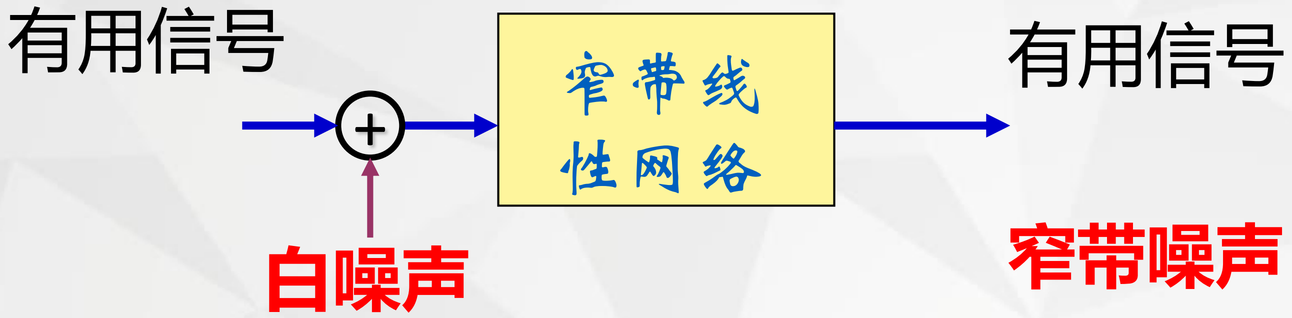
正弦波加窄带高斯噪声的统计特性

正弦波加窄带高斯噪声的统计特性



以有用信号是正弦波为例，合成信号形式为

$$s(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta_0)+n_i(t)$$
$$=A\cos(\omega_0 t+\theta_0)+[n_c(t)\cos\omega_0 t-n_s(t)\sin\omega_0 t]$$

为表达简洁起见，可选择正弦波初始相位为零，这时上式可写为

$$s(t)=[A+n_c(t)]\cos\omega_0 t-n_s(t)\sin\omega_0 t$$

正弦波加窄带高斯噪声的统计特性

令 $z_c(t)=A+n_c(t)$ $z_s(t)=n_s(t)$ 则上式为

$$s(t)=z_c(t)\cos\omega_0 t-z_s(t)\sin\omega_0 t$$
$$=Q(t)\cos\left[\omega_0 \mathrm{t}+\varphi(t)\right]$$

式中，$Q(t)=\sqrt{z_c^2(t)+z_s^2(t)}$ --- 合成信号包络

$$\varphi(t)=arctg\frac{z_s(t)}{z_c(t)}$$ ---合成信号相位

由上节的结果可看出，$z_c(t)$ 和 $z_s(t)$是统计独立的平稳高斯随机过程。

且有：

均值: $E[z_c(t)]=A,\quad E[z_s(t)]=0$

方差: $D[z_c(t)]=D\left[z_S(t)\right]=D\left[n_i(t)\right]=\sigma^2$

因此，$z_c(t)$和 $z_s(t)$二维联合概率密度函数为

$$f_{z_c z_s}(z_c, z_s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{(z_c - A)^2 + z_s^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{z_c^2 - 2Az_c + A^2 + z_s^2}{2\sigma^2}\right]$$

利用上节相同的分析方法，可以得到包络和相位的二维联合概率密度函数为

$$f_{Q\varphi}(Q, \varphi) = \frac{Q}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{Q^2 - 2AQ\cos\varphi + A^2}{2\sigma^2}\right]$$

正弦波加窄带高斯噪声的统计特性

上式对相位求边际积分，得到包络的概率密度函数为

$$f_Q(Q)=\int_0^{2\pi} f_{Q\varphi}(Q,\varphi)\,d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{Q}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{Q^2-2AQ\cos\varphi+A^2}{2\sigma^2}\right]d\varphi$$

$$=\frac{Q}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{Q^2+A^2}{2\sigma^2}\right]\int_0^{2\pi}\exp\left(\frac{AQ\cos\varphi}{\sigma^2}\right)d\varphi$$

应用第一类零阶修正贝塞尔（**Bessel**）函数式

$$I_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(x\cos\theta)\,d\theta$$

上式可写为 $f_Q(Q)=\dfrac{Q}{\sigma^2}\exp\left[-\dfrac{Q^2+A^2}{2\sigma^2}\right]I_0\left(\dfrac{AQ}{\sigma^2}\right)$ ，$Q\geq 0$

---**广义瑞利分布**或**莱斯（Rice）**分布

如果A=0，则上式变为包络服从**瑞利分布**（上节结论）。

对第一类零阶修正贝塞尔函数来说，

$$x >> 1\ ,\quad I_0(x) \approx e^x / \sqrt{2\pi x}$$

因此，如果 A 值很大，满足 $\frac{AQ}{\sigma^2} \gg 1$ 时，有近似式

$$f_Q(Q) = \frac{Q}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{Q^2+A^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{AQ}{\sigma^2}\right)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sqrt{\frac{Q}{A}}\exp\left[-\frac{(Q-A)^2}{2\sigma^2}\right],\quad Q \geq 0$$

若将 $Q \approx A$ 代入上式，则有

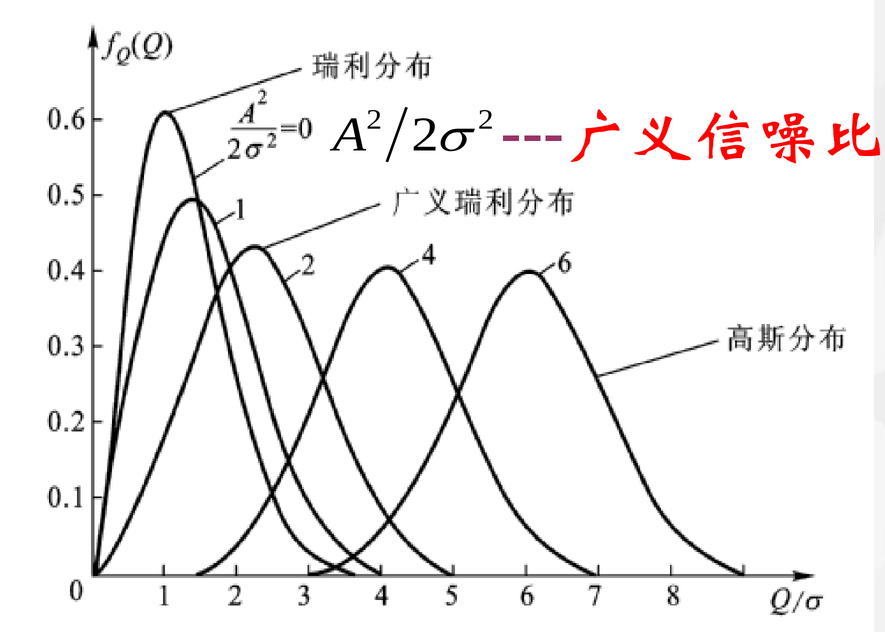
$$f_Q(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(Q-A)^2}{2\sigma^2}\right]$$ --- **正态分布**

正弦波加窄带高斯噪声的统计特性

合成信号的包络分布与信道中的信噪比有关。

广义信噪比 $A^2/2\sigma^2$

- 当信噪比很小（A值很小，噪声起主要作用）时，包络服从**瑞利分布**。
- 当信噪比很大（A值很大，信号起主要作用）时，包络近似服从**正态分布**。
- 当信噪比不大不小时，包络服从**广义瑞利分布**。



合成波形包络分布

正弦波加窄带高斯噪声的统计特性

相位的概率密度函数是对包络求边际积分的结果，这个积分非常复杂，这里不讨论。

相位分布也与信噪比有关。

- 当信噪比很小（A值很小，噪声起主要作用）时，随机相位接近**均匀分布**。
- 当信噪比很大（A值很大，信号起主要作用）时，随机相位主要**集中在信号的相位附近**。