平稳随机过程通过线性系统

平稳随机过程通过线性系统

对**确定信号**

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{线性系统}} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)H(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

对**随机过程** $Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau$

问题：

设输入随机过程是平稳的，输出随机过程是否也平稳？数字特征又怎样？

平稳随机过程通过线性系统

1. 输出随机过程数学期望

$$E\left[Y(t)\right]=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)E[X(t-\tau)]d\tau$$

由于 $X(t)$是平稳的，所以$E\left[X(t-\tau)\right]=a$,

故 $\boxed{E\left[Y(t)\right]=a\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)d\tau=a\cdot H(0)}$

2. 输出随机过程的自相关函数

$$R_Y(t,t+\tau)=E\left[Y(t)Y(t+\tau)\right]$$

（$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau$）

$$R_Y(t,t+\tau)=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\gamma)X(t-\gamma)d\gamma\right.$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{\infty}h(\sigma)X(t+\tau-\sigma)d\sigma\right]$$

$$R_Y(t,t+\tau)=E[\int_{-\infty}^{\infty}h(\gamma)X(t-\gamma)d\gamma\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h(\sigma)X(t+\tau-\sigma)d\sigma]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\gamma)h(\sigma)E\left[X(t-\gamma)X(t+\tau-\sigma)\right]d\gamma d\sigma$$

式中， $E\left[X(t-\gamma)X(t+\tau-\sigma)\right]=R_X(\tau+\gamma-\sigma)$

为输入平稳随机过程的自相关函数。于是有

$$\boxed{\begin{aligned}R_Y(t,t+\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\gamma)h(\sigma)R_X(\tau+\gamma-\sigma)d\gamma d\sigma\\&=R_Y(\tau)\end{aligned}}$$

上式表明，输出随机过程自相关函数仅为时间间隔的函数，而与时间起点无关。因此，输出随机过程是**平稳随机过程**，至少是广义平稳的。

3. 输出随机过程的功率谱密度

由维纳—欣钦定理

$$P_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_Y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$P_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\gamma)h(\sigma)R_X(\tau+\gamma-\sigma)d\gamma d\sigma d\tau$$

令 $\mu=\tau+\gamma-\sigma$

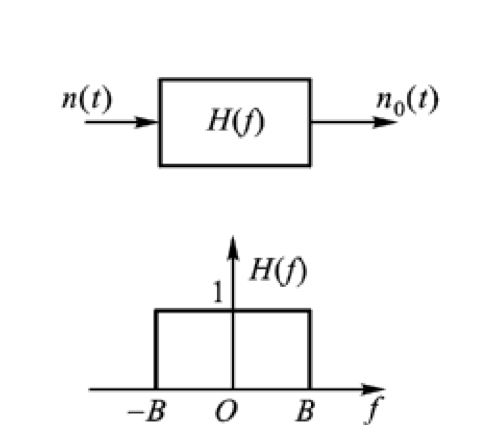
$$P_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega(\mu-\gamma+\sigma)}R_X(\mu)d\mu\int_{-\infty}^{\infty}h(\gamma)d\gamma\int_{-\infty}^{\infty}h(\sigma)d\sigma$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\mu)e^{-j\omega\mu}d\mu\int_{-\infty}^{\infty}h(\gamma)e^{j\omega\gamma}d\gamma\int_{-\infty}^{\infty}h(\sigma)e^{-j\omega\sigma}d\sigma$$

$$\boxed{P_Y(\omega)=P_X(\omega)\cdot H^*(\omega)\cdot H(\omega)=P_X(\omega)\cdot\left|H(\omega)\right|^2}$$

例3.3 设功率谱密度为$n_0/2$（常数）的白色随机过程（白噪声）通过带宽为B的理想低通滤波器，如图所示。试求输出随机过程的功率谱密度、自相关函数及噪声功率。

解：理想低通滤波器的传输特性为



$$H(f)=\begin{cases}1, & |f|\le B\\ 0, & |f|>B\end{cases}$$

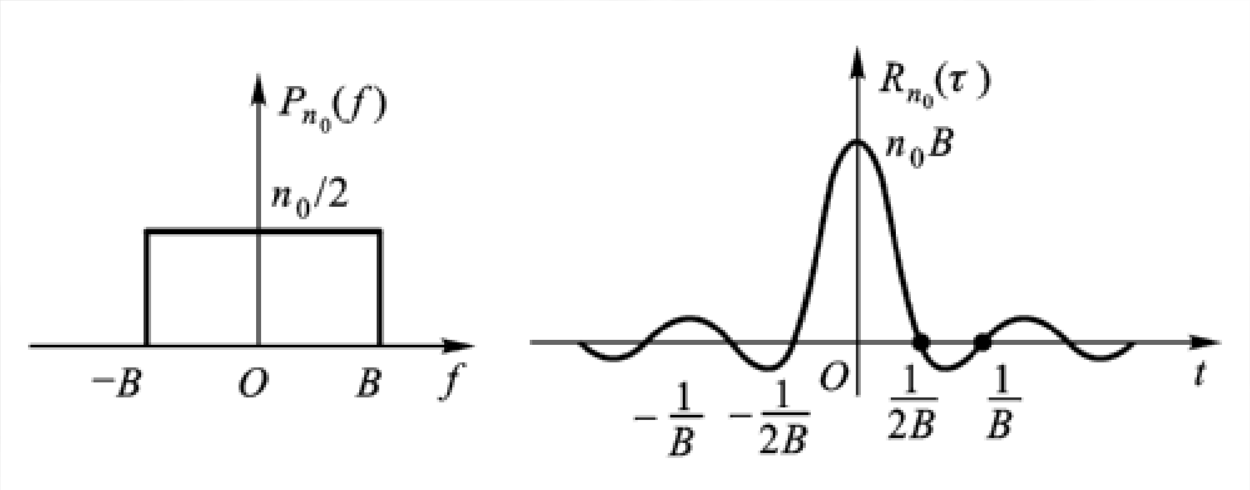
故，输出随机过程的功率谱密度为

$$P_{n_0}(f)=P(f)\cdot|H(f)|^2=\frac{n_0}{2}\quad,\ |f|\le B$$

输出随机过程的自相关函数为

$$R_{n_0}(\tau) = \mathfrak{I}^{-1}\left[P_{n_0}(f)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n_0}(f)\cdot e^{j2\pi f\tau}df$$

$$= n_0 B Sa(2\pi B\tau)$$



输出噪声的功率为

$$N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n_0}(f)df = R_{n_0}(0) = n_0 B$$

输出随机过程的等效带宽为：

$$\Delta f = \frac{R(0)}{2P(0)} = B$$

自相关时间为： $\tau_k = \frac{1}{4B}$

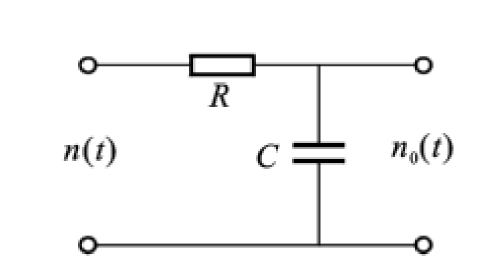
例3.4　设均值为零，功率谱密度为 $n_0/2$ 的高斯（正态）白噪声通如图所示的RC低通滤波器，试求输出随机过程的一维概率密度函数。

解：由性质可知，高斯白噪声通过线性系统后输出过程仍然是高斯分布的随机过程。

RC低通滤波器的传输特性为

$$H(f)=\frac{1}{1+j2\pi fRC} \qquad \left|H(f)\right|^2=\frac{1}{1+(2\pi fRC)^2}$$

输出随机过程的均值为 $E\left[n_0(t)\right]=E\left[n(t)\right]\cdot H(0)=0$



平稳随机过程通过线性系统

输出随机过程的功率谱密度

$$P_{n_0}(f) = P(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{n_0}{2} \cdot \frac{1}{1+(2\pi fRC)^2}$$

输出随机过程的自相关函数

$$R_{n_0}(\tau) = \mathfrak{I}^{-1}\left[P_{n_0}(f)\right] = \frac{n_0}{4RC} \exp\left(-\frac{|\tau|}{RC}\right)$$

输出随机过程的方差（或功率）

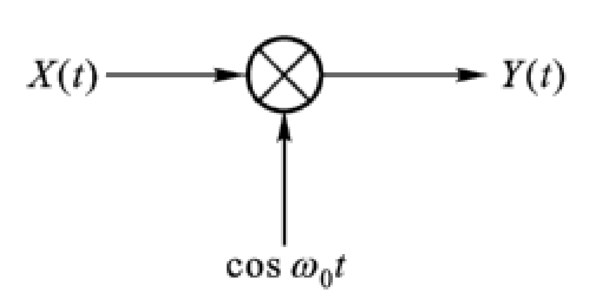
$$\sigma_0^2 = R_{n_0}(0) = \frac{n_0}{4RC}$$

故，输出随机过程的一维概率密度函数为

$$\boxed{f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}\right)}$$

平稳随机过程通过线性系统

例3.5　设平稳随机过程通过如图所示的乘法器，若已知随机过程的功率谱，试求乘法器输出响应的功率谱。



解：乘法运算是非线性变换过程，因此，

$$P_Y(\omega) \neq P_X(\omega)\cdot\left|H(\omega)\right|^2$$

为得到输出功率谱，可先求输出响应自相关函数，再进行傅立叶变换。

$$R_Y(t,t+\tau) = E\left[Y(t)Y(t+\tau)\right]$$

$$= E\left[X(t)X(t+\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)\right]$$

$$= \frac{1}{2}E\left[X(t)X(t+\tau)\right]\left[\cos\omega_0\tau + \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau)\right]$$

$$= \frac{1}{2}R_X(\tau)\left[\cos\omega_0\tau + \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau)\right]$$

平稳随机过程通过线性系统

式中，$R_X(\tau)=E\left[X(t)X(t+\tau)\right]$ 为输入随机过程自相关函数。

由上式可见，输出随机过程自相关函数与时间有关，因此不是平稳随机过程。

对非平稳随机过程求功率谱时，应先将其自相关函数求时间平均，再进行傅立叶变换。

对 $R_Y(t,t+\tau)=\frac{1}{2}R_X(\tau)\left[\cos\omega_0\tau+\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau)\right]$ 求时间平均，

结果为 $R_Y(\tau)=\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos\omega_0\tau$

输出随机过程功率谱为

$$
\begin{aligned}
P_Y(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\\
&=\frac{1}{4}\left[P_X(\omega-\omega_0)+P_X(\omega+\omega_0)\right]
\end{aligned}
$$