匹配滤波器

匹配滤波器

匹配滤波器也称最佳线性滤波器。

1943年，诺斯(D.O.North)提出。

前提：

在AWGN干扰下，已知发送信号 $x(t)$，设计一种线性滤波器。

要求：

- 滤波器的传输函数与发送信号的**频谱相匹配**；
- 在AWGN干扰条件下，滤波器的输出信号在某一时刻具有**最大信噪比**。

匹配滤波器的传输函数

输出信号：

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$t=t_0$时，$$y(t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega$$

匹配滤波器的传输函数

输出噪声：

$$P_0(\omega)=\frac{n_0}{2}\left|H(\omega)\right|^2$$

$$\overline{n_0^2\left(t_0\right)}=\overline{n_0^2\left(t\right)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n_0}{2}\left|H(\omega)\right|^2 d\omega$$

瞬时信噪比为：

$$\rho_0=\frac{\left|y(t_0)\right|^2}{\overline{n_0^2(t)}}=\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n_0}{2}\left|H(\omega)\right|^2 d\omega}$$

匹配滤波器的传输函数

施瓦兹(Schwartz)不等式:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)B(\omega)d\omega\right|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|A(\omega)|^2 d\omega\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|B(\omega)|^2 d\omega$$

当 $A(\omega)=kB^*(\omega)$ (k为比例常数)时，不等式取等号，即不等式左边取得极大值。

利用施瓦兹(Schwartz)不等式，可知:

$$\rho_0=\frac{|y(t_0)|^2}{\overline{n_0^2(t)}}=\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n_0}{2}|H(\omega)|^2 d\omega}$$

当 $\boxed{H(\omega)=kX^*(\omega)e^{-j\omega t_0}}$ 时，瞬时信噪比最大。

最大瞬时信噪比为：

$$\rho_{0\max}=\frac{|y(t_0)|^2}{\overline{n_0^2(t)}}=\boxed{\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n_0}{2}|H(\omega)|^2d\omega}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)e^{j\omega t_0}|^2\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2d\omega}{\frac{n_0}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2d\omega}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega}{n_0/2}=\frac{2E}{n_0}$$

其中，$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt$ 为输入信号能量。

结论：

1．匹配滤波器的传输特性是输入信号的频谱复共轭乘以一个比例因子和一个延迟因子，即滤波器的传输特性与信号的频谱是匹配的。

$$\boxed{H_M(\omega) = kX^*(\omega)e^{-j\omega t_0}}$$

2. 在$t = t_0$ 时刻，匹配滤波器输出信号的瞬时峰值功率与输出噪声的平均功率之比达到最大。

$$\boxed{\rho_{\max} = 2E/n_0}$$

匹配滤波器的含义

模匹配

$$H_M(\omega) = kX^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$|H_M(\omega)| = k|X(\omega)|$$

相位匹配

$$\arg[H_M(\omega)] = -\arg[X(\omega)] - \omega t_0$$

对频率分量为 ω 的输出信号来说，其相角为：

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \omega t + \text{信号初相+滤波器的相移} \\
&= \omega t + \arg[X(\omega)] + \arg[H_M(\omega)] \\
&= \omega t + \arg[X(\omega)] - \arg[X(\omega)] - \omega t_0 \\
&= \omega(t - t_0)
\end{aligned}$$

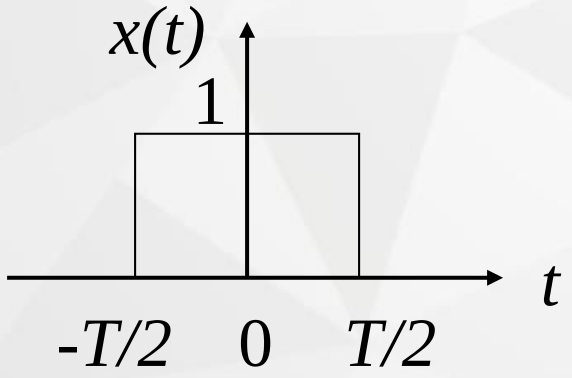
例4.1 设计对单个矩形脉冲匹配的匹配滤波器。

解： 信号的谱密度函数为

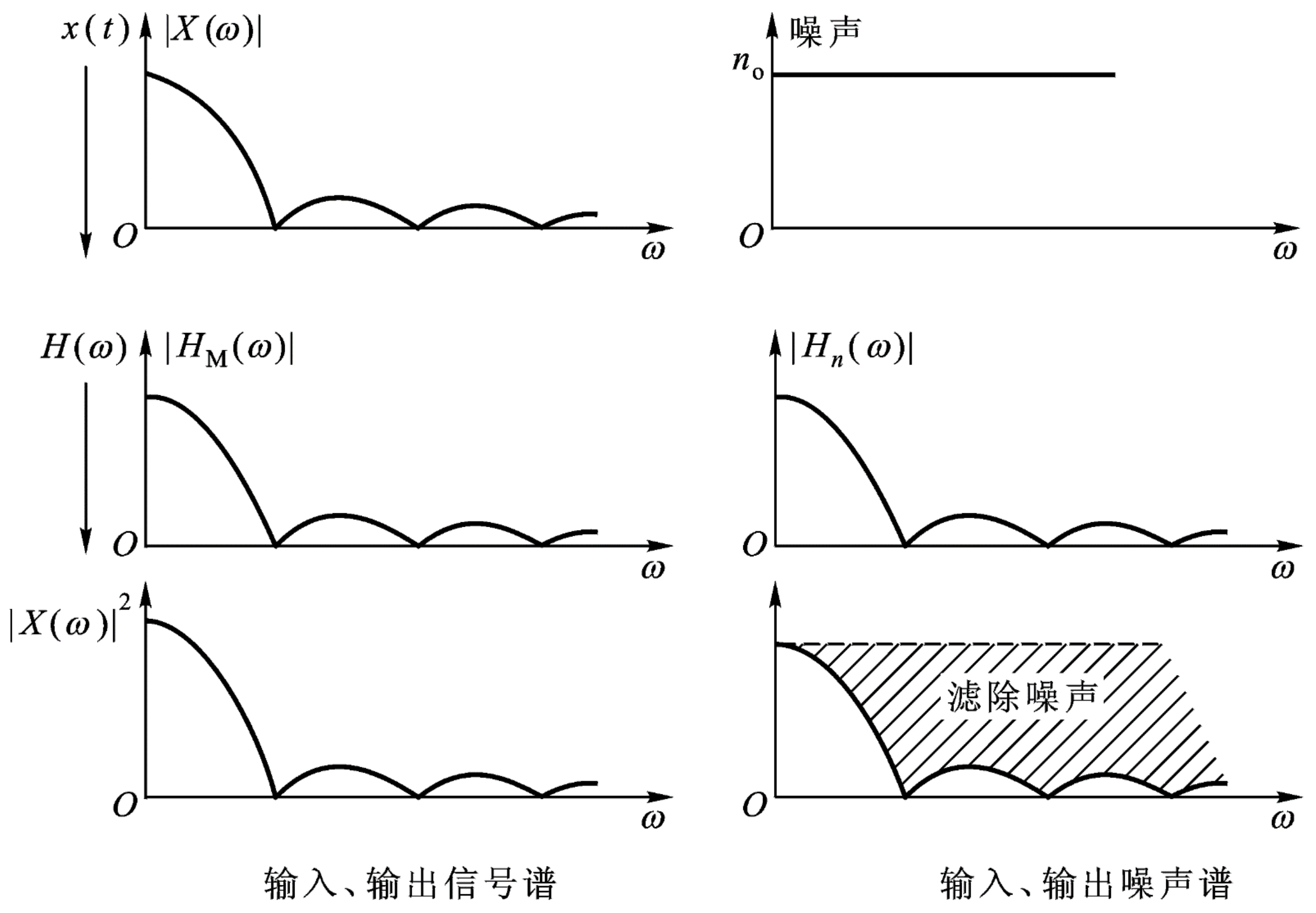
$$X(\omega) = T\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2}$$

匹配滤波器的传输函数为：

$$H_M(\omega) = kX^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$



匹配滤波器的传输函数



4-2

滤波器的冲激响应

$$H_M(\omega) = kX^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

由匹配滤波器的传输特性，可得：

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_M(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} kX^*(\omega)e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[k\int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-j\omega t'}dt'\right]^* e^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$

$$= k\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t_0+t')}d\omega\right]x(t')dt'$$

$$= k\int_{-\infty}^{\infty}\delta[t'-(t_0-t)]x(t')dt'$$

利用冲激函数的性质，可以得到：

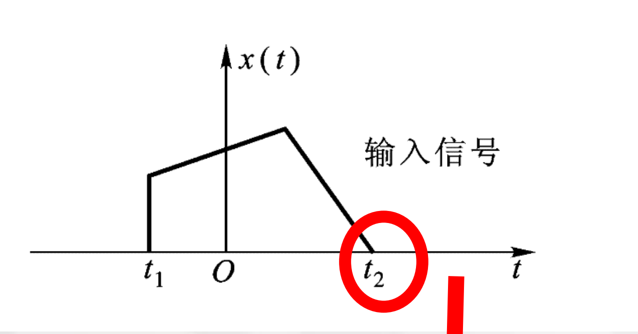
$$\boxed{h(t) = k\ x(t_0 - t)}$$

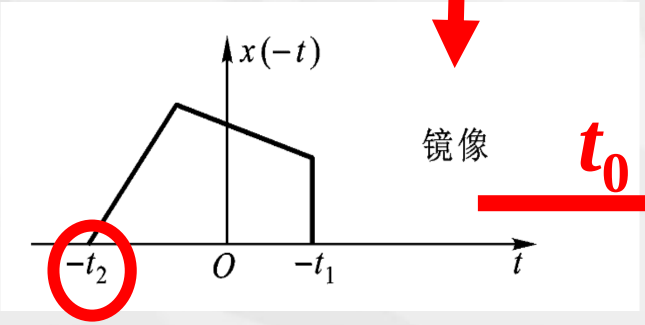
匹配滤波器的输出响应

t_0 的选择

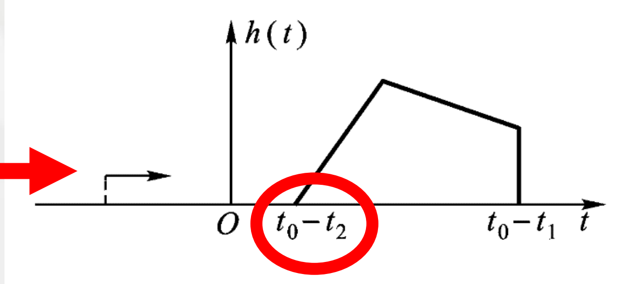
$$\boxed{h(t) = k\,x(t_0 - t)}$$

若信号的结束时间为 t_2，如图所示，则 t_0 的选择必须满足 t_0 不小于 t_2，这样匹配滤波器才是物理可实现的。否则，冲激响应会出现在 $t < 0$的区域，这是非因果的系统。





t_0



4-3

$$\boxed{t_0 = t_2}$$

匹配滤波器的输出

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t')h(t')dt'$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t')\, kx(t_0 - t')dt'$$

令 $\tau = t - t'$，则

$$y(t) = k\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(\tau + t_0 - t)d\tau$$
$$= kR(t_0 - t) = kR(t - t_0)$$

可见，匹配滤波器输出为输入信号自相关积分（自相关函数）。当 $t = t_0$ 时，有最大值，为:

$$\max[y(t)] = y(t = t_0) = kR(0) = k\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = kE$$