Práctico 2 - Redes Neuronales 2020

FAMAF - UNC

Alumno: Pablo N. Rosa
Profesor: Francisco A. Tamarit

1. Introducción

El modelo neuronal **integrate-and-fire** es un modelo mono-compartimental que describe la dinámica subumbral del potencial de membrana V. La dinámica de disparos está definida por el umbral de disparo (V_{th}), es decir, el potencial de membrana a partir del cual la neurona dispara. Después del disparo, V es establecido al potencial de reposo de la neurona. La dinámica subumbral fue inicialmente diseñada para capturar las propiedades pasivas de la membrana, y está dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{dV_m(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_m}(E_L + R_m I_e(t) - V_m(t)) \qquad (1)$$

donde E_L es el potencial en reposo, $I_e(t)$ es una corriente eléctrica externa (por convención es positiva) que se inyecta, R_m es la resistencia y τ_m es el tiempo característico de la membrana $\tau_m = r_m c_m$ (donde r_m y c_m son respectivamente la resistencia y la capacitancia de la membrana por unidad de área).

Se trabajará con este modelo, usando la ecuación (1) como punto de partida, al analizar su comportamiento con y sin umbral de disparo. Luego se verá cómo influye la forma y magnitud de la corriente externa I_e en la generación de disparos.

2. Análisis y resultados

2.1. Modelo sin umbral

Resolveremos analíticamente la ecuación (1) sin incorporar el umbral de disparo. Asumiendo que $I_e(t) = I_e$, es decir, una constante e independiente del tiempo. Entonces podemos reescribir (1) como:

$$\frac{dV_m(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_m}(E_L + R_m I_e - V_m(t))$$

Sea $V_\infty = E_L + R_m I_e$ (una constante) y definamos una nueva variable $Z(t) = V_\infty - V_m(t)$, entonces:

$$\frac{dV_m(t)}{dt} = \frac{V_\infty - V_m(t)}{\tau_m} = \frac{Z(t)}{\tau_m}$$

Por otro lado la derivada de $Z(t)$ con respecto a t:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{dV_\infty}{dt} - \frac{dV_m(t)}{dt} = -\frac{dV_m(t)}{dt} = -\frac{Z(t)}{\tau_m}$$

Entonces podemos reescribir la ecuacion anterior como:

$$\frac{dZ(t)}{Z(t)} = -\frac{dt}{\tau_m}$$

e integrando ambos lados como:

$$\int_{Z(0)}^{Z(t)} \frac{dZ'(t)}{Z'(t)} = \ln \frac{Z(t)}{Z(0)} = -\frac{1}{\tau_m} \int_0^t dt' = -\frac{t}{\tau_m}$$

Esto nos da

$$Z(t) = Z(0)exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right) \iff V_\infty - V_m(t) = (V_\infty - V_m(0))exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right)$$

Si $V_m(0) = V_0$, entonces

$$V_m(t) = V_\infty - (V_\infty - V_0)exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right)$$

$$\iff V_m(t) = E_L + R_m I_e + (V_0 - E_L - R_m I_e)exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right) \qquad (2)$$

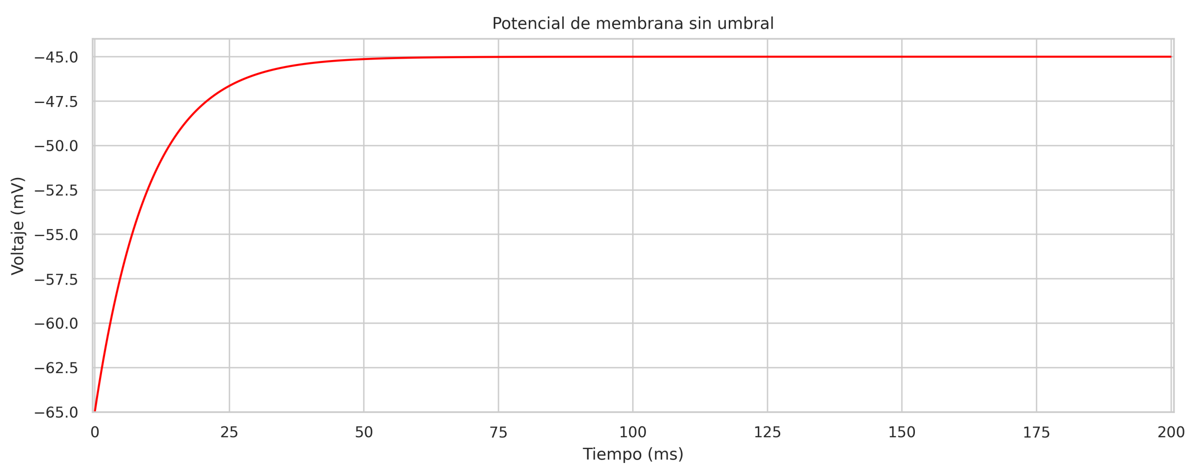
Con esta expresión para $V_m(t)$, aplicamos una corriente $I_e = 2nA$ constante y con algunos valores de parámetros fijados:

$$V_0 = E_L = -65mV, \quad R_m = 10M\Omega, \quad \tau_m = 10ms$$

nos queda

$$V_m(t) = -45mV + 20mV exp\left(-\frac{t}{10ms}\right)$$

Figura 1. Solución analítica del modelo sin umbral y corriente constante de 2 nA



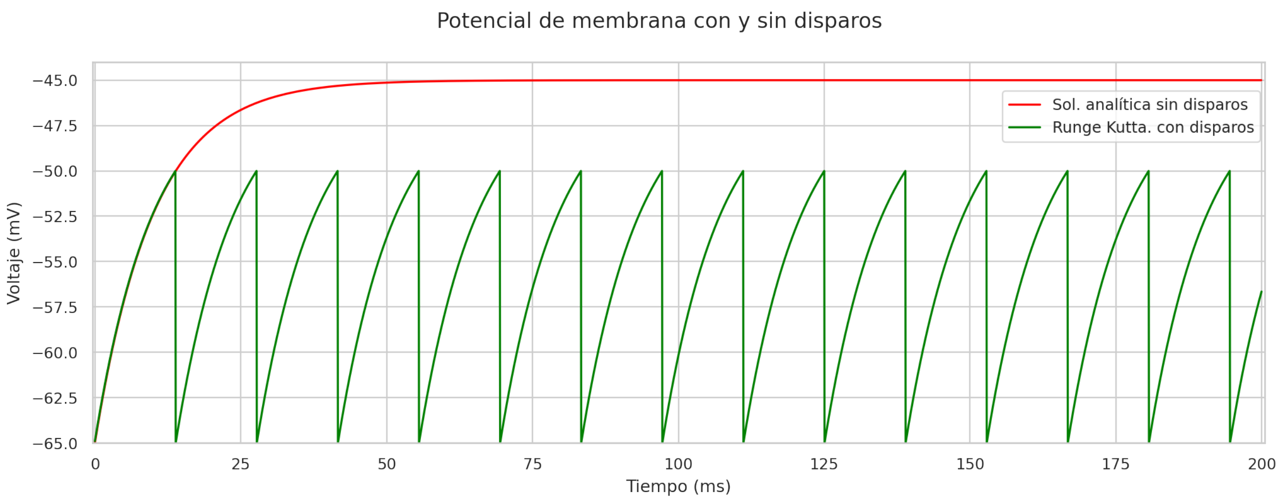
Se observa que si este modelo no incoporara un umbral para el disparo, que resete el potencial de membrana una vez que lo pase, entonces si $t \to \infty$ el potencial de membrana se quedará en $-45mV$, tal como muestra la Figura 1. Esta ecuación tambien indica que cuando $I_e = 0$, el potencial de membrana se relaja exponencialmente con tiempo contstante τ_m a $V = E_L$, por lo que E_L es efectivamente el potencial de reposo de la neurona.

2.2. Modelo con umbral V_{th}

Para generar potenciales de acción, la ecuación inicial (1) se mejora al agregar la regla de que cuando $V_m(t)$ alcance un umbral V_{th}, ocurre un disparo y el potencial es reseteado a V_{reset}.

Se realizó esto usando el método numérico de Runge Kutta de cuarto orden, con un paso de integración $h = 0{,}05s$, los parámetros del inciso anterior y con un umbral de disparos $V_{th} = -50mV$ tal que cuando éste ocurre debe resetearse al valor al potencial de reposo, es decir, $V_{reset} = E_L$.

Figura 2. Potencial de membrana con umbrales y corriente constante de 2 nA



La Figura 2 muestra el modelo con y sin disparos. Cuando el potencial llega a los $-50mV$, ocurre un disparo, y se resetea a $-65mV$. Se observa que con la corriente constante, el patrón de disparos es periódico y ocurre a intervalos regulares.

La *Frecuencia*, que es la cantidad de disparos por unidad de tiempo, o su inversa, el *Período*, que es el intervalo de tiempo entre dos disparos, también puede ser calculado analíticamente a partir de la ecuacion (2); suponiendo que en el tiempo $t = 0s$ la neurona ha disparado, y por ende $V(0) = V_{reset}$, el próximo potencial de acción ocurrirá cuando el potencial de membrana alcance el umbral, es decir, en el tiempo $t = t_{fire}$ donde se cumple:

$$V(t_{fire}) = V_{th} = E_L + R_m I_e + (V_{reset} - E_L - R_m I_e) exp\left(-\frac{t_{fire}}{\tau_m}\right)$$

Despejando el tiempo t_{fire}:

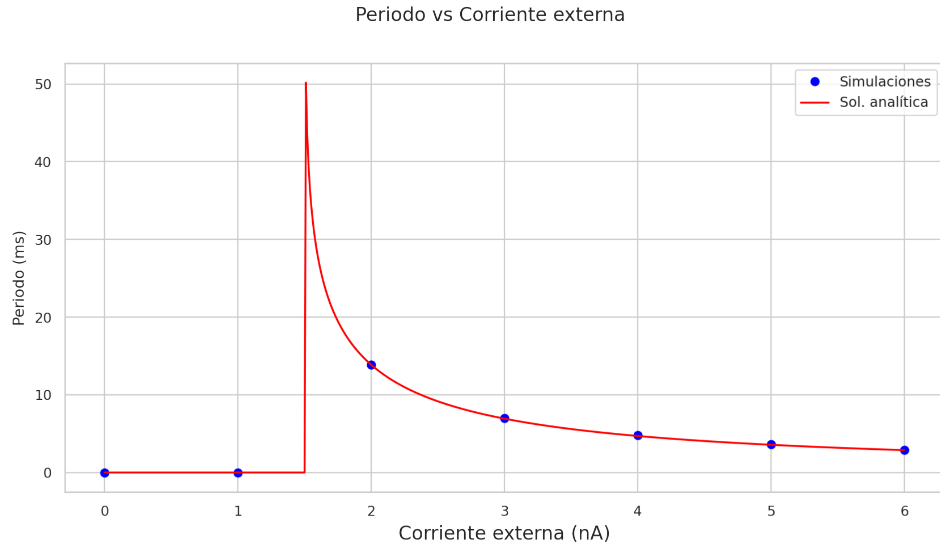
$$t_{fire} = \tau_m \ln\left(\frac{V_{reset} - E_L - R_m I_e}{V_{th} - E_L - R_m I_e}\right)$$

se obtiene el Período (ω). Si I_e (la corriente externa medida en nA) es una variable independiente entonces el Período (ω) en función de ella y con los parámetros que se usaron es:

$$\omega(I_e) = 10ms \ln\left(\frac{-10I_e}{15 - 10I_e}\right)$$

Esta función tiene como dominio todos los valores de $I_e > 1{,}5nA$. Los valores negativos no se consideran pues por convención la corriente externa es positiva porque ingresa a la neurona. Por lo tanto, los disparos sólo ocurren con los valores de corrientes mayores a $1{,}5nA$. En la Figura 3, se observa la función $\omega(I_e)$ junto con los periodos calculados en simulaciones con corrientes externas en un rango de 0 a $6nA$.

Figura 3. Períodos de disparos en función de las corrientes externas



2.3. Modelo con una corriente externa variable

Por último, simularemos un escenario más realista para lo que ocurre con una neurona biológica, con una corriente externa variable que obedece la siguiente ecuación:

$$I_e(t) = 0{,}35\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right) + \sin\left(\frac{t}{5}\right) + \cos\left(\frac{t}{7}\right) + sin\left(\frac{t}{11}\right) + cos\left(\frac{t}{13}\right)\right)^2 nA$$

La Figura 4 muestra que la neurona dispara cuando llega a $-50mV$, pero no lo hace regularmente como en el caso anterior.

Figura 4. Períodos de disparos en función de las corrientes externas