复数信号与希尔伯特（Hilbert）变换

1、复数信号的定义

2、复数信号的实部与虚部及希尔伯特变换

3、实时间信号的复指数表示和解析信号表示

4、窄带实时间信号自相关函数的复数化求解

复数信号的定义

复数信号的定义

为什么引入复信号?

有时直接分析实时间信号会碰到不少困难，如

$$x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

采用复数信号的处理方法，即把实时间信号变成复数信号来分析，从而达到分析实时间信号的目的，会使问题简化。

如: $x(t) = \cos\omega_0 t$

复数信号为:

$$\boxed{\xi(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t}$$ 旋转矢量

$$\boxed{x(t) = \mathrm{Re}[\xi(t)] = \mathrm{Re}[e^{j\omega_0 t}] = \cos\omega_0 t}$$

复数信号的定义

希尔伯特变换

对实信号$x(t)$，定义复数信号为：

$$\xi(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

$$\boxed{x(t) = \mathrm{Re}[\xi(t)]}$$

$x(t)$与$\hat{x}(t)$之间满足希尔伯特变换（**Hilbert**）关系。

$\xi(t)$的频谱呈现单边谱特性

$$\boxed{G_\xi(\omega) = \begin{cases} G_\xi(\omega)U(\omega) & , \quad \omega > 0 \\ 0 & , \quad \omega < 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\xi(t) \leftrightarrow G_\xi(\omega)}$$

复数信号的定义

由于: $x(t)=\mathfrak{I}^{-1}[X(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega+[\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega]^{*}$$

$$=\mathrm{Re}[\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}2X(\omega)e^{j\omega t}d\omega]$$

且又有: $x(t)=\mathrm{Re}[\xi(t)]=\mathrm{Re}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_{\xi}(\omega)e^{j\omega t}d\omega]$

故: $\xi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}2X(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_{\xi}(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

复数信号的定义

$$\xi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}2X(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_{\xi}(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

即：$$G_{\xi}(\omega)=\begin{cases}2X(\omega)\,, & \omega>0\\ 0\,, & \omega<0\end{cases}$$

或 $$G_{\xi}(\omega)=2X(\omega)U(\omega)$$

上式说明，复信号的频谱等于实时间信号单边谱的 2 倍。

因此，$G_{\xi}(\omega)$由 $X(\omega)$唯一确定。