使用的命令。Okabe, Boots 和 Sugihara<sup>[13]</sup>提出了一个非常有效的近似方法用于找到一组二维障碍物的广义 Voronoi 图,通过将障碍物边界离散化为多个点,从而获取具有二维障碍物空间的广义 Voronoi 图。

在通常的广义 Voronoi 图生成方法中,将障碍物的边界通过 Minkowski 和的方法膨胀一半机器人宽度,获取允许一辆小车通过的广义 Voronoi 图,从而将多边形机器人的路径规划问题转化为点机器人的情况,然而此方法并不适用于多机器人运动规划问题的求解。在多机器人运动规划中,当两个机器人相向通过同一通道时,如果通道宽度允许两个机器人同时并排通过,则可以由交错的方式通过该通道,如果通道宽度只允许一个机器人通过,则必须有一个机器人在通道外等待另一个机器人通过之后,才能通过该通道。所以计算通道的宽度在多机器人运动规划中是非常必要的,通道宽度的不同,机器人通过通道时所采取的策略也不同。为此提出了一种计算广义 Voronoi 图及其通道宽度的算法,算法步骤如下。

(1) 通过将原始多边形的边界分割成许多小线段,多边形障碍物的边界可以近似为大量的点。这样,就获得了表示多边形障碍物的一组离散点。

(2) 对得到的离散点进行 Delaunay 三角剖分。在此采用增量方法,逐个添加顶点到图中,并采用 Quad-Edge 表示三角形的边。

(3) 得到 Voronoi 图及其通道的宽度。

对于得到的 Delaunay 三角剖分中的每个三角行的每条边执行下面的操作。

① 获得与该边相关联的左边三角形的所有的顶点。计算该三角形的外接圆的圆心,作为 Voronoi 边的起始顶点。

②获得与该边相关联的右边三角形的所有的顶点。计算该三角形的外接圆的圆心, 作为 Voronoi 边的终止顶点。

③假如该 Voronoi 边的起始顶点和终止顶点位于障碍物内部, 就删除该 Voronoi 边, 并继续搜索 Delaunay 三角剖分中的其他边。否则, 转入步骤④, 判断 Voronoi 边表示的通道宽度。

④选取右边的三角形, 在右三角形中, 如果三个点位于不同的障碍物的边上, 则取三角形的第一个点与第二个点的连线长度  $w_r$  作为通道宽度, 否则转入步骤⑤。

如图 2(a) 所示, 对于边  $ca$  三角形  $\Delta cab$  为左三角形, 其外接圆心点为  $p$ ,  $\Delta acd$  为右三角形, 其外接圆心点为  $q$ 。右三角形  $\Delta acd$  的三个顶点在三个不同的障碍物上, 此时认为在右三角形  $\Delta acd$  中, 通道宽度为  $w_r = |ac|$ 。

⑤在右三角形中, 如果有两个点位于同一个障碍物的边上, 则计算三角形中不在同一个障碍物的点到对边的垂直距离, 取该距离为通道宽度  $w_r$ 。

如图 2(b) 所示, 对于边  $cb$  三角形  $\Delta cba$  为左三角形, 其外接圆心点为  $p$ ,  $\Delta bcd$  为右三角形, 其外接圆心点为  $q$ 。右三角形  $\Delta bcd$  的三个顶点中  $c$  和  $d$  两个顶点位于同一个障碍物上,  $bh$  为垂线, 此时认为在右三角形  $\Delta bcd$  中, 通道宽度为  $w_r = |bh|$ 。

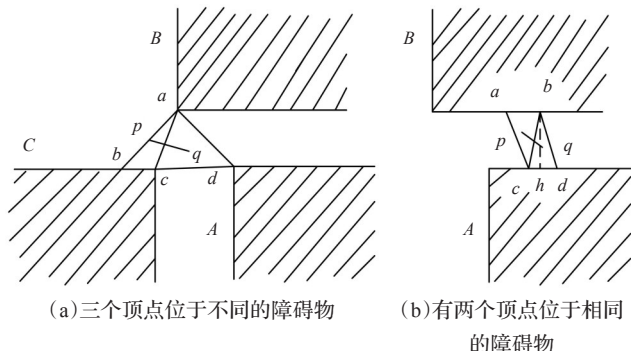


图2 顶点位于不同的障碍物上的实例

左边的三角形按照右边的三角形执行相同的操作, 得到通道宽度  $w_l$ 。取  $w = \min(w_l, w_r)$ , 作为该 Voronoi 边表示的通过的宽度。

图 3 为多边形障碍物的一个实例, 在一个  $10\text{ m} \times 10\text{ m}$  的二维空间中, 有 19 个多边形障碍物, 且一些多边形障碍物具有不规则的外形, 为凹多边形, 且障碍物之间的最小间隙为  $0.2\text{ m}$ 。在该实例中, 假定机器人的宽度为  $0.2\text{ m}$ , 当通道宽度大于  $0.4\text{ m}$  时, 则认为该通道可以同时并行通过两个机器人, 并在生成的 Voronoi 图中利用较粗的实线画出。当计算得到的通道宽度小于  $0.4\text{ m}$  且大于  $0.2\text{ m}$  时, 则认为该通道可以同时通过一个机器人, 并在生成的 Voronoi 图中利用较细的实线画出, 得到的 Voronoi 图如图 4 所示, 该图能够很好地描述生成的 Voronoi 图各通道是否允许两个机器人同时并行通过, 还是同一时刻只允许一个机器人通过, 即该图能够描述 Voronoi 图各通道机器人的通行能力。

### 3 协调多移动机器人运动

在多移动机器人运动规划过程中, 集中式的方法由于求解时间长, 求解效率低, 满足不了求解问题的即时性要求, 而分布式方法求解效率比较高, 故在此将采用分布式方法求解问题。在采用分布式方法求解多实体运动规划问题时, 首先在静态障碍物环境中搜索路径, 然后协调多个实体运动, 在运

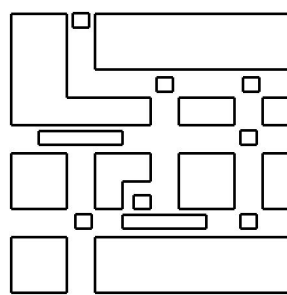


图3 多边形障碍物的一个实例

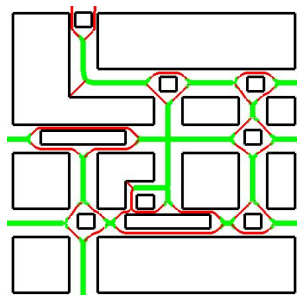


图4 多边形障碍物的生成 Voronoi 图的一个实例

动过程中避开其他移动实体, 所以分布式方法中包括路径规划和路径协调两个问题。

在此称只能允许一个机器人通过的通道为单向通道, 允许两个机器人同时并行通过的通道为双向通道。一种有效的协调多移动机器人运动的策略是优先级规划, 其算法步骤如下。

(1) 为每个机器人赋予不同的优先级。

(2) 为每个机器人在生成的 Voronoi 图上利用 A\* 算法规划从起始位置到终止位置的路径。

(3) 假定机器人运动的速度  $v$ , 利用仿真的方法确定机器人在每一时刻  $t$  时的位置。机器人在按照规划路径运动过程中遵循以下规则。

①当机器人进入双向通道时, 认为在该通道上不会发生堵塞, 可以进入该通道。

②当机器人进入单向通道时, 通知系统该通道被占用, 不允许其他机器人进入该通道, 以避免发生堵塞。

③当机器人检测到其他机器人在通过单向通道时, 判断自身将要运动方向是否与通道中的机器人的运动方向相同, 如相同, 则可以进入单向通道中, 如不同, 则等待, 直到单向通道中的机器人离开单向通道。

④如果两个机器人同时到达单向通道的入口, 则优先级高的机器人首先通过, 优先级低的机器人等待优先级高的机器人通过后再通过。

### 4 仿真结果

针对图 3 中给出的实例, 通过 A\* 算法规划得到的 R1 机器人从 A 运动到 B 的路径, 如图 5(a) 所示, 以及 R2 机器人从 C 运动到 D 的路径, 如图 5(b) 所示。假定两个机器人运动的速度为  $1\text{ m/s}$ , 且同时从 A 和 C 两个位置出发。通过仿真发现, 两个机器人会在单向通道处发生堵塞, 由于 R1 机器人首先到达单向通道, R2 机器人等待 R1 机器人  $3.5\text{ s}$  后, R2 机器人通过单向通道, 最终 R1 机器人经过  $7.8\text{ s}$  运动到了位置 B, R2 机器人经过  $8.9\text{ s}$  运动到了位置 D。

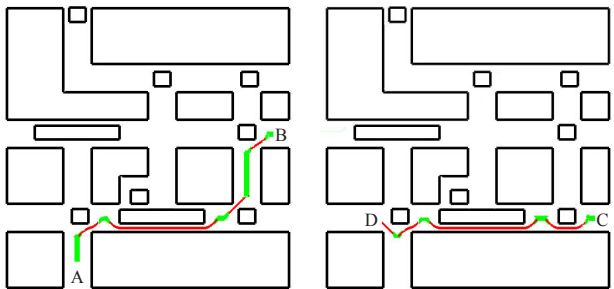


图5 利用 A\* 算法规划得到的两个机器人的路径

(下转 19 页)



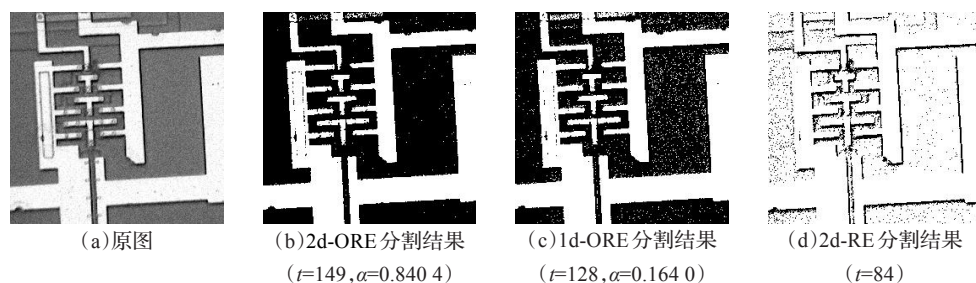


图4 含噪ic图像分割结果

文方法可以提高二维Renyi熵阈值分割法的分割性能,是一种有效的阈值分割算法。

## 参考文献:

- [1] Pal N R, Pal S K. A review on image segmentation techniques[J]. Pattern Recognition, 1993, 26(9): 1277-1294.
- [2] Pun T. Entropic thresholding: A new approach[J]. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 1981, 29: 377-393.
- [3] Kapur J N, Sahoo P K, Wong A K C. A new method for grey-level picture thresholding using the entropy of the histogram[J]. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 1985, 29: 273-285.
- [4] Sahoo P, Wilkins C, Yeage J. Threshold selection using Renyi's entropy[J]. Pattern Recognition, 1997, 30(1): 71-84.
- [5] de Albuquerque M P, Esquef I A, Gesualdi Mello A R, et al. Image thresholding using Tsallis entropy[J]. Pattern Recognition Letters, 2004, 25: 1059-1065.
- [6] Abutaleb A S. Automatic thresholding of gray-level picture using two-dimensional entropies[J]. Pattern Recognition, 1989, 47(1): 22-32.
- [7] Sahoo P K, Arora G. Image thresholding using two-dimensional Tsallis-Havrada-Charvat entropy[J]. Pattern Recognition Letters, 2006, 27: 520-528.

- [8] Sahoo P K, Arora G. A thresholding method based on two-dimensional Renyi's entropy[J]. Pattern Recognition, 2004, 37: 1149-1161.
- [9] 潘喆, 吴一全. 二维Renyi熵图像阈值选取快速递推算法[J]. 中国体视学与图像分析, 2007, 12(2): 93-97.
- [10] 吴成茂, 范九伦. 对二维Renyi熵阈值法的错误纠正[J]. 计算机工程与应用, 2006, 42(9): 34-37.
- [11] 雷博, 范九伦. 一维Renyi熵阈值法中参数的自适应选取[J]. 光子学报, 2009, 38(9): 2439-2443.
- [12] Eberhart R C, Kennedy J. A new optimizer using particle swarm theory[C]//Proc Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science, Nagoya, Japan, IEEE Service Center, Piscataway, NJ, 1995: 39-43.
- [13] Angeline P J. Using selection to improve particle swarm optimization[C]//IEEE International Conference on Evolutionary Computation, Anchorage, Alaska, May 4-9, 1998: 94-100.
- [14] Eberhart R C, Shi Y H. Tracking and optimizing dynamic systems with particle swarms[C]//Proc Congress on Evolutionary Computation, Seoul, Korea. Piscataway, NJ: IEEE Service Center, 2001: 84-89.
- [15] Levine M D, Nazif A M. Dynamic measurement of computer generated image segmentations[J]. IEEE Trans PAMI-7, 1985: 155-164.

(上接3页)

## 5 结论

通过将障碍物边界离散为大量的点,可以得到近似的广义Voronoi图,进一步利用提出的方法计算Voronoi图中的通道宽度,得到具有道路宽度的Voronoi图,从而确定通道允许同时并排通过的机器人的数量,并利用A\*算法为机器人搜索路径,利用分布式方法和优先级规则协调多个机器人运动。通过仿真实例验证上述基于广义Voronoi图的多机器人运动规划方法是可行。

## 参考文献:

- [1] 章小兵. 基于视觉和超声波传感器的地面移动机器人定位与路径规划研究[D]. 南京: 东南大学, 2006.
- [2] 薄喜柱, 洪炳熔. 动态环境下多移动机器人路径规划的一种新方法[J]. 机器人, 2001, 23(5): 407-410.
- [3] 许松清, 吴海彬, 林宜. 等. 基于Voronoi图法的移动机器人路径规划[J]. 中国工程机械学报, 2005, 3(3): 336-340.
- [4] Garrido S, Moreno L, Abderrahim M, et al. Path planning for mobile robot navigation using voronoi diagram and fast marching[C]//2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS 2006, Beijing, China, 2006. United States: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc,

2006: 2376-2381.

- [5] Masehian E, Amin-Naseri M. R.A voronoi diagram-visibility graph-potential field compound algorithm for robot path planning[J]. Journal of Robotic Systems, 2004, 21(6): 275-300.
- [6] Storer J A, Reif J H. Shortest paths in the plane with polygonal obstacles[J]. Journal of the ACM, 1994, 41(5): 982-1012.
- [7] Kalra N, Ferguson D, Stentz A. Incremental reconstruction of generalized Voronoi diagrams on grids[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2009, 57(2): 123-128.
- [8] 吴海彬, 林宜. 基于改进Voronoi图的移动机器人在线路径规划[J]. 中国工程机械学报, 2007, 5(1): 117-121.
- [9] 周培德. 计算几何——算法设计与分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 1986.
- [10] Lawson C L. Software for C' surface interpolation[C]//Mathematical Software III. New York: Academic Press, 1977: 161-194.
- [11] Guibas L J, Stolfi J. Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams[C]//Proceedings of the 15th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Boston, Mass, USA, 1983. USA: ACM, 1983: 221-234.
- [12] Ledoux H. Modelling three-dimensional fields in geoscience with the Voronoi diagram and its dual[D]. Pontypridd, Wales, UK: School of Computing, University of Glamorgan, 2006.
- [13] Okabe A, Boots B, Sugihara K. Spatial tessellations concepts and applications of voronoi diagrams[M]. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd, 1992.