

Intervalos de Confianza basados en una sola muestra

Una estimación puntual sólo nos proporciona un valor numérico, pero NO proporciona información sobre la precisión y confiabilidad de la estimación del parámetro. Entonces una alternativa es calcular lo que llamaremos **INTERVALO DE CONFIANZA**.

Notación:

Denotaremos al parámetro de interés con la letra θ y con $\hat{\theta}$ un estimador para θ .

Un **Intervalo de Confianza (IC)** para θ permite tener una medida de la **CONFIABILIDAD** y **PRECISION** de la estimación del parámetro.

La **PRECISION** de un IC tiene que ver con su longitud, cuanto menor sea su longitud mayor precisión.

La **CONFIABILIDAD** es medida con el **nivel de confianza** del intervalo, que denotaremos con $(1 - \alpha)$. Los niveles más usados son de 0,95 ; 0,99 y 0,90.

Cuanto mayor sea el nivel de confianza mayor es la chance que el IC contenga al verdadero valor poblacional.

Luego es bueno pedirle a un IC que tenga una longitud pequeña y una alta confiabilidad que contenga al parámetro poblacional.

Método para generar IC para θ

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria (m.a.) con distribución que depende de θ .

Hallar $h(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$ un estadístico con distribución conocida y que no dependa de θ .

Fijar un nivel de confianza $(1 - \alpha)$ y usando la distribución del estadístico encontrar $a < b$ tales que

$$P(a < h(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b) = (1 - \alpha) \quad (1)$$

A partir de la expresión del evento tratar de obtener $l(X_1, X_2, \dots, X_n)$ y $u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tales que

$$P((l(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta < u(X_1, X_2, \dots, X_n))) = (1 - \alpha)$$

Luego

$(l(X_1, X_2, \dots, X_n); u(X_1, X_2, \dots, X_n))$ es un IC aleatorio para θ

con un nivel de confianza $(1 - \alpha)$

Notación:

Denotaremos con z_β al valor crítico, hallado en la tabla de la distribución Normal Estándar, tal que:

$$\Phi(z_\beta) = 1 - \beta \quad (2)$$

IC para la media poblacional μ

Caso A:

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una m.a. con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 conocida.

Ya sabemos cuál es la distribución del promedio muestral y al estandarizarlo se tiene que

$$\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} = h(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) \sim N(0, 1)$$

Fijado un nivel de confianza ($1 - \alpha$), buscar en la tabla normal estándar los valores de a y b tales que cumplan (1). Entonces tomar

$$a = -z_{\frac{\alpha}{2}} \quad y \quad b = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

y luego trabajando desde la expresión del evento se tiene que

$$P\left(\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right) = (1 - \alpha)$$

Por lo tanto un IC aleatorio de nivel ($1 - \alpha$) para $\theta = \mu$ es:

$$\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Por lo tanto si se observa que

$$X_1 = x_1 ; X_2 = x_2 ; \dots ; X_n = x_n$$

Un IC con un nivel de confianza $(1 - \alpha)$ para μ es

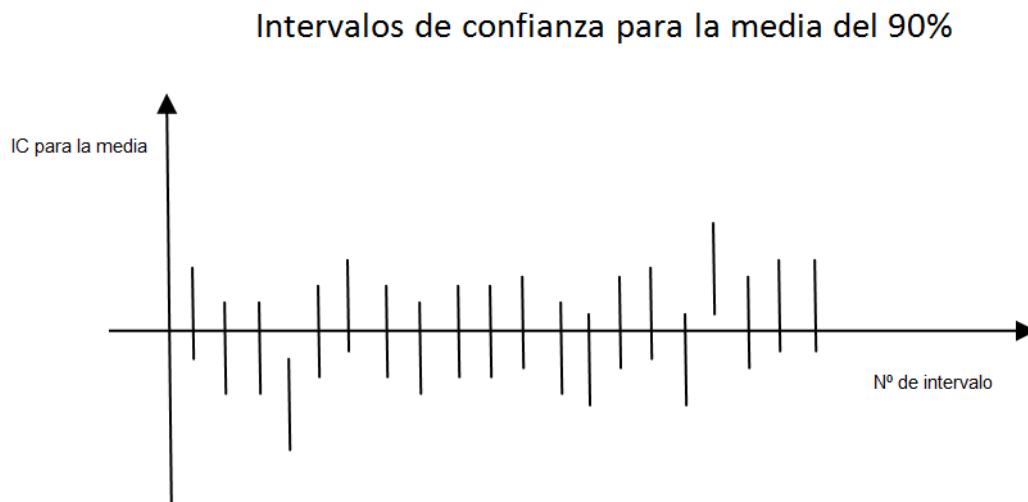
$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Interpretación del nivel de confianza de un intervalo

Se generaron 20 muestras aleatorias de $N(0; 1)$ de tamaño $n=10$. Con cada muestra se calculó el IC del 90% para μ dado por

$$\bar{x} \pm 1,645 \frac{1}{\sqrt{10}}, \text{ con } z_{0,05} = 1,645$$

Los 20 IC se muestran en la siguiente gráfica



Como se puede observar en la gráfica el verdadero valor de μ , que sabemos es igual a cero, NO pertenece a sólo el 10% de los IC hallados.

Por eso un IC del 0,90 significa que hay una confiabilidad del 90% que el valor verdadero del parámetro se encuentre entre la cota inferior y superior hallada.

Algunas observaciones:

a) La longitud de IC de nivel ($1 - \alpha$) para μ es igual a

$$2 z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

b) A mayor confiabilidad ($1 - \alpha$) se pierde precisión.

c) Si se quiere obtener una longitud de a lo sumo ω y una confiabilidad ($1 - \alpha$) para μ entonces tomar

$$n \geq \left(2 z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\omega} \right)^2.$$

Ejercicio:

La calibración de una báscula debe ser revisada al pesar 25 veces un espécimen de 10 Kg. Suponga que los resultados de los diferentes pesos son independientes entre sí y que la variable peso está normalmente distribuida con un desvío estándar $\sigma = 0,20$ Kg. Sea μ el verdadero valor medio de lectura de peso de la báscula.

- a) ¿Cuál es el nivel de confianza para el intervalo $\bar{x} \pm 2,81 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ para μ ?
- b) ¿Cuál es el valor de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un IC del 99,7% para μ ?
- c) Si de la muestra observada se obtuvo un promedio y desvío estándar muestrales de 10,30 Kg y 0,19 Kg respectivamente, obtenga un IC del 95% para μ . Interprete el intervalo obtenido.
- d) ¿Qué tan grande debería ser el tamaño de muestra tal que la longitud del IC del 95% para μ sea a lo sumo de 0,05?

Caso B:

Ya sabemos por T.C.L. que si el tamaño de la muestra es suficientemente grande y si X_1, X_2, \dots, X_n una m.a. con esperanza μ y varianza σ^2 entonces si $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ tiene distribución aproximadamente $N(\mu ; \sigma^2/n)$, o sea

$$\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{d}{\sim} N(0,1).$$

Luego trabajando de igual forma que lo realizado en el caso anterior se tiene que un IC de nivel aproximado

$$(1 - \alpha) \text{ para } \mu \text{ es: } \bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

siempre que $n \geq 30$ y σ conocido.

Pero cuando σ es desconocido ¿qué hacer?

Reemplazar σ por el estimador S , luego un IC de nivel aproximado $(1 - \alpha)$ para μ es:

$$\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \text{ siempre que } n \geq 40.$$

Un IC de nivel aproximado $(1 - \alpha)$ para μ de longitud de a lo sumo ω entonces el tamaño de muestra debe ser tal que:

$$n \geq \left(2 z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\omega} \right)^2.$$

Ejercicio:

En una muestra de 110 relámpagos, en cierta región, tuvieron una duración de eco de radar promedio muestral de 0,81 y una desviación estándar muestral de 0,34 segundos. Calcular un IC del 99% para la media de duración de eco μ .

Caso C:

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una m.a. con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 desconocida.

Ya sabemos que

$$\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Por lo tanto por lo visto recién si $n \geq 40$ un IC de nivel aproximado $(1 - \alpha)$ para μ es:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Pero ¿qué hacer si $n < 40$?

Para dar el IC en esta situación presentaremos una nueva v.a. que tiene distribución t-student.

Distribución t-student con ν grados de libertad

Definición: Sean Z y X dos variables aleatorias independientes tales que $Z \sim N(0, 1)$ y $X \sim \chi^2_\nu$.

Entonces $T = \frac{Z}{\sqrt{X/\nu}}$ se dice que tiene **distribución t-student con ν grados de libertad.**

De la definición resulta que la función densidad para una v.a. con distribución t-student con ν grados de libertad es:

$$f(x; \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

para todo $x \in R$.

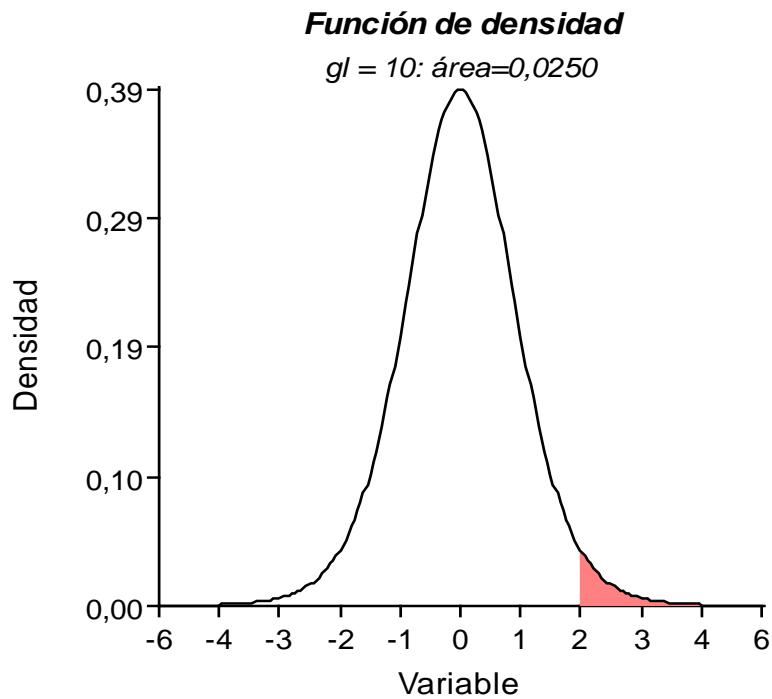
Propiedades de la densidad de una t-student con ν gl.

- Tiene forma de campana y es simétrica entorno del origen.
- La diferencia con la $N(0; 1)$ es que tiene mayor dispersión para ν pequeño.
- Cuando $\nu \rightarrow \infty$ la densidad se approxima a la $N(0; 1)$.

Para el cálculo de probabilidades usaremos la Tabla A-5 del libro de Devore.

Notación:

$t_{\alpha,v}$ es el valor crítico cuya área a cola superior es igual a α y los grados de libertad son v .



$$t_{0,025;10} = 2,228$$

Ejercicio:

Para una distribución t-student con ν grados de libertad.

- I) Determinar los siguientes valores críticos:
 - a) $t_{0,025,5}$
 - b) $t_{0,975,5}$
 - c) $t_{0,025,25}$
 - d) $t_{0,025,60}$
- II) Determinar el valor crítico que contenga el área descripta en los siguientes casos:
 - a) Área a cola inferior 0,025 y grados de libertad 15.
 - b) Área central 0,95 y grados de libertad 15.
 - c) Área central 0,99 y grados de libertad 25.

Teorema:

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria con distribución $N(\mu, \sigma^2)$ entonces:

a) $Z = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ y $W = (n - 1) \frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

b) Z y W son variables aleatorias independientes.

Por lo tanto de a) y b) resulta que

$$\frac{(\bar{X} - \mu)}{s / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Luego con este resultado y trabajando en forma similar a lo realizado cuando la distribución era la normal estándar, se tiene que un IC de nivel ($1 - \alpha$) para μ es:

$$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Ejercicio:

Un artículo sobre envejecimiento del papel aislante en transformadores de potencia, contiene la siguiente tabla sobre el grado de polimerización en muestra de papel para los cuales la viscosidad multiplicada por la concentración se ubica en valores intermedios:

418 421 421 422 425 427 431 434 437
439 446 447 448 453 454 463 465

Suponiendo que muestra proviene de una distribución normal

- Construir un intervalo de confianza del 95% para el grado de polimerización medio.
- A partir del intervalo obtenido ¿es factible el valor de 440 para la polimerización media? ¿y un valor de 450? Justifique su respuesta.

IC para σ^2 y σ de nivel $(1 - \alpha)$

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una m.a. con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 desconocida.

Para dar el IC en esta situación presentaremos otra variable aleatoria cuya distribución es χ^2 con v grados de libertad o sea una $\Gamma\left(\frac{v}{2}, 2\right)$.

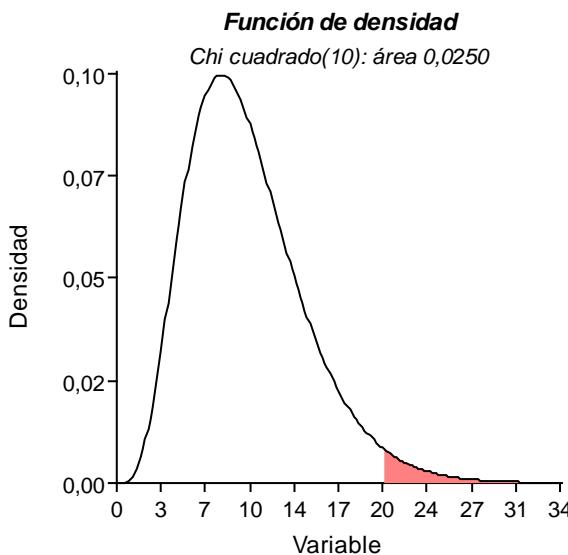
Distribución χ^2 con v grados de libertad (gl)

La función densidad de esta variable aleatoria no es simétrica respecto del origen y es definida positiva.

Para el cálculo de probabilidades usaremos la Tabla A-7 del libro de Devore.

Notación:

$\chi^2_{\alpha, v}$ es el valor crítico cuya área a cola superior es igual a α y los grados de libertad son v .



$$\chi^2_{0,025;10} = 20,483$$

Ejercicio:

Sea X una variable aleatoria con distribución Ji -cuadrado, entonces hallar:

- a) El valor crítico que me deja un área a cola superior de 0,005 con $gl=25$.
- b) El valor crítico que me deja un área a cola superior de 0,95 con $gl=25$.
- c) El percentil 95% para X con $gl=10$.
- d) El percentil 5% para X con $gl= 15$.
- e) $P(10,98 \leq X \leq 36,78)$ con $gl=22$.
- f) $P((X < 14,611) \cup (X > 37,652))$ con $gl=25$.

Teorema:

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria con distribución $N(\mu, \sigma^2)$ entonces

$$\frac{(n-1) s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Luego con este resultado y trabajando en forma similar a lo realizado antes se tiene que un IC de nivel $(1 - \alpha)$ para σ^2 es:

$$\left(\frac{(n-1) s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} ; \frac{(n-1) s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \right)$$

y para σ

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1) s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}} ; \sqrt{\frac{(n-1) s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}} \right).$$

Ejercicio:

Se efectuaron las siguientes observaciones de resistencia a la fractura de placas base de 18% de acero maragizado al níquel:

69,5 71,9 72,6 73,1 73,3 73,5 75,5 75,7 75,8 76,1 76,2
76,2 77,0 77,9 78,1 79,6 79,7 79,9 80,1 82,2 83,7 83,7

- a) Construir un intervalo de confianza del 99% para la resistencia media a la fractura.
- b) Construir un intervalo de confianza del 99% para la desviación estándar poblacional de la resistencia a la fractura.
- c) ¿Cuáles son los supuestos necesarios para que ambos intervalos sean válidos?

Cálculo de intervalos de confianza para la media y varianza poblacional para los datos del acero maragizado al níquel usando R.

```
x=c(69.5 , 71.9, 72.6, 73.1, 73.3, 73.5, 75.5, 75.7,  
75.8, 76.1, 76.2, 76.2, 77, 77.9, 78.1, 79.6, 79.7,  
79.9, 80.1, 82.2, 83.7, 83.7)
```

a)

```
> m=mean(x)
```

```
>m
```

```
[1] 76.87727x
```

```
> s=sqrt(var(x))
```

```
> s
```

```
[1] 3.784798
```

```
> t=qt(0.995,21) ->cuantil 0.995 de una v.a. t-student con gl=21
```

```
> t
```

```
[1] 2.83136
```

Intervalo de confianza del 99% para μ es:

> $m - (t^*s / \sqrt{22})$

[1] 74.59259

> $m + (t^*s / \sqrt{22})$

[1] 79.16196

instalar la library(Rmisc) -> CI(x, ci=0.99)

> CI(x, ci = 0.99)

upper mean lower

79.16196 76.87727 74.59259

b) El comando qchisq calcula el cuantil p para una variable aleatoria χ^2 con determinados gl.

x1= qchisq(0.005,21) → calcula el cuantil 0.005 con gl=21

> x1

[1] 8.033653

x2= qchisq(0.995,21) → calcula el cuantil 0.995 con gl=21

> x2

[1] 41.40106

El Intervalo de Confianza del 99% para σ^2 es:

> $21*s^2 /x2$

[1] 7.265964

> $21*s^2 /x1$

[1] 37.44481

El Intervalo de Confianza del 99% para σ es:

> $\sqrt{21*s^2 /x2}$

[1] 2.695545

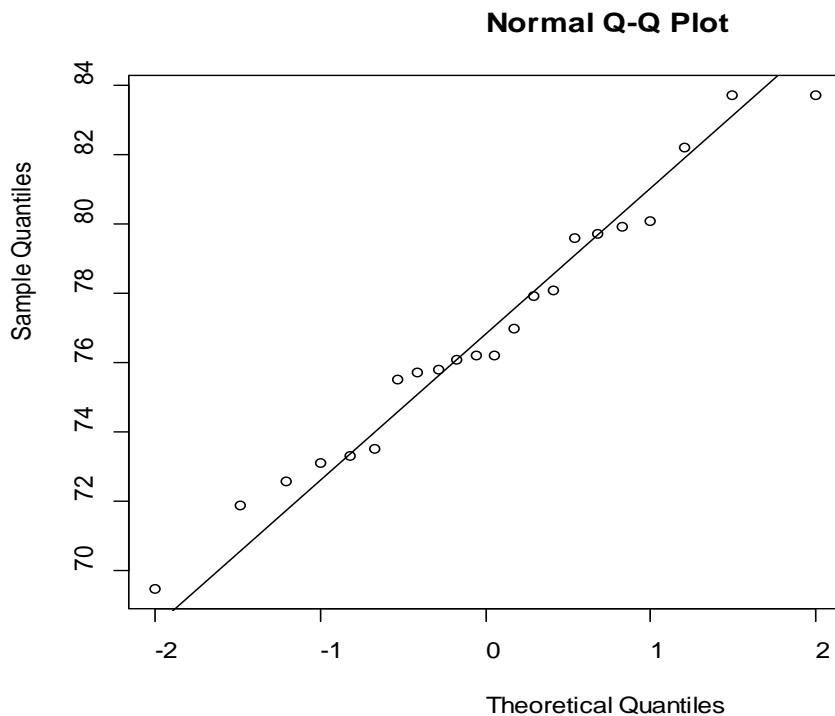
> $\sqrt{21*s^2 /x1}$

[1] 6.119217

c) Verificación del supuesto de normalidad de la muestra

```
> qqnorm(x)
```

```
> qqline(x)
```



```
> shapiro.test(x)
```

Shapiro-Wilk normality test

data: x

$W = 0.97256$, p-value = **0.7696** → No hay evidencia suficiente para rechazar que la muestra proviene de una distribución normal, con lo cual los intervalos obtenidos son válidos.

IC para la proporción poblacional p

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una m.a. con distribución Bernoulli(p) y tamaño de muestra suficientemente grande entonces por TCL resulta que

$$\frac{(\hat{p} - p)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

donde $\hat{p} = \frac{X}{n}$ donde $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$.

Plantear la ecuación:

$$P\left[\left|\frac{(\hat{p} - p)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \cong 1 - \alpha$$

Trabajando con el evento y elevando al cuadrado se puede obtener una ecuación cuadrática en p donde las raíces de esa ecuación son la cota inferior y superior de confianza aproximado $(1 - \alpha)$ para p , resultando:

$$\frac{\hat{p} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{4n^2}}}{1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}}$$

Para n suficientemente grande:

$\frac{z_{\alpha/2}^2}{2n}$ es insignificante en comparación con \hat{p} ;

$\frac{z_{\alpha/2}^2}{4n^2}$ es insignificante en comparación con $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$ y

$\frac{z_{\alpha/2}^2}{n}$ es insignificante en comparación con 1.

Luego desechando esos términos insignificantes resulta este IC aproximado tradicional

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \text{ siempre que } n\hat{p} \geq 10 \text{ y } n\hat{q} \geq 10.$$

Observación:

Para éste último intervalo, si se quiere un IC de nivel aproximado $(1 - \alpha)$ para p y de longitud de a lo sumo ω entonces el tamaño de muestra debe ser tal que:

$n \geq \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\omega} \right)^2$ independientemente del valor de la proporción observada (\hat{p}).

Ejercicio:

En un artículo sobre estimación de fuentes de defectos visuales, se reporta que se estudiaron con un sensor de inspección 356 matrices de silicio de las cuales 201 pasaron la prueba.

- a) Construir un intervalo de confianza de 98% para la proporción poblacional de matrices que pasan la inspección.
- b) ¿Qué tamaño de muestra sería necesario para que la longitud un intervalo de confianza de 98% para la proporción poblacional de matrices que pasan la inspección sea a lo sumo 0,05, independientemente del valor \hat{p} ?