两个随机过程之间的统计联系

两个随机过程之间的统计联系

实际中，常需要研究两个或多个随机过程同时出现的情况。例如，在信号接收时，接收到的信号往往是有用信号与噪声的混合信号，即

$$S(t)=x(t)+n(t)$$

这里，有用信号 $x(t)$与噪声 $n(t)$都是随机过程。因此有必要研究多个随机过程之间的联合统计特性。

这里仅讨论两个随机过程之间的统计联系。

一、 联合分布函数和联合概率密度函数

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 的 $n+m$ 维联合分布函数

$$F_{n+m}\left(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t_1^{'},\cdots,t_m^{'}\right)$$

$$=P\{X\left(t_1\right)\le x_1,\cdots,X\left(t_n\right)\le x_n;Y\left(t_1^{'}\right)\le y_1,\cdots,Y\left(t_m^{'}\right)\le y_m\}$$

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 的 $n+m$ 维联合概率密度函数

如果 $$\frac{\partial F_{n+m}\left(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t_1^{'},\cdots,t_m^{'}\right)}{\partial x_1\cdots\partial x_n\partial y_1\cdots\partial y_m}$$

$$=f_{n+m}\left(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t_1^{'},\cdots,t_m^{'}\right)$$

则称 $f_{n+m}\left(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t_1^{'},\cdots,t_m^{'}\right)$

为 $X(t)$、$Y(t)$ 的 $n+m$ 维联合概率密度函数。

一、 联合分布函数和联合概率密度函数

X(t) 和 Y(t) **统计独立**

$$f_{n+m}\left(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t_1',\cdots,t_m'\right)$$
$$= f_n\left(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n\right)\cdot f_m\left(y_1,\cdots,y_m;t_1',\cdots,t_m'\right)$$

X(t) 和Y(t) **联合平稳**

若随机过程 X(t) 和Y(t) 任意n+m 维联合概率密度函数与时间的起点无关，则称随机过程X(t)和Y(t)是平稳相联系的。

X(t) 和Y(t)**联合各态历经性**

若随机过程 X(t) 和Y(t)的各时间平均值等于各自的统计平均值，则称随机过程X(t) 和Y(t)具有联合各态历经性。

二、互相关函数

随机过程X(t) 和Y(t)的互相关函数

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)Y(t_2)\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot y\cdot f_2(x,y,t_1,t_2)dxdy$$

如果X(t) 和Y(t)都是平稳随机过程，且是平稳相联系的，则

$$\boxed{R_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_2-t_1)=R_{XY}(\tau)}$$

如果 X(t) 和Y(t)是统计独立的，则有

$$\boxed{R_{XY}(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)\right]\cdot E\left[Y(t_2)\right]}$$

三、X(t) 和Y(t)的互协方差函数

$$B_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-a_X(t_1)][Y(t_2)-a_Y(t_2)]\}$$

$$=R_{XY}(t_1,t_2)-E[X(t_1)]E[Y(t_2)]$$

X(t) 和Y(t)**互不相关**

$$\boxed{B_{XY}(t_1,t_2)=0}$$

由X(t) 和Y(t) 统计独立的条件可知，如果X(t) 和Y(t) 统计独立，则它们一定是互不相关的。

互不相关与统计独立的关系：两个随机过程如果统计独立，则它们一定互不相关。但互不相关的两个随机过程，不一定统计独立。（**正态随机过程例外**）

四、X(t) 和Y(t)互相关函数的性质

对平稳相联系的随机过程 X(t) 和Y(t) 来说

$$\boxed{R_{XY}(\tau) \neq R_{XY}(-\tau)}$$

$$\boxed{R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)}$$

互谱密度函数

$$P_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$