平稳随机过程

平稳随机过程

随机过程类型：

- 独立随机过程
- 马尔可夫（Markov）过程
- 独立增量过程
- 平稳随机过程

其中**平稳随机过程**是应用广泛的一类随机过程。

平稳随机过程

一、平稳随机过程的定义及其含义

1.定义

平稳随机过程是指过程的任意维概率密度函数与时间的起点无关的随机过程。即满足

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)$$

2.含义

平稳随机过程的统计特性不随时间的变化而改变。

实际中，判断随机过程是否平稳，通常不是去找过程的高维分布，而是通过**产生的环境条件**来判断。

如环境条件不随时间的变化而改变，则该过程就认为是平稳的。

一般地说，通信系统中遇到的随机信号和噪声都是平稳随机过程。

二、平稳随机过程的一维及二维概率密度函数

1. 一维概率密度函数

$$f_1(x_1,t_1)=f_1(x_1,t_1+\tau)$$

上式中，令 $\tau=-t_1$，有

$$\boxed{f_1(x_1,t_1)=f_1(x_1,0)=f_1(x_1)=f_1(x)}$$

由上式可见，平稳随机过程的一维概率密度函数与考察时刻无关。即平稳随机过程在各个孤立时刻服从相同的概率分布。

二、平稳随机过程的一维及二维概率密度函数

2. 二维概率密度函数

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;t_1+\tau,t_2+\tau)$$

上式中，令 $\tau=-t_1$，有

$$\boxed{f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;0,t_2-t_1)=f_2(x_1,x_2;\tau)}$$

式中，$\tau=t_2-t_1$为两个考察时刻之间的时间间隔。

由上可见，平稳随机过程的二维概率密度函数与时间的起点无关，而仅与时间间隔τ有关，是 τ 的函数。

三、平稳随机过程的数字特征

1. 平稳随机过程的数学期望（均值）

$$E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_1(x)dx=a \qquad \text{（常数）}$$

2.平稳随机过程的方差

$$D\left[X(t)\right]=E\{[X(t)-a]^2\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\cdot f_1(x)dx=\sigma^2 \qquad \text{（常数）}$$

三、平稳随机过程的数字特征

3.平稳随机过程的自相关函数

$$R(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E\left[X(t_1)X(t_1+\tau)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;t_1,t_1+\tau)dx_1dx_2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;\tau)dx_1dx_2=R(\tau)$$

式中，$\tau=t_2-t_1$ 为考察随机过程的时间间隔。

由上式可知，平稳随机过程的自相关函数仅与时间间隔有关，是 τ 的函数，而与考察时间起点无关。

四、平稳随机过程自相关函数的性质

（1） $R(\tau)$是 τ 的偶函数，即

$$\boxed{R(\tau)=R(-\tau)}$$

（2）自相关函数具有递减特性。
且当 $\tau=0$时， $R(\tau)$有最大值。

$$\boxed{|R(\tau)|\le R(0)}$$

证明：由于$E\{[X(t)\pm X(t+\tau)]^2\}\ge 0$令 $t=0$有

$$E\{[X(0)\pm X(\tau)]^2\}=E\left[X^2(0)\right]\pm 2E\left[X(0)X(\tau)\right]+E\left[X^2(\tau)\right]\ge 0$$

对平稳随机过程来说，

$E[X^2(\tau)]=E[X^2(0)]=R(0)$，故有

$$R(0)\pm 2R(\tau)+R(0)\ge 0 \longrightarrow R(0)\ge|R(\tau)|$$

四、平稳随机过程**自相关函数的性质**

(3) $\boxed{R(0)=E\left[X^2(t)\right]=P}$

即 $R(0)$为平稳随机过程的(总)**平均功率**。

(4) $\boxed{R(\infty)=E^2\left[X(t)\right]=a^2}$

即 $R(\infty)$ 为平稳随机过程的**直流功率**。

证明：由于 $R(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$

$\tau\to\infty$， $X(t)$与 $X(t+\tau)$ 之间的相关性消失，

即它们互相独立。所以

$$R(\infty)=E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$=E\left[X(t)\right]\cdot E\left[X(t+\tau)\right]=E^2\left[X(t)\right]$$

四、平稳随机过程自相关函数的性质

(5) $\boxed{R(0)-R(\infty)=\sigma^2}$

即 $R(0)-R(\infty)$为平稳随机过程的方差**(交流功率)**。

由方差表示式，有：

$$\sigma^2(t)=E\left[X^2(t)\right]-E^2\left[X(t)\right]=R(0)-R(\infty)$$

五、狭义平稳随机过程与广义平稳随机过程

1、狭义平稳随机过程（窄平稳随机过程）：

随机过程满足任意维概率密度函数与时间的起点无关。

2、广义平稳随机过程（宽平稳随机过程）：

随机过程的数学期望及方差与时间无关，自相关函数仅与时间间隔有关。

3、两者之间关系

狭义平稳随机过程一定是广义平稳随机过程，但反之不一定成立。 **(正态随机过程例外)**

六、 平稳随机过程的各态历经性（遍历性）

集合平均（统计平均）：对随机过程**所有的样本函数**求统计平均。

时间平均：对随机过程的**一个样本函数**求平均。

1. 随机过程的时间平均

时间均值，记为$\overline{X(t)}$或 $\bar{a}$，定义为

$$\overline{X(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x_T(t)dt=\bar{a}$$

时间方差，记为 $\overline{\left[X(t)-\overline{X(t)}\right]^2}$ 或 $\overline{\sigma^2}$

定义为$\overline{\left[X(t)-\overline{X(t)}\right]^2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[x(t)-\bar{a}]^2dt=\overline{\sigma^2}$

六、 平稳随机过程的各态历经性（遍历性）

时间自相关函数，记为 $\overline{X(t)X(t+\tau)}$ 或 $\overline{R(t,t+\tau)}$，

定义为 $\overline{X(t)X(t+\tau)} = \overline{R(t,t+\tau)}$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)dt = \overline{R(\tau)}$$

2. 平稳随机过程的各态历经性

对一般平稳随机过程，其数字特征往往可以用过程的一个样本函数的时间平均来代替，即满足以下关系：

$$\begin{cases} E\left[X(t)\right] = \overline{X(t)} \\ D\left[X(t)\right] = \overline{\left[X(t) - \overline{X(t)}\right]^2} \\ E\left[X(t)X(t+\tau)\right] = \overline{X(t)X(t+\tau)} \end{cases}$$

六、 平稳随机过程的各态历经性（遍历性）

"各态历经性"（或"遍历性"）的含义：

对随机过程中的任意一实现（样本函数）来说，它好像经历了随机过程中所有可能的状态一样。

"各态历经性"将求随机过程数字特征时的集合平均（统计平均）简化为一个样本函数的时间平均了。

例如，对各态历经过程来说，由于

$$R(0)=\overline{R(0)}=\lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x^2(t)dt$$

故样本函数的平均功率即为随机过程的平均功率。

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

六、 平稳随机过程的各态历经性（遍历性）

注意：

具有各态历经性的随机过程一定是平稳随机过程，但平稳随机过程不一定都具有各态历经性。

满足各态历经性条件：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}R(\tau)d\tau=0$$

一般来说，通信系统中遇到的随机信号或噪声均能满足该条件，因此以后将它们都视为各态历经平稳随机过程。