4.栈与队列

栈混洗

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

栈混洗

❖ 考查栈　$A = \langle\, a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \,]$ 、$B = S = \varnothing$　　//左端为栈顶

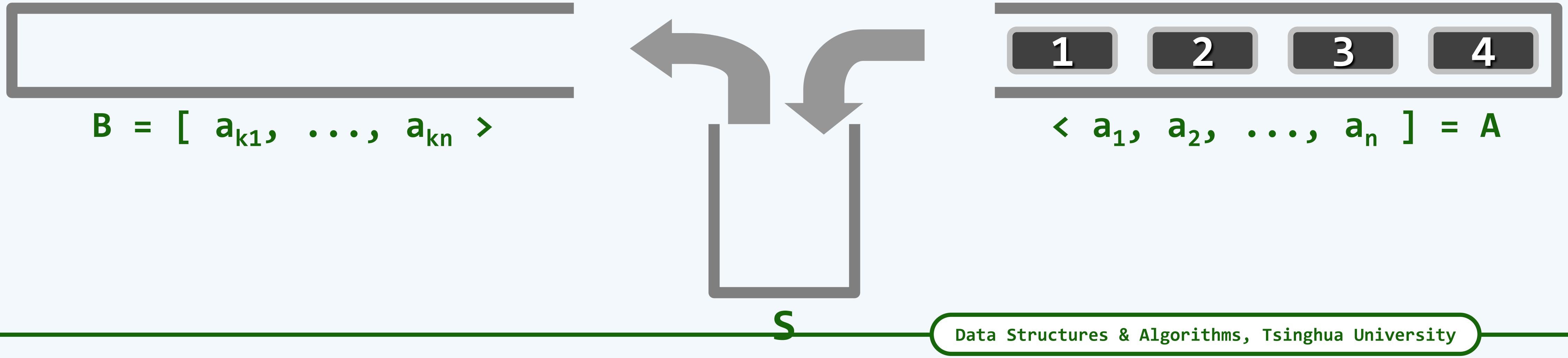
❖ 只允许　将A的顶元素弹出并压入S，或　　//S.push(A.pop())

将S的顶元素弹出并压入B　　//B.push(S.pop())

❖ 若经过一系列以上操作后，A中元素全部转入B中

$B = [\, a_{k1},\ \ldots,\ a_{kn} \,\rangle$　　//右端为栈顶

则称之为A的一个栈混洗（stack permutation）

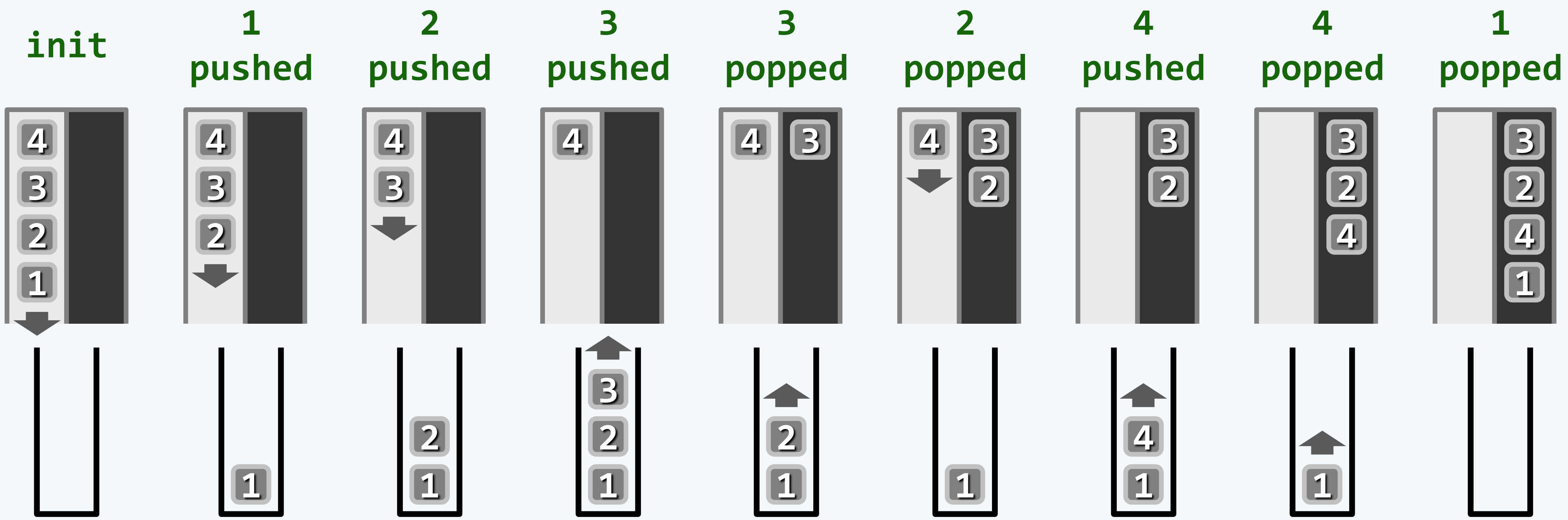


计数

❖ 同一输入序列，可有多种栈混洗

[1, 2, 3, 4 >，[4, 3, 2, 1 >，[3, 2, 4, 1 >，...

❖ 长度为n的序列，可能的混洗总数SP(n) = ? //显然，SP(n) <= n!



计数

❖ SP(1) = 1

❖ 设栈S在第 $\boxed{k}$ 次pop()之后 $\boxed{\text{首次}}$ 重新变空

则 $\boxed{k}$ 无非 $\boxed{n}$ 种情况：

SP(n) = $\boxed{\sum_{k=1}^{n} SP(k-1) \cdot SP(n-k)}$

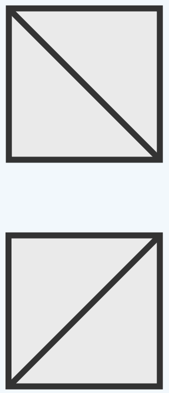
= Catalan(n) = (2n)! / (n+1)! / n!

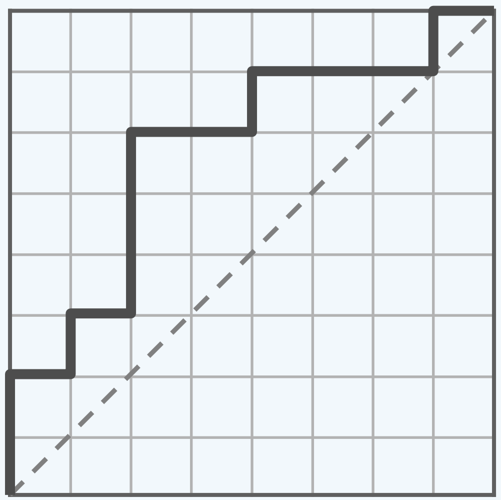
❖ SP(2) = 4! / 3! / 2! = 2

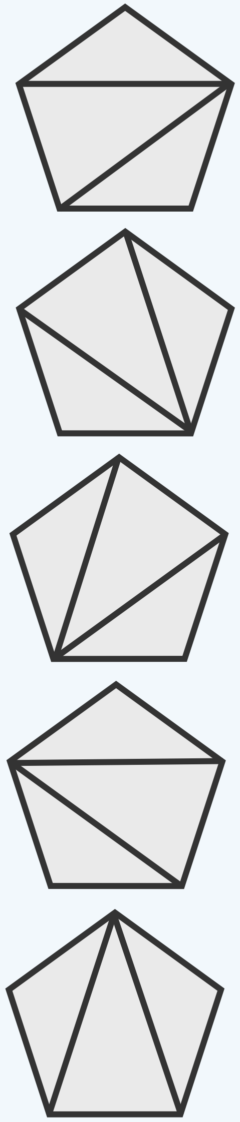
SP(3) = 6! / 4! / 3! = 5

... ...

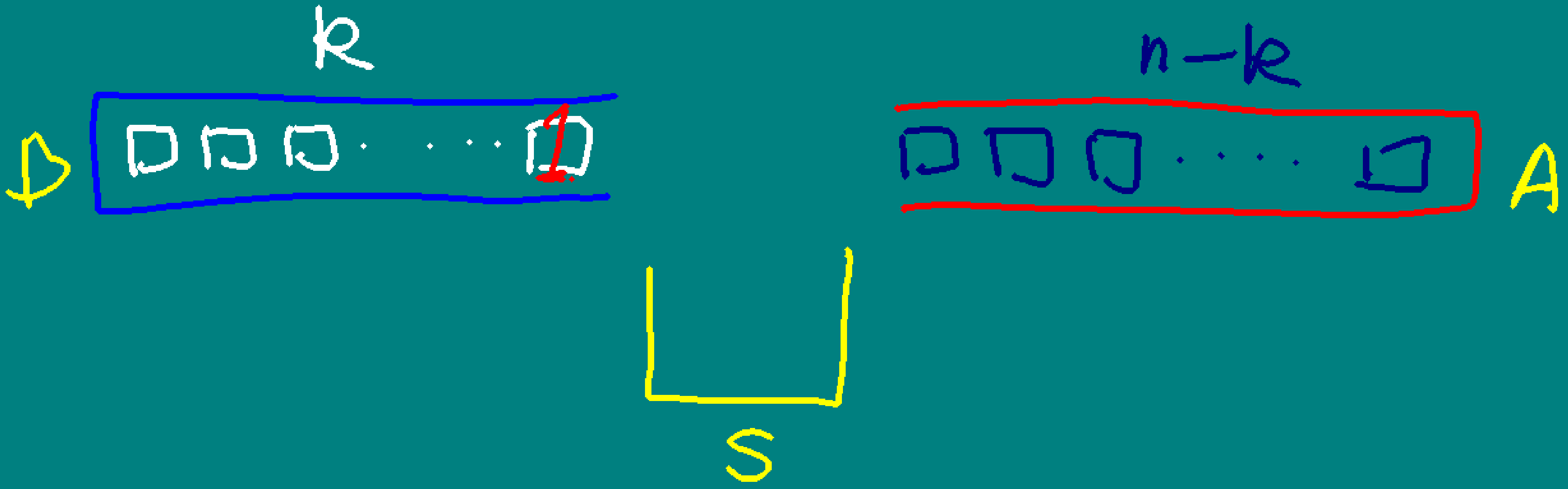
SP(6) = 12! / 7! / 6! = 132







$$SP(n) = \sum_{k=1}^{n} SP(k-1)\cdot SP(n-k)$$



甄别

❖ 输入序列< 1, 2, 3, ..., n]的任一排列[p_1, p_2, p_3, ..., p_n >是否为栈混洗？

❖ 简单情况：< 1, 2, 3]，n = 3

- 栈混洗共 6! / 4! / 3! = 5 种
- 全排列共 3! = 6 种 //少了一种...

❖ $\boxed{[\ 3,\ 1,\ 2\ >}$ //为什么是它？

❖ 观察：任意三个元素能否按某相对次序出现于混洗中，与其它元素无关 //故可推而广之...

❖ 对于任何1 ≤ i < j < k ≤ n

[..., $\boxed{k}$, ..., $\boxed{i}$, ..., $\boxed{j}$, ... > 必非栈混洗

❖ 反过来，不存在“$\boxed{312}$”模式的序列，一定是栈混洗吗？

甄别

❖ 充要性： A permutation is a stack permutation $\boxed{\text{iff}}$

（Knuth, 1968） it does NOT involve the permutation $\boxed{312}$ //习题[4-3]

❖ 如此，可得一个 $\boxed{\mathcal{O}(n^3)}$ 的甄别算法 //进一步地...

❖ [p_1, p_2, p_3, ..., p_n >是< 1, 2, 3, ..., n]的栈混洗，$\boxed{\boxed{\text{当}}\text{且仅当}}$

对于任意i < j，不含模式[..., $\boxed{j + 1}$, ..., $\boxed{i}$, ..., $\boxed{j}$, ... >

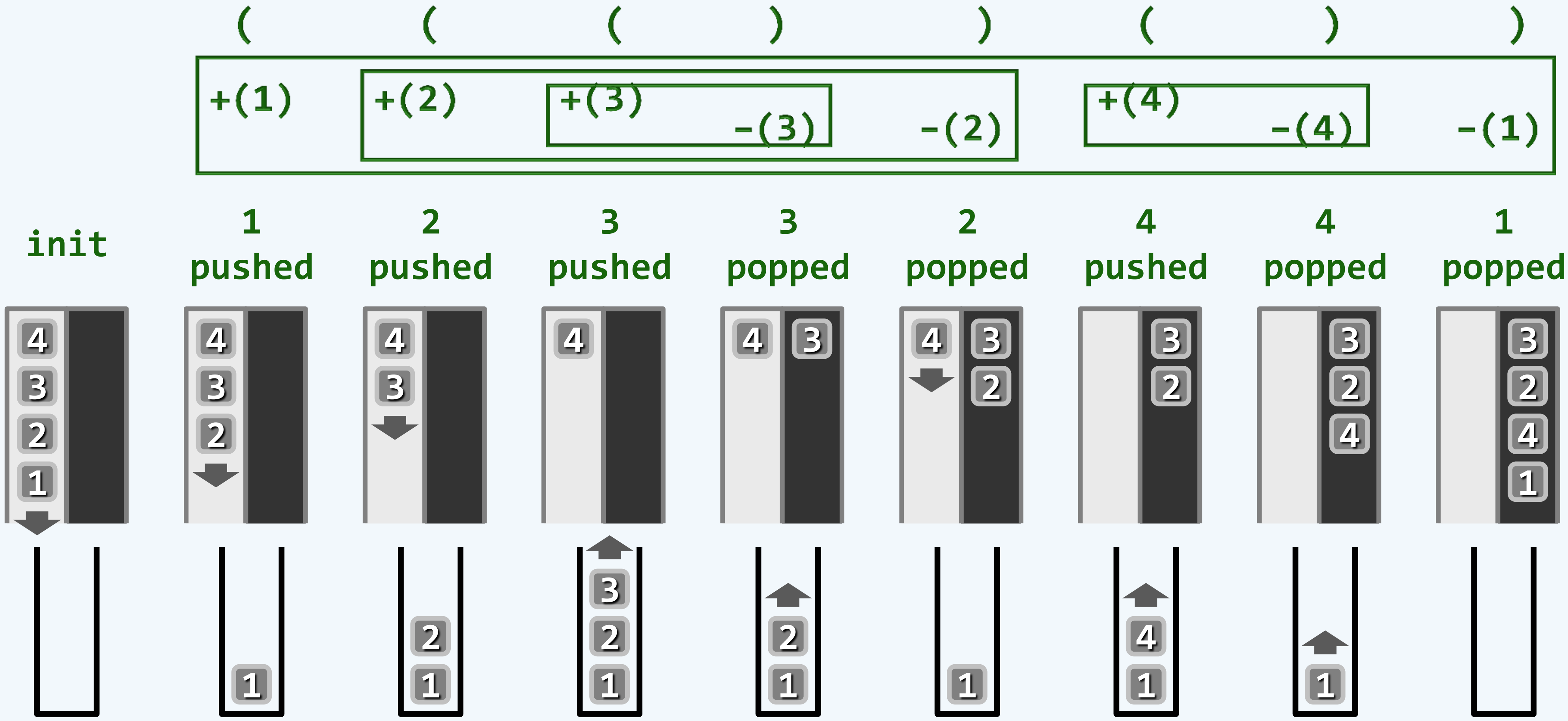
❖ 如此，可得一个 $\boxed{\mathcal{O}(n^2)}$ 的甄别算法 //再进一步地...

❖ $\boxed{\mathcal{O}(n)}$ 算法：直接借助栈A、B和S，模拟混洗过程 //为何可行？

每次S.pop()之前，检测S是否已空；或需弹出的元素在S中，却非顶元素

括号匹配

❖ 观察：每一栈混洗，都对应于栈S的n次push与n次pop操作构成的某一序列



❖ n个元素的栈混洗，等价于n对括号的匹配