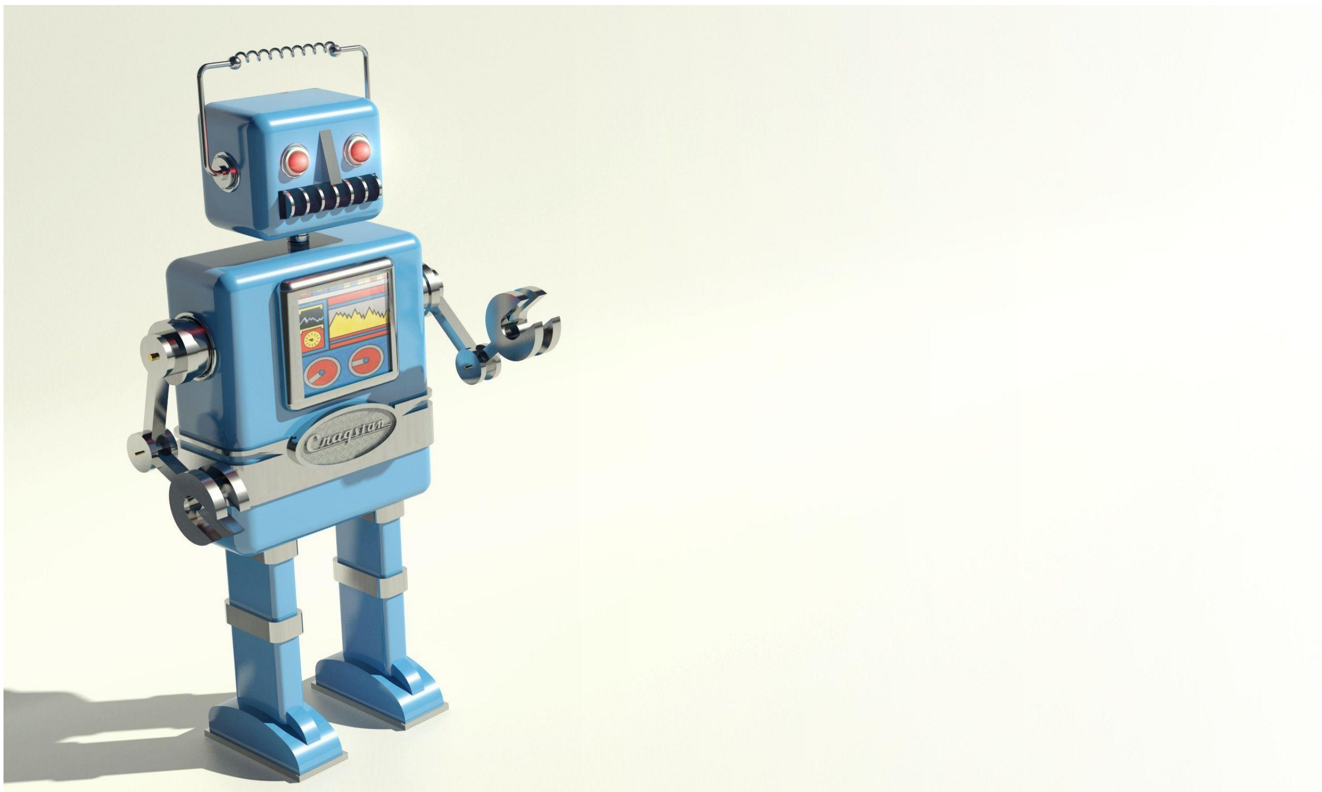
Ρομποτική 1

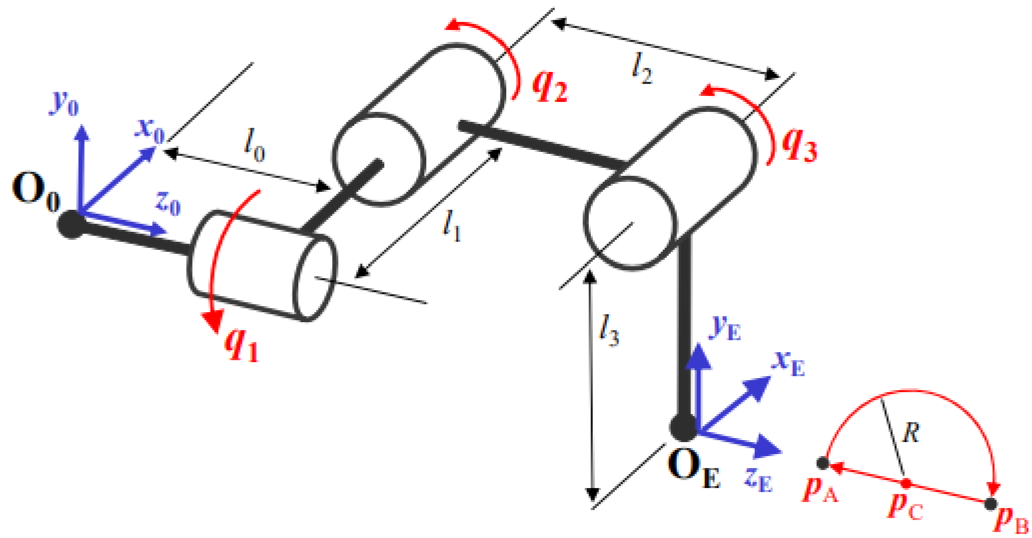
Εξαμηνιαία Εργασία – Μέρος Α Θεωρητική Ανάλυση
Ρομποτικός Μηχανισμός 3 Στροφικών Βαθμών Ελευθερίας

Κάπρος Παναγιώτης 03118926



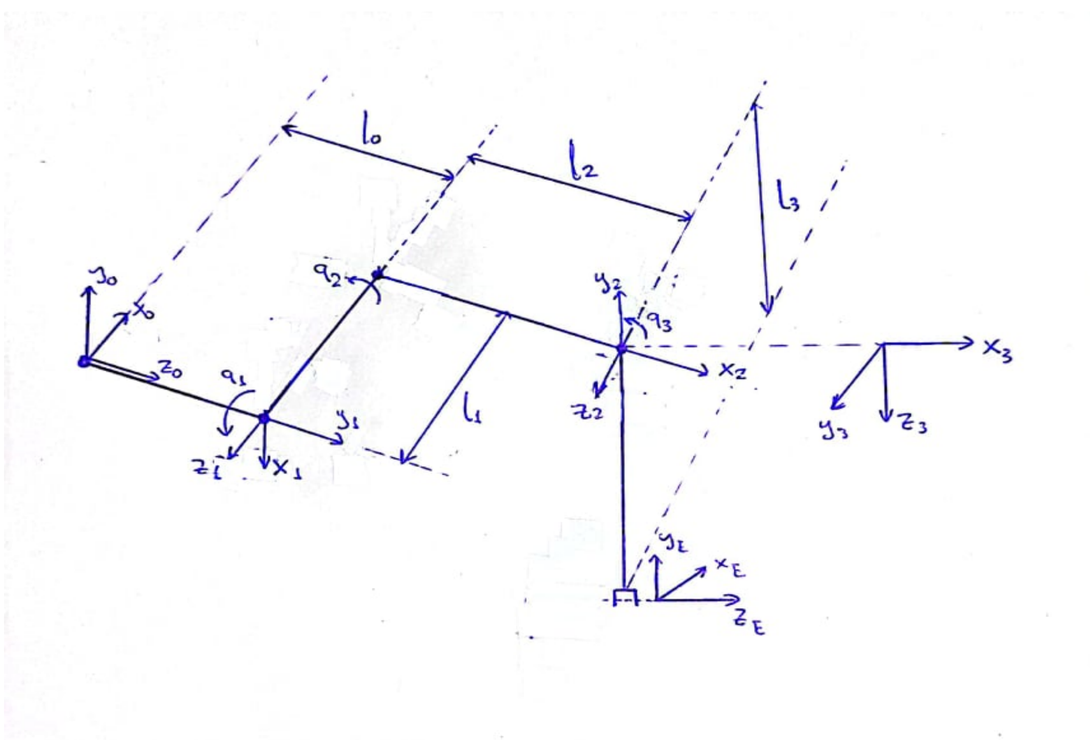
Σκοπός

Σκοπός της εργασίας είναι η ανάλυση του κινηματικού μοντέλου ενός ρομποτικού διαχειριστή 3 στροφικών βαθμών ελευθερίας, ο οποίος απεικονίζεται παρακάτω:



1. Ανάλυση Denavit – Hartenberg:

Με βάσει τους κανόνες για την παραμετροποίηση τον αξόνων του συστήματος προκύπτει το παρακάτω σύστημα με τους αντίστοιχους άξονές του για κάθε έναν από τους τρεις στροφικούς άξονες:



Η τοποθέτηση των κέντρων και αξόνων σε κάθε σύνδεσμο έγινε βάσει των εξής κανόνων:

- Για κάθε άρθρωση q_i αντιστοιχεί κέντρο O_{i-1} χωρίς αυτό να απαιτεί την ίδια αρίθμηση για τους άξονες x, y, z.
- Ο άξονας z_i πρέπει να ορίζει την άρθρωση q_i και εφόσον στην περίπτωσή μας έχουμε περιστροφικές αρθώσεις, τότε θέλουμε να είναι ο άξονας περιστροφής.
- Ο άξονας x_i πρέπει να είναι στην κοινή κάθετο των z_{i-1} και z_i .

Δεδομένων των παραπάνω απαιτήσεων, έγινε η μεταφορά των αξόνων για i = 1 στην άρθρωση q_1 καθώς ήδη η άρθρωση αυτή καλύπτονταν από του άξονες με i = 0 και τοποθετώντας τους άξονες με i = 1 στην άρθωση 2 δε θα είχαμε ποτέ υλοποίηση της απαίτησης του άξονα x_i να είναι στην κοινή κάθετο των z_{i-1} και z_i. Επίσης σε αυτό το σημείο να τονιστεί πως στο τελικό σημείο του συστήματος χρειάστηκε ο ορισμός ενός βοηθητικού άξονα (άξονας 3) με σκοπό να έχουμε πλήρη ικανοποίηση των κανόνων που εφαρμόζονται για την παραμετροποίησή μας (στην συγκεκριμένη περίπτωση απαιτούμε ο εκάστοτε x_i άξονας να είναι κάθετος με τον εκάστοτε z_{i-1} άξονα χωρίς αυτό να ισχύει για τους άξονες x_0, y_0, z_0).

Δεδομένων των παραπάνω, τα βήματα μετάβασης από το αρχικό στο τελικό πλαίσιο παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας Μετάβασης – Denavit Hartenberg				
i	**θ_i - Rot_z**	**d_i - Tra_z**	**a_i - Tra_x**	**α_i - Rot_x**
0 → 1	**$q_1 - \pi/2$**	**l_0**	**0**	**$+\pi/2$**
1 → 2	**$q_2 + \pi/2$**	**$-l_1$**	**l_2**	**0**
2 → 3	**q_3**	**0**	**0**	**$+\pi/2$**
3 → E	**$-\pi/2$**	**l_3**	**0**	**$-\pi/2$**

2. Ευθεία Κινηματική Ανάλυση

Σε αυτό το σημείο παρατίθενται οι ομογενείς μήτρες μετασχηματισμού όπως προκύπτουν από τον παραπάνω πίνακα DH-Table:

$$ {}^{0}A_1 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{1}A_2 = \begin{bmatrix} -s_2 & -c_2 & 0 & -s_2 * l_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & l_2 * c_2 \\ 0 & 1 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{2}A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{3}A_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Και άρα η κινηματική εξίσωση του βραχίονα έχει ως εξής:

$$
{}^{0}A_E = {}^{0}A_1 * {}^{1}A_2 * {}^{2}A_3 * {}^{3}A_E =
$$

$$
= \begin{bmatrix} c_1 & s_1*s_2*s_3-c_2*c_3*s_1 & -c_2*s_1*s_3-c_3*s_1*s_2 & c_1*l_1+l_3*(c_2*c_3*s_1-s_1*s_2*s_3)-l_2*s_1*s_2 \\ s_1 & c_1*c_2*c_3-c_1*s_2*s_3 & c_1*c_2*s_3+c_1*c_3*s_2 & l_1*s_1-l_3*(c_1*c_2*c_3-c_1*s_2*s_3)+c_1*l_2*s_2 \\ 0 & -c_2*s_3-c_3*s_2 & c_2*c_3-s_2*s_3 & l_0+c_2*l_2+l_3*(c_2*s_3+c_3*s_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Να σημειωθεί πως για χάρη των παρακάτω ερωτημάτων υπολογίζουμε και την μήτρα $A^0{}_2$ ως εξής:

$$
{}^{0}A_2 = {}^{0}A_1 * {}^{1}A_2 = \begin{bmatrix} -s_1*s_2 & -c_2*s_1 & -c_1 & c_1*l_1-l_2*s_1*s_2 \\ c_1*s_2 & c_1*c_2 & -s_1 & l_1*s_1+c_1*l_2*s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & l_0+c_2*l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

3. Προσδιορισμός Ιακωβιανής Μήτρας

Η Ιακωβιανή μήτρα του μηχανισμού θα είναι διαστάσεων 6x3 και η μορφή της βάσει θεωρίας έχει ως εξής:

$$
J = \begin{bmatrix} b_0 \, x \, {}^{0}A_E & b_1 \, x \, ({}^{0}A_E - {}^{0}A_1) & b_2 \, x \, ({}^{0}A_E - {}^{0}A_2) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{όπου} \quad b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -s_1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Να σημειωθεί πως από τις μήτρες A παραπάνω λαμβάνουμε μόνο τα στοιχεία από τις τρεις πρώτες γραμμές και την τέταρτη μόνο στήλη ενώ για τις μήτρες b_1 και b_2 λαμβάνουμε τα στοιχεία από τις τρεις πρώτες γραμμές και την τρίτη στήλη των πινάκων $A^0{}_1$ και $A^0{}_2$ αντίστοιχα.

Άρα η Ιακωβιανή μήτρα που προκύπτει είναι η εξής:

$$
J = \begin{bmatrix} l_3*(c_1*c_2*c_3-c_1*s_2*s_3)-l_1*s_1-c_1*l_2*s_2 & -s_1*(c_2*l_2+l_3*(c_2*s_3+c_3*s_2)) & -l_3*s_1*(c_2*s_3+c_3*s_2) \\ c_1*l_1+l_3*(c_2*c_3*s_1-s_1*s_2*s_3)-l_2*s_1*s_2 & c_1*(c_2*l_2+l_3*(c_2*s_3+c_3*s_2)) & c_1*l_3*(c_2*s_3+c_3*s_2) \\ 0 & -(c_1^2+s_1^2)*(l_2*s_2-c_2*c_3*l_3+l_3*s_2*s_3) & l_3*(c_2*c_3-s_2*s_3)*(c_1^2+s_1^2) \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

4. Αντίστροφο Διαφορικό Κινηματικό Μοντέλο

Οι ιδιομορφίες του εξεταζόμενου συστήματος, προκύπτουν στα σημεία μηδενισμού της ορίζουσα του 3x3 υποπίνακα της ιακωβιανής μήτρας εφόσον μας ενδιαφέρει η γραμμική ταχύτητα του τελικού εργαλείου. Έτσι έχουμε:

det(J) = 0→ $\mathbf{c_3*l_2*l_3*(l_2*s_2 - c_2c_3*l_3) = 0}$. Άρα οι περιπτώσεις είναι είτε $\mathbf{c_3 = 0}$, είτε $\mathbf{l_2*s_2 = c_2c3*l_3}$.

Για την πρώτη περίπτωση όπου έχουμε $\cos(q_3) = 0$, συμπεραίνουμε πως το q_3 είναι ίσο είτε με $\mathbf{q_3 = \pi/2}$ είτε με $\mathbf{q_3 = 3\pi/2}$, άρα δηλαδή όταν ο τελευταίος σύνδεσμος εκτείνεται προς τα πάνω ή προς τα κάτω.

Στην δεύτερη περίπτωση, μέσω της κινηματικής εξίσωσης παρατηρούμε πως ο μηχανισμός βρίσκεται σε θέση στην οποία το q_1 δεν την επηρεάζει έχοντας έτσι απώλεια βαθμών ελευθερίας στην κίνηση.

Για τιμές διάφορες από τις παραπάνω στην ορίζουσα μπορούμε να θεωρήσουμε τον αντίστροφο 3x3 πίνακα. Έτσι λοιπόν προκύπτει:

$$J'=\begin{bmatrix} \frac{-c_1}{((c_1^2+s_1^2)*(l_2*s_2-c_2*c_3*l_3+l_3*s_2*s_3))} & \frac{-s_1}{((c_1^2+s_1^2)*(l_2*s_2-c_2*c_3*l_3+l_3*s_2*s_3))} & 0 \\ \frac{((c_2*c_3-s_2*s_3)*(c_1*l_1-l_2*s_1*s_2+c_2*c_3*l_3*s_1-l_3*s_1*s_2*s_3))}{(c_3*l_2*(c_1^2+s_1^2)*(c_2^2+s_2^2)*(l_2*s_2-c_2*c_3*l_3+l_3*s_2*s_3))} & \frac{((c_2*c_3-s_2*s_3)*(l_1*s_1+c_1*l_2*s_2+c_1*l_3*s_2*s_3-c_1*c_2*c_3*l_3))}{(c_3*l_2*(c_1^2+s_1^2)*(c_2^2+s_2^2)*(l_2*s_2-c_2*c_3*l_3+l_3*s_2*s_3))} & \frac{-(c_2*s_3+c_3*s_2)}{(c_3*l_2*(c_1^2+s_1^2)*(c_2^2+s_2^2))} \\ \frac{(c_1*l_1-l_2*s_1*s_2+c_2*c_3*l_3*s_1-l_3*s_1*s_2*s_3)}{(c_3*l_2*l_3*(c_1^2+s_1^2)*(c_2^2+s_2^2))} & \frac{(l_1*s_1+c_1*l_2*s_2+c_1*l_3*s_2*s_3-c_1*c_2*c_3*l_3)}{(c_3*l_2*l_3*(c_1^2+s_1^2)*(c_2^2+s_2^2))} & \frac{(c_2*l_2+c_2*l_3*s_3+c_3*l_3*s_2)}{(c_3*l_2*l_3*(c_1^2+s_1^2)*(c_2^2+s_2^2))} \end{bmatrix}$$

5. Αντίστροφο Γεωμετρικό Μοντέλο

Από την ευθεία κινηματική εξίσωση, λαμβάνουμε τα στοιχεία της τέταρτη στήλης των τριών γραμμών $p_e = [p_x\ p_y\ p_z]$ καθώς αυτά τα στοιχεία αναπαριστούν την θέση του τελικού εργαλείου δράσης και επιλύουμε το σύστημα που προκύπτει ως προς τις μεταβλητές των αρθρώσεων. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα η επιθυμητή θέση του τελικού εργαλείου να μεταφράζεται στις στροφές των αρθώσεων. Έτσι έχουμε ότι:

$$\begin{Bmatrix} p_x=c_1*l_1+l_3*(c_2*c_3*s_1-s_1*s_2*s_3)-l_2*s_1*s_2 \\ p_y=l_1*s_1-l_3*(c_1*c_2*c_3-c_1*s_2*s_3)+c_1*l_2*s_2 \\ p_z=l_0+c_2*l_2+l_3*(c_2*s_3+c_3*s_2) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1*l_1+s_1*(c_2*c_3*l_3-l_2*s_2) \\ l_1*s_1-c_1*(l_3*c_2*c_3-l_2*s_2) \\ l_0+c_2*l_2+l_3*(c_2*s_3+c_3*s_2) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \textit{Θέτω τις ποσότητες} \begin{matrix} l_3*c_2*c_3-l_2*s_2=m \\ m=l*cos\varphi \\ l_1=l*sin\varphi \;\; \mu\varepsilon \; l=\sqrt{m^2+l_1^2} \end{matrix} \Leftrightarrow \textit{άρα} \begin{matrix} p_x=s_1*m+c_1*l_1 \\ p_y=-c_1*m+l_1*s_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} p_x=s_1*l*cos\varphi+c_1*l*sin\varphi \\ p_y=-c_1*l*cos\varphi+s_1*l*sin\varphi \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} p_x=l*\sin(q_1+\varphi) \\ p_y=-l*\cos(q_1+\varphi) \end{matrix} \Leftrightarrow q_1=atan2(p_{Ey}, p_{Ex})-atan\,2(l_2*s_2-l_3*c_2*c_3)$$

Για τον υπολογισμό της q_2 συναρτήσει της q_3, θα απομονώσουμε το σύστημα αρθώσεων 2 και 3 από το τελικό εργαλείο. Άρα έχουμε:

$$q_3 = \pm \arcsin\left(\frac{p_{1x}^2 + p1_y^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 * l_2 * l_3}\right) \kappa\alpha\iota\, q_2 = atan2\left(\pm\sqrt{\left(p_{Ex}^2 - pEy^2 - l_1^2\right)}, p_{Ez} - l_0\right) + atan2\left(l_3 * c_{3,} l_2 + l_3 * c_3\right)$$

Στο αρχείο part_a.m παρατίθεται ο κώδικας matlab που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των εκάστοτε ερωτημάτων.