随机过程的数字特征

对随机变量

a. 均值（数学期望、一阶原点矩）

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx=a$$

b. 方差（二阶原点矩）

$$D[X]=E\left[(X-a)^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\cdot f(x)dx=\sigma^2$$

c. 协方差（对随机变量**X**、**Y**）

$$COV[X,Y]=E\left[(X-a_X)(Y-a_Y)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a_X)\cdot(y-a_Y)\cdot f(x)\cdot f(y)dxdy$$

对**随机过程**

1.随机过程的**数学期望**（**均值**）

$t=t_1$ 时， $X(t_1)$为随机变量。

$$E[X(t_1)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_1\cdot f_1(x_1,t_1)dx_1=a(t_1)$$

上式中，t 取任意值时，得到随机过程的数学期望。

$$\boxed{E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_1(x,t)dx=a(t)}$$

$f_1(x,t)$为$X(t)$在 t时刻的一维概率密度函数。

数学期望: $X(t)$在 t时刻的随机变量的均值, 它表示了随机过程在各个孤立刻上的随机变量的概率分布中心，由一维概率密度函数所决定。

2. 随机过程的**方差**

$t=t_1$ 时， $X(t_1)$ 为随机变量。

$$D\left[X(t_1)\right]=E\{[X(t_1)-a(t_1)]^2\}=\sigma^2(t_1)$$

上式中，t 取任意值时，得到随机过程的方差。

$$\boxed{\begin{aligned} D\left[X(t)\right]&=E\{[X(t)-a(t)]^2\} \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\cdot f_1(x,t)dx=\sigma^2(t)\end{aligned}}$$

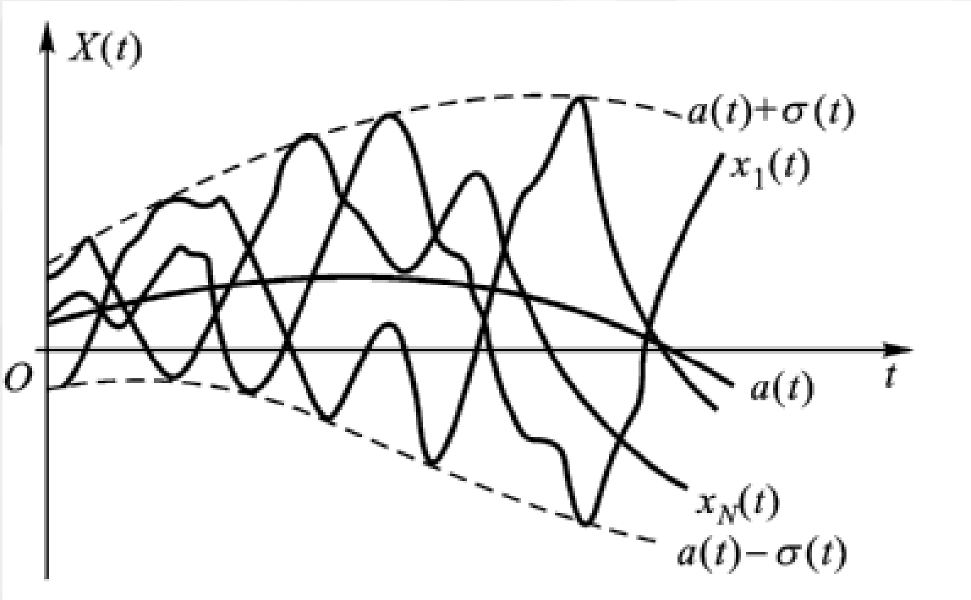
$f_1(x,t)$ 为 $X(t)$ 在 t 时刻的一维概率密度函数。

方差： 表示随机过程在各个孤立时刻上的随机变量对均值的偏离程度。由一维概率密度函数所决定。

进一步分析，$\sigma^2(t)=E\left[X^2(t)\right]-E^2\left[X(t)\right]$

当 $E\left[X(t)\right]=0$时，有 $\sigma^2(t)=E\left[X^2(t)\right]$

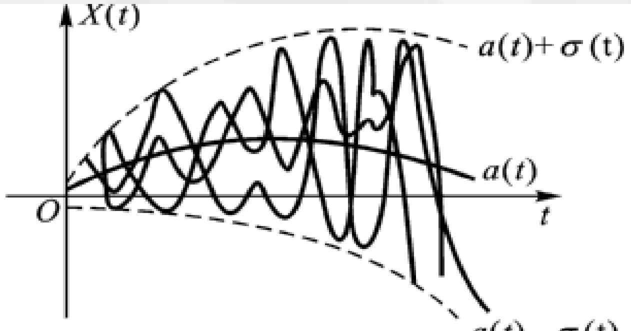
(平均功率)



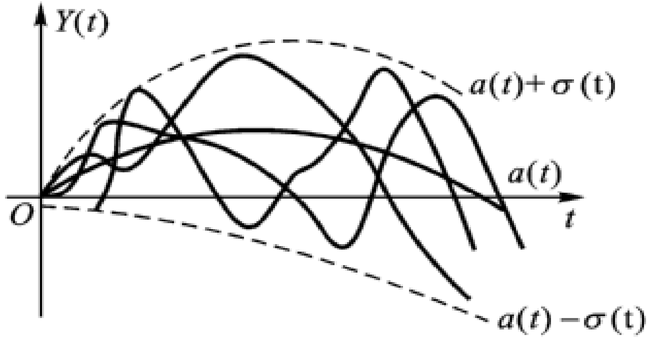
随机过程的均值和方差的含义

3. 随机过程的**自相关函数**

均值和方差，仅描述了随机过程在孤立时刻上的统计特性，它们不能反映出过程内部任意两个时刻之间的内在联系，如下图所示。



(a)



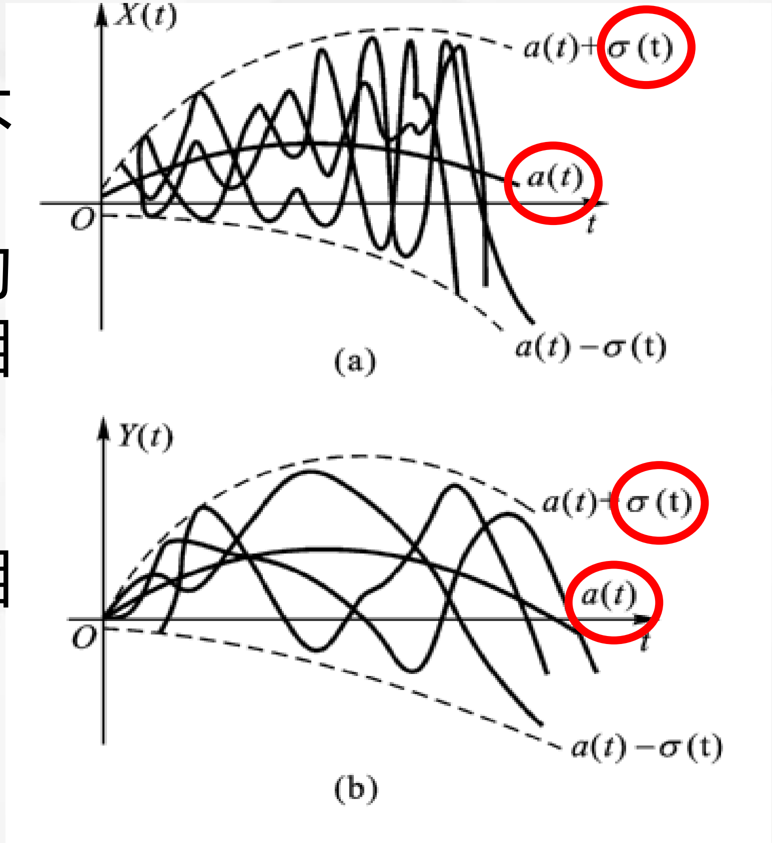
(b)

3. 随机过程的**自相关函数**

图中X(t))和Y(t)具有**相同的均值和方差**，但统计特性明显不同。 X(t)变化快，Y(t)变化慢，即过程内部任意两个时刻之间的内在联系不同或者说过程的自相关函数不同。

X(t)变化快，表明过程内部任意两个时刻之间波及小，互相依赖弱， 即自相关性弱。

Y(t)变化慢，表明随机过程内部任意两个时刻之间波及大，互相依赖强，即自相关性强。



相关： 指随机过程在某时刻的取值对下一时刻的取值的影响。影响越大，相关性越强，反之，相关性越弱。

随机过程的**协方差函数**

$$B(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-a(t_1)][X(t_2)-a(t_2)]\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-a(t_1)][x_2-a(t_2)]f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

随机过程的**自相关函数**

$$R(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

$B(t_1,t_2)$ 与$R(t_1,t_2)$ 的关系

$$\boxed{B(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)-E[X(t_1)]\cdot E[X(t_2)]}$$

随机过程的协方差函数与自相关函数常记为:

$$B(t,t+\tau) \qquad R(t,t+\tau)$$

其中，t 为考察的起始时刻，τ 为考察的时间间隔。

综上所述:

随机过程可以用均值、方差及自相关函数等数字特征来描述。

在实际系统中遇到的随机过程，其数字特征的表达往往十分简洁，因此，用数字特征来描述随机过程是行之有效的方法。