4.栈与队列

试探回溯法：八皇后

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

```
/* D. Osovlanski & B. Nissenbaum, 1990 */
int v,i,j,k,l,s,a[99];void main(){for(scanf("%d",&s);*a-s;
v=a[j*=v]-a[i],k=i<s,j+=(v=j<s&&(!k&&!!printf(2+"\n\n%c"-(
!l<<!j)," .Q"[l^v?(l^j)&1:2])&&++l||a[i]<s&&v&&v-i+j&&v+i-
j))&&!(l%=s),v||(i==j?a[i+=k]=0:++a[i])>=s*k&&++a[--i]);}
```

```
/* Andor@net9.org, 2002 */
#define q(o)a[j]o[j+i+7]o[j-i+31]
a[39];
main(i,j)
{ for(j=9;--j;i>8?printf("%10d",a[j]):q(|a)||(q(=a)=i,main(i+1),q(=a)=0)); }
```

指数爆炸

❖ 很多问题的解，形式上都可看作

若干元素按特定次序构成的序列

❖ 以TSP问题为例，即

给定n个城市之间总成本最低的环游路线

❖ 每一排列组合都是一个候选解

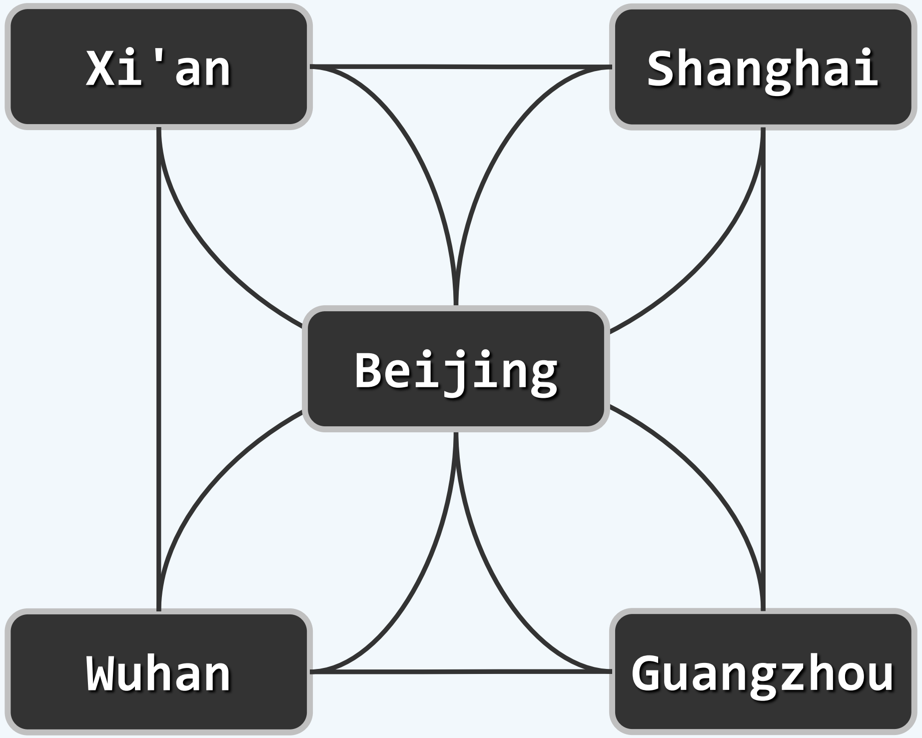
往往构成一个极大的搜索空间

❖ 仍以TSP为例，共有：$n!/n = (n-1)! = O(n^n)$

❖ 若采用蛮力策略求解

需逐一生成可能的候选解，并检查其是否合理

如此，必然无法将时间复杂度控制在多项式以内



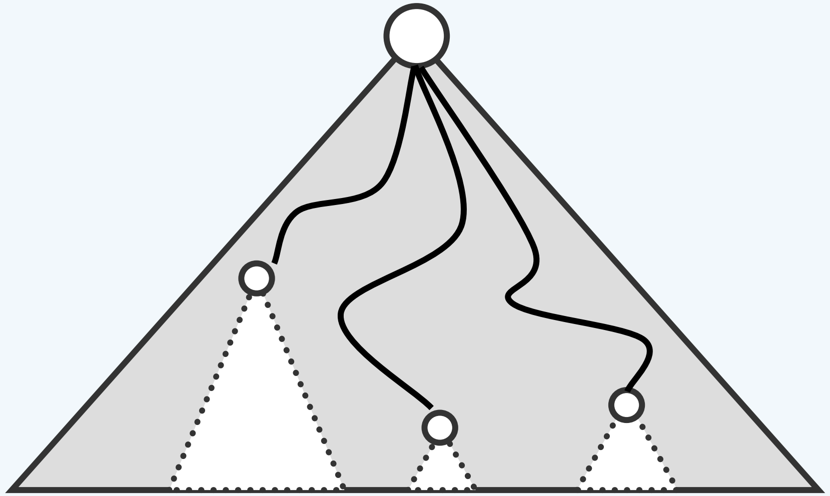
试探-回溯-剪枝

❖ 为尽可能多、尽可能早地排除候选解，须深刻理解应用问题，并利用其特有的规律

❖ 事实上，根据候选解的某种**局部特征**，即可判断其是否合理

此时只要策略得当，便可成批地排除候选解

此即所谓剪枝（pruning）



❖ 试探回溯（probe-backtrack）模式

从0开始，逐渐增加候选解长度 //试探

一旦发现注定要失败，则

收缩至前一长度，并 //剪枝回溯

继续试探

❖ 特修斯的法宝 = 线绳 + 粉笔

如何以数据结构的形式兑现？

八皇后

- ❖ 在n×n的棋盘上放置n个皇后，使得她们彼此互不攻击

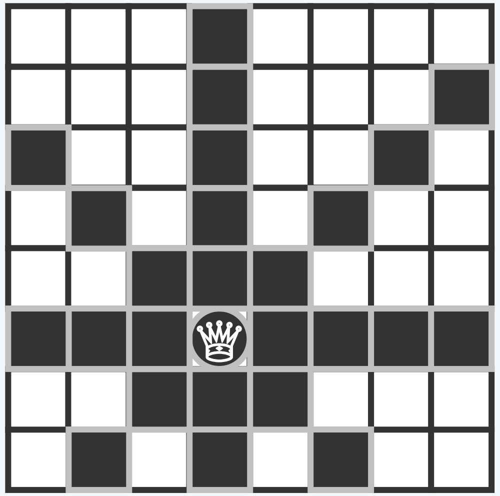
  有多少种可行的布局？如何布局？

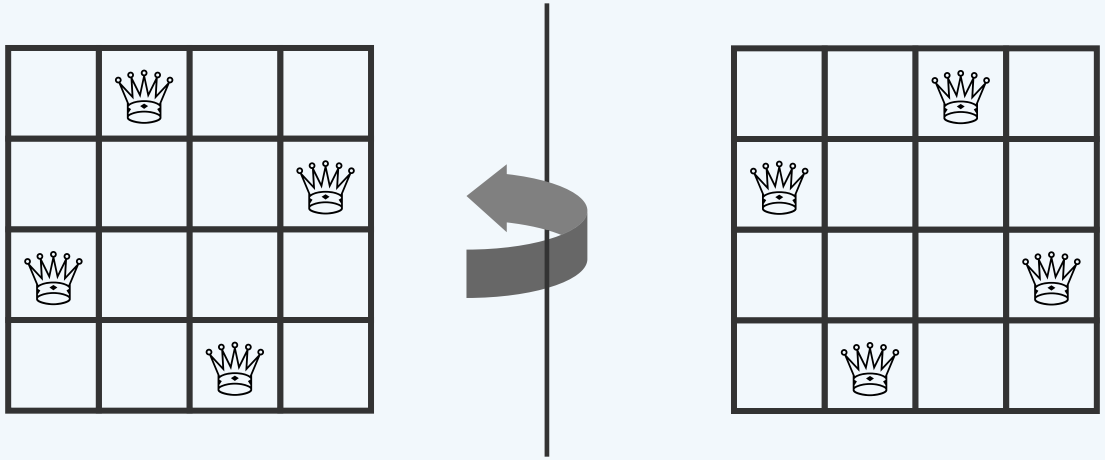
  是否考虑**旋转**、**翻转**之后的等价？

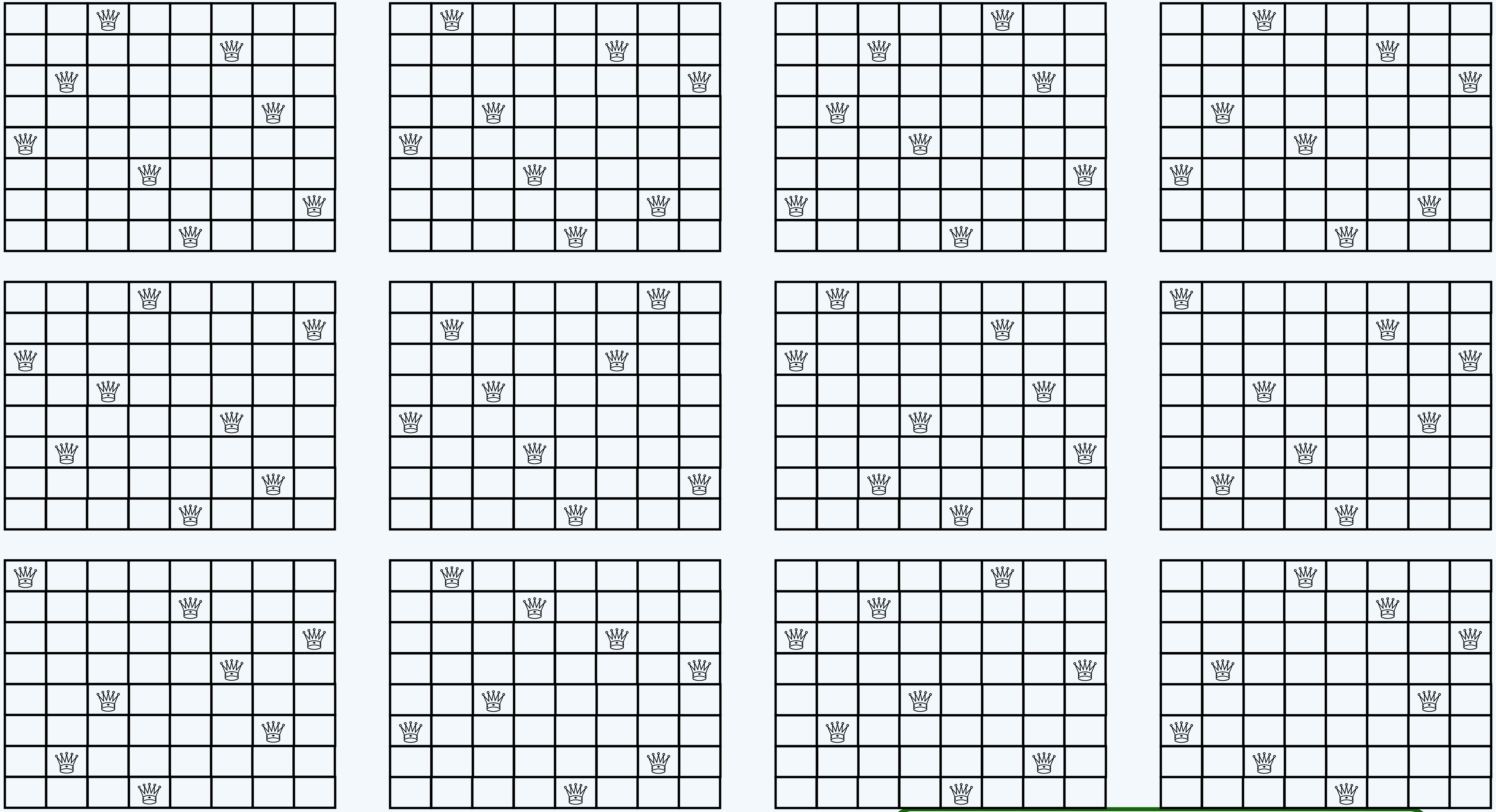
- ❖ n = 1, 2, 3, 4, ...

  允许重复： 1, 0, 0, 2, 10, 4, 40, 92, ...

  不许重复： 1, 0, 0, 1, 2, 1, 6, 12, 46, 92, ...





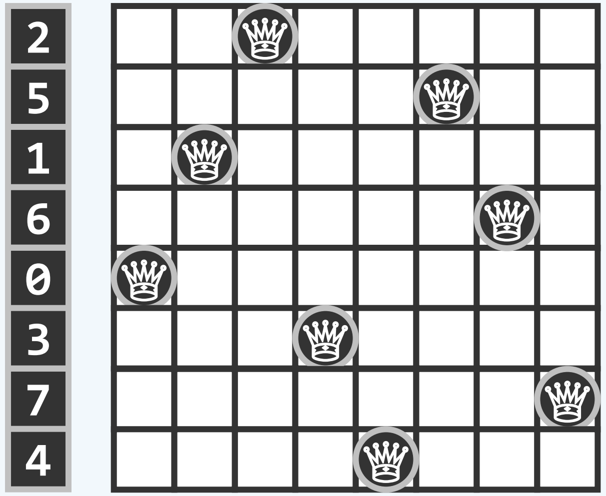


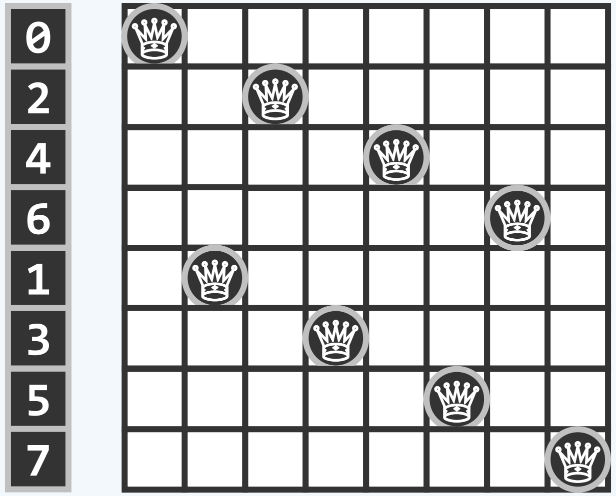
编码

❖ 观察：每行（列）有且仅有一个皇后

❖ 因此，每一布局（候选解）都可编码为整数{ 0, ..., n - 1 }的一个排列

❖ 反之，每一这样的排列，未必是一个可行布局（解）





蛮力搜索

❖
```
void place4Queens_BruteForce() { //4皇后蛮力算法
   int solu[4]; //候选解编码向量
   for ( solu[0] = 0; solu[0] < 4; solu[0]++ )
   for ( solu[1] = 0; solu[1] < 4; solu[1]++ )
   for ( solu[2] = 0; solu[2] < 4; solu[2]++ )
   for ( solu[3] = 0; solu[3] < 4; solu[3]++ ) { //枚举所有候选解
      if ( collide( solu, 0 ) ) continue;
      if ( collide( solu, 1 ) ) continue;
      if ( collide( solu, 2 ) ) continue;
      if ( collide( solu, 3 ) ) continue;
      nSolu++; displaySolution( solu, 4 );
   }
} //复杂度高达O(4^4) = O(n^n)
```

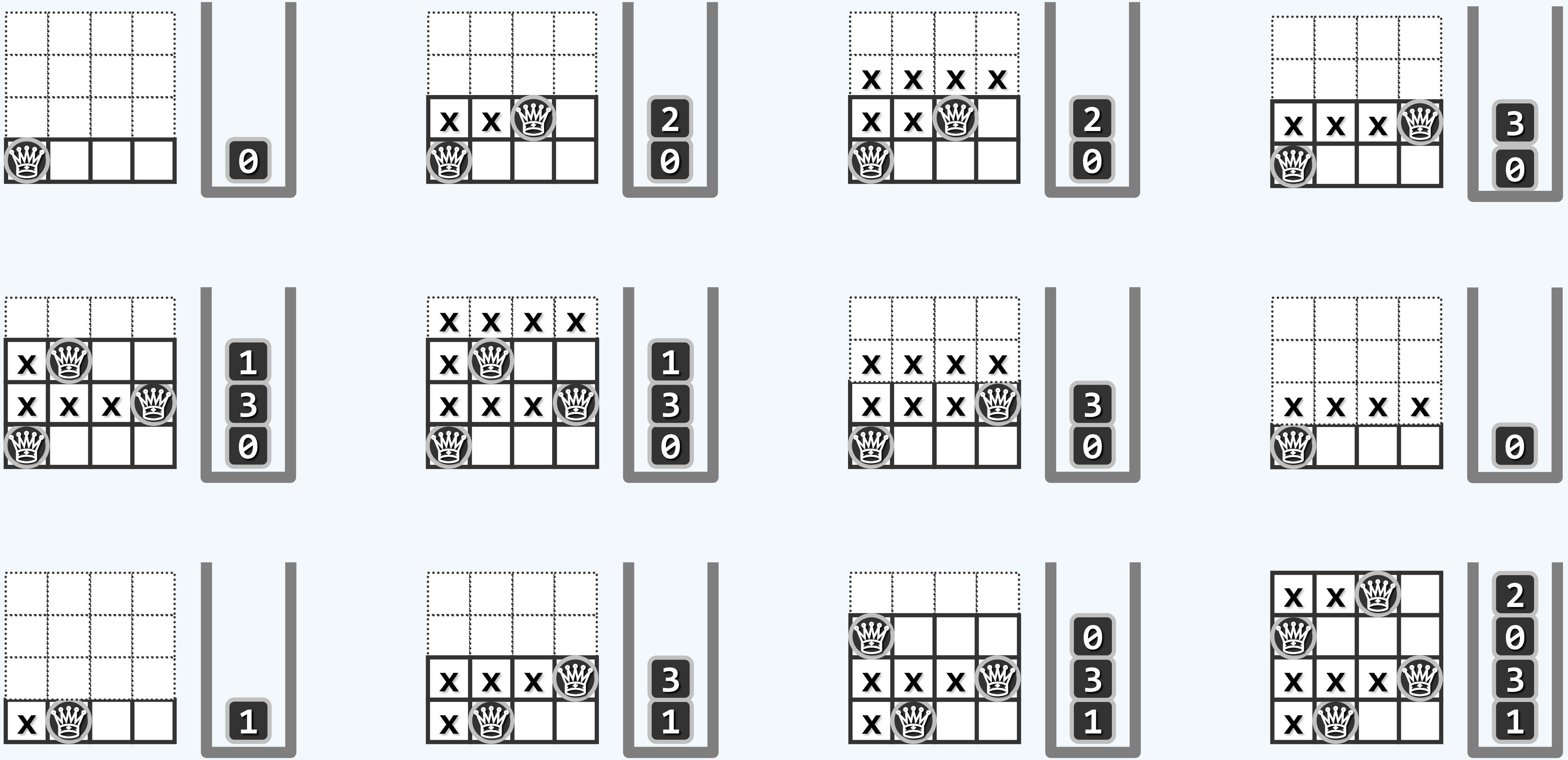
剪枝

❖
```
void place4Queens() { //4皇后剪枝算法
   int solu[4]; //候选解编码向量
   for ( solu[0] = 0; solu[0] < 4; solu[0]++ )
      if ( ! collide( solu, 0 ) ) //剪枝
         for ( solu[1] = 0; solu[1] < 4; solu[1]++ )
            if ( ! collide( solu, 1 ) ) //剪枝
               for ( solu[2] = 0; solu[2] < 4; solu[2]++ )
                  if ( ! collide( solu, 2 ) ) //剪枝
                     for ( solu[3] = 0; solu[3] < 4; solu[3]++ )
                        if ( ! collide( solu, 3 ) ) { //剪枝
                           nSolu++; displaySolution( solu, 4 );
                        }
} //复杂度大大降低，但算法的通用性欠佳
```

通用算法

```
❖ void placeQueens(int N) { //N = 棋盘大小 = 皇后总数，问题的规模可任意
     Stack<Queen> solu; Queen q(0, 0); //存放（部分）解的栈，从原点位置出发
     do { //反复试探、回溯
        if (N <= solu.size() || N <= q.y) { //若已出界，则
           q = solu.pop(); q.y++; //回溯一行，并继续试探下一列
        } else { //否则，试探下一行
           while ( (q.y < N) && ( 0 <= solu.find(q) ) ) //通过与已有皇后的比对
              q.y++; //尝试找到可摆放下一皇后的列
           if (N > q.y) { //若存在可摆放的列，则摆上当前皇后
              solu.push(q); if (N <= solu.size()) nSolu++; //若局部解已成全局解，则计数
              q.x++; q.y = 0; //转入下一行，从第0列开始，试探下一皇后
           }
        }
     } while ((0 < q.x) || (q.y < N)); //直至所有分支均已被检查或剪枝
}
```

实例



数据结构

- 以上算法中的“solu.find(q)”，如何利用栈（向量）的查找接口？
- 定义皇后类Queen，重新定义判等器，使之在语义上与冲突等价
- struct Queen { //皇后类

```
struct Queen { //皇后类
    int x, y; Queen( int xx = 0, int yy = 0 ) : x(xx), y(yy) {}; //皇后的坐标
    bool operator==( Queen const & q ) { //重载判等操作符
        return ( x == q.x ) //行冲突（不会发生，可省略）
            || ( y == q.y ) //列冲突
            || ( x + y == q.x + q.y ) //沿正对角线冲突
            || ( x - y == q.x - q.y ); //沿反对角线冲突
    }
    bool operator!=( Queen const & q ) { return !( *this == q ); }
};
```