

请告诉我谁是中国人  
启示我，如何把记忆抱紧  
请告诉我这个民族的伟大  
轻轻的告诉我，不要喧哗

## 1. 绪论

动态规划

记忆法

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

## fib() : 递归

❖  $\text{fib}(n) = \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2)$  //{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...}

❖ `int fib(n)` //为何这么慢?

```
{ return (2 > n) ? n : fib(n - 1) + fib(n - 2); }
```

❖ **复杂度:**  $T(0) = T(1) = 1; \quad T(n) = T(\lfloor n-1 \rfloor) + T(\lfloor n-2 \rfloor) + 1, \forall n > 1$

令  $S(n) = [T(n) + 1]/2$

则  $S(0) = 1 = \text{fib}(1), \quad S(1) = 1 = \text{fib}(2)$

故  $S(n) = S(n-1) + S(n-2) = \text{fib}(n+1)$

$$T(n) = 2 \cdot S(n) - 1 = 2 \cdot \text{fib}(n+1) - 1 = O(\text{fib}(n+1)) = \mathcal{O}(\phi^n) = \mathcal{O}(2^n)$$

其中  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$

## 封底估算

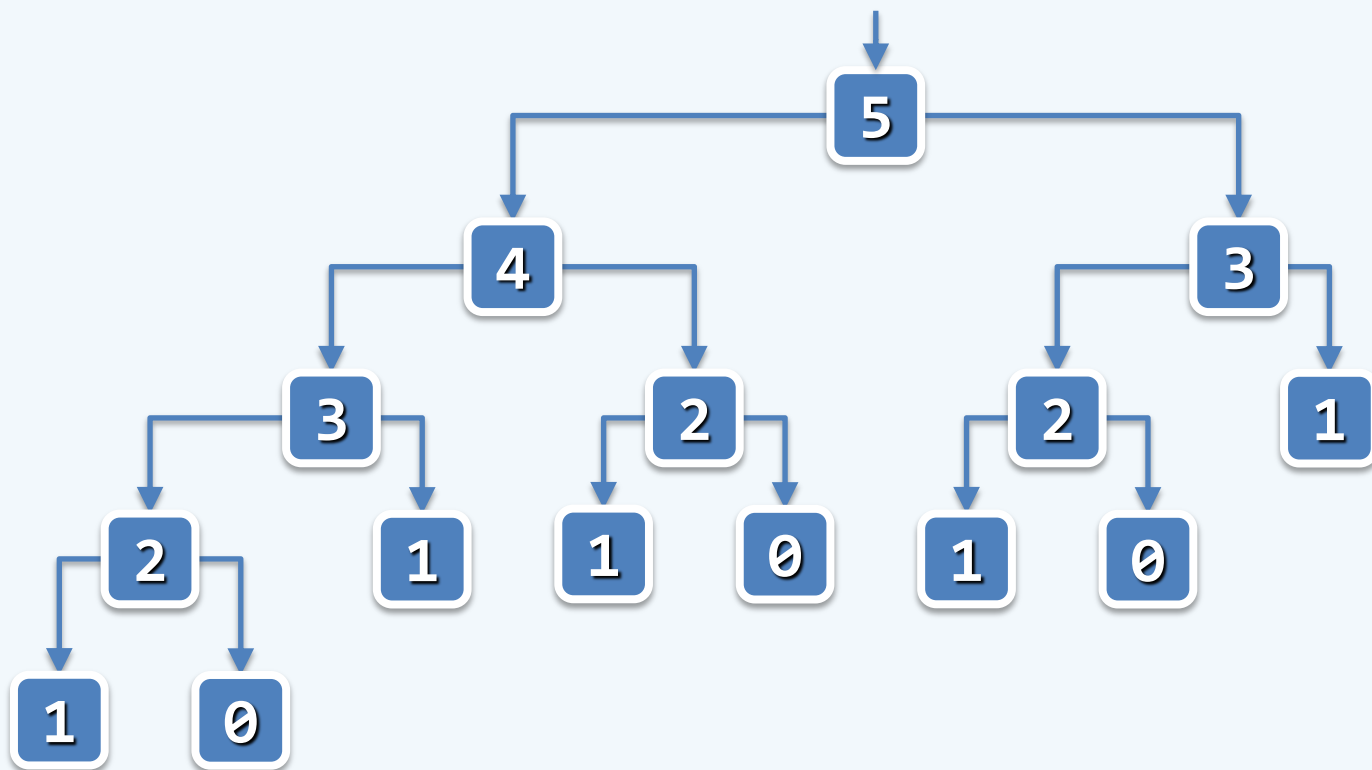
$$\phi^{36} \approx 2^{25} \quad \phi^{43} \approx 2^{30} \approx 10^9 \text{ flo} = 1 \text{ sec}$$

$$\phi^5 \approx 10 \quad \phi^{67} \approx 10^{14} \text{ flo} = 10^5 \text{ sec} \approx 1 \text{ day}$$

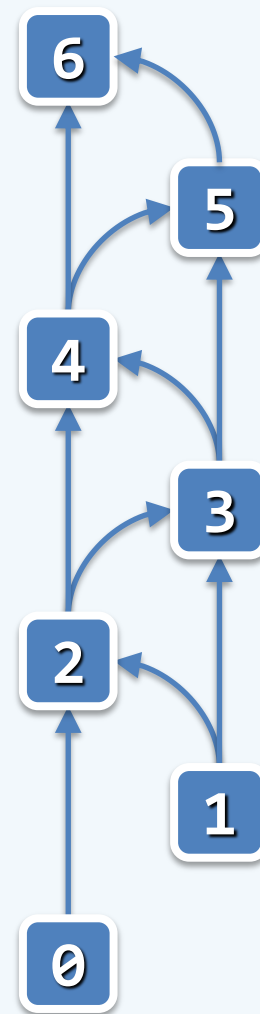
$$\phi^{92} \approx 10^{19} \text{ flo} = 10^{10} \text{ sec} \approx 10^5 \text{ day} \approx 3 \text{ century}$$

## fib() : 递归

❖ 递归版fib()低效的根源在于，各递归实例均被大量重复地调用



❖ 先后出现的递归实例，共计  $\mathcal{O}(\phi^n)$  个  
而去除重复之后，总共不过  $\mathcal{O}(n)$  种



fib() : 迭代

### ❖ 解决方法A ( 记忆 : memoization )

## 将已计算过实例的结果制表备查，避免重复调用

### ❖ 解决方法B（动态规划：dynamic programming）

**颠倒计算方向：由自顶而下递归，为自底而上迭代**

```
❖ f = 1; g = 0; //fib(-1), fib(0)
```

```
while ( 0 < n-- ) {
```

$$g = g + f;$$
$$f = g - f;$$

}

```
return g;
```

❖  $T(n) = O(n)$ ，而且仅需 $O(1)$ 空间！

