РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ: Панков Василий Дмитриевич (М412)

1. Постановка задачи

На интервале $[0; 1]$ вычислить корень уравнения

$$x^3 - \cos(x) = 0$$

Наличие корня на этом интервале подтвердить графиком.

Использовать следующие методы:

1. Метод половинного деления:

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

2. Метод хорд:

$$x_{n+1} = \frac{b_n \cdot f(a_n) - a_n \cdot f(b_n)}{f(a_n) - f(b_n)}, \quad f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

3. Метод Ньютона (в начальной точке $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'}(x_n)$$

4. Модифицированный метод Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

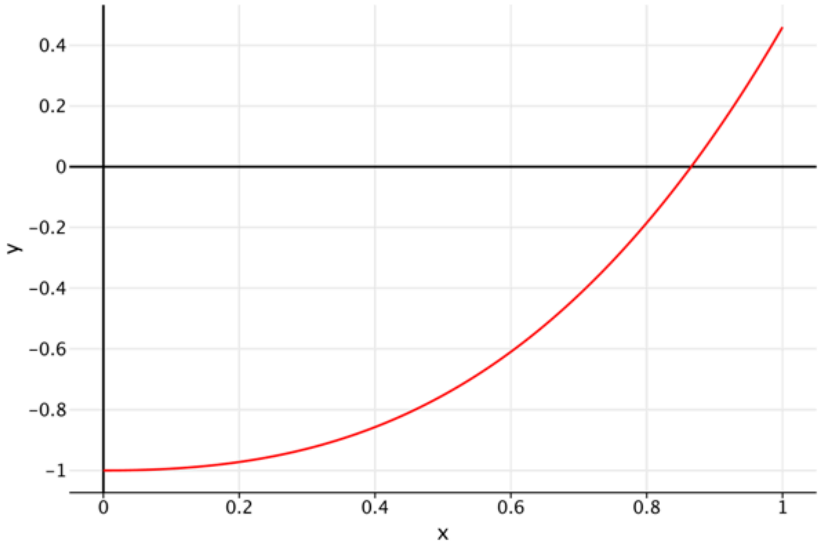
5. Метод простых итераций ($\lambda > 0$):

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \cdot f(x_n)$$

Использовалась точность: $\varepsilon = 10^{-6}$

2. График функции

График функции $f(x) = x^3 - \cos(x)$ на интервале $[0; 1]$ подтверждает наличие корня:



Из графика видно, что функция пересекает ось абсцисс в окрестности точки $x \approx 0.865$.

3. Решение

3.1. Метод половинного деления

Начальные данные: $a_0 = 0$, $b_0 = 1$

n	x_n	$f(x_n)$	a_n	b_n
0	0.500000	-0.752583	0.000000	1.000000
1	0.750000	-0.309814	0.500000	1.000000
2	0.875000	0.028925	0.750000	1.000000
3	0.812500	-0.151309	0.750000	0.875000
4	0.843750	-0.063988	0.812500	0.875000
5	0.859375	-0.018241	0.843750	0.875000
6	0.867188	0.005164	0.859375	0.875000
7	0.863281	-0.006583	0.859375	0.867188
8	0.865234	-0.000721	0.863281	0.867188
9	0.866211	0.002219	0.865234	0.867188
10	0.865723	0.000749	0.865234	0.866211
11	0.865479	0.000013	0.865234	0.865723
12	0.865356	-0.000354	0.865234	0.865479
13	0.865417	-0.000170	0.865356	0.865479
14	0.865448	-0.000078	0.865417	0.865479
15	0.865463	-0.000032	0.865448	0.865479
16	0.865471	-0.000009	0.865463	0.865479

17	0.865475	0.000002	0.865471	0.865479
18	0.865473	-0.000004	0.865471	0.865475
19	0.865474	-0.000001	0.865473	0.865475

Результат: $x \approx 0.865474$

Количество итераций: 20

3.2. Метод хорд

Начальные данные: $a_0 = 0$, $b_0 = 1$

n	x_n	$f(x_n)$	a_n	b_n
0	0.685073	-0.452850	0.000000	1.000000
1	0.841355	-0.070876	0.685073	1.000000
2	0.862547	-0.008780	0.841355	1.000000
3	0.865123	-0.001054	0.862547	1.000000
4	0.865432	-0.000126	0.865123	1.000000
5	0.865469	-0.000015	0.865432	1.000000
6	0.865473	-0.000002	0.865469	1.000000
7	0.865474	-0.000000	0.865473	1.000000

Результат: $x \approx 0.865474$

Количество итераций: 8

3.3. Метод Ньютона

Начальные данные: $x_0 = 1$

Производная: $f'(x) = 3x^2 + \sin(x)$

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.000000	0.459698
1	0.866021	-0.001128
2	0.865474	-0.000000

Результат: $x \approx 0.865474$

Количество итераций: 3

3.4. Модифицированный метод Ньютона

Начальные данные: $x_0 = 1$, $x_1 = 0.866021$ (из метода Ньютона)

n	x_n	$f(x_n)$

1	0.866021	-0.001128
2	0.865475	-0.000001

Результат: $x \approx 0.865475$

Количество итераций: 2

3.5. Метод простых итераций

Начальные данные: $x_0 = 1$, $\lambda = 0.3$

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.000000	0.459698
1	0.846783	-0.055219
2	0.865187	-0.000863
3	0.865475	0.000002
4	0.865474	-0.000000

Результат: $x \approx 0.865474$

Количество итераций: 5

Значение $\lambda = 0.33$ было подобрано экспериментально для обеспечения сходимости.

4. Выводы

Сравнение скорости сходимости методов:

Метод	Количество итераций	Корень
Половинного деления	20	0.865474
Хорд	8	0.865
Ньютона	3	0.865474
Ньютона (модиф.)	2	0.865475
Простых итераций	5	0.865

Заключение: Наиболее быстро сходится модифицированный метод Ньютона (2 итерации) и метод Ньютона (3 итерации). Метод половинного деления требует наибольшего числа итераций (20), но гарантирует сходимость. Метод простых итераций показывает хорошую скорость (5 итераций) при правильном выборе параметра λ. Метод хорд занимает промежуточное положение по скорости сходимости (8 итераций).