功率信号的相关函数与功率谱

功率信号的互相关函数

$$R_{12}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x_1(t)x_2(t+\tau)dt$$

功率信号的自相关函数

当 $x_1(t)=x_2(t)=x(t)$

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)x(t+\tau)dt$$

周期信号的自相关函数

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)x(t+\tau)dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)x(t+\tau)dt$$

自相关函数与功率谱密度的关系为：$R(\tau) \leftrightarrow P(\omega)$

其中：$P(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T}$ 为功率谱密度函数。

证明：

$$X_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$P(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X_T(\omega)|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} X_T^*(\omega) \bullet X_T(\omega)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{j\omega t} dt \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t') e^{-j\omega t'} dt'$$

令 $t' = t + \tau$

功率信号的相关函数与功率谱

证明（续）：

$$P(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{j\omega t}dt\cdot\int_{-\frac{T}{2}-t}^{\frac{T}{2}-t}x(t+\tau)e^{-j\omega(t+\tau)}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)x(t+\tau)dt\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\Im[R(\tau)]$$

$$\begin{cases}P(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau\\ R(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)\,e^{j\omega\tau}d\omega\end{cases}$$

结论：功率信号的自相关函数和功率谱密度函数是一对傅里叶变换。

例2.4 试求周期信号 $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$的功率谱。

解：方法1 利用信号的傅里叶级数展开式求功率谱。

$$P(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2\,\delta(\omega-n\omega_0)$$ 式（2.4）

由于

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)=\frac{A}{2}\left[e^{j(\omega_0 t+\theta)}+e^{-j(\omega_0 t+\theta)}\right]$$

$$=\frac{A}{2}e^{j\theta}e^{j\omega_0 t}+\frac{A}{2}e^{-j\theta}e^{-j\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}$$

---周期信号傅里叶级数展开式

故有：$C_1=\frac{A}{2}e^{j\theta}$，$C_{-1}=\frac{A}{2}e^{-j\theta}$

功率信号的相关函数与功率谱

利用式（2.4），有

$$
\begin{aligned}
P(\omega) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|C_n\right|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \\
&= 2\pi \left(\frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2 \left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right] \\
&= \frac{\pi A^2}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]
\end{aligned}
$$

功率信号的相关函数与功率谱

方法2　利用相关函数求功率谱。周期信号的周期

$$T_0 = 2\pi/\omega_0$$

$$R(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A\cos(\omega_0 t + \theta)\cdot A\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \theta)dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{A^2}{2}[\cos\omega_0\tau + \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\theta)]dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau dt + \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{A^2}{2}\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\theta)dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau dt$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

即 $$\boxed{R(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau}$$

故有：
$$\begin{aligned}P(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau\cdot e^{-j\omega_0\tau}d\tau\\&=\frac{\pi A^2}{2}\left[\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\delta\left(\omega+\omega_0\right)\right]\end{aligned}$$

可见，两种方法得到的结果是相同的。

$\tau=0$ 时， $R(\tau=0)=\dfrac{A^2}{2}=P=\int_{-\infty}^{+\infty}P\left(\omega\right)d\omega$