2.向量

有序向量

Fibonacci查找

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

思路及原理

- 二分查找版本A的效率仍有改进余地，因为不难发现

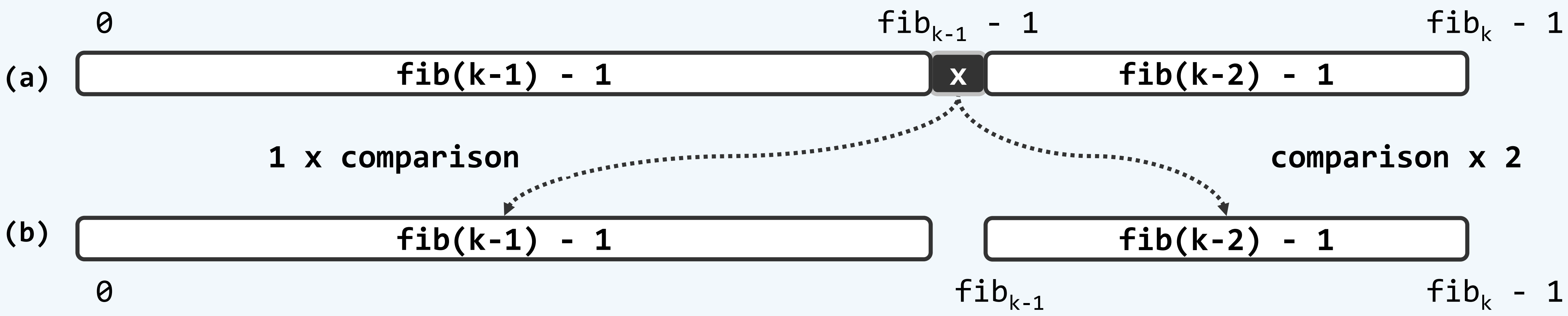
  转向左、右分支前的关键码比较次数不等，而递归深度却相同

- 若能通过递归深度的不均衡，对转向成本的不均衡进行**补偿**

  平均查找长度应能进一步缩短...

- 比如，若设n = fib(k) - 1，则可取mi = fib(k - 1) - 1

  于是，前、后子向量的长度分别为fib(k - 1) - 1、fib(k - 2) - 1



实现

```
❖ template <typename T> //0 <= lo <= hi <= _size
  static Rank fibSearch( T * A, T const & e, Rank lo, Rank hi ) {
     Fib fib(hi - lo); //用O(log_Φ n) = O(log_Φ(hi - lo))时间创建Fib数列
     while ( lo < hi ) {
        while ( hi - lo < fib.get() ) fib.prev(); //至多迭代几次？整体累计几次？
           //通过向前顺序查找，确定形如Fib(k) - 1的轴点（分摊O(1)）
        Rank mi = lo + fib.get() - 1; //按黄金比例切分
        if      ( e < A[mi] ) hi = mi; //深入前半段[lo, mi)继续查找
        else if ( A[mi] < e ) lo = mi + 1; //深入后半段(mi, hi)
        else                  return mi; //在mi处命中
     }
     return -1; //查找失败
  }
```

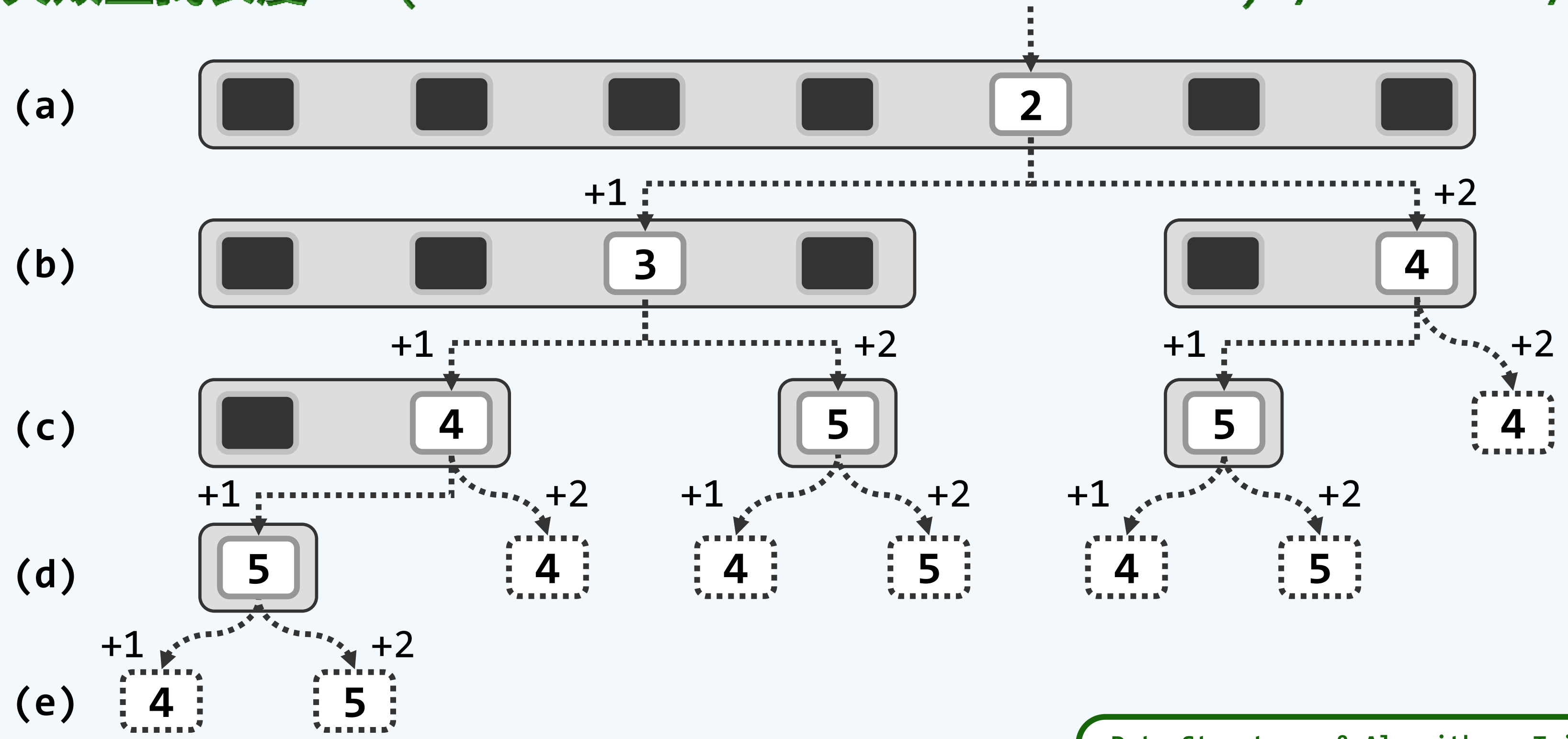
查找长度

❖ Fibonacci查找的ASL，（在常系数的意义上）优于二分查找 //详见教材、习题解析

❖ 仍以n = fib(6) - 1 = 7为例，在等概率情况下

平均成功查找长度 = (5 + 4 + 3 + 5 + 2 + 5 + 4) / 7 = 28/7 = 4.00

平均失败查找长度 = (4 + 5 + 4 + 4 + 5 + 4 + 5 + 4) / 8 = 35 / 8 = 4.38

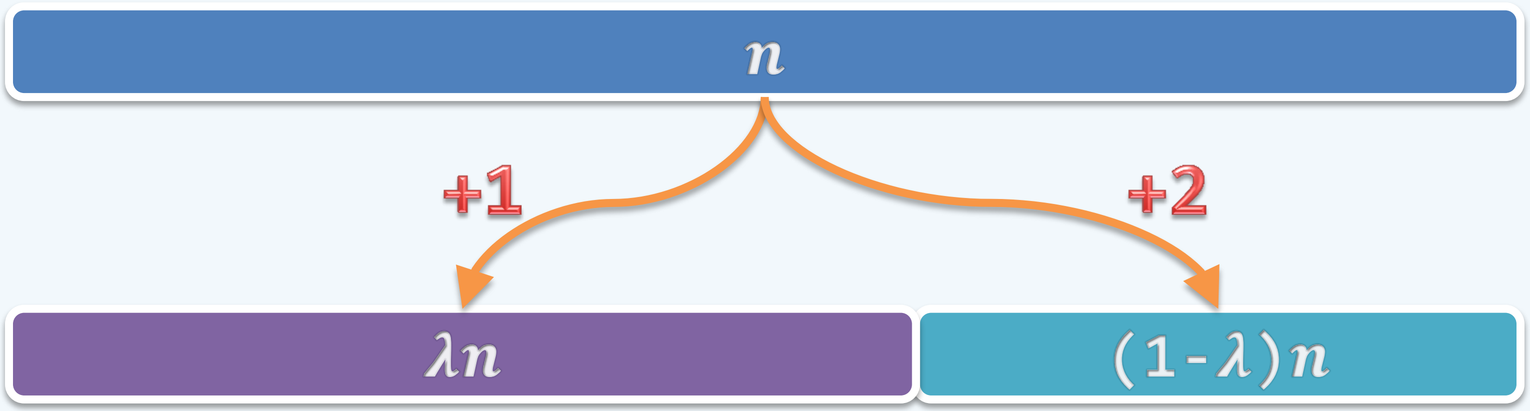


通用策略

❖ 对于任何的A[0, n)，总是选取A[λn]作为轴点，$0 \le \lambda < 1$

比如：二分查找对应于$\lambda = 0.5$，Fibonacci查找对应于$\lambda = \phi = 0.6180339...$

❖ 在[0, 1)内，λ如何取值才能达到最优？设平均查找长度为$\alpha(\lambda) \cdot \log_2 n$，何时$\alpha(\lambda)$最小？



$\phi = 0.6180339...$

❖ 递推式： $\alpha(\lambda) \cdot log_2 n = \lambda \cdot [1 + \alpha(\lambda) \cdot log_2(\lambda n)] + (1 - \lambda) \cdot \left[2 + \alpha(\lambda) \cdot log_2((1 - \lambda)n)\right]$

❖ 整理后： $\dfrac{-ln2}{\alpha(\lambda)} = \dfrac{\lambda \cdot ln\lambda + (1-\lambda) \cdot ln(1-\lambda)}{2-\lambda}$

❖ 当$\lambda = \phi$时，$\alpha(\lambda) = 1.440420...$达到最小