

6. 图

Prim算法

最小支撑树

“疯子么，怎能绳之以常理？还有更荒唐的事呢，他要在普济造一条风雨长廊，把村里的每一户人家都连接起来，哈哈，他以为，这样一来，普济人就可免除日晒雨淋之苦了。”

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

最小 + 支撑 + 树

❖ 连通网络 $N = (V; E)$ 的子图 $T = (V; F)$

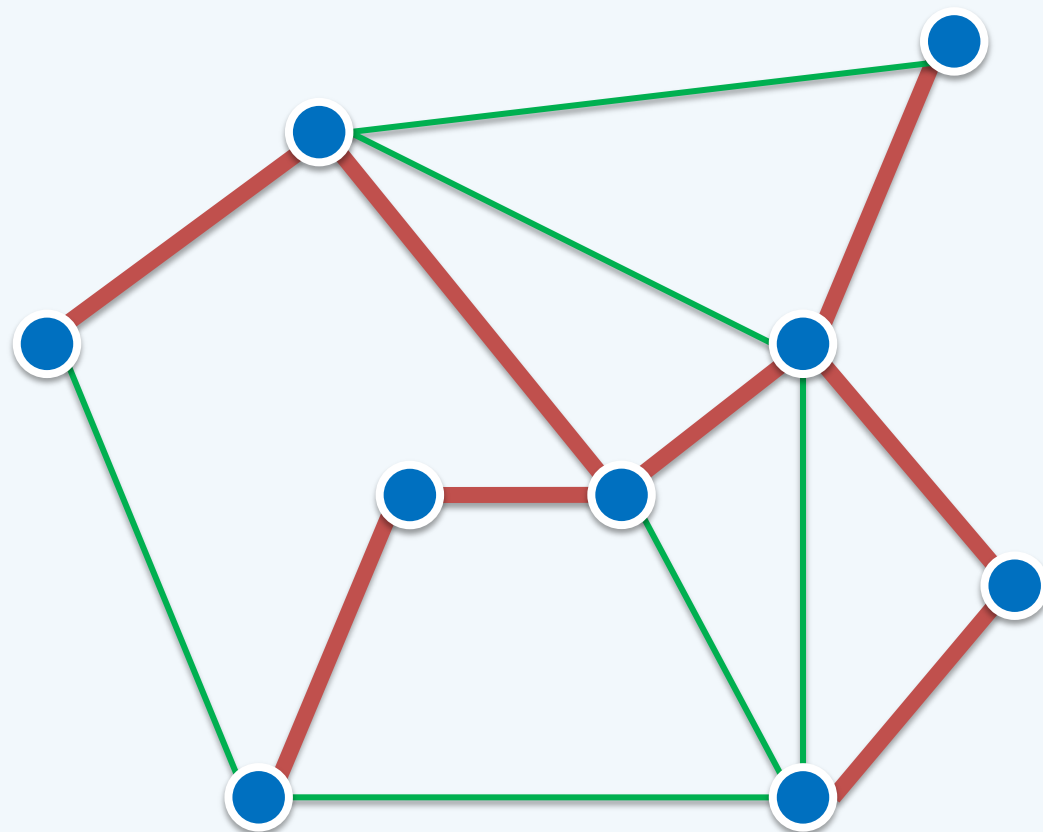
❖ 支撑/spanning = 覆盖 N 中所有顶点

❖ 树/tree =

- 连通且无环, $|V| = |F| + 1$
- 加边出单环, 再删同环边即恢复为树
- 删边不连通, 再加联接边即恢复为树

❖ 不难验证, 同一网络的支撑树不唯一

❖ 最小/minimum = 各边总权重 $wt(T) = \sum_{e \in F} wt(e)$ 达到最小

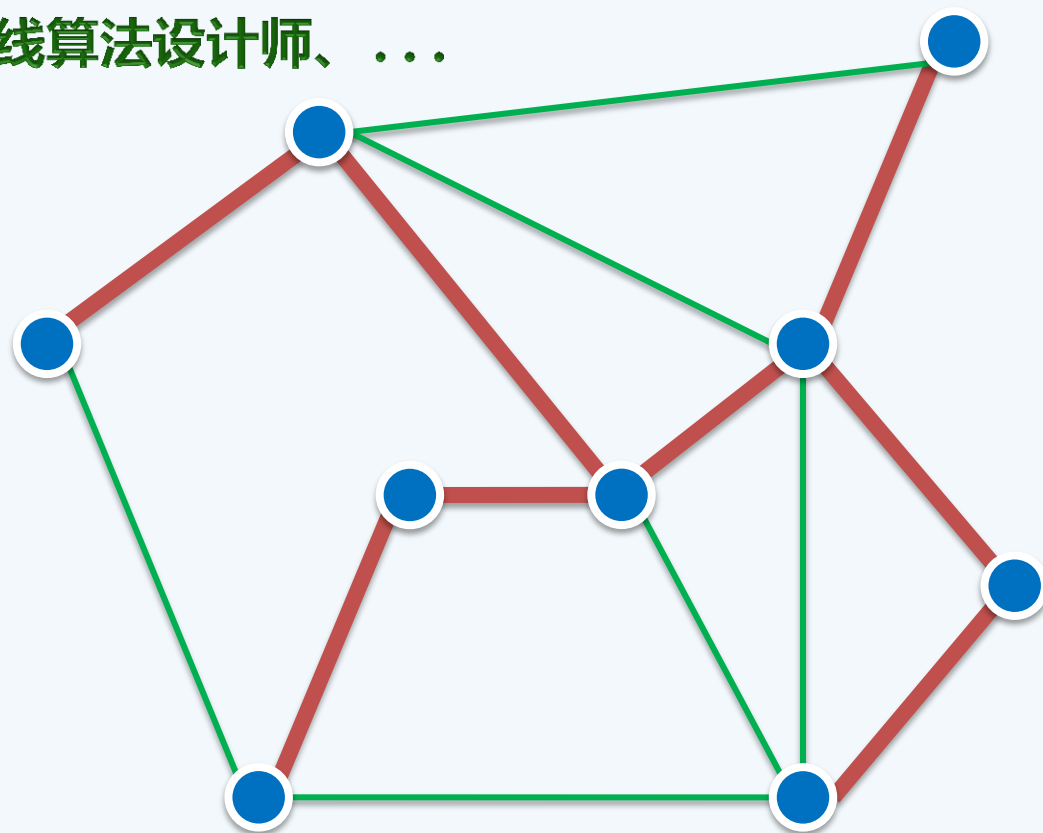


❖ 谁感兴趣？电信公司、网络设计师、VLSI布线算法设计师、...

❖ 为何重要？

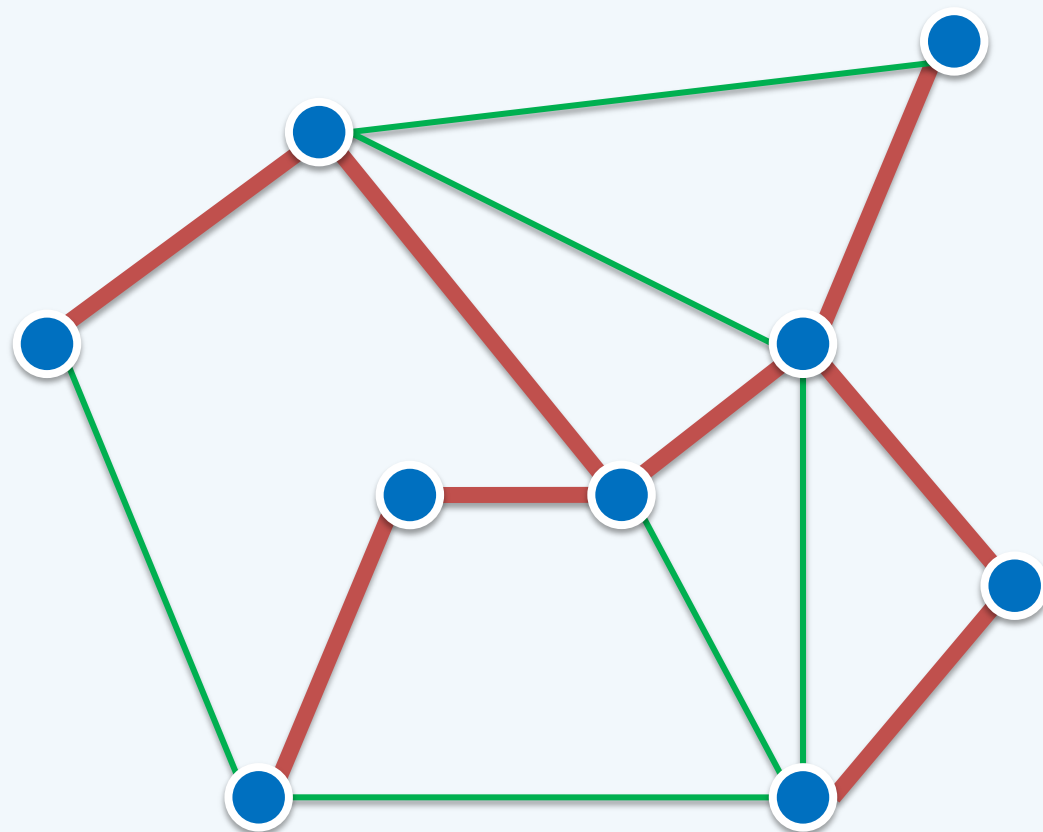
- 应用中常见的共性问题
- 也是很多优化问题的基本模型
- 自身可有效计算
- 为许多NP问题提供足够好的近似解

比如，Euclidean TSP



已有算法

- ❖ Boruvka-1926
- ❖ Jarník-1930
- ❖ Prim-1956
- ❖ Kruskal-1956
- ❖ Karger-Klein-Tarjan-1995
- ❖ Chazelle-2000
- ❖ ...是否...存在 $O(n + e)$ 算法?

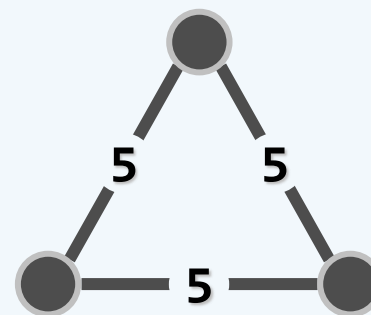
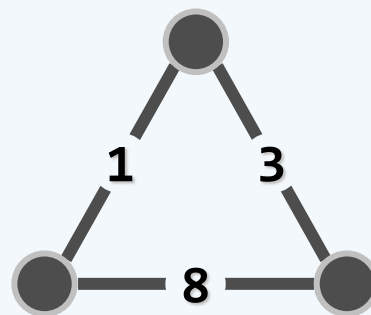
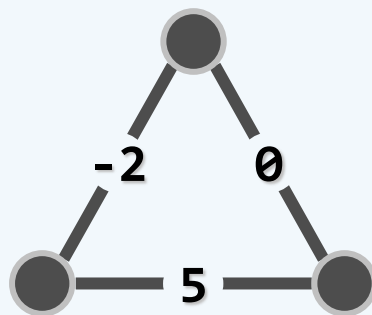


退化

❖ 权值必须是正数？

允许为零，会有什么影响？

允许为负数呢？

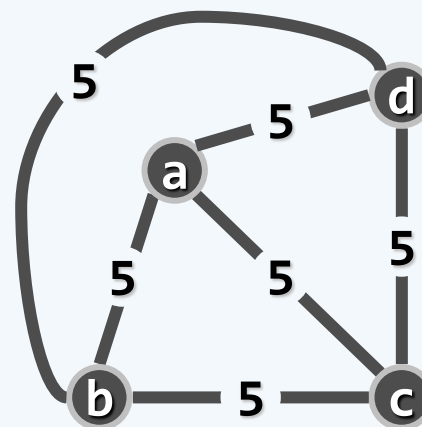


❖ 所有支撑树所含的边数，必然相等

故可统一调整：`increase(1 - findMin())`

❖ The minimum？

- A minimal 同一网络N可能有多棵MST
- The minimum！ 可强制消除歧义...



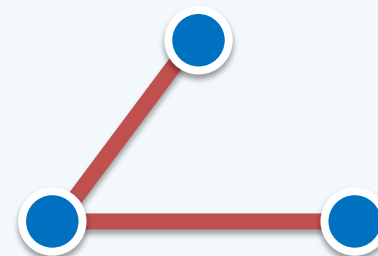
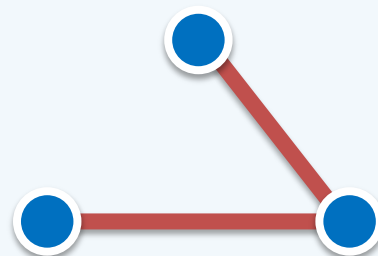
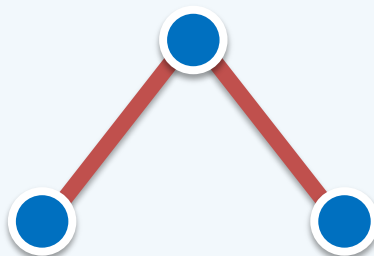
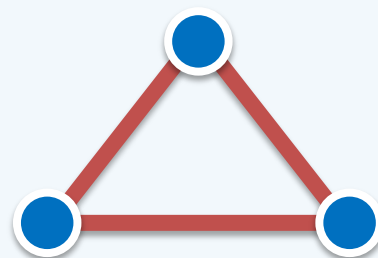
❖ 合成数 (composite number) : ($w(u, v)$, $\min(u, v)$, $\max(u, v)$)

$5ab < 5ac < 5ad < 5bc < 5bd < 5cd$

蛮力算法

- ❖ 枚举出N的所有支撑树，从中找出代价最小者
- ❖ 这一策略是否可行，取决于...
- ❖ n个互异顶点组成的图，可能有多少棵支撑树？

$n = 1$	1
$n = 2$	1
$n = 3$	3
$n = 4$	16
...	...



- ❖ Cayley公式：联接n个互异顶点的树共有 n^{n-2} 棵；或等价地，完全图 K_n 有 n^{n-2} 棵支撑树
- ❖ 如何高效地构造MST呢？