Unidad 2 - Modulo 1

Pablo Anicich

1 de julio de 2016

Ejercicio 1.2.8

Un apostador empedernido lo contrata para saber si le están haciendo trampa con los dados. Para eso le pasa una serie de 1000 tiradas del dado en cuestión; usted contabiliza las frecuencias y descubre que

Cara	Veces que salió
1	170
2	235
3	163
4	105
5	168
6	159

Como el apostador es muy cauto le pide que le responda con un nivel de confianza del 5%. Qué le puede decir?

Solución

Para resolver el problema un camino es usar la prueba de bondad de ajuste de la distribución χ^2 : el objetivo es determinar la calidad del ajuste de un conjunto observado de datos a uno esperado.

- La hipótesis nula es que el dado no está cargado.
- La hipótesis alternativa es que el dado está cargado.

Lo que pretendemos ver es si al nivel de confianza del 5% las fluctuaciones observadas entre la distribución de frecuencias esperada y la estimada son aleatorias. En tal caso la hipótesis nula es aceptada y podemos decir que el dado no está cargado.

Caso contrario estaremos aceptando que el dado está cargado.

Para poder construir el estadístico de la prueba, necesito la distribución de frecuencias esperadas, por lo que las agrego en la tabla de arriba que muestra las frecuencias observadas:

Cara	Veces que salió	Frecuencia esperada
1	170	166.6
2	235	166.6
3	163	166.6
4	105	166.6
5	168	166.6
6	159	166.6

A partir de esta tabla se pueden calcular las fluctuaciones observadas y analizar si el funcionamiento del dado es anómalo, a través de la prueba de bondad de ajuste, ya ensayada por otros. Como voy tarde, ensayo otro camino.

Aunque más restrictivo en su alcance, se podría usar la distribución binomial para analizar la tasa de éxito de unos de los seis posibles resultados. Por ejemplo, puedo analizar el evento "2" (el resultado de las tiradas es igual a 2). En este caso tendría:

Cara	Veces que salió	Frecuencia esperada
1,3,4,5,6	765	833.4
2	235	166.6

De todos modos, cualquiera sea el resultado de la tirada, siempre lo puedo pensar en términos del número "I" (I entre 1 y 6), lo único que debo hacer es calcular el estadístico de la prueba de hipótesis desde los datos asociados a ese número "I". Creo que abajo quedará más claro.

- Entonces mi test de hipótesis se plantearía en estos términos:

$$H_0: p(I) = 1/6$$

$$H_1: p(I) \neq 1/6$$

donde I está entre 1 y 6.

- Nuestro cliente apostador ha fijado el nivel de confianza en 5%.
- Ahora debo calcular el estadístico que me permite generar el resultado del test.

Como estoy trabajando con una distribución binomial, defino como $\bar{p}$ a la proporción muestral. Por otro lado la proporción poblacional (esperada) y su desviación estándar (esperada) son:

$$p = 1/6$$

$$\sigma_p = \sqrt{p(1-p)/n}$$

donde se usa n en vez de $n-1$ ya que estoy analizando 1000 tiradas. Aquí se está usando el Teorema Central del Límite, por eso en la desviación estándar aparece n en el denominador. Esto es debido a que se usa una distribución normal, por lo que el estadístico usado para tomar la decisión en el test es:

$$z = \frac{\bar{p} - p}{\sigma_p}$$

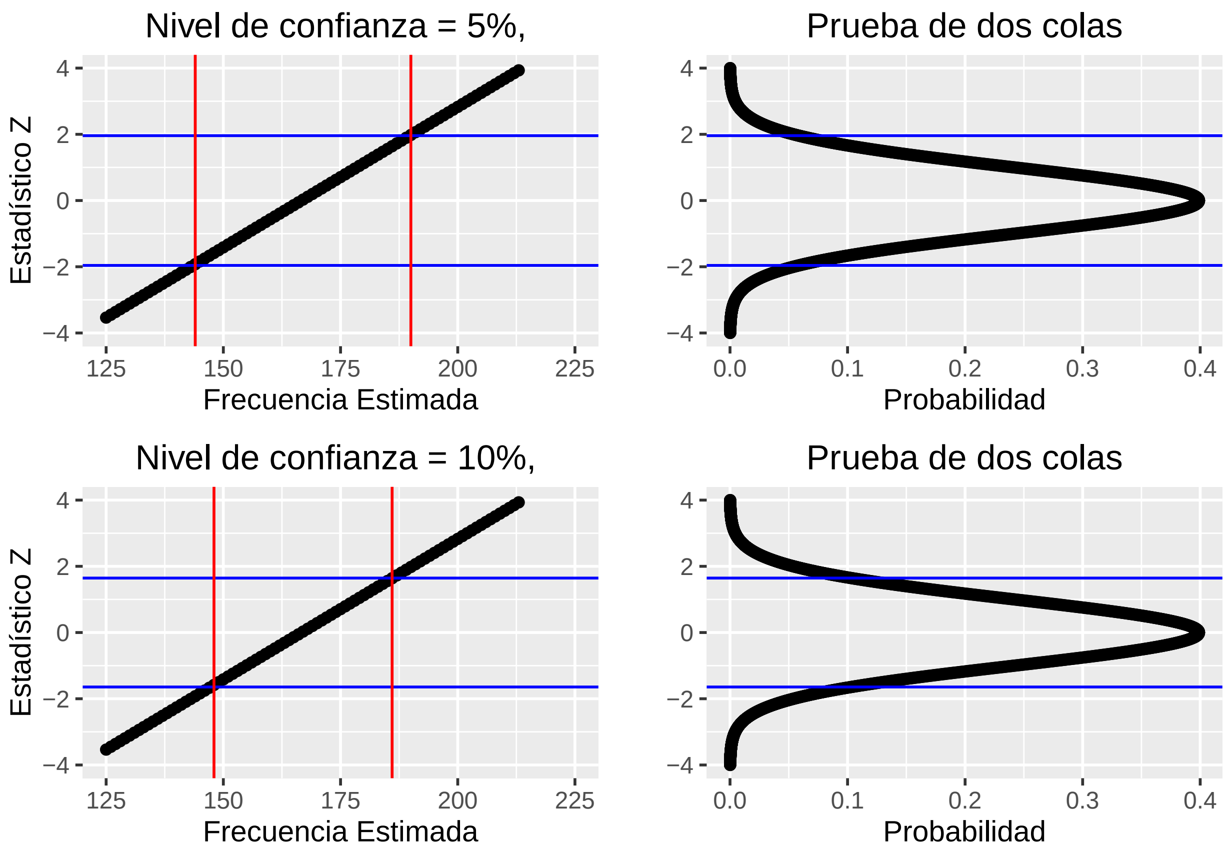
El estadístico z se puede representar como función de la proporción muestral $\bar{p}$ de modo que:

$$z = \frac{\bar{p} - 0.1667}{0.0118}$$

El intervalo de aceptación está dado por(-1.959964, 1.959964), correspondiendo sus límites a los niveles de confianza de los percentiles 2.5% y 97.5%. O sea que estoy usando una prueba de dos colas. Más que nada la elegí de este modo para resolver las frecuencias anómalamente altas y anómalamente bajas en el mismo problema.

Pero hagamos además el caso de dos colas para el nivel de confianza del 10% (es decir 5% por cola) para tener disponibles resultados para otros análisis relevantes en el problema. Ahora, el intervalo de aceptación está dado por(-1.6448536, 1.6448536).

Para poder hacer el análisis de los resultados para cada cara del dado, me fabrico un gráfico que muestra la dependencia del estadístico z con la frecuencia observada $\bar{p}$ de una dada cara del dado. Allí además señalo los límites del intervalo de aceptación de la hipótesis nula tanto en z (azul) como en la frecuencia muestral observada (rojo). Y entonces puedo analizar cada frecuencia que tengo en la tabla provista por el apostador. Además, grafico la densidad de probabilidad (aproximada por una distribución Normal N(0,1)) para visualizar lo que sucede en las colas de la distribución. Muestro los casos de 5% y 10% de confianza.



Para el nivel de confianza del 5%, tenemos que el intervalo de aceptación de la hipótesis nula para las frecuencias muestrales es: (144, 190). Esto significa que:

Cara	Veces que salió	Frecuencia esperada	Hipótesis Nula
1	170	166.6	Aceptada
2	235	166.6	Rechazada
3	163	166.6	Aceptada
4	105	166.6	Rechazada
5	168	166.6	Aceptada
6	159	166.6	Aceptada

Para el nivel de confianza del 10%, tenemos que el intervalo de aceptación de la hipótesis nula para las frecuencias muestrales es: (148, 186). Esto significa que:

Cara	Veces que salió	Frecuencia esperada	Hipótesis Nula
1	170	166.6	Aceptada
2	235	166.6	Rechazada
3	163	166.6	Aceptada
4	105	166.6	Rechazada
5	168	166.6	Aceptada
6	159	166.6	Aceptada

Con idéntico resultado al caso anterior.

Lo importante aquí es que si quisiéramos modificar nuestro test a uno de una sola cola, tendríamos estos dos (aplicables según frecuencia de cada cara del dado):

$$H_0 : p(I) = 1/6$$

$$H_1 : p(I) > 1/6$$

(aplicable a p(1), p(2) y p(5)), y:

$$H_0 : p(I) = 1/6$$

$$H_1 : p(I) < 1/6$$

(aplicable a p(3), p(4) y p(6)).

Al nivel de confianza del 5%, este test equivale a extraer el resultado de la cola correspondiente al segundo test presentado.

En conclusión:

- Las dos pruebas que examiné en detalle dan los mismos resultados: las caras correspondientes al 2 y al 4 tienen un comportamiento anómalo, la hipótesis nula se cae en estos dos casos.
- Las dos pruebas muestran que cambiando el nivel de confianza de 5% a 10%, el límite de aceptación de la hipótesis se mueve unas pocas unidades en términos de la frecuencia muestral.
- Basta con solo hacer el test con un único caso anómalo para determinar que el dado está cargado. El análisis hecho permite hacerlo para todos de modo simple, por eso fueron incluidos todos los casos.