维纳—欣钦定理

维纳—欣钦(Wiener-Khintchine)定理

平稳随机过程的自相关函数与功率谱密度是一对傅里叶变换，即它们之间有以下关系：

$$P(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega$$

式中，$P(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{E\left[\left|X_T(\omega)\right|^2\right]}{T}$，

为随机过程的功率谱密度函数。

注：*Norbert Wiener(1894-1964), American Mathematician*

A.I.Khintchine(1894-1959), German Mathematician

例3.2 已知平稳随机过程的自相关函数为

$R(\tau)==\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$,试求该随机过程的功率谱及平均功率。

解：由维纳—欣钦定理，随机过程功率谱密度为

$$P(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{A^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{j\omega_0\tau}+e^{-j\omega_0\tau}\right]\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{A^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-j(\omega-\omega_0)\tau}+e^{-j(\omega+\omega_0)\tau}\right]d\tau$$

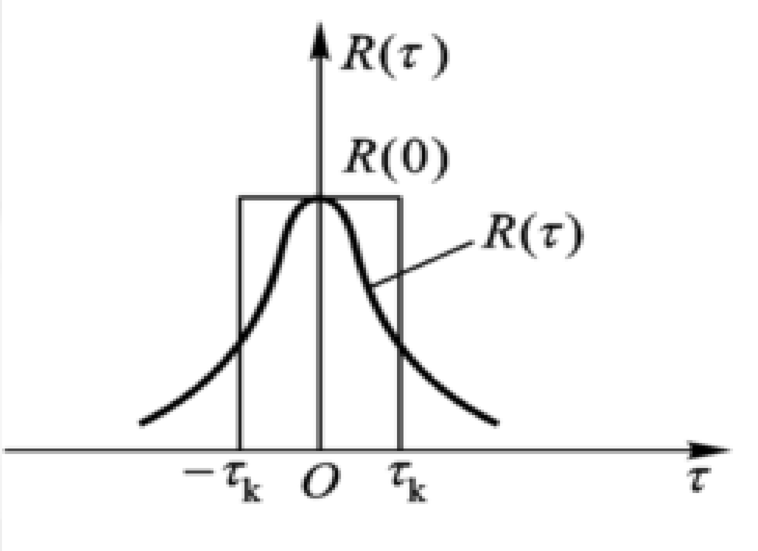
$$=\frac{\pi A^2}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

平均功率为 $P=E\left[X^2(t)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)d\omega=R(0)=\frac{A^2}{2}$

为定量描述平稳随机过程的相关性与频带之间的关系，常使用自相关时间和等效带宽的概念。它们的含义如下：

1. 自相关时间 τ_k

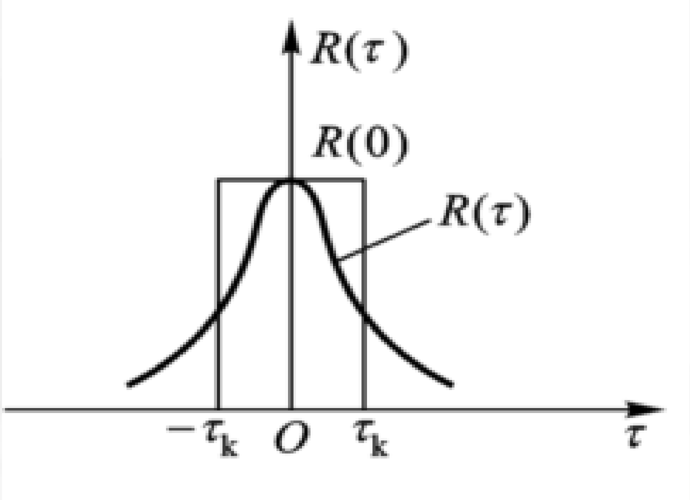
$$\tau_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\,d\tau}{2R(0)}$$



τ_k的定义：以 $R(0)$ 为高作一矩形，并使矩形面积与曲线下的面积相等时，对应的矩形宽度值的一半。

1. 自相关时间 τ_k

$$\boxed{\tau_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)d\tau}{2R(0)}}$$



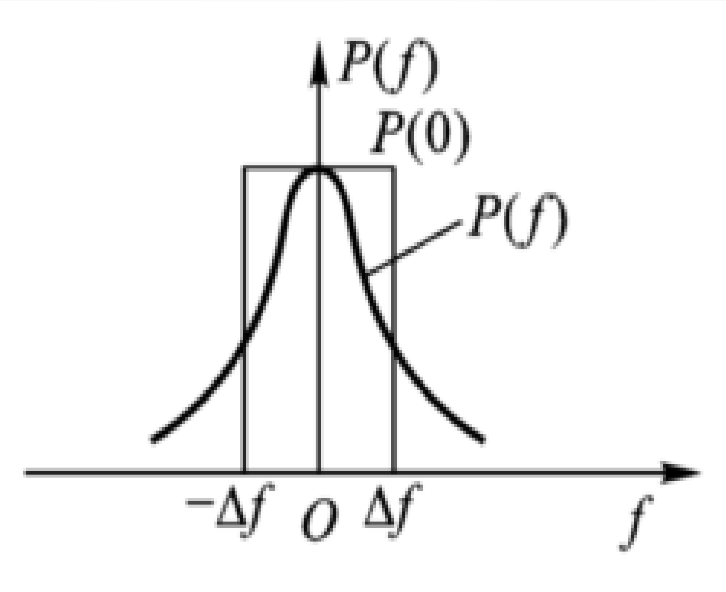
由于 $P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$ 故 $P(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau$

因而 $\tau_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)d\tau}{2R(0)} = \frac{P(0)}{2R(0)}$

含义： 自相关时间是对过程任意两个状态 X(t), X(t + τ) 随 τ 由相关变成不相关"**快、慢**"的一种**度量**。

2. 等效带宽 Δf

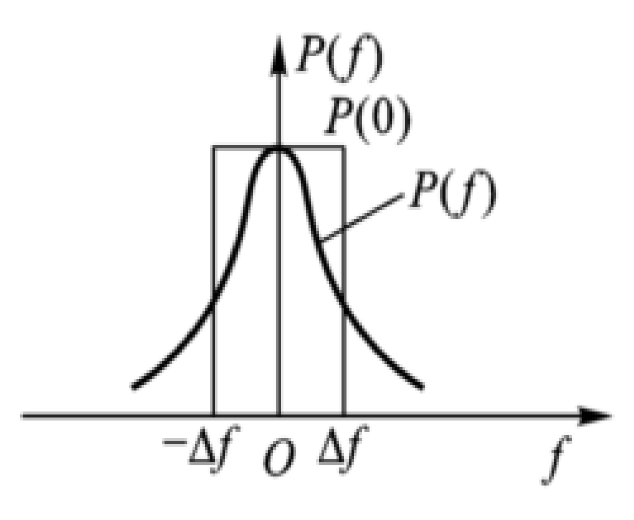
$$\boxed{\Delta f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P(f)df}{2P(0)}}$$



Δf 的定义：以$P(0)$为高作一矩形，并使矩形面积与曲线下的面积相等时，对应的矩形宽度值的一半。

2. 等效带宽 Δf

$$\boxed{\Delta f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P(f)df}{2P(0)}}$$



由于 $R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega$ ，故

$$R(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty} P(f)df$$

因而 $\Delta f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P(f)df}{2P(0)}=\frac{R(0)}{2P(0)}$

含义: 过程**等效带宽**的一种度量。

3.自相关时间与等效带宽之间的关系

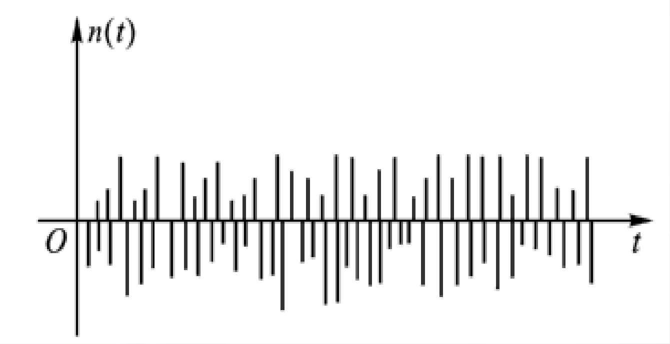
$$\boxed{\tau_k \cdot \Delta f = \frac{P(0)}{2R(0)} \cdot \frac{R(0)}{2P(0)} = \frac{1}{4}}$$

在相同的情况下

- 自相关时间越小，过程占有频带越宽；
- 自相关时间越大，过程占有频带越窄。

极端情况1：非自相关过程。

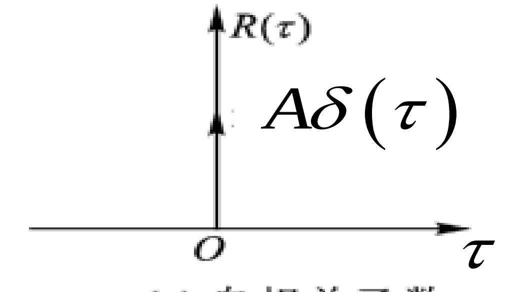
$$\tau_k = 0 \quad \Delta f \to \infty$$



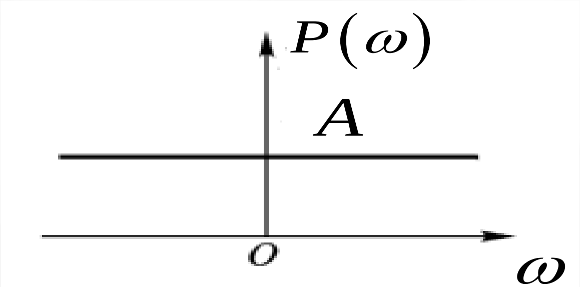
即自相关性最弱。

自相关函数为 $R(\tau) = A\delta(\tau)$

功率谱密度为 $P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = A$



(a) 自相关函数



(b) 功率谱密度

占有带宽最大（无穷宽），包含有自零至无穷大的所有频谱分量，这如同**白光**中包含所有可见光谱一样，所以，非自相关过程又称为**白色随机过程**。

极端情况2：**直流信号**。

$$\tau_k = \infty \qquad \Delta f = 0$$

自相关函数为 $R(\tau) = A$

功率谱密度为 $P(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$