Отчет по заданию номер 2.

ФИО: Кузьмин Никита.

Группа: 208.

GitHub-репозиторий: <u>тут</u> можно посмотреть код для, с

помощью я проверял/искал гипотезы.

Содержание:

- 1.Постановка задачи.
- 2. Ход решения.
- 3. Что можно было сделать еще.

Постановка задачи:

Дано:

- 1. m целочисленных n-мерных векторов: v1, ..., vm
- 2. Матрица попарных расстояний Хэмминга(H), матрица попарного числа совпадений координат для данных векторов(M).

Вопрос:

Верно ли, что у этих матриц пространства линейных комбинаций столбцов совпадают? Заметим, что из-за того, что H и M - симметричны относительно главной диагонали, то эту задачу можно рассматривать и относительно строк.

Ход решения:

- 1. Сначала подготовим программную часть, с помощью которой можно будет быстро проверять гипотезы, да и просто находить закономерности, от которых можно отталкиваться. Написал функции, которые считают расстояние Хэмминга, число попарных совпадений координат у векторов. Далее написал функции, которые формируют соответствующие матрицы по заданным векторам и функцию, которая генерирует произвольные векторы одинаковой длины(на данный момент они могут совпадать).
- 2. Нужно определиться с тем, в какую сторону двигаться. Для этого проведем эксперименты, пользуясь соотношением из курса линейной алгебры:

Теорема 1:

] Даны 2 квадратные матрицы порядка n. Соотношения rank(A) = rank(B) = rank(A|B) выполнены <=> пространства линейных комбинаций столбцов/строк этих матриц совпадают.

С помощью этой теоремы и подготовленной программной части можно предположить, что на вопрос, поставленный в задаче, ответ положительный.

Добавил функцию first_hypothesis_check, которая проверяет на рандомно сгенерированных векторах условия теоремы 1. Проводятся тесты для различных параметров vectors_amount, vectors_dim, coordinates_range. По результатам тестов: условия теоремы нарушаются только для систем векторов, в которых хотя бы два вектора совпадают. Для остальных систем - теорема выполняется, то есть пространства линейных комбинаций столбцов матриц H и M совпадают.

Гипотеза 1:

верно, что пространства линейных комбинаций столбцов данных матриц совпадают.

- 3. Попробовал найти ранги матриц H и M в общем виде, но это не привело к успеху(пытался методом Гаусса свести к ступенчатой матрице, рассмотрел вариант нахождения ранга с помощью теоремы об окаймляющих минорах, но в общем случае его реализовать тоже тяжело).
- 4. Можно свести данную задачу к двум системам (m, m). Такого вида:

где альфа - неизвестные системы, h1, ..., hm и k1,..., km - вектор-столбцы матриц H и M соответственно. Возможно, она поможет решить задачу, воспользовавшись теоремой: **Теорема 2(Кронекера-Капелли):**

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы, причём система имеет единственное решение, если ранг равен числу неизвестных, и бесконечное множество решений, если ранг меньше числа неизвестных.

Ho: в этой теореме предполагается, что h1, ..., hm; k1, ..., km - числа, но в системах I и II это не так. Возможно, есть какие-то обобщения теоремы Кронекера-Капелли. Если не останется больше идей, то попробую реализовать эту идею, но пока кажется, что эта идея не приведет к результату.

- 5. Проведем еще эксперименты с матрицами:
 - а. Для определителя: в экспериментах, когда среди векторов не было совпадающих, определитель был отличен от нуля!
 - b. Для собственных векторов и собственных значений: ничего не было замечено.
 - с. Для различных норм: ничего не было замечено.
 - d. После проведенных тестов для рангов получилось проследить зависимость максимального ранга(max_rank) от размерности векторов(n) и максимального значения координаты(coordinate_range) во всех векторах:

MR 11 Max-rank = \(\text{n*(coordinate-range-7)+1, eau m > MR} \)
max-rank = \(m \), eau m \(M \)

НО: это не доказанная закономерность, а просто интересное наблюдение, того, что во всех тестовых случаях это соотношение выполнялось.

6. **Идея:** Так как M = n*E - H, то можно посмотреть, лежит ли единичный столбец в линейной оболочке столбцов H, т.е. совместна ли система Hx = **e**, где **e** = (1, 1, 1, ..., 1)^T размерности m. Если это действительно так, то определить, как найти решения x для этой системы. Гипотеза 2 опирается на это.

Гипотеза 2: если вектор **e**, описанный выше лежит в линейной оболочке вектор-столбцов матрицы H(или M), то линейные оболочки вектор-столбцов матриц H и M совпадают.

Для проверки идеи написал функцию second_hypothesis_check и исправил generate_vectors - теперь она генерирует векторы, среди которых нет совпадающих. Как показали тесты, учитывая то, что numpy.linalg.solve не работает с матрицами, у которых det = 0(для них отдельно нужно проверять теорему Кронекера-Капелли - она выполнялась в этих случаях => решений было бесконечно много), то: вторая гипотеза тоже является верной(по крайней мере во всех сгенерированных случаях). Пока что никакой закономерности для решений этих систем найти не удалось.

Теорема 3:

Гипотеза 1 выполняется \ll вектор $= (1, 1, ... 1)^T$ лежит в пространстве линейных комбинаций столбцов матрицы $= (1, 1, ... 1)^T$ лежит в пространстве линейных комбинаций столбцов матрицы $= (1, 1, ... 1)^T$ лежит в пространстве линейных комбинаций

Доказательство.

▲ Необходимость:

Учитывая $rg(h1, ..., hm, n^*e - h1, ..., n^*e - hm) = rg(h1, ..., hm, e)$, предположим, что е не лежит в пр-ве линейных комбинаций столбцов матрицы H, тогда: $rg(h1, ..., hm, e) = rg(h1, ..., hm) + 1 = rg(h1, ..., hm, n^*e - h1, ..., n^*e - hm)$, но: так как выполняется гипотеза $1(no yсловию теоремы) => выполняется теорема <math>1 => rg(h1, ..., hm, n^*e - h1, ..., n^*e - hm) = rg(h1, ..., hm) = rg(h1, ..., hm, e) - противоречие!$

Достаточность:

] Гипотеза 1 не выполняется => не выполняются условия теоремы 1, то есть хотя бы одно из равенств нарушается: rg(h1, ..., hm, n*e - h1, ..., n*e - hm) = rg(h1, ..., hm) = rg(n*e - h1, ..., n*e - hm).

1. Если не выполняется первое равенство, то: так как **e** - лежит в линейной оболочке столбцов матрицы H => rg(h1, ..., hm) = rg(h1, ..., hm, **e**). То допишем к матрице H m единичных столбцов, умноженных на n. rg(полученной матрицы) = rg(H), так как **e** - лежит в линейной оболочке столбцов H. Затем вычтем из (m+1) столбца 1-й

из (m+2) столбца 2-й

из 2m столбца m-й

Получили матрицу, равную (H|M) => rg(h1, ..., hm, n*e - h1, ..., n*e - hm) = <math>rg(H) => nротиворечие!

- 2. Если не выполняется второе равенство, то: так как $rg(n^*e h1, ..., n^*e hm, e) = rg(h1, ..., hm, e) = rg(h1, ..., hm), при этом <math>rg(n^*e h1, ..., n^*e hm) = rg(n^*e h1, ..., n^*e hm, e)$, так как через h1, ..., hm можно выразить e с помощью некоторых коэффициентов альфа, то: складываем (n*e hi) с этими коэффициентами => получаем $sum(ai *n^*e) e = e^*(ai^*n 1) => e$ лежит в пространстве линейных комбинаций столбцов матрицы M. To есть $rg(M) = rg(M|e) => rg(h1, ..., hm) = rg(n^*e h1, ..., n^*e hm) => противоречие!$
- 3. Если не выполняется rg(h1, ..., hm, n*e h1, ..., n*e hm) = rg(n*e h1, ..., n*e hm), то: т.к. rg(h1, ..., hm, n*e h1, ..., n*e hm) = rg(h1, ..., hm, e) = rg(h1, ..., hm), так как е лежит в пр-ве лин. комбинаций h1, ..., hm, тогда: припишем к матрице H m столбцов, равных е. В таком случае rg(полученной матрицы) = rg(H) и вычтем из m+1, ..., 2m столбцов(умноженных на n) полученной матрицы 1, ..., m столбцы соответственно, затем удалим первые m столбцов. Так как эти m столбцов являются линейными комбинациями m+1, ... 2m столбцов, то rg(полученной матрицы) = rg(H) = rg(h1, ..., hm, n*e h1, ..., n*e hm), а полученная матрица тождественно равна M => противоречие. ■

8. Рассмотрим частный случай: n = 1.

Тогда векторы становятся числами(а так как по условию задачи сказано, что все векторы попарно различны => матрица H будет иметь вид: нули на главной диагонали, остальные элементы - единицы. Аналогично для M: единицы на главной диагонали, а остальные элементы - нули. С помощью линейных преобразований матрицы H можно показать, что rg(H) = rg(M)(H) сводится к M) => rg(H) = rg(M) = rg(H|M), то есть **Гипотеза 1 верна** для n = 1.

Посмотрел на тесты в программе для тех случаев, когда среди векторов могут быть равные(но не все равны между собой!), то - результат тоже положительный. Думаю, ничего страшного не будет, если попытаюсь расширить условия задачи при n = 1. Пусть среди векторов могут быть равные. Покажем, что Гипотеза 1 верна. Проделаем это более аккуратно:

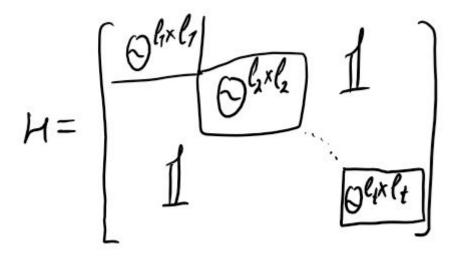
1) Перенумеруем векторы так, чтобы равные шли подряд, т.е.

$$\overline{\mathcal{Q}_1, \overline{\mathcal{Q}_1, \dots, \overline{\mathcal{Q}_r}}}, \overline{\mathcal{Q}_2, \dots, \overline{\mathcal{Q}_2}}, \dots, \overline{\mathcal{Q}_t, \dots, \overline{\mathcal{Q}_t}}$$

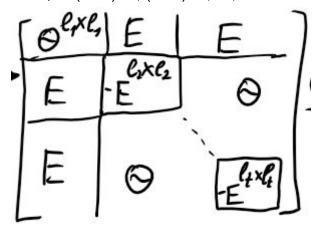
2) Тогда матрицы H и M станут блочными для такой нумерации векторов: Обозначения : O^(I1*I1) - квадратная матрица размерности I1, состоящая из нулей E^(I1*I1) - квадратная матрица размерности I1, состоящая из единиц

$$H = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{1} \\ l_{2} \\ l_{3} \\ l_{4} \\ l_{5} \\ l_{5$$

3) Разберемся с rg(H). Докажем, что rg(H) = rg(M) = t, так как H можно свести к M с помощью линейных преобразований:

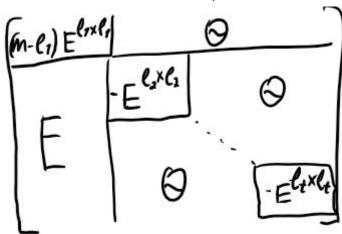


3.1) Вычитаем 1-й столбец из (I1+1)-го, (I1+2)-го, ..., m-го.



3.2) Прибавляем к I1 первым строкам (I1+1)-ю, (I1+2)-ю,

..., m-ю строки.



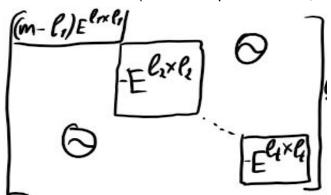
3.3) Вычитаем из первых I1 столбцов (I1+1)-й,

(11+12+1)-й,

• • • •

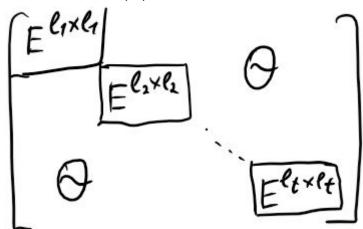
(I1+I2+...+It+1)-й столбцы

(то есть первые столбцы из каждого блока).



3.4) Делим первые I1 столбцов на (m-I1) != 0, так как не все векторы равны между собой.

Умножаем остальные столбцы на (-1).



Получили матрицу M из H с помощью линейных преобразований => rg(H)=rg(M)=t.

- 4) Осталось рассмотреть rg(H|M). Тут достаточно занулить первую квадратную матрицу(H) размера m с помощью линейных преобразований.
- 5) То есть получили: rg(H) = rg(M) = rg(H|M) => условие задачи выполняется.

Есть большое желание попробовать доказать по индукции для n. Попробуем!

9. Для n=1, т.е. база индукции доказана.

] для n = k - верно, т.е. пусть даны векторы v1, ..., vm и для них выполняется условие задачи. Рассмотрим n = k+1, то есть размерность векторов v1, ..., vm увеличивается на 1. Можно заметить, что H = H1 + H2 + ... + Hk+1 и M = M1 + M2 + ... + Mk+1, где Hi, Mi - матрицы расстояний Хэмминга и попарных совпадений координат соответственно для i-й компоненты векторов. То есть по предположению индукции для H' = H1 + ... + Hk и M' = M1 + ... + Mk выполняется условие задачи. Причем, для матриц Hk+1 и Mk+1 тоже выполняется условие, так как они основаны на векторах размерности n = 1(т.е. на числах), среди которых могут быть совпадающие, а для такого случая в **пункте 8** было доказано утверждение задачи.

Нужно посмотреть на то, как меняются ранги матриц H' и M' при добавлении Hk+1 и Mk+1. Известно, что столбцы H', M' линейно выражаются через друг друга.

Известно, что столбцы Hk+1 и Mk+1 линейной выражаются через друг друга. Пусть:

$$H' = \begin{bmatrix} \overline{h}_1' & \overline{h}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \overline{h}_m \end{bmatrix}$$

$$M' = \begin{bmatrix} \overline{P}_1' & \overline{P}_2' & \overline{P}_2' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \overline{h}_m \end{bmatrix}$$

Тогда:

$$\int_{\Gamma_1'} \overline{\Gamma}_1' = \sum_{i=1}^{m} d_{ii} \overline{h}_i$$

$$\overline{\Gamma}_m' = \sum_{i=1}^{m} d_{mi} \overline{h}_i'$$

То есть матрица М' будет иметь вид:

$$M = \left[\sum_{i=1}^{m} a_{ii} \hat{h}_{i}^{i} \right] \dots \left[\sum_{i=1}^{m} a_{mi} \hat{h}_{i}^{i} \right]$$

Из доказанного утверждения аналогичный вид будет у матрицы Mk+1. Если h1, h2, ..., hm; r1, r2, ..., rm - векторы матриц Hk+1 и Mk+1 соответственно, то: можно выписать вид H' + Hk+1 и M' + Mk+1:

$$H' + H_{k+1} = \left[\vec{h}_{1} + \vec{h}_{1} \right] \dots \left[\vec{h}_{M} + \vec{h}_{M} \right]$$

$$M' + M_{k+1} = \left[\sum_{i=1}^{m} (d_{ii} \vec{h}_{i} + \beta_{ii} \vec{h}_{i}) \right] \dots \left[\sum_{i=1}^{m} (d_{mi} \vec{h}_{i} + \beta_{mi} \vec{h}_{i}) \right]$$

Пока не получается завершить доказательство по индукции.

- 10. Попробуем рассмотреть задачу с другой стороны: так как все элементы матриц Н и М неотрицательны, то можно рассмотреть теорию матриц с неотрицательными элементами. В курсе линейной алгебры подробно эта тема не рассматривалась, поэтому придется гуглить. Для начала надо определить, является ли разложимой каждая из матриц Н и М. **UPD:** Тоже не вышло...
- 11. Вернемся к замечанию **пункта 5.а).** В нем проверялось значение определителя матриц Н и М на разных тестах, которые говорят о невырожденности данных матриц, если исходные векторы попарно различны.

Теорема 4:

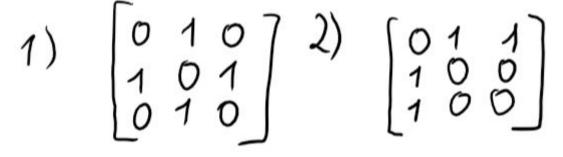
Если $det(H) != 0 => e = (1, ..., 1)^T$ лежит в линейной оболочке столбцов матрицы H. Доказательство:

▲ Так как det(H) != 0 => существует обратная матрица H^(-1). Домножим H на обратную матрицу справа => H*H^(-1) = I. По свойству произведения матриц: i-й столбец произведения равен линейной комбинации столбцов матрицы H с соответствующими коэффициентами из i-го столбца матрицы H^(-1). То есть с помощью линейной комбинации только столбцов матрицы H получили I. А вектор е принадлежит линейной оболочке столбцов матрицы I => вектор е принадлежит линейной оболочке матрицы H. ■ UPD: Получилось доказать более лаконично данную теорему:

▲ Так как матрица Н невырождена, то её столбцы образуют базис m-мерного пространства => можно получить любой вектор этого пространства с помощью линейной комбинации базисных столбцов, в частности и вектор **e**. ■)
То есть из det(H) != 0 => (теорема 3) => доказательство гипотезы 1.

12.Для матрицы H при m = 3 показать, что det(H) != 0 - легко. Но при увеличении m сложность растет в разы(по крайней мере, для моего подхода). Покажем, что для m=3 => det(H) != 0.

Выше было замечено, что H = H1 + H2+ ... + Hm, где Hi - матрица попарных расстояний Хэмминга, составленная для i-ой координаты исходных векторов. То есть при m=3 H = H1 + H2 + H3. Видов компонент будет не так много(4) и их можно перебрать:



3)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
 $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

И рассмотрим всевозможные их суммы: H = a*H1 + b*H2 + c*H3 + d*H4, где a, b, c, d целочисленные коэффициенты, удовлетворяющие следующим соотношениям:

1)
$$a + b + c + d = 3$$
.

2)
$$a, b, c, d \ge 0$$
.

получим матрицу:

Определитель которой равен: 2*(b+c+d)*(a+b+c)*(a+c+d) > 0, так как хотя бы один из коэффициентов будет отличен от нуля.

Но для m=4 это уже будет сделать не так просто.

Что можно было сделать еще:

- 1) Матрица попарных расстояний Хэмминга очень похожа на матрицу расстояний между векторами(||vi vj||), а матрица попарных совпадений координат напоминает матрицу Грама для системы векторов. Можно проверить, есть ли какая-то связь между ними.
- 2) Можно заметить, что $|\operatorname{rank}(H) \operatorname{rank}(M)| <= 1$. Это следует из определения матрицы M: M = n*E H и того, что $\operatorname{rank}(H|\mathbf{e}) = \operatorname{rank}(n*E H)$, а ранг матрицы при приписывании к ней одного столбца может измениться не более, чем на единицу. Возможно, получилось бы доказать, что $|\operatorname{rank}(H)| \operatorname{rank}(M)| = 0$.
- 3) Как я уже писал в пункте 4: можно исследовать две системы:

- 4) Более подробно изучить теорию неотрицательных матриц, так как найти её применение к этой задаче за это время не получилось.
- 5) Поработать еще индукцией в **пункте 9.** Как мне кажется, замечательное свойство матриц H и M (H = H1 + ... Hn) идеально подходит для доказательства с помощью индукции по n.
- 6) Совсем не рассматривал(кроме **пункта 5**) ограничение на координаты векторов. Возможно, для каких-то частных случаев удалось бы решить задачу.
- 7) При доказательствах не удалось нигде воспользоваться свойством матрицы попарных расстояний Хэмминга неравенством треугольника.
- 8) Можно было загуглить решение и исходить от него, но в этом задании не стал пользоваться такой возможностью, а то не смог бы придумать чего-то более-менее отличающегося от предложенного решения. (Похожая ситуация была в задании №1, когда был бэнчмарк, от которого я сильно не смог отойти(в плане предобработки данных). Нужно было анализировать его только после проверки своих идей).