复数信号的实部与虚部及希尔伯特变换

由复信号单边谱特性可以导出复数信号的实部和虚部的关系 --- 希尔伯特变换对。

$$\xi(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \xrightarrow{\text{傅氏变换}} G_{\xi}(\omega) = X(\omega) + j\hat{X}(\omega)$$

为同时满足上式及复信号单边谱特性，下列关系应成立：

$$\boxed{G_{\xi}(\omega) = 2X(\omega)U(\omega)} \quad \text{---单边谱特性}$$

$$\begin{cases} \hat{X}(\omega) = -jX(\omega) = X(\omega)/j, & \omega > 0 \\ \hat{X}(\omega) = jX(\omega), & \omega < 0 \end{cases}$$

引入符号函数

$$\operatorname{sgn}(\omega)=\begin{cases}1 & , \quad \omega>0 \\ -1 & , \quad \omega<0\end{cases}$$

则可得到

$$\hat{X}(\omega)=-j\operatorname{sgn}(\omega)X(\omega)$$

可见，$\hat{X}(\omega)$和 $X(\omega)$ 的关系是唯一确定的。

由上看出， $\hat{x}(t)$相当于 $x(t)$通过一个网络（希尔伯特滤波器）后得到，网络的传输函数为

$$H(\omega)=-j\operatorname{sgn}(\omega)$$

相应地: $h(t)=\mathfrak{I}^{-1}[H(\omega)]=\mathfrak{I}^{-1}\left[-j\operatorname{sgn}(\omega)\right]$

由于 $\mathfrak{I}^{-1}[\operatorname{sgn}(\omega)]=\dfrac{j}{\pi t}$

故 $h(t)=-j\cdot\dfrac{j}{\pi t}=\dfrac{1}{\pi t}$

$$\hat{x}(t)=x(t)*(\frac{1}{\pi t})=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$$ --- 希尔伯特变换

$$x(t)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau}d\tau$$ --- 希尔伯特反变换

希尔伯特变换对 $x(t)\xleftrightarrow{\mathcal{H}}\hat{x}(t)$

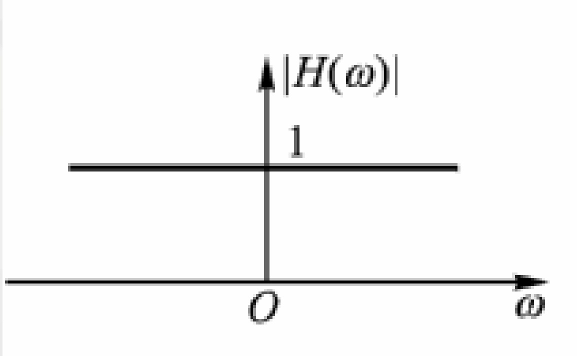
希尔伯特滤波器的传输特性

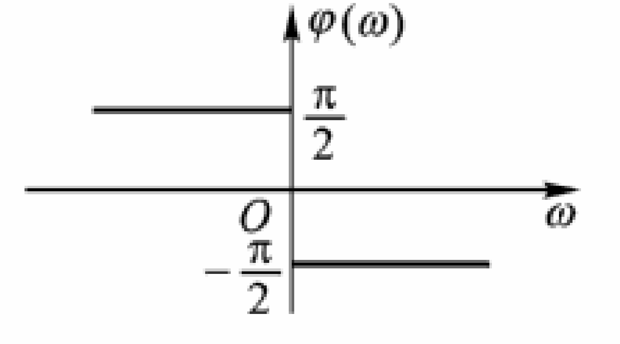
$$H(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega) = |H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频特性：全通网络（幅频特性为1）

相频特性：正频率范围内相移 $-\frac{\pi}{2}$ ，

负频率范围内相移 $\frac{\pi}{2}$ 。





故希尔伯特滤波器也称为 $-\frac{\pi}{2}$ 相移网络。