信号的频谱分析

信号的频谱分析

信号的频谱分析（傅里叶分析）是分析确定信号的基本方法。

对周期信号 $x(t)$ ，可用傅里叶级数来展开

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j n \omega_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-j n \omega_0 t} dt$$ --- 傅立叶级数复系数

信号的频谱分析

对非周期信号 $x(t)$，可进行傅里叶积分

$$X(\omega)=\Im\left[x(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\omega t}dt$$ ---频谱密度函数

---连续谱

$$x(t)=\Im^{-1}\left[X(\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\,e^{j\omega t}d\omega$$ --- 原函数

$$x(t)\leftrightarrow X(\omega)$$ ---傅里叶变换对

信号的频谱分析

引入冲激函数后，也可以得到周期信号的频谱密度函数

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j n \omega_0 t}$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \Im[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j n \omega_0 t} e^{-j \omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - n\omega_0)t} dt \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \quad (2\text{-}1)$$

---离散谱

信号的频谱分析

周期信号频谱密度函数的**简便求法**

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}dt$$

第一步：求截断信号 $x_T(t)$ 的频谱密度函数

$$X_T(\omega) = \Im[x_T(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\, e^{-j\omega t}dt$$

第二步：周期延拓 $X_T(\omega)$，得到频谱密度函数 $X(\omega)$ 。

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T}X_T(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}x_T(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0) \quad (2\text{-}2)$$

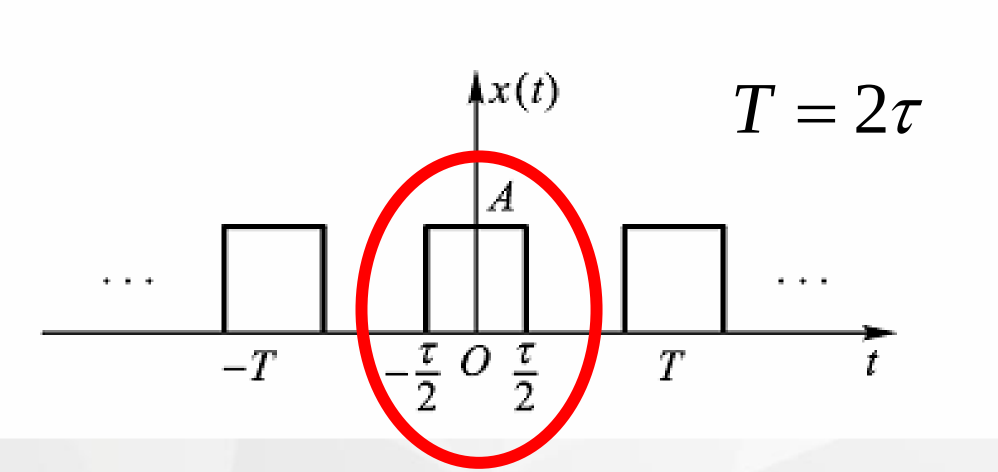
$$= \omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_T(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)$$

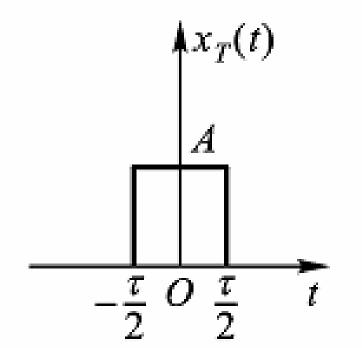
$$X(\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\omega - n\omega_0) \quad (2\text{-}1)$$

比较式（2-1）（2-2），可得：

$$c_n = \frac{1}{T}X_T(n\omega_0)$$

例2.1 设周期矩形信号 $x(t)$ 如图所示，试求其频谱密度函数 $X(\omega)$ 。





解：设 $x_T(t)$ 为 $x(t)$ 在一个周期内的截断信号，如图所示。

则有: $X_T(\omega) = \Im[x_T(t)] = A\tau Sa\left(\omega\tau/2\right)$

则,由式(2-2)得:

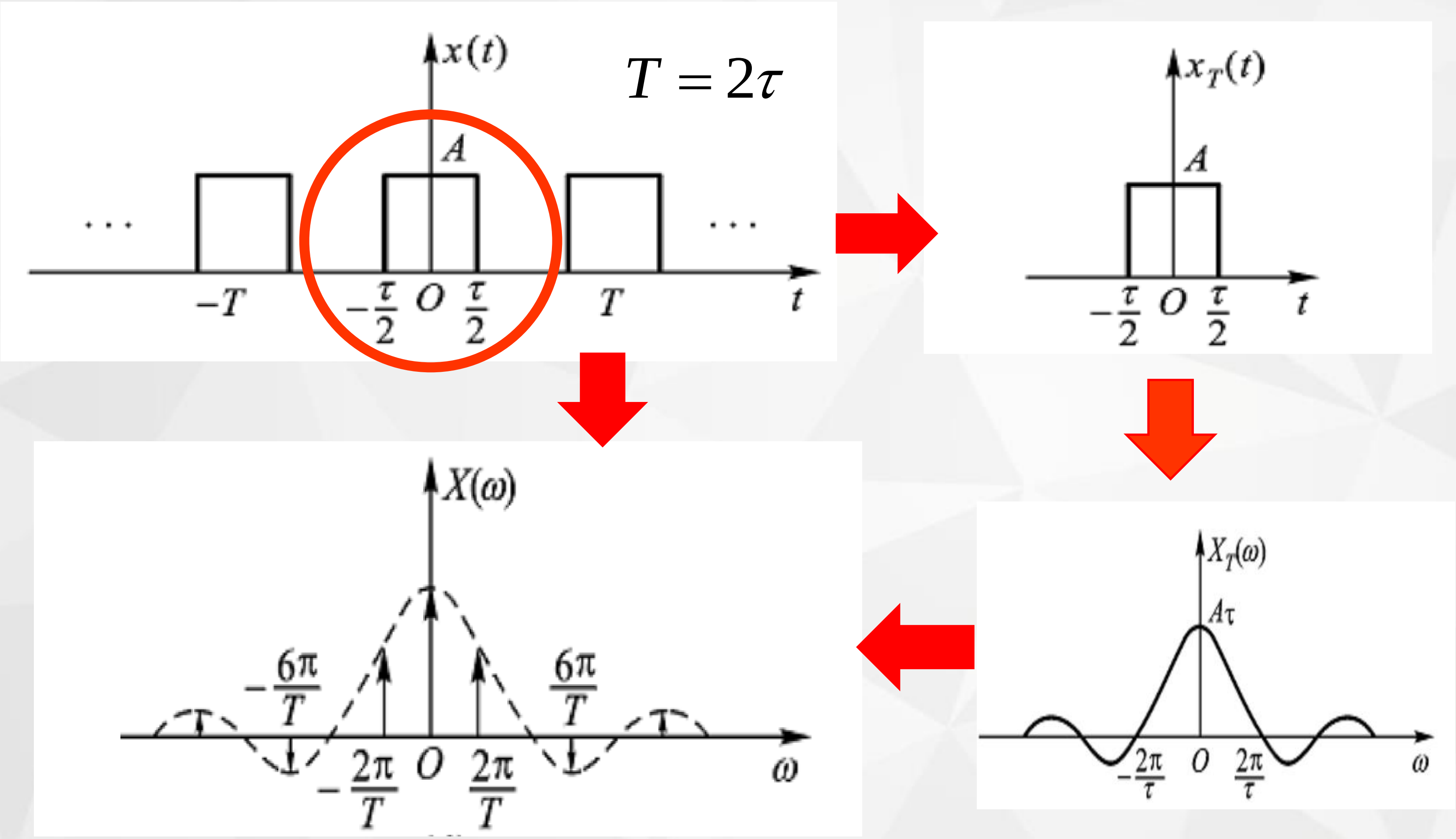
$$X(\omega)=\frac{2\pi}{T}X_T(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$$
$$=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_T(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0) \quad (2\text{-}3)$$

$$X(\omega)=\frac{2\pi A\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$T=2\tau$$

最后有: $$X(\omega)=\pi A\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_0)$$

信号的频谱分析



$$\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/2\tau = \pi/\tau$$