Clase 8 - Interpolación polinomial (2)

Repaso:

- El problema: Dada una tabla de $(n+1)$ puntos: $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots(x_n y_n)$, con $x_0,x_1,\ldots x_n$ distintos, se desea determinar un polinomio p, con el **menor grado posible**, tal que

$$p(x_i) = y_i \quad \text{para} \quad i = 0,\ldots,n.$$

En este caso se dice que tal polinomio p **interpola** el conjunto de puntos dados.
- Existencia y unicidad del polinomio interpolante.
- Forma de Lagrange.
- Forma de Newton.
- Error en el polinomio interpolante.
- Convergencia de los polinomios de interpolación.

Diferencias divididas

Recordemos la forma de Newton del polinomio interpolante basado en los puntos distintos $x_0,x_1,\ldots x_n$:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j). \end{aligned}$$

Notemos que coeficiente c_0 se obtiene simplemente de $c_0 = y_0$ (o de $f(x_0)$. El coeficiente c_1 se calcula con y_1 (o $f(x_1)$, despejando en

$$y_1 = p_1(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0), \quad \text{esto es} \quad c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

este coeficiente depende de x_0,x_1,y_0,y_1. En general, para calcular el coeficiente c_k se requieren conocer $x_0,\ldots,x_k,y_0,\ldots,y_k$, o si estamos interpolando a una función f se requieren: $x_0,\ldots,x_k,f(x_0),\ldots,f(y_k)$. Este coeficiente se denota por

$$c_k = f[x_0,x_1,\ldots,x_k],$$

para $k = 0,\ldots,n$ y se denomina **diferencias divididas**.

Ahora la forma de Newton compacta del polinomio interpolante resulta

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} f[x_0,x_1,\ldots,x_i \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j),$$

donde si $k = 0$:

$$f[x_0] = f(x_0),$$

si $k = 1$:

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Veremos a continuación un resultado general para determinar las diferencias divididas asociadas a un polinomio que interpola una función f.

Teorema 1. *Dados $x_0, x_1, \dots, x_n$ números reales distintos, las diferencias divididas satisfacen la siguiente ecuación*

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Demostración.

Sea p_{n-1} el polinomio de grado $\leq n-1$ que interpola a f en los n puntos $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$.

Sea q el polinomio de grado $\leq n-1$ que interpola a f en los n puntos $x_1, x_1, \dots, x_n$.

Sea p_n el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en los $n+1$ puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Se afirma que

$$p_n(x) = q(x) + \frac{(x - x_n)}{(x_n - x_0)}[q(x) - p_{n-1}(x)]. \tag{1}$$

Es claro que a ambos lados de la igualdad se tienen polinomios de grado $\leq n$. Además, para $i = 0$,

$$p_n(x_0) = f(x_0) \quad \text{y} \quad q(x_0) + \frac{(x_0 - x_n)}{(x_n - x_0)}[q(x_0) - p_{n-1}(x_0)] = p_{n-1}(x_0) = f(x_0).$$

Para $i = 1, \dots, n-1$,

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{y} \quad q(x_i) + \frac{(x_i - x_n)}{(x_n - x_0)}[q(x_i) - p_{n-1}(x_i)] = f(x_i),$$

pues $q(x_i) = p_{n-1}(x_i) = f(x_i)$ para $i = 1, \dots, n-1$.

Para $i = n$,

$$p_n(x_n) = f(x_n) \quad \text{y} \quad q(x_n) + \frac{(x_n - x_n)}{(x_n - x_0)}[q(x_n) - p_{n-1}(x_n)] = q(x_n) = f(x_n).$$

Por lo tanto, a ambos lados lados de (1) se tiene un polinomio de grado $\leq n+1$ y ambos interpolan a f en los mismos $n+1$ puntos distintos. Luego por unicidad del polinomio interpolante, la igualdad (1) es cierta. Como ambos polinomios son iguales, los coeficientes de cada potencia de x deben coincidir. En particular considerando el coeficiente de x^n a ambos lados de (1) obtenemos

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \tfrac{1}{x_n - x_0}[f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] \\ &= \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \end{aligned}$$

$\square$

Luego

$$
\begin{aligned}
f[x_0] &= f(x_0) \\
f[x_0,x_1] &= \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} \\
f[x_0,x_1,x_2] &= \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} \\
\vdots \quad &= \quad \vdots \\
f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+j}] &= \frac{f[x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{i+j}]-f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+j-1}]}{x_{i+j}-x_i} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Tabla de diferencias divididas

Dados 4 puntos distintos (no necesariamente ordenados) se puede construir la tabla de diferencias divididas de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_0 & f[x_0] & f[x_0,x_1] & f[x_0,x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
x_1 & f[x_1] & f[x_1,x_2] & f[x_1,x_2,x_3] & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_2,x_3] & & \\
x_3 & f[x_3] & & &
\end{array}
$$

Ejemplo: Dados los siguientes valores:

x	3	1	5	6
$f(x)$	1	-3	2	4

a) obtener la tabla de diferencias divididas

$$
\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & 2 & -3/8 & 7/40 \\
1 & -3 & 5/4 & 3/20 & \\
5 & 2 & 2 & & \\
6 & 4 & & &
\end{array}
$$

b) obtener el polinomio interpolante en la forma de Newton:

$$p(x) = 1 + 2(x-3) - \frac{3}{8}(x-3)(x-1) + \frac{7}{40}(x-3)(x-1)(x-5).$$

Algoritmo para calcular los coeficientes de la tabla de diferencias divididas

Para obtener algorítmicamente los coeficientes de la tabla de diferencias divididas se puede pensar la misma como en un arreglo matricial de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_0 & c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & \cdots & c_{0,n-1} & c_{0,n} \\
x_1 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1,n-1} & \\
x_2 & c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & \iddots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \iddots & & & & \\
x_{n-1} & c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & & & & & \\
x_n & c_{n,0} & & & & & &
\end{array}
$$

donde $c_{ij} = f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}]$.

Dados los datos de entrada $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ se pueden calcular estos coeficientes a partir de la fórmula (2) de la siguiente manera:

for $j = 1$ **to** n **do**

  for $i = 0$ **to** $n - j$ **do**

    $c_{i,j} \leftarrow (c_{i+1,j-1} - c_{i,j-1})/(x_{i+j} - x_i)$

  end do

end do

Este algoritmo puede ser optimizado de modo de almacenar estos coeficientes en un vector en vez de una matriz para ahorrar espacio de almacenamiento.

Propiedades de las diferencias divididas

Veremos a continuación algunos resultados interesantes acerca de las diferencias divididas. El primero es un resultado sobre la permutación de los puntos de interpolación, el segundo sobre el error de interpolación y el tercero y último relaciona las diferencias divididas con las derivadas de orden superior.

Teorema 2. *Sean $x_0, x_1, \ldots x_n$ números reales distintos y $z_0, z_1, \ldots z_n$ un reordenamiento de $x_0, x_1, \ldots x_n$. Entonces $f[z_0, z_1, \ldots z_n] = f[x_0, x_1, \ldots x_n]$.*

Demostración. Primero es importante notar que el polinomio interpolante de grado $\leq n$ basado en los puntos $x_0, x_1, \ldots x_n$ coincide con el polinomio interpolante de grado $\leq n$ basado en los puntos $z_0, z_1, \ldots z_n$.

Luego, el coeficiente de x^n en el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en $z_0, z_1, \ldots z_n$ es $f[z_0, z_1, \ldots z_n]$ y el coeficiente de x^n en el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en $x_0, x_1, \ldots x_n$ es $f[x_0, x_1, \ldots x_n]$, y deben ser iguales pues estos dos polinomios son iguales.

$\square$

Teorema 3. *Sea p el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en los $n+1$ nodos distintos $x_0, x_1, \ldots x_n$. Si t es un número real distinto de los nodos, entonces*

$$f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \ldots x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j).$$

Demostración. Sea q el polinomio de grado $\leq n+1$ que interpola a f en $x_0, x_1, \ldots x_n, t$. Por la manera en que se genera el polinomio interpolante en la forma de Newton se sabe que

$$q(x) = p(x) + f[x_0, x_1, \ldots x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Como q interpola a f en el punto t, se tiene que $q(t) = f(t)$, y entonces:

$$f(t) = p(t) + f[x_0, x_1, \ldots x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j),$$

por lo tanto,

$$f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \ldots x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j).$$

□

Teorema 4. *Si f es una función n veces continuamente diferenciable en $[a,b]$ y $x_0, x_1, \ldots x_n$ son $n+1$ puntos nodos distintos en $[a,b]$, entonces existe un punto $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$f[x_0, x_1, \ldots x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Demostración. Sea p el polinomio de grado $\leq n-1$ que interpola a f en $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$. Por el teorema del error en el polinomio interpolante de la clase anterior, aplicado a $x = x_n$, se sabe que

$$f(x_n) - p(x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j).$$

Ahora, por el Teorema 3 se obtiene

$$f(x_n) - p(x_n) = f[x_0, x_1, \ldots x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j),$$

y por lo tanto

$$f[x_0, x_1, \ldots x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

□

Interpolación de Hermite

Comenzaremos analizando a las diferencias divididas como función de sus argumentos. Hasta ahora hemos definido a las diferencias divididas para puntos distintos $x_0, x_1, \ldots x_n$. Consideremos ahora el caso simple de 2 puntos x_0 y x:

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ahora tomando límite para x que tiene a x_0 se tiene que

$$\lim_{x \to x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Luego es posible extender la definición de diferencias divididas para números repetidos de la siguiente manera

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x \to x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Con esta generalización se pueden construir un polinomio interpolante de grado 3, con sólo 2 puntos de interpolación y agregando 2 condiciones de interpolación de la derivada en esos mismos puntos, esto es:

$$\begin{array}{rclcrcl} p(x_0) & = & f(x_0), & \quad & p(x_1) & = & f(x_1), \\ p'(x_0) & = & f'(x_0), & \quad & p'(x_1) & = & f'(x_1). \end{array}$$

Así se obtiene la siguiente tabla de diferencia dividida

$$\begin{array}{c|llll} x_0 & f[x_0] & f'(x_0) & f[x_0, x_0, x_1] & f[x_0, x_0, x_1, x_1] \\ x_0 & f[x_0] & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_1, x_1] & \\ x_1 & f[x_1] & f'(x_1) & & \\ x_1 & f[x_1] & & & \end{array}$$

Ahora, el polinomio interpolante basado en esta tabla está dado por

$$p(x) = f[x_0] + f'(x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1).$$

En general, el polinomio interpolante que usa las derivadas en un punto se llama **forma de Hermite**.

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 4.

Teorema 5. *Se f una función definida en $[a, b]$, n veces continuamente diferenciable en $[a, b]$. Sean $x_0, x_1, \ldots x_n \in [a, b]$ puntos distintos y $z \in (a, b)$. Entonces*

$$\lim_{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \to (z, z, \ldots, z)} f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}.$$

Demostración. Por el Teorema 4 se sabe que existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$f[x_0,x_1,\dots x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Como $x_0 \to z$, $x_1 \to z, \dots, x_n \to z$ entonces $\xi \to z$.

Como $f^{(n)}$ es continua entonces

$$\lim_{(x_0,x_1,\dots,x_n)\to(z,z,\dots,z)} f[x_0,x_1,\dots,x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\lim_{\xi\to z} \xi) = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}.$$

□

El siguiente corolario es una consecuencia directa del teorema anterior.

Corolario 1. *Si f es n veces continuamente diferenciable en un entorno del punto x_0, entonces*

$$f[x_0,x_0,\dots,x_0] = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Demostración. Trivial, basta tomar $z = x_0$. □

Ejemplo: determinar el polinomio de grado 4 que interpola los siguientes datos:

$$\begin{array}{lllllllll} p(1) & = & 2, & p'(1) & = & 3, & & & \\ p(2) & = & 6, & p'(2) & = & 7, & p''(2) & = & 8. \end{array}$$

La tabla de diferencias divididas resulta en

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & \\ 2 & 6 & 7 & 4 & & \\ 2 & 6 & 7 & & & \\ 2 & 6 & & & & \end{array}$$

y el polinomio interpolante de Hermite es

$$p(x) = 2 + 3(x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^2(x-2) - (x-1)^2(x-2)^2.$$