正态随机过程

正态随机过程

正态随机过程又称为高斯 (Gaussian) 随机过程，是一种常见而又重要的随机过程。

典型的正态随机过程：通信系统中的噪声。

一、正态随机过程的定义

二、正态随机过程的性质

正态随机过程

一、正态随机过程的定义

如果随机过程任意维概率密度函数都服从正态分布，则称此随机过程为正态随机过程。其**n**维概率密度函数为

$$f_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n\right)=\frac{\exp\left[\frac{-1}{2|\Lambda|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\Lambda|_{ij}\left(\frac{x_i-a_i}{\sigma_i}\right)\left(\frac{x_j-a_j}{\sigma_j}\right)\right]}{\sqrt{(2\pi)^n}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n|\Lambda|^{\frac{1}{2}}}$$

式中，$a_i=E\left[X\left(t_i\right)\right]\ (i=1,2,\cdots,n)$为 $X(t)$在 t_i时刻的均值；

$\sigma_i^2=E\{\left[X\left(t_i\right)-a_i\right]^2\}\left(i=1,2,\cdots,n\right)$为 $X(t)$ 在 t_i 时刻的方差；

正态随机过程

$|\Lambda|$ 为归一化协方差矩阵行列式，即

$$|\Lambda| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

其中， ρ_{ij} 为归一化协方差系数；为

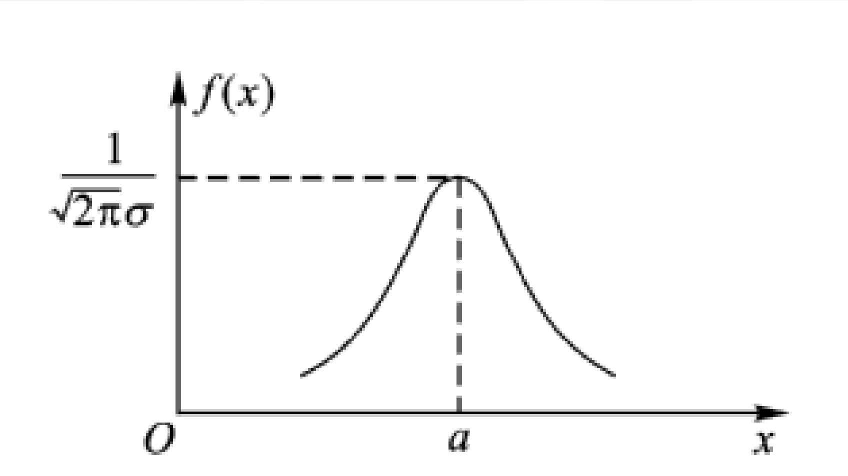
$$\rho_{ij} = \frac{E\left\{\left[X\left(t_i\right)-a_i\right]\left[X\left(t_j\right)-a_j\right]\right\}}{\sigma_i\sigma_j}$$

$|\Lambda|_{ij}$ 为行列式 $|\Lambda|$ 中元素 ρ_{ij} 的代数余子式。

正态随机过程

正态随机过程一维概率密度函数:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$



标准正态分布: $a=0$, $\sigma^2=1$

二、正态随机过程的性质

1.正态随机过程如果是广义平稳的，则也是狭义平稳的。

参考下式

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{\exp\left[\frac{-1}{2|\Lambda|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\Lambda|_{ij}\left(\frac{x_i-a_i}{\sigma_i}\right)\left(\frac{x_j-a_j}{\sigma_j}\right)\right]}{\sqrt{(2\pi)^n}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n|\Lambda|^{\frac{1}{2}}}$$

2. 正态随机过程的线性变换仍是正态随机过程。

参考下式

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t)g(t)dt \rightarrow \sum_{k=1}^{N}X(t_k)g(t_k)\Delta t_k$$

中心极限定理 $\longrightarrow$ $Y(t)$为正态随机过程。

正态随机过程

3. 如果两个正态随机过程互不相关，则它们也统计独立。

以X(t)、Y(t)二维联合概率密度函数为例

$$B_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-a_X(t_1)][Y(t_2)-a_Y(t_2)]\}=0$$

互不相关

归一化协方差系数

$$\rho_{XY}(t_1,t_2)=\frac{E\{[X(t_1)-a_X(t_1)][Y(t_2)-a_Y(t_2)]\}}{\sigma_X\sigma_Y}=0$$

$$f_2(x,y;t_1,t_2)=\frac{\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho_{XY}^2\right)}\left[\frac{(x-a_X)^2}{\sigma_X^2}-\frac{2\rho_{XY}(x-a_X)(y-a_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-a_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\left(1-\rho_{XY}^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

正态随机过程

$$f_2\left(x,y;t_1,t_2\right)=\frac{\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho_{XY}^2\right)}\left[\frac{(x-a_X)^2}{\sigma_X^2}-\frac{2\rho_{XY}(x-a_X)(y-a_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-a_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\left(1-\rho_{XY}^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

由于 $\rho_{XY}=0$

$$f_2\left(x,y;t_1,t_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left[-\frac{(x-a_X)^2}{2\sigma_X^2}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\exp\left[-\frac{(y-a_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right]$$

$$=f_1\left(x,t\right)\cdot f_1\left(y,t\right)$$