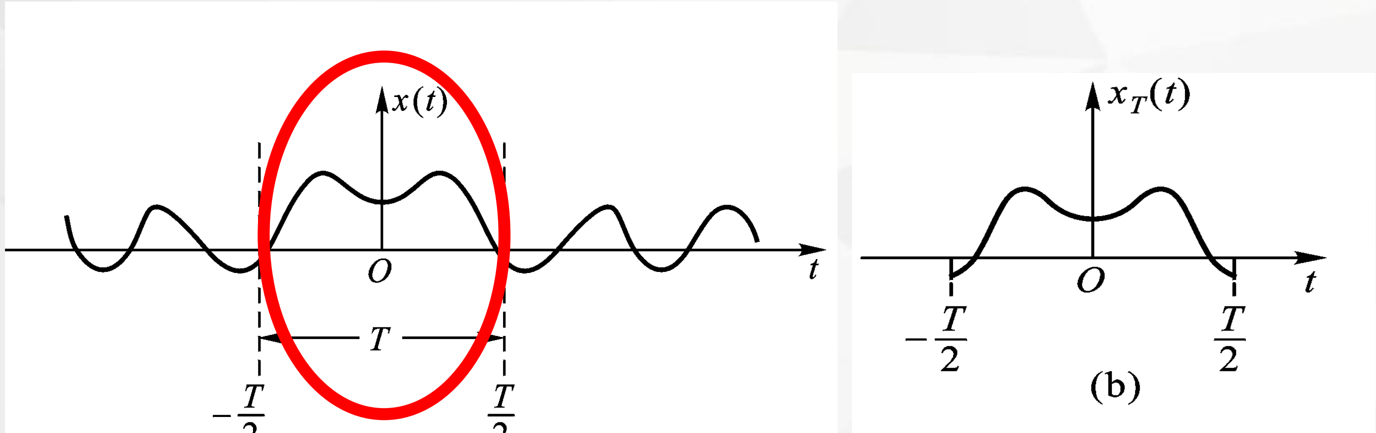
功率信号及功率谱密度函数

功率信号

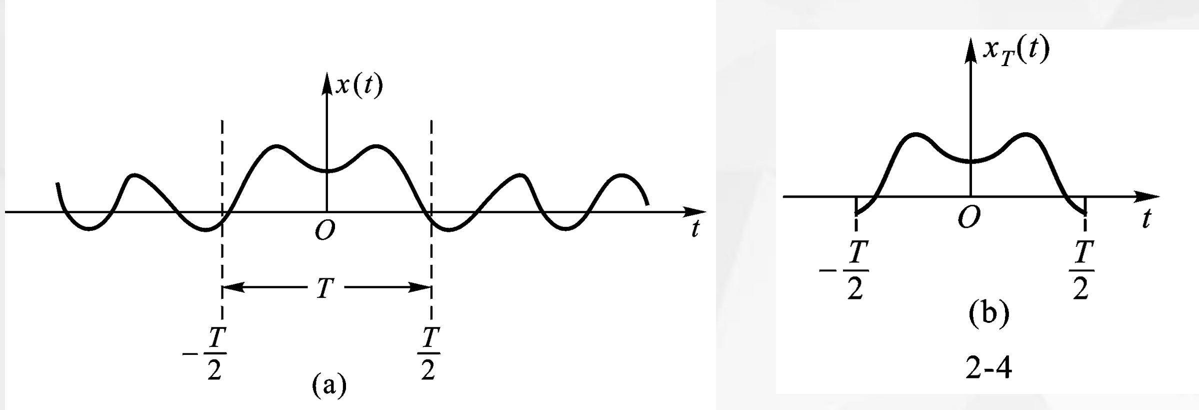
信号 $x(t)$ 总能量无限，但平均功率有限的信号称为功率信号。

(满足 $E=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt \to \infty$)



2-4

功率信号及功率谱密度函数

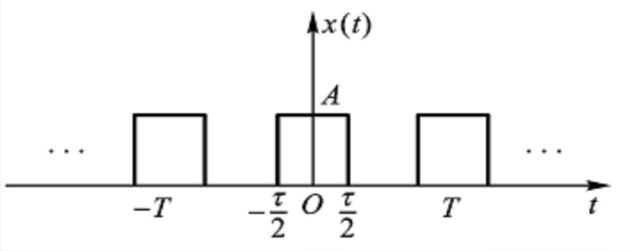


功率信号平均功率为:

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x_T{}^2(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x^2(t)dt$$

式中 $x_T(t)$为 $x(t)$的截断信号，是能量信号。

周期信号是典型的功率信号。



功率信号及功率谱密度函数

对周期信号，其平均功率为：

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x^2(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{n\ T_0}\int_{-\frac{n\ T_0}{2}}^{\frac{n\ T_0}{2}}x^2(t)dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x^2(t)dt$$

对**功率信号**可用其**功率谱密度函数**来描述。

功率谱密度函数

对功率信号的截断信号，应用能量信号的帕斯瓦尔定理，有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega$$

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x_T{}^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X_T(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|X_T(\omega)|^2}{T}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)d\omega$$

称 $P(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{|X_T(\omega)|^2}{T}$ 为功率信号的功率谱密度函数。

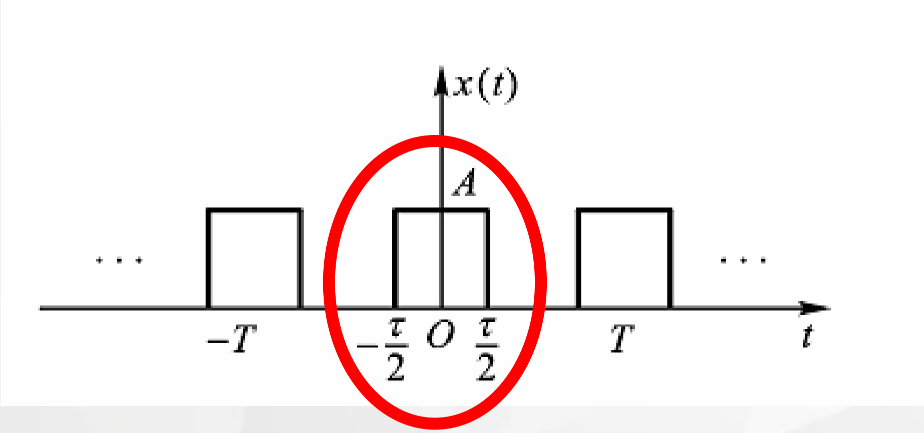
功率信号及功率谱密度函数

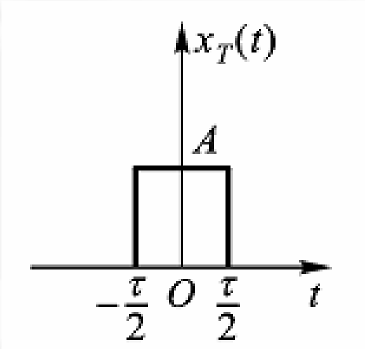
　　功率谱密度函数表示了单位频带上的信号功率，表明了信号的功率沿频率轴的分布情况。

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)d\omega = 2\int_{0}^{\infty} P(f)df$$

周期信号功率谱密度函数

设周期信号的周期为T，截断函数可用下式得到：





$$x_T(t) = x(t) \cdot rect(\bullet)$$

$$rect(\bullet) = \begin{cases} 1, & -\dfrac{T}{2} \le t \le \dfrac{T}{2} \\ 0, & \text{其它}t \end{cases}$$

----矩形窗函数

功率信号及功率谱密度函数

由频域卷积定理，有:

$$X_T(\omega)=\frac{1}{2\pi}\{X(\omega)*\Im[rect(\bullet)]\}$$

其中: $\Im[rect(\bullet)]=TSa(\omega T/2)$

$$X(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

---周期信号频谱密度函数

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

---周期信号傅里叶级数复系数

功率信号及功率谱密度函数

最后，得周期信号功率谱密度函数为：

$$P(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2\,\delta(\omega-n\omega_0)$$ 式（2.4）

周期信号功率为：

$$P=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2\,\delta(\omega-n\omega_0)d\omega$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2$$

---功率信号的帕斯瓦尔（**Parseval**）定理