Задание 1.

№1

Д-ть:

$$(A+UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1},$$ где

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $U \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\det A \neq 0$, $\det C \neq 0$.

▲ Для док-ва достаточно показать, что $(A+UCV)\cdot(A^{-1}-A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}\cdot V\cdot A^{-1}) \overset{?}{=} I_n$.

Рассм.: $(A+UCV)\cdot(A^{-1}-A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}\cdot VA^{-1}) = I_n + UCVA^{-1} - U(C^{-1}+UVA^{-1}U)^{-1}\cdot VA^{-1} - UCVA^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}\cdot VA^{-1} \ominus$

$\ominus\ I_n + UCVA^{-1} - U(I_n + CVA^{-1}U)(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}\cdot VA^{-1} = I_n + UCVA^{-1} - UC(C^{-1}+VA^{-1}U)\cdot(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}\cdot VA^{-1} = I_n + UCVA^{-1} - UCI_mVA^{-1} =$

$= I_n + \Theta = I_n.$ ■

Задание 2.

(a): $\|uv^T - A\|_F^2 - \|A\|_F^2$, где $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$tr\{(uv^T - A)^T \cdot (uv^T - A)\} - tr(A^TA) =$

$= tr\{(vu^T - A^T)(uv^T - A)\} - tr(A^TA) =$

$= tr[vu^Tuv^T - vu^TA - A^Tuv^T + A^TA - A^TA] =$

$= tr[(uv^T)^T \cdot uv^T] - tr(vu^TA) - tr\{(vu^TA)^T\} =$

$= \|uv^T\|_F^2 - 2tr(vu^TA)$

Ответ: $\|uv^T\|_F^2 - 2tr(vu^TA)$

(b): $tr((2I_n + aa^T)^{-1}(uv^T + vu^T))$, где $a, u, v \in \mathbb{R}^n$.

Решение:

Восп-ся тождеством Вудбери:

для $(\underbrace{2I_n}_{A} + \underbrace{a}_{u}\underbrace{I_1}_{C}\underbrace{a^T}_{v})^{-1}$:

$$(2I_n + \underbrace{a}_{u}\underbrace{I_1}_{C}\underbrace{a^T}_{v})^{-1} = \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{4}I_n a\left(I_1 + \frac{a^Ta}{2}\right)^{-1}a^TI_n =$$

$$= \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{4}\underbrace{a}_{(n,1)}\underbrace{\left(I_1 + \frac{a^Ta}{2}\right)^{-1}}_{(1,1)}\underbrace{a^T}_{(1,n)} =$$

$$= \frac{1}{2}I_n - \frac{aa^T}{4+2a^Ta}, \text{ то:}$$

$$tr((2I_n + aa^T)^{-1}(uv^T + vu^T)) =$$

$$= tr\left(\left(\frac{1}{2}I_n - \frac{aa^T}{4+2a^Ta}\right)(uv^T + vu^T)\right) =$$

$$= tr\left(\frac{1}{2}uv^T\right) + \underbrace{tr\left(\frac{1}{2}vu^T\right)}_{tr\left(\frac{1}{2}uv^T\right)} - \frac{1}{4+2a^Ta} \cdot$$

$$\cdot \left(\underbrace{tr(aa^Tuv^T)}_{tr(vu^Taa^T) = tr(a^Tvu^Ta)} + tr(aa^Tvu^T)\right) =$$

$\ominus\ tr(UJ^T) - \frac{1}{2+a^Ta}\, tr(aa^TUJ^T)$

Ответ: $tr(UJ^T) - \frac{1}{2+a^Ta}\, tr(aa^TUJ^T)$

(c): $\sum\limits_{i=1}^{n} \langle S^{-1}a_i, a_i \rangle$, где $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^d$,

$S = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i a_i^T$, $\det(S) \neq 0$

Решение:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle S^{-1}a_i, a_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} tr(S^{-1}a_i a_i^T) \ominus$$

$$\ominus \{\text{лин-ть следа}\} \ominus\ tr\left(\sum_{i=1}^{n} S^{-1} a_i a_i^T\right) =$$

$$= tr\left(S^{-1} \sum_{i=1}^{n} a_i a_i^T\right) = tr(S^{-1}S) = tr(I_d) \ominus$$

$$\ominus\ d$$

Задание 3.

(a): $f: E \to \mathbb{R}$, $f(t) = \det(A - tI_n)$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $E = \{t \in \mathbb{R} : \det(A - tI) \neq 0\}$.

① $df = d(\det(A - tI_n)) \ominus$

$\ominus \det(A - tI_n) \cdot tr((A - tI_n)^{-1} d(A - tI_n)) =$

$= -\det(A - tI_n) \cdot tr((A - tI_n)^{-1}) dt$, то:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\det(A - tI_n) tr((A - tI_n)^{-1}).$$

② $d^2 f = d(-\det(A - tI_n) tr((A - tI_n)^{-1} dt) \ominus$

$\ominus \det(A - tI_n)(tr((A - tI_n)^{-1}))^2 dt^2$

$-\det(A - tI_n) tr(d((A - tI_n)^{-1})) dt =$

$= \det(A - tI_n)(tr((A - tI_n)^{-1}))^2 dt^2 -$

$- \det(A - tI_n) tr((A - tI_n)^{-2}) dt^2.$

Ответ: 1) $-\det(A - tI_n) \cdot tr((A - tI_n)^{-1})$

2) $\det(A - tI_n)(tr((A - tI_n)^{-1}))^2 -$

$- \det(A - tI_n) tr((A - tI_n)^{-2})$

(b) $f: \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \|(A + tI_n)^{-1} b\|$, где

$A \in S_+^n$, $b \in \mathbb{R}^n$

Решение:

① $df(t) = d\left(\|(A+tI_n)^{-1}b\|\right) =$

$= d\left(\left(b^T(A+tI_n)^{-T}(A+tI_n)^{-1}b\right)^{\frac{1}{2}}\right) \ominus$

$\ominus \frac{1}{2}\left(b^T(A+tI_n)^{-T}(A+tI_n)^{-1}b\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot$

$\cdot d\left(b^T(A+tI_n)^{-T}(A+tI_n)^{-1}b\right) =$

$= \{ m = b^T(A+tI_n)^{-T}(A+tI_n)^{-1}b$ - число $\} \ominus$

$\ominus \frac{1}{2} m^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(d\left(b^T(A+tI_n)^{-T}\right) \cdot (A+tI_n)^{-1}b + \right.$

$\left. + b^T(A+tI_n)^{-T} \cdot d\left((A+tI_n)^{-1}b\right)\right) \ominus$

$\ominus \frac{1}{2} m^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[b^T(-1)(A+tI_n)^{-2T} \cdot I_n \cdot (A+tI_n)^{-1}b\,dt\right.$

$\left. + b^T(A+tI_n)^{-T}(-1) \cdot (A+tI_n)^{-2} \cdot I_n \cdot b\,dt\right]$

$$\underbrace{f'(t)} = -\underbrace{\left(b^T(A+tI_n)^{-2}b\right)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{I}} \cdot \underbrace{b^T(A+tI_n)^{-3}b}_{\text{II}}$$

② $d^2 f \quad = -d(\text{I}) \cdot (\text{II}) - (\text{I}) \cdot d(\text{II})$

2.1) $d(\text{I}) = -\frac{1}{2}\left(b^T(A+tI_n)^{-2}b\right)^{-\frac{3}{2}} b^T d\left[(A+tI_n)^{-2}\right] b \ominus$

$\ominus -\frac{1}{2}\left(b^T(A+tI_n)^{-2}b\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot b^T \cdot (-2)(A+tI_n)^{-3}b\,dt$

2.2) $d(\text{II}) = b^T(-3) \cdot (A+tI_n)^{-4} \cdot b\,dt$, то:

$f''(t) = -\left(b^T(A+tI_n)^{-2}b\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot b^T(A+tI_n)^{-3}b \cdot$

$\cdot b^T(A+tI_n)^{-3}b + 3\left(b^T(A+tI_n)^{-2}b\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot b^T \cdot$

$\cdot (A+tI_n)^{-4}b$

Ответ: $f'(t) = -\left(b^T(A+tI_n)^{-2}b\right)^{-\frac{1}{2}} b^T(A+tI_n)^{-3}b$

$f''(t) = -\left(b^T(A+tI_n)^{-2}b\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(b^T(A+tI_n)^{-3}b\right)^2 \oplus$

$\oplus 3\left(b^T(A+tI_n)^{-2}b\right)^{-\frac{1}{2}} b^T \cdot (A+tI_n)^{-4}b$

Задание 4:

26 октября 2019 г. 19:36

$\nabla f;\ \nabla^2 f$

(a): $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\|xx^T - A\|_F^2, \text{ где } A \in S^n$$

$$1)\ df(x) = \frac{1}{2} d\left(tr\left([xx^T - A]^T \cdot [xx^T - A]\right)\right) =$$

$$= \{\text{т.к. } A = A^T\} = \frac{1}{2} d\left(tr\left([xx^T - A][xx^T - A]\right)\right) \ominus$$

$$\ominus \frac{1}{2} d\left[tr(xx^Txx^T) - 2tr(x^TAx) + tr(A^2)\right] \ominus$$

$$\ominus \frac{1}{2}\left[tr\left(d(x^Txx^Tx)\right) - 2tr\left(d(x^TAx)\right)\right] =$$

$$= \{A = A^T\} = \frac{1}{2}\left[tr\left(d\cdot(x^TI_nx)x^Tx + x^Tx\, d(x^TI_nx)\right) -\right.$$

$$\left. - 4tr(x^TA\,dx)\right] = \frac{1}{2}\left[2\,tr(x^Txx^Tdx + x^Txx^Tdx) -\right.$$

$$\left. - 4tr(x^TA\,dx)\right] = 2tr\left(\underbrace{x^Txx^Tdx}_{\text{число}} - \underbrace{x^TA\,dx}_{\text{число}}\right) =$$

$$= 2(x^Txx^T - x^TA)\,dx, \text{ то:}$$

$$\nabla f(x) = 2(x^Txx^T - x^TA)^T.$$

$$2)\ d\left(2x^T(xx^T - A)\,dx_1\right) =$$

$$= 2dx^T \cdot (xx^T - A)\,dx_1 + 2x^T d(xx^T - A)\,dx_1 =$$

$$= 2\underbrace{dx^T(xx^T - A)\,dx_1}_{\text{число, то } T} + 2\underbrace{x^T\,dx \cdot x^Tdx_1}_{\text{число, } T} + 2\underbrace{x^Tx\,dx^Tdx_1}_{\text{число, } T} =$$

$$\ominus 2dx_1^T(xx^T - A)\,dx + 2dx_1^T \cdot x\,\underbrace{dx^Tx}_{\text{число, } T} + 2dx_1^Tdx \cdot \underbrace{x^Tx}_{\text{число}} =$$

$$= 2dx_1^T(xx^T - A)\cdot dx + 2dx_1^T \cdot x \cdot x^Tdx + 2dx_1^T(x^TxI_n)\,dx$$

из семинара: мы должны получить вид: $dx_1^T \nabla^2 f dx$, что.

$$\nabla^2 f = 4xx^T - 2A + 2x^T x I_n$$

Ответ: $\nabla f = 2(x^T x x^T - x^T A)^T$

$$\nabla^2 f = 4xx^T - 2A + 2x^T x I_n$$

(b): $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \langle x, x\rangle^{\langle x,x\rangle}$$

что: $f(x) = e^{\langle x,x\rangle \ln\langle x,x\rangle}$

1) $df(x) = e^{\langle x,x\rangle \cdot \ln\langle x,x\rangle} \cdot d(x^T I_n x) \ln x^T x +$

$+ e^{\langle x,x\rangle \ln\langle x,x\rangle} \cdot x^T x \, d(\ln x^T I_n x) =$

$= 2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(\ln(x^T x) x^T dx + \frac{x^T x}{x^T x} \cdot x^T dx\right) =$

$= 2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(\ln(x^T x)x^T + x^T\right) dx$, что:

$$\nabla f = 2\left(\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(\ln(x^T x)x^T + x^T\right)\right)^T$$

2) $d\left(\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(\ln(x^T x)x^T + x^T\right)dx_1\right) =$

$= 2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle} \cdot \left(\left(\ln(x^T x)x^T + x^T\right)dx_2 \cdot \left(\ln(x^T x)x^T + x^T\right)dx_1 + \langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(\frac{2}{x^T x} \cdot x^T \cdot dx_2 \cdot \underbrace{x^T dx_1}_{\text{число}, (T)} + \right.\right.$

$\left. + \ln(x^T x)\overbrace{dx_2^T dx_1}^{\text{число}, T} + \overbrace{dx_2^T dx_1}^{\text{число}, T}\right) =$

$2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle} \cdot \left(\ln(x^T x) + 1\right)^2 x^T dx_2 \underbrace{x^T dx_1}_{\text{число}, (T)} +$

$+ \langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle} \cdot \left(\frac{2}{x^T x} \cdot dx_1^T x x^T dx_2 \oplus\right.$

$\oplus \left. \ln(x^T x) \cdot dx_1^T \cdot dx_2 + dx_1 dx_2^T\right) = d\left(\frac{df}{2}\right)$

Ответ: $\nabla f = 2\langle x, x\rangle^{\langle x,x\rangle}\cdot(\ln(x^T x)x + x)$

$$\nabla^2 f = 4\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\cdot(\ln(x^T x)+1)^2\, x x^T +$$
$$+ 2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\left(\frac{2}{x^T x}\, x x^T + \ln(x^T x)\cdot I_n +\right.$$
$$\left. + I_n\right).$$

(c): $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|Ax - b\|^p$, где:

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $p \geq 2$

① $df(x) = d(\|Ax-b\|^p) = d\left[((Ax-b)^T\cdot(Ax-b))^{\frac{p}{2}}\right] =$

$$= \left\{\begin{array}{l} f(x) = g(h(x)), \text{ где } g(y) = y^p \\ h(x) = (Ax-b)^T(Ax-b) \\ dm(x) = dg(h(x))\cdot[dh(x)[dx]] \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{p}{2}\left[(Ax-b)^T(Ax-b)\right]^{\frac{p}{2}-1}\cdot d\left[((Ax-b)^T\cdot I_n\cdot(Ax-b))\right] =$$

$$= \frac{p}{2}\left[(Ax-b)^T\cdot(Ax-b)\right]^{\frac{p}{2}-1}\cdot 2\cdot(Ax-b)^T d(Ax-b) =$$

$$= p\,\|Ax-b\|^{p-2}\cdot(Ax-b)^T A\cdot dx.$$

$$\boxed{\nabla f = p\,\|Ax-b\|^{p-2}\cdot A^T(Ax-b)}$$

② $d(p\cdot\|Ax-b\|^{p-2}\cdot(Ax-b)^T A\, dx_1) =$

$$= p\, d(\|Ax-b\|^{p-2})\cdot(Ax-b)^T\cdot A + p\cdot\|Ax-b\|^{p-2}\cdot$$
$$\cdot d\left[(Ax-b)^T A\, dx_1\right] = p(p-2)\|Ax-b\|^{p-4}\cdot(Ax-b)^T\cdot$$
$$\cdot A dx_2\cdot\underbrace{(Ax-b)^T\cdot A\, dx_1}_{\text{число, т.е. можно } T \text{ и перенести в начало}} + p\|Ax-b\|^{p-2}\underbrace{dx_2^T A^T\cdot A\cdot dx_1}_{\text{число} \Rightarrow \text{можно } T} =$$

Задание 5.

$\exists\, f: S^n_{++} \to \mathbb{R}, \quad H \in S^n$

a) $f(X) = tr(X^{-1})$.

1) $df(X) = d\,tr(X^{-1}) = tr[d(X^{-1})] =$

$= -tr(X^{-1} dX X^{-1}) =$

$= -tr(X^{-2} dX)$

2) $d^2 f(x) = -d(tr(X^{-1} \cdot X^{-1} dX)) =$

$= -tr(d(X^{-1}) X^{-1} dX_1 + X^{-1} d(X^{-1}) dX_1) =$

$= tr(X^{-1} dX_2 X^{-1} X^{-1} dX_1 +$

$+ X^{-1} X^{-1} dX_2 X^{-1} dX_1) =$

$= tr(X^{-1} dX_2 X^{-2} dX_1 +$

$+ X^{-2} dX_2 X^{-1} dX_1) = tr(X^{-1} dX_2 X^{-2} dX_1) +$

$+ tr(X^{-2} dX_2 X^{-1} dX_1) = \{dX_1 = dX_2$ по услов$\} =$

$= tr(X^{-1} dX_1 X^{-1} d \quad X^{-1}) + tr(X^{-1} dX_1 X^{-1} dX_1 X^{-1}) =$

$= 2tr(X^{-1} dX_1 X^{-1} dX_1 X^{-1}) = 2tr(X^{-1} dX_1 \cdot X^{-\frac{1}{2}} \cdot$

$X^{-\frac{1}{2}} \cdot dX_1 \cdot X^{-1}) = \{$из услов: $X \in S^n_{++}, dX_1 \in S^n\} =$

$= 2tr[(X^{-1} dX_1 X^{-\frac{1}{2}})^T \cdot (X^{-1} dX_1 X^{-\frac{1}{2}})] =$

$= 2 \| X^{-1} dX_1 X^{-\frac{1}{2}} \|_F^2 \geq 0.$ ч.т.д.

(b) $f(X) = (\det X)^{\frac{1}{n}}$

① $df(X) = d[(\det X)^{\frac{1}{n}}] =$

$= \begin{cases} f(X) = m(\underbrace{g(X)}_{y}), \text{ где: } m(y) - y^{\frac{1}{n}}; \; g(X) = \det X, \\ \text{то: } df(X) = dm(g(x)) \cdot [dg(x)[dX]] \end{cases} =$

$= \frac{1}{n} (\det X)^{\frac{1}{n} - 1} \cdot \det X \cdot tr(X^{-1} dX) =$

$= \frac{1}{n} (\det X)^{\frac{1}{n}} tr(X^{-1} dX). dx$

(2) $d\left[\frac{1}{n}(\det X)^{\frac{1}{n}} tr(X^{-1}dX)\right] dx_1.$

$= \frac{1}{n} d\left((\det X)^{\frac{1}{n}}\right) \cdot tr(X^{-1}dX)\, dx_1 +$

$+ \frac{1}{n}(\det X)^{\frac{1}{n}} \cdot tr\left(d(X^{-1}dX_1)\right) =$

$= \frac{1}{n^2}(\det X)^{\frac{1}{n}} tr(X^{-1}dX_1) \cdot$

$\cdot tr(X^{-1}dX_2) - \frac{1}{n}(\det X)^{\frac{1}{n}} \cdot$

$\cdot tr(X^{-1}dX_2 X^{-1}dX_1) = \{X \in S^n_{++};\ dX_1 = dX_2\} =$

$= \frac{1}{n}(\det X)^{\frac{1}{n}}\left[(\langle X^{-1}, dX_1\rangle)^2 \cdot \frac{1}{n} -\right.$

$\left.- \|X^{-1}dX_1\|_F^2\right] = \frac{1}{n}(\det X)^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{n}(\langle X^{-1}, dX_1\rangle)^2 -\right.$

$\left.- \|X^{-1}dX_1\|_F^2\right] \leq$ {нер-во КБ} $\leq$

$\leq \frac{1}{n}(\det X)^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{n} \cdot \|X^{-1}dX_1\|_F^2 -\right.$

$\left.- \|X^{-1}dX_1\|_F^2\right] = \frac{1}{n}(\det X)^{\frac{1}{n}} \frac{1-n}{n}\|X^{-1}dX_1\|_F^2 \leq$

≤ 0, т.к. $(\det X)^{\frac{1}{n}} > 0$
из $X \in S^n_{++}$

Ответ: $d^2 f(X)[dX, dX] \leq 0.$

Задание 6.

(a): $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle c, x\rangle + \frac{\sigma}{3}\|x\|^3$,

$c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$, $\sigma > 0$.

Решение:

$$df = d(c^T x) + \frac{\sigma}{3} \cdot d\|x\|^3 \ominus$$

$\ominus$ {выкладки для $d\|x\|^3$ из 4, (c)} $= c^T dx + \sigma\|x\|x^T dx$,

$$\underbrace{\nabla f = c + \sigma\|x\|x.}$$

$$\nabla f = \Theta = c + \sigma\|x\|x.$$

$$\Downarrow$$

$\Theta = c + \sigma\|x\|^2 \cdot y$, где $y \uparrow\uparrow x$, $\|y\| = 1$.

$-c = \sigma\|x\|^2 y \Rightarrow$ {т.к. $x \uparrow\downarrow c$} $\Rightarrow$

$\|c\| y = \sigma\|x\|^2 y \Rightarrow$

$\|c\| = \sigma\|x\|^2 \Rightarrow \|x\| = \sqrt{\frac{\|c\|}{\sigma}}.$

Ответ: $x = -\sqrt{\frac{1}{\sigma \cdot \|c\|}} \cdot c$, при усл. $\begin{cases} c \neq 0 \\ \sigma > 0 \end{cases}$

(b): $f: E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x \rangle - \ln(1 - \langle b, x \rangle)$,
где $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a, b \neq 0$

$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (b, x) < 1\}$.

Решение:

$$df(x) = d(a^T x) - d\ln(1 - (b, x)) \ominus$$

$$\ominus\ a^T dx + \frac{1}{1 - (b, x)} \cdot d(b^T x) =$$

$$= \left(a^T + \frac{1}{1-(b,x)} b^T\right) dx$$, то:

$$\nabla f(x) = a + \frac{1}{1-(b,x)} b.$$

$$\nabla f(x) = \Theta = a + \frac{1}{1-(b,x)} b \Rightarrow$$

т.к. $1 - (b, x) > 0 \Rightarrow a \uparrow\downarrow b \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, z \in \mathbb{R}^n$: $z = \frac{a}{\|a\|} \Rightarrow$

домн. скалярно на z:

$$(a, z) = \frac{1}{1-(b,x)} \cdot (b, z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|a\| = \frac{1}{1-(b,x)} \cdot \|b\|$$, то:

$$1 - (b, x) = \frac{\|b\|}{\|a\|} \Rightarrow (b, x) = 1 - \frac{\|b\|}{\|a\|}$$ зад.
многообразие размерности $n-1$.

Рассм. ур-ие: $a(1 - (b, x)) + b = 0$.

$a b^T x = a + b$. Заметим, что $rg(ab^T) = 1 \Rightarrow$ реш. будет иметь размерн. $n - rg(ab^T) = n - 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n b_i x_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$ - задаёт реш.

Ответ: $(b, x) = 1 - \frac{\|b\|}{\|a\|}$, при усл.:

$$\begin{cases} a \neq 0, b \neq 0 \\ a \uparrow\downarrow b \end{cases}$$

(c) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \langle c, x \rangle e^{-(Ax, x)} \qquad \underset{\neq 0}{c} \in \mathbb{R}^n \qquad A \in S^n_{++}.$$

$$df(x) = d(c^T x) \cdot e^{-(Ax, x)} + \langle c, x \rangle d(e^{-\langle Ax, x \rangle}) =$$

$$c^T dx \, e^{-\langle Ax, x \rangle} + \langle c, x \rangle d(-\langle Ax, x \rangle) e^{-\langle Ax, x \rangle} =$$

$\ominus c^T dx\, e^{-\langle Ax,x\rangle} - \langle c,x\rangle\, d(x^TAx)\, e^{-\langle Ax,x\rangle} \ominus$

$\ominus c^T dx\, e^{-\langle Ax,x\rangle} - \langle c,x\rangle\, 2\cdot x^T A\, dx\, e^{-\langle Ax,x\rangle}$

{т.к. $A = A^T$}.

$\nabla f(x) = c\cdot e^{-\langle Ax,x\rangle} - \underbrace{2\langle c,x\rangle}_{\text{число}} A^T x\, e^{-\langle Ax,x\rangle}$

$\nabla f(x) = 0 = c\cdot \underbrace{e^{-\langle Ax,x\rangle}}_{\text{число}} - 2\langle c,x\rangle A^T x\cdot e^{-\langle Ax,x\rangle}$

$c = 2\langle c,x\rangle A^T x$

$c = 2\underbrace{c^T x}\, A^T x. \quad | \cdot c^T$

$\|c\|^2 = 2c^T x A^T x c^T$

$\frac{\|c\|^2}{2} = \underline{c^T x A^T x c^T}$

$\frac{c}{2\langle c,x\rangle} = A^T x$, $A^T = A$, то: т.к. $\exists A^{-1}$.

$A^{-1}c = 2\langle c,x\rangle x \quad | \,, c\rangle$

$\Downarrow$

$\langle A^{-1}c, c\rangle = 2(\langle c,x\rangle)^2$

$\langle A^{-1}c, c\rangle = 2(\langle c,x\rangle)^2$

$\frac{\langle A^{-1}c,c\rangle}{2} = (\langle c,x\rangle)^2$

$\pm\left(\frac{\langle A^{-1}c,c\rangle}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \langle c,x\rangle.$

<u>Ответ</u>: $\dfrac{\pm A^{-1}c\cdot\left(\frac{\langle A^{-1}c,c\rangle}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{2} = x;$

при услов: $\begin{cases} c \neq 0 \\ A \in S^n_{++}. \end{cases}$

Бонус.

$\exists X \in S^n_{++}$.

Вычислить: $\lim\limits_{K \to \infty} tr\left(X^{-K} - (X^K + X^{2K})^{-1}\right)$

Решение: 1) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ – с. з. X, то:

$\lambda_1^K, \dots, \lambda_n^K$ – с. з. X^K :

2) $tr(X) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i$, то:

$$tr(X^{-K}) - tr\left[(X^K + X^{2K})^{-1}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-K} - \sum_{i=1}^n (\lambda_i^K + \lambda_i^{2K})^{-1} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_i^K} - \frac{1}{\lambda_i^K + \lambda_i^{2K}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i^K + \lambda_i^{2K} - \lambda_i^K}{\lambda_i^K(\lambda_i^K + \lambda_i^{2K})}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^{2K}}{\lambda_i^{2K}(1+\lambda_i^K)} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\lambda_i^K}$$

① $\underbrace{K \to +\infty}$

Расс.: $\lim\limits_{K \to +\infty} \frac{1}{1+\lambda_i^K} = \begin{cases} 0, \text{ при } \lambda_i > 1 \\ \frac{1}{2}, \text{ при } \lambda_i = 1 \\ 1, \text{ при } 0 < \lambda_i < 1 \end{cases} =$

$= \mathbb{1}[1 > \lambda_i > 0] + \frac{1}{2}[\lambda_i = 1]$, то:

$\lim\limits_{K \to +\infty} tr\left[X^{-K} - (X^K + X^{2K})^{-1}\right] = \sum\limits_{i=1}^n (\mathbb{1}[1 > \lambda_i > 0] +$

$+ \frac{1}{2}[\lambda_i = 1])$.

② $K \to -\infty$:

Расс.: $\lim\limits_{K \to -\infty} \frac{1}{1+\lambda_i^K} = \begin{cases} 1, \text{ при } \lambda_i > 1 \\ \frac{1}{2}, \text{ при } \lambda_i = 1 \\ 0, \text{ при } 0 < \lambda_i < 1 \end{cases}$

Т.е. $\lim\limits_{K \to -\infty} tr\left[X^{-K} - (X^K + X^{2K})^{-1}\right] =$

$= \sum\limits_{i=1}^n (\mathbb{1}[\lambda_i > 1] + \frac{1}{2}\mathbb{1}[\lambda_i = 1])$

<u>Ответ</u>: 1) $\lim\limits_{K \to +\infty} tr\left[X^{-K} - (X^K + X^{2K})^{-1}\right] =$

$= \sum\limits_{i=1}^n (\mathbb{1}[1 > \lambda_i > 0] + \frac{1}{2}[\lambda_i = 1])$.

2) $\lim\limits_{K \to -\infty} tr\left[X^{-K} - (X^K + X^{2K})^{-1}\right] =$

$= \sum\limits_{i=1}^n (\mathbb{1}[\lambda_i > 1] + \frac{1}{2}\mathbb{1}[\lambda_i = 1])$.