

1. 绪论

算法分析

级数

邓俊辉

谁校对时间，谁就会突然老去。

deng@tsinghua.edu.cn

算法分析

- ❖ 两个主要任务 = 正确性（不变性 × 单调性） + 复杂度
- ❖ 为确定后者，真地需要将算法描述为RAM的基本指令，再统计累计的执行次数？不必！
- ❖ C++等高级语言的`基本指令`，均等效于常数条RAM的`基本指令`；在渐进意义下，二者大体相当
 - 分支转向：`goto` //算法的灵魂；出于结构化考虑，被隐藏了
 - 迭代循环：`for()`、`while()`、... //本质上就是“if + goto”
 - 调用 + 递归（自我调用） //本质上也是goto
- ❖ 复杂度分析的主要方法
 - 迭代：级数求和
 - 递归：递归跟踪 + 递推方程
 - 猜测 + 验证

级数

❖ **算数级数：与末项平方同阶** $T(n) = 1 + 2 + \dots + n = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \mathcal{O}(n^2)$

❖ **幂方级数：比幂次高出一阶：** $\sum_{k=0}^n k^d \approx \int_0^n x^d dx = \frac{x^{d+1}}{d+1} \Big|_0^n = \frac{n^{d+1}}{d+1} = \mathcal{O}(n^{d+1})$

$$T_2(n) = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6 = \mathcal{O}(n^3)$$

$$T_3(n) = \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = n^2(n+1)^2/4 = \mathcal{O}(n^4)$$

$$T_4(n) = \sum_{k=1}^n k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30 = \mathcal{O}(n^5)$$

❖ **几何级数：与末项同阶**

$$T_a(n) = \sum_{k=0}^n a^k = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = \mathcal{O}(a^n), \quad 1 < a$$

$$T_2(n) = \sum_{k=0}^n 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 = \mathcal{O}(2^{n+1}) = \mathcal{O}(2^n)$$

级数

❖ 收敛级数

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1) \cdot k} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n} = \mathcal{O}(1)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = \mathcal{O}(1)$$

$$\sum_{k \text{ is a perfect power}} \frac{1}{k-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \dots = 1 = \mathcal{O}(1)$$

❖ 有必要讨论这类级数吗？难道，基本操作次数、存储单元数可能是**分数**？是的，某种意义上！

$$(1 - \lambda) \cdot [1 + 2\lambda + 3\lambda^2 + 4\lambda^3 + \dots] = 1/(1 - \lambda) = \mathcal{O}(1), \quad 0 < \lambda < 1$$

//几何分布

❖ 可能未必收敛，然而长度有限

$$h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \Theta(\log n)$$

//调和级数

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 + \dots + \log n = \log(n!) = \Theta(n \log n)$$

//对数级数

❖ 如有兴趣，不妨读读：[Concrete Mathematics](#)

//ex-2.35, Goldbach Theorem