

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ: Панков Василий Дмитриевич (М412)

1. Постановка задачи

На интервале $[0; 1]$ вычислить корень уравнения

$$x^3 - \cos(x) = 0$$

Наличие корня на этом интервале подтвердить графиком.

Использовать следующие методы:

1. Метод половинного деления:

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

2. Метод хорд:

$$x_{n+1} = \frac{b_n \cdot f(a_n) - a_n \cdot f(b_n)}{f(a_n) - f(b_n)}, \quad f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

3. Метод Ньютона (в начальной точке $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

4. Модифицированный метод Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

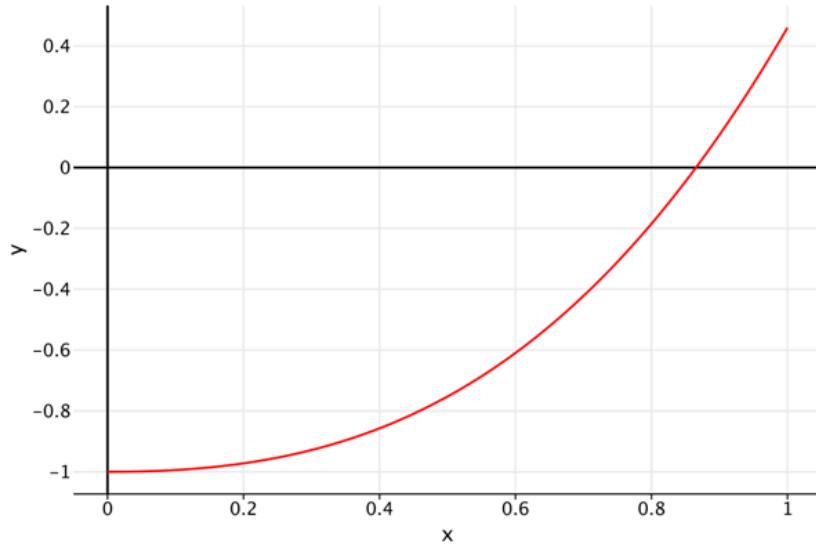
5. Метод простых итераций ($\lambda > 0$):

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \cdot f(x_n)$$

Использовалась точность: $\varepsilon = 10^{-6}$

2. График функции

График функции $f(x) = x^3 - \cos(x)$ на интервале $[0; 1]$ подтверждает наличие корня:



Из графика видно, что функция пересекает ось абсцисс в окрестности точки $x \approx 0.8$.

3. Решение

3.1. Метод половинного деления

Начальные данные: $a_0 = 0, b_0 = 1$

n	x_n	$f(x_n)$	a_n	b_n
0	0.500000	-0.752583	0.000000	1.000000
1	0.750000	-0.309814	0.500000	1.000000
2	0.875000	0.028925	0.750000	1.000000
3	0.812500	-0.151309	0.750000	0.875000
4	0.843750	-0.063988	0.812500	0.875000
5	0.859375	-0.018241	0.843750	0.875000
6	0.867188	0.005164	0.859375	0.875000
7	0.863281	-0.006583	0.859375	0.867188
8	0.865234	-0.000721	0.863281	0.867188
9	0.866211	0.002219	0.865234	0.867188
10	0.865723	0.000749	0.865234	0.866211
11	0.865479	0.000013	0.865234	0.865723
12	0.865356	-0.000354	0.865234	0.865479
13	0.865417	-0.000170	0.865356	0.865479
14	0.865448	-0.000078	0.865417	0.865479
15	0.865463	-0.000032	0.865448	0.865479
16	0.865471	-0.000009	0.865463	0.865479

17	0.865475	0.000002	0.865471	0.865479
18	0.865473	-0.000004	0.865471	0.865475
19	0.865474	-0.000001	0.865473	0.865475

Результат: $x \approx 0.865474$

Количество итераций: 20

3.2. Метод хорд

Начальные данные: $a_0 = 0, b_0 = 1$

n	x_n	$f(x_n)$	a_n	b_n
0	0.685073	-0.452850	0.000000	1.000000
1	0.841355	-0.070876	0.685073	1.000000
2	0.862547	-0.008780	0.841355	1.000000
3	0.865123	-0.001054	0.862547	1.000000
4	0.865432	-0.000126	0.865123	1.000000
5	0.865469	-0.000015	0.865432	1.000000
6	0.865473	-0.000002	0.865469	1.000000
7	0.865474	-0.000000	0.865473	1.000000

Результат: $x \approx 0.865474$

Количество итераций: 8

3.3. Метод Ньютона

Начальные данные: $x_0 = 1$

Производная: $f'(x) = 3x^2 + \sin(x)$

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.000000	0.459698
1	0.866021	-0.001128
2	0.865474	-0.000000

Результат: $x \approx 0.865474$

Количество итераций: 3

3.4. Модифицированный метод Ньютона

Начальные данные: $x_0 = 1$, $x_1 = 0.866021$ (из метода Ньютона)

n	x_n	$f(x_n)$
1	0.866021	-0.001128
2	0.865475	-0.000001

Результат: $x \approx 0.865475$

Количество итераций: 2

3.5. Метод простых итераций

Начальные данные: $x_0 = 1$, $\lambda = 0.3$

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.000000	0.459698
1	0.846783	-0.055219
2	0.865187	-0.000863
3	0.865475	0.000002
4	0.865474	-0.000000

Результат: $x \approx 0.865474$

Количество итераций: 5

Значение $\lambda = 0.33$ было подобрано экспериментально для обеспечения сходимости.

4. Выводы

Сравнение скорости сходимости методов:

Метод	Количество итераций	Корень
Половинного деления	20	0.865474
Хорд	8	0.865
Ньютона	3	0.865474
Ньютона (модиф.)	2	0.865475
Простых итераций	5	0.865

Заключение: Наиболее быстро сходится модифицированный метод Ньютона (2 итерации) и метод Ньютона (3 итерации). Метод половинного деления требует наибольшего числа итераций (20), но гарантирует сходимость.

Метод простых итераций показывает хорошую скорость (5 итераций) при правильном выборе параметра λ . Метод хорд занимает промежуточное положение по скорости сходимости (8 итераций).