窄带实时间信号自相关函数的复数化求解

窄带实时间信号自相关函数的复数化求解

能量信号自相关函数 $R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$

定义复数化信号自相关函数为：

$$R_\xi(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^*(t)\xi(t+\tau)dt$$

由于 $\xi(t)=x(t)+j\hat{x}(t)$　$\xi^*(t)=x(t)-j\hat{x}(t)$

故有

$$R_\xi(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)-j\hat{x}(t)\right]\left[x(t+\tau)+j\hat{x}(t+\tau)\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)x(t+\tau)+\hat{x}(t)\hat{x}(t+\tau)\right]dt$$

$$+j\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)\hat{x}(t+\tau)-\hat{x}(t)x(t+\tau)\right]dt$$

由能量信号的相关定理，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt \leftrightarrow |X(\omega)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t)\hat{x}(t+\tau)dt \leftrightarrow \left|\hat{X}(\omega)\right|^2$$

由于 $\hat{X}(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega)X(\omega)$

故 $\left|\hat{X}(\omega)\right|^2 = \left|-j\,\mathrm{sgn}(\omega)X(\omega)\right|^2 = |X(\omega)|^2$

窄带实时间信号自相关函数的复数化求解

因而有 $R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x(t+\tau)dt=\mathrm{Re}\left[R_\xi(\tau)\right]$

下面以调幅---调相信号为例，进一步讨论信号的自相关函数。

$$x(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\varphi(t)] \quad \xi(t)=A(t)e^{j\varphi(t)}\cdot e^{j\omega_0 t}=a(t)e^{j\omega_0 t}$$

$$R_\xi(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}a^*(t)e^{-j\omega_0 t}a(t+\tau)e^{j\omega_0(t+\tau)}dt$$

$$=\frac{1}{2}e^{j\omega_0\tau}\int_{-\infty}^{\infty}a^*(t)a(t+\tau)dt$$

式中 $E_\xi(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}a^*(t)a(t+\tau)dt$ 为复数信号复数包络线自相关函数。

$$R_\xi(\tau)=E_\xi(\tau)e^{j\omega_0\tau}=|E_\xi(\tau)|e^{j[\omega_0\tau+\theta(\tau)]}$$

$$R_\xi(\tau)=E_\xi(\tau)e^{j\omega_0\tau}=|E_\xi(\tau)|e^{j[\omega_0\tau+\theta(\tau)]}$$

故有 $R_x(\tau)=\mathrm{Re}[R_\xi(\tau)]=|E_\xi(\tau)|\cos[\omega_0\tau+\theta(\tau)]$

$$Env[R_x(\tau)]=|E_\xi(\tau)|$$

式中 $E_\xi(\tau)=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}a^*(t)a(t+\tau)dt$ 为复数信号复数包络线自相关函数。

结论：自相关函数的包络就是复数信号的复数包络线的自相关函数的模值。

综上所述，在利用**复数化信号分析方法**对窄带实信号进行分析时，无论是求**其频谱函数**还是**自相关函数**，都比对实信号**直接求解**要方便，因此复数化是信号分析中重要方法之一。