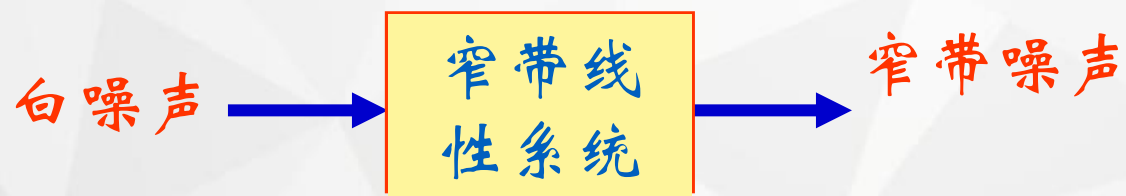
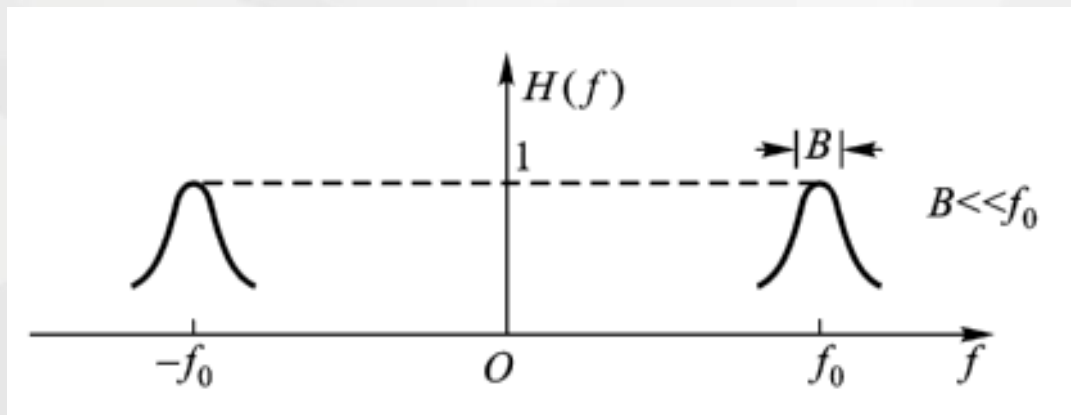




白噪声通过窄带线性系统——窄带噪声

白噪声通过窄带线性系统---窄带噪声

窄带线性系统传输特性



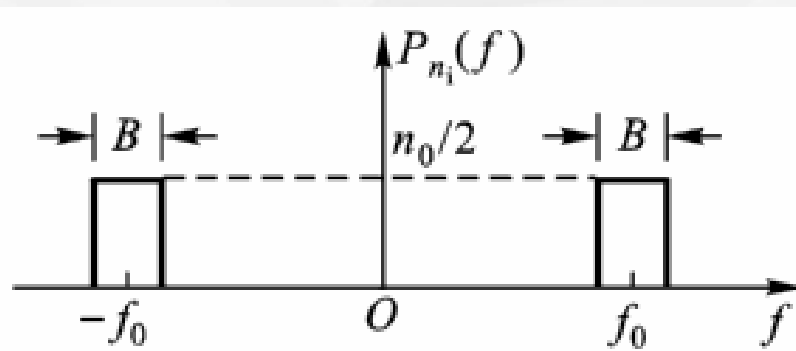
窄带噪声功率谱密度

$$P_{n_i}(\omega) = P(\omega) |H(\omega)|^2 = \frac{n_0}{2} |H(\omega)|^2$$

白噪声通过窄带线性系统---窄带噪声

窄带噪声自相关函数

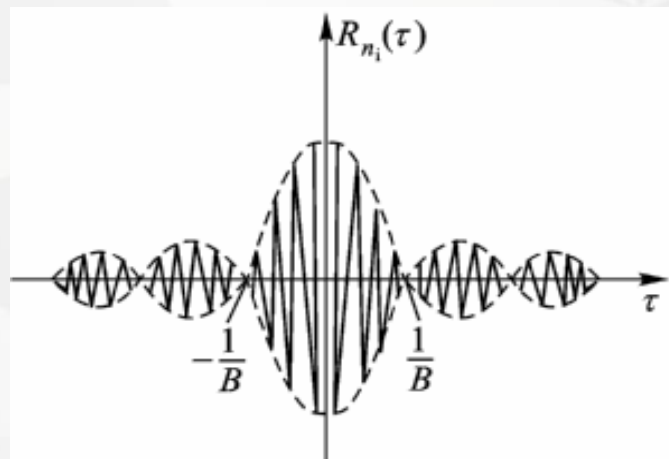
$$\begin{aligned} R_{n_i}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n_i}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0}{2} |H(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned}$$



例：理想窄带系统输出功率谱密度及自相关函数。

功率谱密度

$$P_{n_i}(f) = \begin{cases} \frac{n_0}{2}, & f_0 - \frac{B}{2} \leq |f| \leq f_0 + \frac{B}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



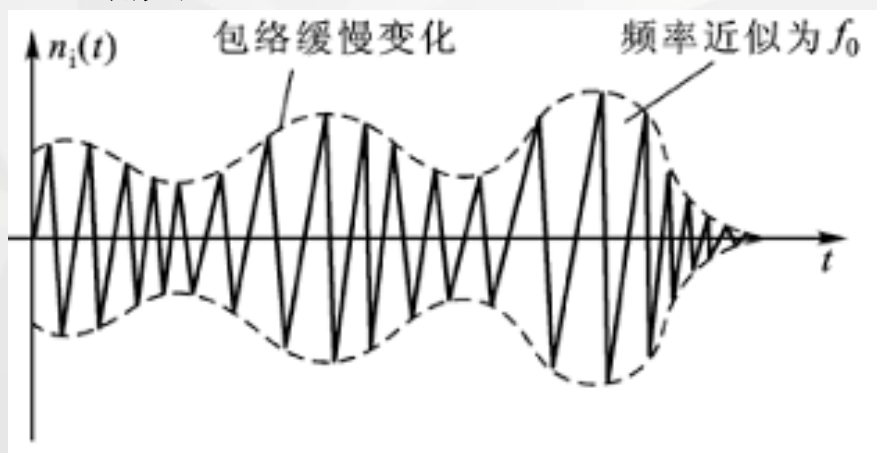
自相关函数

$$R_{n_i}(\tau) = 2 \int_{f_0 - B/2}^{f_0 + B/2} \frac{n_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df = n_0 B \text{Sa}(\pi B\tau) \cos \omega_0 \tau$$

一、窄带噪声的波形特征

窄带噪声波形的“准正弦波”特性

白噪声具有无穷的带宽，而窄带线性系统仅在中心频率附近允许白噪声通过。因此，白噪声通过窄带线性系统时，实际上是窄带线性系统对输入白噪声的选频过程。其结果是输出噪声中仅有中心频率附近的频率分量，因此窄带噪声波形是一个频率近似为 f_0 ，包络和相位缓慢变化的正弦波。



一、窄带噪声的波形特征

窄带噪声时域表示式 (1)

$$n_i(t) = R(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] \quad (\text{包络和相位形式})$$

式中, $R(t)$ 和 $\theta(t)$ 分别为窄带噪声的包络和相位, 它们都是随机过程。

显然, 由于噪声的窄带特性, 包络和相位的变化一定比载波的变化要缓慢得多。

窄带噪声时域表示式 (2)

$$\begin{aligned} n_i(t) &= R(t) \cos \theta(t) \cos \omega_0 t - R(t) \sin \theta(t) \sin \omega_0 t \\ &= n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t \end{aligned}$$



一、窄带噪声的波形特征

$$n_i(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t \quad (\text{同相、正交分量形式})$$

式中, $n_c(t) = R(t) \cos \theta(t)$ ---同相分量

$n_s(t) = R(t) \sin \theta(t)$ ---正交分量

同相分量和正交分量在性质上都是具有低通特性的随机过程。

由上可知：窄带噪声的统计特性可以由包络和相位或同相分量和正交分量的统计特性确定。

反之，当已知了窄带噪声的统计特性时，其包络和相位或同相分量和正交分量的统计特性也可以确定下来。

二、同相和正交分量统计特性

分析前提：假设输入白噪声是均值为零的平稳高斯随机过程，窄带噪声也是均值为零的平稳高斯过程。

同相、正交分量形式：

$$n_i(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t$$

1. 均值 $E[n_i(t)] = E[n_c(t)] \cos \omega_0 t - E[n_s(t)] \sin \omega_0 t$

由窄带噪声的均值为零及平稳特性，对任意的时间，都有上式成立，因此得

$$E[n_c(t)] = 0$$

$$E[n_s(t)] = 0$$

同相分量和正交分量是均值为零的随机过程。

二、同相和正交分量统计特性

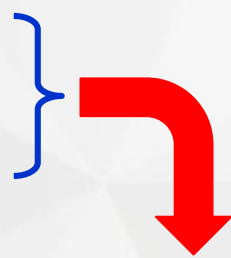
由于 $n_i(t)$ 是高斯随机过程，因此，在任意时刻， $n_i(t)$ 都是高斯随机变量。

$$n_i(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t$$

令 $t_1 = 0$ 及 $t_2 = \frac{3\pi}{2\omega_0}$ ，得

$$n_i(t_1) = n_c(t_1)$$

$$n_i(t_2) = n_s(t_2)$$



在 t_1 及 t_2 时刻，同相分量和正交分量是服从高斯分布的随机变量。



二、同相和正交分量统计特性

2. 自相关函数 $n_i(t) = n_c(t)\cos\omega_0 t - n_s(t)\sin\omega_0 t$

$$\begin{aligned} R_{n_i}(t, t+\tau) &= E\{n_i(t)n_i(t+\tau)\} \\ &= E\{[n_c(t)\cos\omega_0 t - n_s(t)\sin\omega_0 t][n_c(t+\tau)\cos\omega_0(t+\tau) \\ &\quad - n_s(t+\tau)\sin\omega_0(t+\tau)]\} \\ &= E[n_c(t)n_c(t+\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)] \\ &\quad - E[n_c(t)n_s(t+\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)] \\ &\quad - E[n_s(t)n_c(t+\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)] \\ &\quad + E[n_s(t)n_s(t+\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)] \\ &= R_{n_c}(t, t+\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) \\ &\quad - R_{n_c n_s}(t, t+\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau) \\ &\quad - R_{n_s n_c}(t, t+\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) \\ &\quad + R_{n_s}(t, t+\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau) \end{aligned}$$

二、同相和正交分量统计特性

由窄带噪声的平稳特性, 有 $R_{n_i}(t, t + \tau) = R_{n_i}(\tau)$

$$\text{故 } R_{n_c}(t, t + \tau) = E[n_c(t)n_c(t + \tau)] = R_{n_c}(\tau)$$

$$R_{n_c n_s}(t, t + \tau) = E[n_c(t)n_s(t + \tau)] = R_{n_c n_s}(\tau)$$

$$R_{n_s n_c}(t, t + \tau) = E[n_s(t)n_c(t + \tau)] = R_{n_s n_c}(\tau)$$

$$R_{n_s}(t, t + \tau) = E[n_s(t)n_s(t + \tau)] = R_{n_s}(\tau)$$

同相分量和正交分量都是平稳随机过程。

小结: 同相分量和正交分量都是均值为零
服从高斯分布的平稳随机过程。

二、同相和正交分量统计特性

重写自相关函数式为

$$\begin{aligned} R_{n_i}(t, t + \tau) &= R_{n_i}(\tau) = E\{n_i(t)n_i(t + \tau)\} \\ &= R_{n_c}(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t + \tau) \\ &\quad - R_{n_cn_s}(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t + \tau) \\ &\quad - R_{n_sn_c}(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t + \tau) \\ &\quad + R_{n_s}(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t + \tau) \end{aligned}$$

上式在 $t=0$ 及 $t=\frac{\pi}{2\omega_0}$ 时, 可写为以下形式

$$R_{n_i}(\tau) = R_{n_c}(\tau)\cos\omega_0\tau - R_{n_cn_s}(\tau)\sin\omega_0\tau$$

$$R_{n_i}(\tau) = R_{n_s}(\tau)\cos\omega_0\tau + R_{n_sn_c}(\tau)\sin\omega_0\tau$$

上式中, 当 $\tau=0$ 时, 可得 $R_{n_i}(0) = R_{n_c}(0) = R_{n_s}(0)$

二、同相和正交分量统计特性

$$R_{n_i}(0) = R_{n_c}(0) = R_{n_s}(0)$$

上式表明，窄带噪声和它的同相分量及正交分量具有相同的方差或功率，即

$$\sigma_{n_i}^2 = \sigma_{n_c}^2 = \sigma_{n_s}^2 = \sigma^2$$

$$R_{n_i}(\tau) = R_{n_c}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{n_c n_s}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$R_{n_i}(\tau) = R_{n_s}(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{n_s n_c}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$R_{n_s}(\tau) = R_{n_c}(\tau)$$

$$R_{n_c n_s}(\tau) = -R_{n_s n_c}(\tau)$$



由互相关函数的性质，有

$$R_{n_s n_c}(\tau) = R_{n_c n_s}(-\tau) \rightarrow R_{n_c n_s}(\tau) = -R_{n_c n_s}(-\tau)$$



二、同相和正交分量统计特性

同理可得 $R_{n_s n_c}(\tau) = -R_{n_c n_s}(-\tau)$

由上可知, $R_{n_c n_s}(\tau)$ 和 $R_{n_s n_c}(\tau)$ 是奇函数

因此有 $R_{n_s n_c}(0) = R_{n_c n_s}(0) = 0$

上式表明, 同相分量及正交分量在同一时刻是互不相关的随机过程, 因而, 由正态 (高斯) 随机过程的性质可知, 它们也是统计独立的随机过程。

- 结论:**
- 窄带噪声的同相分量及正交分量**均值为零**
 - 同相分量及正交分量为**统计独立、平稳、高斯随机过程**
 - 同相分量及正交分量**方差或功率相同, 等于窄带噪声的方差或功率。**

三、包络和相位的统计特性

同相和正交分量一维概率密度函数

$$f_{n_c}(n_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_c}} \exp\left(-\frac{n_c^2}{2\sigma_{n_c}^2}\right)$$

$$f_{n_s}(n_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_s}} \exp\left(-\frac{n_s^2}{2\sigma_{n_s}^2}\right)$$

它们的二维联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_{n_cn_s}(n_c, n_s) &= f_{n_c}(n_c) \cdot f_{n_s}(n_s) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{n_c^2 + n_s^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

式中, $\sigma^2 = \sigma_{n_c}^2 = \sigma_{n_s}^2$ 为窄带噪声的方差 (功率)。

白噪声通过窄带线性系统---窄带噪声



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

利用概率论中的雅可比行列式，可以导出包络和相位的二维联合概率密度函数为

$$f_{R\theta}(R, \theta) = f_{n_c n_s}(n_c, n_s) \left| \frac{\partial(n_c, n_s)}{\partial(R, \theta)} \right|$$

式中, $\left| \frac{\partial(n_c, n_s)}{\partial(R, \theta)} \right|$ 为雅可比 (Jacobi) 行列式, 且

$$\left| \frac{\partial(n_c, n_s)}{\partial(R, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial n_c}{\partial R} & \frac{\partial n_s}{\partial R} \\ \frac{\partial n_c}{\partial \theta} & \frac{\partial n_s}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -R \sin \theta & R \cos \theta \end{vmatrix} = R$$

$$(n_c(t) = R(t) \cos \theta(t) \quad n_s(t) = R(t) \sin \theta(t))$$

三、包络和相位的统计特性

代入雅可比 (Jacobi) 行列式, 得

$$f_{R\theta}(R, \theta) = \frac{R}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{R}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right)$$

利用概率论中求边际分布的方法, 可分别得到包络和相位的一维概率密度函数

包络一维概率密度函数

$$\begin{aligned} f_R(R) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{R\theta}(R, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) d\theta \\ &= \frac{R}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right), \quad 0 \leq R < \infty \end{aligned}$$

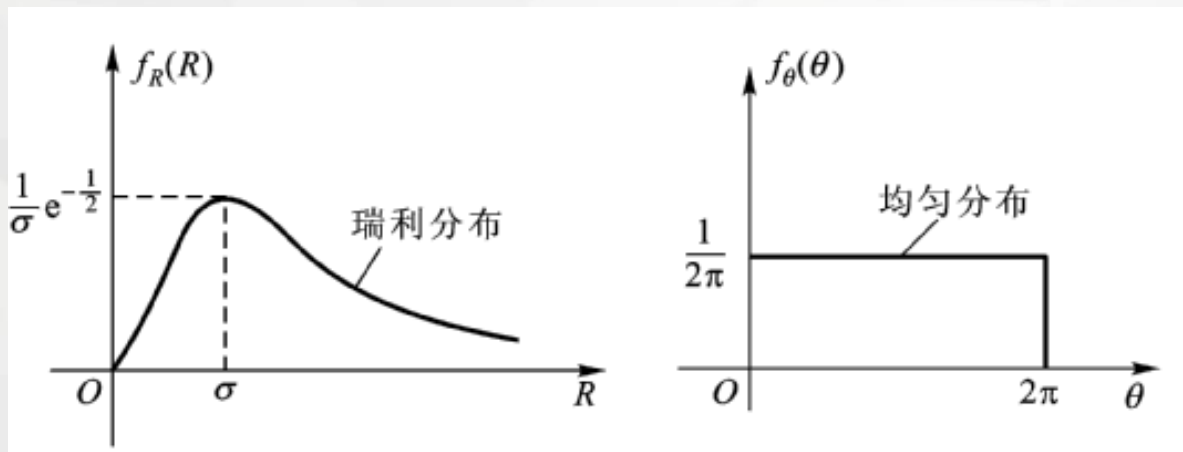
上式表明, 窄带噪声的包络服从**瑞利 (Rayleigh)** 分布。

三、包络和相位的统计特性

相位的一维概率密度函数

$$\begin{aligned} f_{\theta}(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{R\theta}(R, \theta) dR = \int_0^{\infty} \frac{R}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) dR \\ &= \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

上式表明，窄带噪声的相位服从**均匀分布**。



包络和相位分布特性

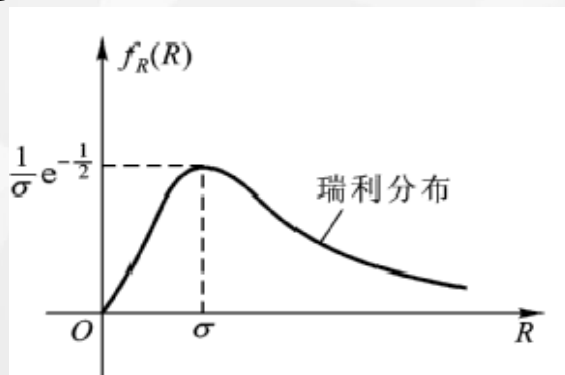
三、包络和相位的统计特性

由于, $f_{R\theta}(R, \theta) = \frac{R}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) = f_R(R) \cdot f_\theta(\theta)$

因此, 包络和相位是**统计独立的** (一维分布)。

服从瑞利分布的窄带噪声的包络特点:

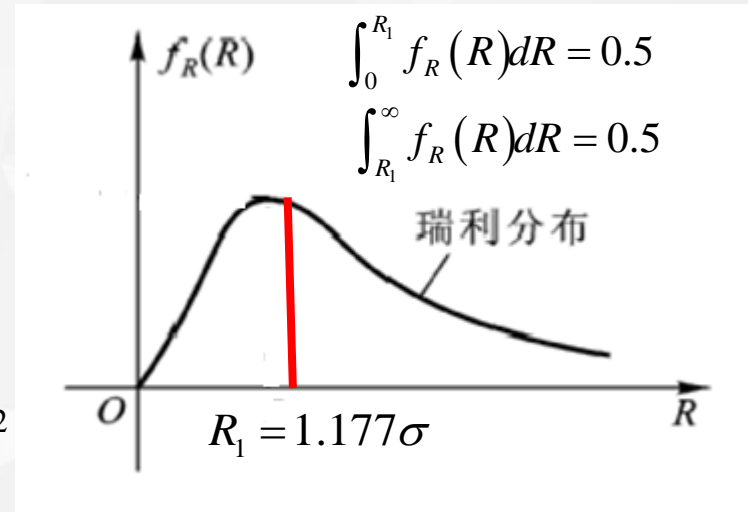
- (1) $R = \sigma$ 时, $f_R(R)$ 出现最大值。
- (2) 包络的期望值为 $E[R(t)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$
- (3) 包络的中位值为 $R_1 = 1.177\sigma$



三、包络和相位的统计特性

中位值：累积分布概率为50%时的包络值，即满足下式的值：

$$\begin{aligned}\int_0^{R_1} f_R(R) dR &= \int_{R_1}^{\infty} f_R(R) dR \\ &= \int_0^{R_1} \frac{R}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) dR = 0.5\end{aligned}$$



(4) 包络的均方值为： $E[R^2(t)] = 2\sigma^2$

(5) 包络的方差为

$$D[R(t)] = E\left\{[R - E(R)]^2\right\} = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$$

关键参数： σ^2 (方差) = 窄带噪声的功率