



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
Természettudományi Kar  
Algebra Tanszék

# **Cölöpöző gép üzemi adatainak elemzése**

**B.Sc. Szakdolgozat**

**Erdős Panna Klaudia**

*témavezető*  
Borbély Gábor

*külső témavezető*  
Borbély Dániel

2019

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
1.1. Motiváció . . . . .	1
<b>2. Dolgozat célja</b>	<b>2</b>
2.1. Fúrési adatok . . . . .	3
<b>3. Alkalmazott módszerek</b>	<b>6</b>
3.1. Hagyományos numerikus deriválás . . . . .	7
3.2. Stencilek . . . . .	8
3.2.1. Five-point stencil . . . . .	8
3.2.2. Általános stencilek . . . . .	8
3.3. Chartrand módszere . . . . .	10
3.3.1. Kvadratikus programozásként megfogalmazva [9] . . . .	11
3.4. Hibabecslés . . . . .	15
<b>4. Eredmények</b>	<b>17</b>
4.1. Hagyományos numerikus deriválás . . . . .	17
4.2. Stencilek . . . . .	20
4.3. Chartland módszere . . . . .	24
<b>5. További irányok</b>	<b>27</b>
5.1. Osztályozás . . . . .	29
<b>6. Összegzés</b>	<b>30</b>

# 1. Bevezetés

## 1.1. Motiváció

Szakdolgozatomban a cölöpök fúrása és betonozása során rögzített adatokat fogom feldolgozni és elemezni. A cölöpöző gép legpontosabb pillanatnyi fúrási sebességét keresem a derivált különféle kiszámításaival és közelítésével.

Az építőipar egy igen nagy szegmens, mind volumenben, mind a környezetre gyakorolt hatásban. Optimális műszaki megoldás megtalálásával csökkenthető a költség és a környezetre gyakorolt hatása is. Egy épület építése során az elsődleges feladatok közé tartozik az alapozás. Az alapozási szerkezetek feladata az építmények összes terheinek felvétele és közvetítése az altalajra. Az alapozások költségeinek csökkentése, az ipar által elvárt versenyképes alternatívák keresése, világszerte a speciális mélyalapozók feladata.

A mélyalapozás<sup>1</sup> a mélyen fekvő teherbíró talajra, vagy a talajvízszint alatt fekvő teherbíró talajra készített alapozási mód. Ez a fajta alapozás nagy technikai felkészültséget igényel és jelentősen megdrágítja az építkezés folyamatát.

A mélyalapozás egyik módja a cölöpalapozás. Cölöpalapozásnak azt az alapozási eljárást nevezzük, amely alkalmazása esetén az építmény terhét teherelosztó szerkezet (pl. vasbeton gerenda vagy lemez) közvetítésével cölöpök adják át a mélyen fekvő teherbíró altalajra. A cölöp egy mély alap függőleges szerkezeti eleme, amelyet az építkezés során mélyen a talajba vezetnek vagy fúrnak. Elkészítési mód szerint megkülönböztetünk kétféle technológiát. Az egyik, hogy készen szállítják a cölöpöt a helyszínre, a másik, hogy a helyszínen készítik el. A cölöpalapozás egy újabb, gazdaságosabb, hazai és világviszonylatban egyaránt gyakran alkalmazott eljárása, a talajkiszorításos csavart cölöpözés. Ez a módszer környezetvédelmi szempontból kedvező és költségcsökkentő hatású.

A talajkiszorításos cölöpözési rendszerbe tartozó teljes egészében a helyszínen kivitelezett csavart vasbeton cölöp, a Screwsol cölöp (lásd 1 ábra), mely ötvözi a vert cölöpök előnyeit a teherbírásra vonatkozóan és a fúrt cölöpök rugalmas alkalmazhatóságát. A talajkiszorításos cölöpök kivitelezési technológiájából fakadóan

---

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Deep\\_foundation](https://en.wikipedia.org/wiki/Deep_foundation)

a fúrószár alsó vége egy csavarmenetes kúpos fúrófej, mely a talajba hatolva a talajt maga körül megtömörítve, annak szerkezetét átrendezve szorít helyet a később a fúrószáron keresztül alulról felfelé elhelyezett betonnak.

A mai világban fontos, hogy ökológiai lábnyomunkat csökkentsük a víz-és az üzemanyag felhasználás, valamint a hulladékgazdálkodás javítása révén. A fúrási sebesség alapján meg lehet határozni a talaj összetételét, mely alapján elérhető lenne, hogy előrejelezzük egy cölöp megfúrásának az idejét, ezzel optimalizálva a munkamenetet. Ezáltal csökkentve az üzemanyag és víz felhasználást. [1]

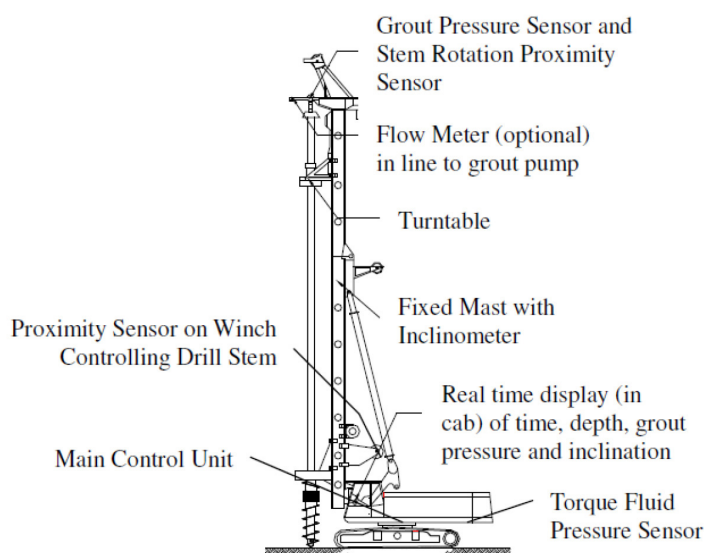


Figure 2. Data acquisition system [3]

1. ábra. Screwsol cölöppel felszerelt fúrógép[2]

## 2. Dolgozat célja

A cölöpök fúrása és betonozása során rögzített adatok feldolgozásán és elemzésén keresztül szeretném meghatározni a gép fúrási sebességét. Ez az adat jellemzi a talajt (lazább szerkezetű talajban gyorsabban halad a fúrószál, tömörebb

talajban lassabban halad). Ennek segítségével szeretnénk építeni egy osztályozó algoritmust, mellyel el lehet különíteni az egyes talajrétegeket a fúrás során. Ezzel segíthető a szaktervezők munkája, mivel ez alapján a cölöp alapozást tudják optimalizálni.

A 2. képen egy folyó kiszáradt medre látható, ahol nagyon szembeűnő hogy a talaj rétegződése hirtelen változik meg, nincsenek átmenetek a rétegek között. Megfigyelhető, hogy az első rövidebb kavicsos réteg után, átmenet nélkül következik a homokosabb talaj, majd újra egy hosszabb kavicsos réteg jön.

A fúrógép fúrás közben rögzít adatokat, amelyeket ha megfelelően lehet értelmezni, optimálisabb szerkezet kapható.

A fúrószerszám függőleges pozíciója van mérve, ez a mélység függvény, amit deriválni kell az idő szerint, hogy megkaphassuk a kívánt sebességet. Ez azért nehéz, mert a fúrás során a gép olykor leáll vagy kibillen  $\pm 15$  centimétert, ezzel eltérve a fúrési tengelytől. Bár a gép számol behatolási sebességet, e billegés miatt, az alacsony sebességeknél 0 és hozzá közeli értékek között váltakozik, és nem tud stabilan egy átlagsebességet számolni. Ezen felül további nehézség az, hogy a talajváltások nagyon hirtelen következnek be, így nehéz olyan módszer találni, aminek a segítségével könnyen el lehetne határolni a talajrétegeket egymástól. Ezt a problémát a gép által számolt sebesség egészen pontosan megoldja. Amikor a derivált nagy meredekséggel halad, azaz éppen talajréteg váltás következik be, ott a gép által mért sebesség nagyon elkenődik. Tehát nem lehet biztosan meghatározni a váltás helyét.

Ahhoz, hogy releváns információhoz jussunk fontos, hogy a kiválasztott deriválási módszer csökkentse a zajt és ne kenje el az ugrásokat, ami a talajréteg megváltozását jelenti. Tanulmányom során szeretném megtalálni a leghatékonyabb deriválási módszert, mellyel egyértelműen lehet szeparálni a rétegeket.

## **2.1. Fúrési adatok**

Egy cölöpöző gép automatizált adatgyűjtő rendszer segítségével rögzíti a fúrési adatokat. Méri a mélységet, a körbefordulási számot, a gép dőlésének a fokát, a nyomatékot és különféle nyomásokat. Az én adataim a "The International Sympo-



2. ábra. Brownsea sziget kavicsos medre [3]

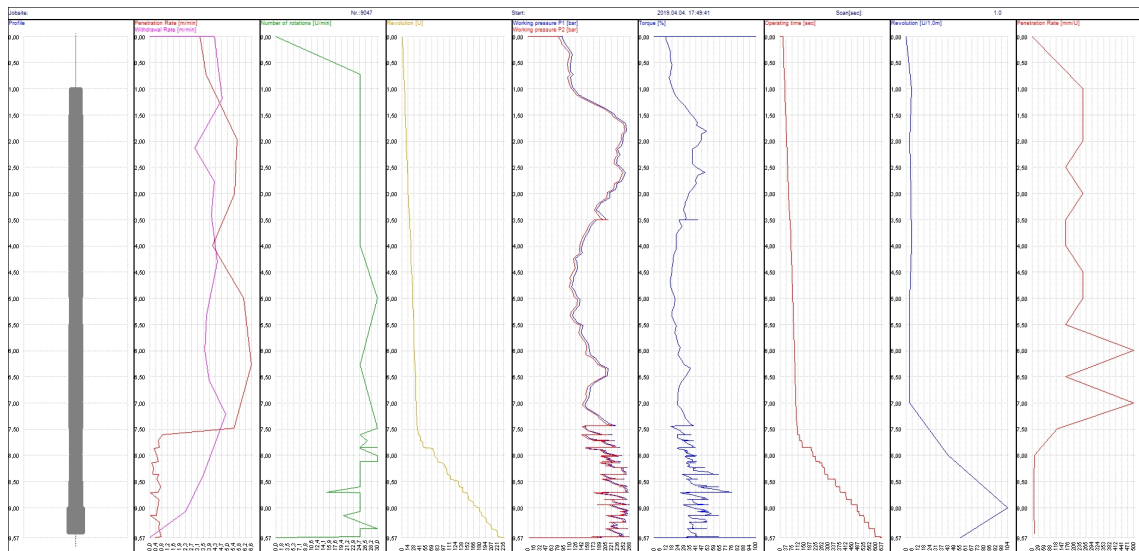
sium on Chromatography" [4] konferencia megjelenés alatt álló cikkéből vannak.

A 3 ábrán találhatóak a 9047-es számú cölöp mérési adatai, melyeket a fúrás közben rögzített az adatgyűjtő. A fúrógép által mért adatok a mélység függvényében vannak ábrázolva.

Az első oszlopban a cölöp átmérője látható, melyet a bepumpált beton térfogatából számol a gép. Ennek az adatnak a minőségbiztosításban van nagy szerepe. Ezt követően balról jobbra haladva a kalkulált behatolási sebesség [ $m/min$ ], a fordulatszám [ $U/min$ ], a fordulat [ $U$ ], a nyomás [ $bar$ ], a nyomaték [%], az idő [ $mp$ ], a fordulat [ $U/m$ ], és végül újra a behatolási sebesség  $mm/U$ -ban.

A 3. ábrán található cölöp esetében 7.44 méterig kisebb ellenálláson haladt a fúró és nagyobb sebességgel, azaz ezt a mennyiséget 102 másodperc alatt tette meg. Ellenben a hátramaradt 1.97 méteren már kisebb sebességgel haladt tovább, ezt 553 másodperc alatt fúrták, ami nagyjából 9.2 perc. Ez átlag  $4.45 \frac{m}{min}$ -t és  $0.23 \frac{m}{min}$ -t jelent a szakaszon.

Hatékonyság szempontjából a fúrást ebben az esetben még elfogadható haladás, ha 30 – 40 centimétert fúr percenként, de az alatt már súlyosan rossz, mert



3. ábra. 9047-es cölöp mérési adatai ábrázolva[2]

nem tudják tartani az ütemtervet. Azonban ha ez lecsökkent 10 centiméterre vagy az alá, akkor az már lassú. Kivitelezési szempontból a  $1.5 \frac{m}{min}$  fölötti haladást gyorsnak,  $0.35 \frac{m}{min}$  alattit lassúnak tekintik a HBM Kft-nél. Az a réteg rendelkezik jó teherbíró képességgel, amelyben  $0.35 \frac{m}{min}$  és  $1.5 \frac{m}{min}$  közötti sebességgel lehet fúrni, ezt lenne gazdaságos megtalálni.

A táblázatból leolvasható, hogy a cölöpök átlagos fúrási ideje 11 perc 58 másodperc. Egy építkezésen több száz cölöpöt fúrnak, ezek közül kiemeltém néhány szemléletes példát. (lásd 1-es táblázat) Itt látható, hogy vannak olyanok, amelyeket több, mint

$1 \frac{m}{min}$ -cel fúrták meg (lásd 760, 987, 1002, 1012, 1026, 1033-as cölöpök). Ezek még elfogadható gyorsasággal készültek el. A 767-es cölöpnél a fúró közel  $1 \frac{m}{min}$ -cel haladt, ami szintén elfogadhatónak mondható. Ennek ellenére előfordulnak olyan cölöpök is, amiket ennél jóval lassabban,  $1 \frac{m}{min}$  alatti sebességgel készítettek el (lásd 876, 1006, 1031, 1038). Ezek már lassúnak mondjuk, mivel 60 – 70 centimétert fúrnak átlagban. Ez igen költséges lenne, ha a cölöpök 30 – 40%-át ilyen lassan kellene elkészíteni.

Cölöp ID	Fúrési idő[perc:másodperc]	Cölöp hossza[m]
760	07 : 52	13.34
767	06 : 20	6.50
876	17 : 44	13.89
987	09 : 42	44.95
1002	03 : 50	5.61
1006	23 : 08	13.99
1012	11 : 27	13.71
1026	10 : 43	13.52
1031	22 : 20	13.33
1033	03 : 17	5.84
1038	15 : 19	13.01

1. táblázat.

### 3. Alkalmazott módszerek

A fizikában ismeretes út-idő-sebesség hármas közötti összefüggés leírására szolgáló képlet a leggyakoribb példa a deriválásra. Ha a megtett utat  $x$  az idő  $t$  függvényében írjuk fel:  $x = f(t)$ , akkor a sebessége  $v(t)$ , az út idő szerinti első deriváltja:  $v = \frac{df(t)}{dt}$ . A sebesség kiszámítására négyféle módszert alkalmazok a tanulmányomban. A hagyományos numerikus deriválást, Rick Chartrand total variation formuláját kvadrátikus programozási feladatként, majd a stencilek szerinti deriválást.

A művelet során adott pillanatban kapunk adatot a mélységre, így a függvényem diszkrét pontokból áll. Ezen pontok alapján kell számolni a deriváltat és azt közelíteni. Az adataim nagyon zajosak, mivel a cölöpözőgép olykor leáll, vagy, amikor egy nehéz talajban fúr, megdőlhét  $\pm 15$  centimétert. Ilyenkor a gépnek vissza kell húznia a fúrófejet, hogy visszaálljon az eredeti pozíciójába. Emiatt az adatsorom nem mindig monoton csökkenő, néha ez a tulajdonság elveszik. Ez azt jelenti, hogy például amikor már a 7.345 méternél tartunk és egy kemény réteghez érkezünk, akkor a visszahúzás következtében felemelkedik a fúrófej és megint



7.320 méterről fűr lefele.

A zaj a deriváltban is megjelenik, ezért olyan módszereket kellett találnom, ami kicsit csillapítja ezt, ugyanakkor felismerhető a rétegváltáskor bekövetkező nagy meredekségű ugrás.

### 3.1. Hagyományos numerikus deriválás

Az első módszer, amit szeretnék bemutatni, az a hagyományos numerikus deriválás. A numerikus deriválás egyik fontos módszere a derivált közelítése véges differencia hányadossal. Tegyük fel, hogy csak diszkrét pontokban ismerjük a deriválandó függvény értékét. Ebben az esetben az első deriváltat közelíthetjük a szomszédos pontokat összekötő egyenes meredekségével. Erre több lehetőség is létezik, a haladó, a retrográd, és a központi differencia.[5]

A haladó differencia az  $x$  értékek növekedési irányába eső alappontot használja, míg a retrográd a csökkenés irányába esőt. Ezek elsőrendű közelítései a deriválnak, de létezik azonban egy jobb, másodrendű közelítése is, ami a központi differencia. [6]

$f'(x_i)$ kiszámítása	
Haladó differencia	$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$
Retrográd differencia	$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}}$
Központi differencia	$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}$

#### Központi differencia

A központi differencia a haladó és retrográd differencia átlaga, mely általában pontosabb közelítést adja a deriválnak. Ebben fontos, hogy a pontok eloszlása egyenletes legyen ( $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h$ ). Minél közelebbi pontokat választunk, azaz  $h$  értéke minél kisebb, annál pontosabb lesz a közelítésünk.

## 3.2. Stencilek

A második technika a stencilek segítségével való deriválás. A numerikus analízis azon területein, amikor egy függvény deriváltjára vagyunk kíváncsiak, szoktak stencileket<sup>2</sup> használni. A stencil egy olyan csomópontcsoport geometriai elrendezése, amely numerikusan közelíti az adott pontbeli deriváltat. A csomópontokhoz hozzátartoznak az adott pontbeli véges differencia együtthatók is.

### 3.2.1. Five-point stencil

Ez a numerikus deriválás egy fajtája, amiben  $f(x)$  deriváltját szeretnénk közelíteni, az  $x$  pont szomszédjai segítségével. Egy dimenzióban az  $x$  középpontú, five-point stencil<sup>3</sup> ha  $h$  a lépésköz, így írható fel:

$$\{x - 2h, x - h, x, x + h, x + 2h\}$$

Az együtthatók táblázata:

Csomópont	$x - 2h$	$x - h$	$x$	$x + h$	$x + 2h$
Együttható	$\frac{1}{12h}$	$-\frac{8}{12h}$	0	$\frac{8}{12h}$	$-\frac{1}{12h}$

Ez alapján a táblázat alapján közelíthető egy valós függvény  $x$  pontbeli első deriváltja, tehát

$$f'(x) \approx \frac{-f(x + 2h) + 8f(x + h) - 8f(x - h) + f(x - 2h)}{12h}.$$

### 3.2.2. Általános stencilek

Az együtthatókat úgy lehet kiszámítani<sup>3</sup>, hogy vagy a Lagrange polinom deriváltját interpoláljuk csomópontok között [7], vagy az egyes csomópontok körül kiszámítjuk a függvény Taylor-sorát az  $f(x \pm h)$ -nak és a  $f(x \pm 2h)$ -nak, majd megoldjuk a négy egyenletet  $f'(x)$ -re.

A stencilek általánosabb formulák, mint a véges differenciák. Ezeket meg tudjuk kapni stencilekkel. Az alábbi táblázatban megtalálhatóak az együtthatóik.

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Stencil\\_\(numerical\\_analysis\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Stencil_(numerical_analysis))

<sup>3</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Five-point\\_stencil](https://en.wikipedia.org/wiki/Five-point_stencil)

	$x - h$	$x$	$x + h$
Haladó	0	$-\frac{1}{h}$	$\frac{1}{h}$
Retrográd	$-\frac{1}{h}$	$\frac{1}{h}$	0
Központi	$-\frac{1}{2h}$	0	$\frac{1}{2h}$

Legyen adott  $v \in \mathbb{R}^d$  vektor, aminek a segítségével alkothatunk általános stencil-eket.

$$v = [x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, x_d]$$

Ez a vektor fogja megadni, hogy mely alappontokban értékeljük ki a függvényértékeket. Például, hogyha  $v = [-10, -5, 0, 5, 10]$ , akkor az  $x - 10, x - 5, x, x + 5, x + 10$  alappontokban vizsgáljuk az őket.

A stencil együtthatóinak kiszámításához szükségünk lesz egy  $k \in \mathbb{R}^d$  vektorra,

$$k = [0, 1, 2, \dots, d - 2, d - 1]$$

amit, a  $v$  vektor transzponáltjával páronként hatványozzuk a  $k$  vektorral az alábbi módon, megkapjuk a  $B$  mátrixok.

$$v^T \cdot^{\wedge} k = B.$$

Ez a " $\cdot^{\wedge}$ " művelet elemenkénti hatványozást jelent. Azaz a  $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$  mátrix adott  $v$  és  $k$  vektorokkal

$$B_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{d-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{d-1} & \cdots & x_{d-1}^{d-1} \\ 1 & x_d & \cdots & x_d^{d-1} \end{pmatrix}$$

Mindig feltételezzük, hogy  $x_i$  valamelyike 0, azaz van egy középpont.

Ebből számolható a  $b$  vektor a következő módon:

$$b_j = B_{2,j}^{-1}$$

Csomópontok	$x - 60$	$x - 20$	$x$	$x + 20$	$x + 60$
Együtthatók	0.0010	-0.0281	0	0.0281	-0.0010

A stencil együttható a  $b_j$ -k lesznek. Bemutatok egy példát egy ilyen általános stencilre, ahol  $v = [-60, -20, 0, 20, 60]$ , és  $h = 1$ :

Az  $f$  függvény első deriváltját úgy közelítem az  $x$  pontban, hogy

$$f'(x) \approx b_1 f(x + x_1) + b_2 f(x + x_2) + \dots + b_d f(x + x_d).$$

### 3.3. Chartrand módszere

Rick Chartrand egyik cikkében található az a módszer, amit a továbbiakban úgy fogok nevezni, hogy total variation minimization, rövidítve TVM. [8]

A hagyományos véges differenciákkal való közelítés nagymértékben felerősíti a zajt. Ennek okán Chartrand alapelve az, hogy ne az adatokon végezzünk zajcsökkentést a deriválás előtt vagy után, hanem magát a differenciálás folyamatát regularizáljuk. Ez a módszer bizonyul hatásosabbnak.

Legyen  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény és keressük  $x : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt. Vezessük be a célfüggvényünket:

$$F(x) = \alpha R(x) + (1 - \alpha) DF(Ax - f). \quad (1)$$

Ezt az egyenletet szeretnénk minimalizálni. Az egyenletben az  $R(x)$  a regularizációs tag,  $Ax(L) = \int_0^L x(t)dt$  egy integrálás operátor,  $DF(Ax - f)$  az a tag, ami bünteti az  $Ax$  és az  $f$  közötti eltérést,  $\alpha$  pedig a regularizációs paraméter, ami kontrollálja az egyensúlyt a két tag között.

Általában a  $DF$  az  $L^2$  norma négyzet,

$$DF = \frac{1}{2} \int_0^L |\cdot|^2$$

és az illesztés jóságát méri. Az illesztés milyensége nagyban függ attól, hogy milyen normával számolunk. Az  $R(x)$  pedig az  $L^1$  norma,

$$R(x) = \int_0^L |x(t)|dt.$$

Az 1-es célfüggvénybe behelyettesítünk. Az így kapott total variation regularizáció:

$$F(x) = \alpha \int_0^L |x(t)| dt + (1 - \alpha) \frac{1}{2} \int_0^L |Ax - f|^2 dt \quad (2)$$

Ha az  $\alpha$  kicsi, akkor a regularizáció a függvény illesztésre fektet nagyobb hangsúlyt, míg a simítást elhanyagolható mértékben veszi csak figyelembe. Ha pedig  $\alpha$  nagy, akkor hatékonyan fogja simítani a deriváltat, és az illesztés nem lesz olyan megfelelő. Chartrand eredetileg  $\alpha \rightarrow \infty$  konvergenciával dolgozott, de én az  $\alpha \rightarrow 1$  esetet vizsgálom.  $\alpha$  paraméter megválasztásával beállítható a súlyozás. Tanulmányomban  $\alpha$  és  $(1 - \alpha)$  a súlyozások, így ha  $\alpha$  1-hez tart, a simítást lesz előtérbe, míg az  $(1 - \alpha)$  a 0-hoz konvergál, és az illesztés háttérbe szorul. Chartrandnál  $\alpha$  és 1 a két súly. Tehát az ő esetében, ha  $\alpha \infty$ -hez tart, akkor a simításért felelős tag elszáll végtelenbe, és az illesztési tag eltörpül mellette az 1-es szorzóval. Ha  $\alpha = 0$  eshetőséget választjuk meg, akkor a végeredmény jól fog illeszkedni, ezzel szemben a zaj nem fog csökkenni.

### 3.3.1. Kvadratikus programozásként megfogalmazva [9]

Kvadratikus programozási feladatnak <sup>4</sup> nevezzük az olyan optimalizálási feladatot, amelyben a feltételek lineárisak, a célfüggvény pedig egy kvadratikus függvény.

Célfüggvényünk

$$\frac{1}{2} x^T H x + g^T x \rightarrow \min \quad (3)$$

A feltételeink

$$Ax \leq b$$

$$A_{eq}x = b_{eq}$$

$$l_b \leq x \leq u_b$$

Ezt az optimalizálási problémát kell megoldani, ahol az  $x \in \mathbb{R}^n$  a döntési változónk.

---

<sup>4</sup><http://www.uni-miskolc.hu/~matente/oktatasi%20tananyagok/KVADRATIKUS%20PROGRAMOZAS.pdf>

A kutatásomban kvadratikus programozási feladatként<sup>5</sup> szeretném megoldani a total variation regularizációt. Jól megválasztott változók mellett az  $F(x)$  függvényt, ami a total variation minimization formulának a minimalizálandó függvénye, ki lehet fejezni a kvadratikus programozás célfüggvényeként. Legyen az  $f$  függvény  $n$  darab pontban ismert, és ekkor  $2(n-2) + 2$  döntési változó lesz. Ekkor az alsó korlátja a változónak

$$l_b = [-\infty, -\infty, 0, \dots, 0].$$

Vegyünk egy  $S_1 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (2n-3)}$  integráló mátrixot, mely a következőképpen néz ki:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Az elemzésemben a mélység függvény deriváltját illeszttem a total variation formula szerint, ellenben Chartrand a függvényt magát illeszti. Ennek okán szükségünk van egy másik integráló mátrixra  $S_2$ -re, ami  $S_1$  segítségével alkossunk meg  $S_2 \in \mathbb{R}^{n \times (2n-2)}$  mátrixot:

$$S_2 = U \cdot B,$$

ahol

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

<sup>5</sup>[https://uk.mathworks.com/help/optim/ug/quadprog.html?searchHighlight=quadprog&s\\_tid=doc\\_srchttitle#References](https://uk.mathworks.com/help/optim/ug/quadprog.html?searchHighlight=quadprog&s_tid=doc_srchttitle#References)

négyzetes alsó háromszög mátrix, és

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}$$

egy blokk diagonális mátrix.

Legyen  $x_0 \in \mathbb{R}^{2n-2}$  az optimalizálás kiindulási pontja,

$$x_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

és  $q_r \in \mathbb{R}^{2n-2}$  vektor

$$q_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy

$$Ax - f = S_2 \cdot x - f.$$

Illetve legyen

$$R(x) = q_r^T \cdot x.$$

Ki kell számolnunk a  $|S_2 \cdot x - f|^2$  norma négyzetet, mely egyenlő  $S_2 \cdot x - f$  önmagával vett skaláris szorzatával, azaz

$$\begin{aligned} DF(Ax - f) &= \frac{1}{2} |S_2 \cdot x - f|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \langle S_2 x - f, S_2 x - f \rangle = \\ &= \frac{1}{2} (x^T S_2^T S_2 x - f^T S_2 x - x^T S_2^T f + f^T f) = \end{aligned}$$

az  $x^T S_2^T f = f^T S_2 x$  egyenlősége miatt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(x^T S_2^T S_2 x - 2f^T S_2 x + f^T f) = \\ &= \frac{1}{2}x^T S_2^T S_2 x - f^T S_2 x + \frac{1}{2}f^T f \end{aligned}$$

Az  $f^T f$ -et elhagyhatjuk, mivel az nem függ  $x$ -től, így kapjuk azt az egyenletet, hogy

$$DF(Ax - f) = \frac{1}{2}x^T S_2^T S_2 x - f^T S_2 x. \quad (4)$$

A (2)-es egyenletbe behelyettesítve a  $DF(Ax - f)$  és  $R(x)$  változókkal megkapjuk az alábbi egyenletet:

$$F(x) = \alpha q_r^T \cdot x + (1 - \alpha) \left( \frac{1}{2}x^T S_2^T S_2 x - f^T S_2 x \right) \quad (5)$$

Tehát megkaptuk a total variation minimalizálandó  $F(x)$  függvényét.

Legyen

$$g = (1 - \alpha)(-S_2^T f) + \alpha q_r$$

és

$$H = (1 - \alpha)S_2^T S_2$$

ezeket behelyettesítve a kvadratikus programozási feladat minimalizálandó függvényébe:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}x^T (1 - \alpha)S_2^T S_2 x + ((1 - \alpha)(-S_2^T f) + \alpha q_r)^T x = \\ &= \frac{1}{2}(1 - \alpha)x^T S_2^T S_2 x - (1 - \alpha)f^T S_2 x + \alpha q_r^T x = \\ &= \alpha q_r^T x + (1 - \alpha) \left( \frac{1}{2}x^T S_2^T S_2 x - f^T S_2 x \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Ebből következik, hogy

$$F(x) = \alpha q_r^T x + (1 - \alpha) \left( \frac{1}{2}x^T S_2^T S_2 x - f^T S_2 x \right). \quad (7)$$



### 3.4. Hibabecslés

A módszerek által kapott deriváltak jóságát is meg szeretném megvizsgálni. Természetesen az, hogy mi számít "jónak" az az építőiparban relatív. Másképp értelmezik egy módszer hasznosságát. Ennek a vizsgálatára temérdek sok hibabecslési eljárás áll rendelkezésre, ezek közül az  $l^2$  norma, az  $l^\infty$  norma<sup>6</sup> és a relatív szórás kerül elemzésre.

Az eredeti mélység függvénynek és a kapott derivált visszaintegráltjának a távolságát értékelem ki a kétfajta normával, míg a derivált függvényeket a relatív szórással elemzem. Ez alapján közvetetten eldönthető melyik eljárásnak milyen előnyei és hátrányai vannak.

#### $l^2$ norma

Az  $l^2$  norma Euklideszi norma néven ismeretes. Egy  $x$  vektor  $l^2$  normája a következőképpen számolható:

$$||x||_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ha két vektor távolságának a kiszámítására használjuk, akkor

$$||x - y||_2 = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ezt nevezzük Euklideszi távolságnak. Ezzel a normával a két vektor eltérését vizsgálom, mely minél kisebb, annál jobb módszerre utal.

#### $l^\infty$ norma

Egy vektor  $l^\infty$  normáján a legnagyobb abszolút értékű elemét értjük.

$$||x||_\infty = \max |x_i|$$

Ha távolság számításra használjuk, akkor hasonlóan az  $l^2$  normához:

$$||x - y||_\infty = \max |x_i - y_i|.$$

---

<sup>6</sup><https://rorasa.wordpress.com/2012/05/13/10-norm-11-norm-12-norm-1-infinity-norm/>

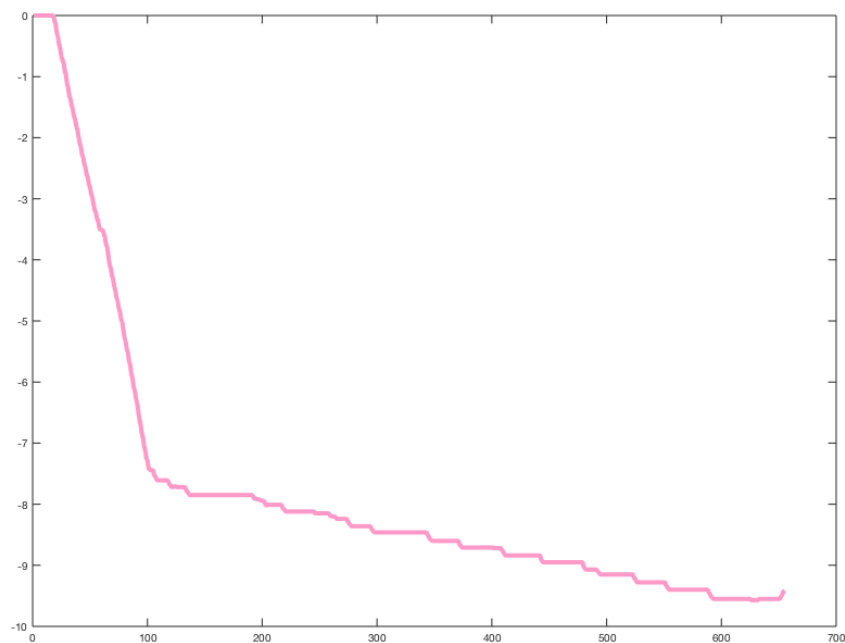
## Relatív szórás

A relatív szórás, más néven variációs együttható ( $V$ ) megmutatja, hogy a szórás hányad része az átlagnak. A szóródás egy mértéke, mely a szórást az átlaghoz viszonyítja. Ez egy százalékos érték. Minél nagyobb az értéke, annál jobban szóródik az  $x_i$  az átlag körül. [10]

Kiszámítása:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100$$

Ez a fajta hibaszámítás a zaj felmérésére szolgál. Ugyanis, ha minél alacsonyabb a relatív szórása a deriváltak, annál jobban szűrte meg a zajt.



4. ábra. Mélység az idő függvényében ábrázolva

## 4. Eredmények

Mindegyik technikára programoztam egy Matlab kódot<sup>7</sup>, melynek segítségével elvégezhetőek a deriválási módszerek. Mindegyik módszer megoldását ábrázoltam grafikonon, hogy jobban tudjam szemléltetni a végeredményeimet és a különbségeket közöttük.

Az adatainkat minden ábrán  $m$ ,  $s$ , vagy  $\frac{m}{s}$ -ban vannak. A függvényeket<sup>8</sup> többféle paraméterrel rajzoltattam ki, így szélesebb körben vizsgáljuk a deriváltat, és pontosabb következtetéseket vonhatunk le belőlük. Emellett visszaintegráltam a derivált függvényeket, és ezeket összehasonlítottam az eredeti mélység függvényével. Ezek különbségének az  $l^2$  és  $l^\infty$  normái kiszámításával szeretnénk mérni a deriválás hibáját. Minél kisebb a norma, annál jobban adja vissza az integrált az eredeti függvényt.

A nehézséget a módszereknél az a tényező adta, hogy a mélység függvény nem monoton csökken. Ennek az egyik oka lehet, hogy előfordul a fűrés folyamatában néhány másodpernyi leállás. Másik oka lehet a talaj keménysége, mely miatt nagyobb ellenállást kell kifejtenie a gépnek, ezáltal  $\pm 15$  centimétert bedőlhet, és ezt a dőlést a későbbiek során vissza kell igazítani. Ennek a dőlésnek a mértéke függ a gép hosszától. Ha túlságosan billeg a gép, akkor az automatika letilt, ennek következtében nem fog mozdulni a gép, így maradunk ugyanazon a mélységen.

Az 4. ábrán az alap függvényünk látható, amiből kiindulunk.

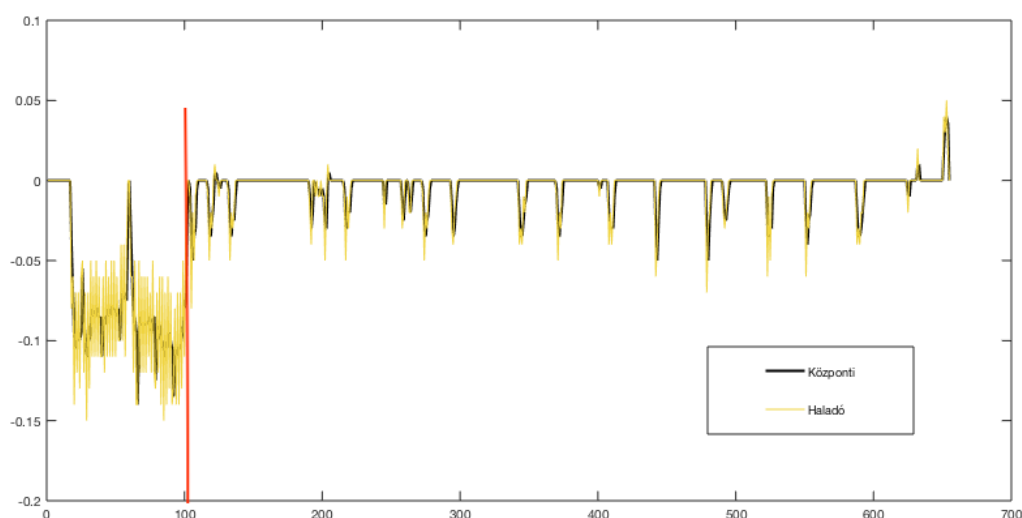
### 4.1. Hagyományos numerikus deriválás

A hagyományos numerikus deriválásnál a haladó és a központi differenciát a 5. ábrán ábrázoltam. Jól látszik az eltérés a két differencia között. A haladó differencia grafikonja sokkal zajosabb, vagyis nem látszódnak az átlagsebességek, hanem ugrál az értékek között. Ezzel szemben a központi differencia jobban csökkenti a zajokat.

---

<sup>7</sup><https://github.com/pannaerdos/Szakdolgozat>

<sup>8</sup>A total variation formulát( $TV(\alpha)$ ) a Matlabban  $fit(\alpha)$ -val jelöltem, ezért az ábrákon is így jelenik meg.



5. ábra. Központi és haladó differencia

A talaj rétegváltása után egyik differencia sem közelíti jól a kis sebességeket, a kiugró értékek miatt nem áll be az átlag értékre. A központi differencia relatív szórása az ugrás előtt 52.58%, míg a haladónak 64.98%. Ez azt jelenti, hogy a központi differencia kevésbé tér el az átlagsebességtől, és ez nagyjából 12%-al jobb, mint a haladó differencia. Az ugrás után 281,7%, a haladónak pedig 329,3% a relatív szórása. Ebből szintén az a következtetés vonható le, hogy a központi differencia az ugrás után is jobban teljesített.

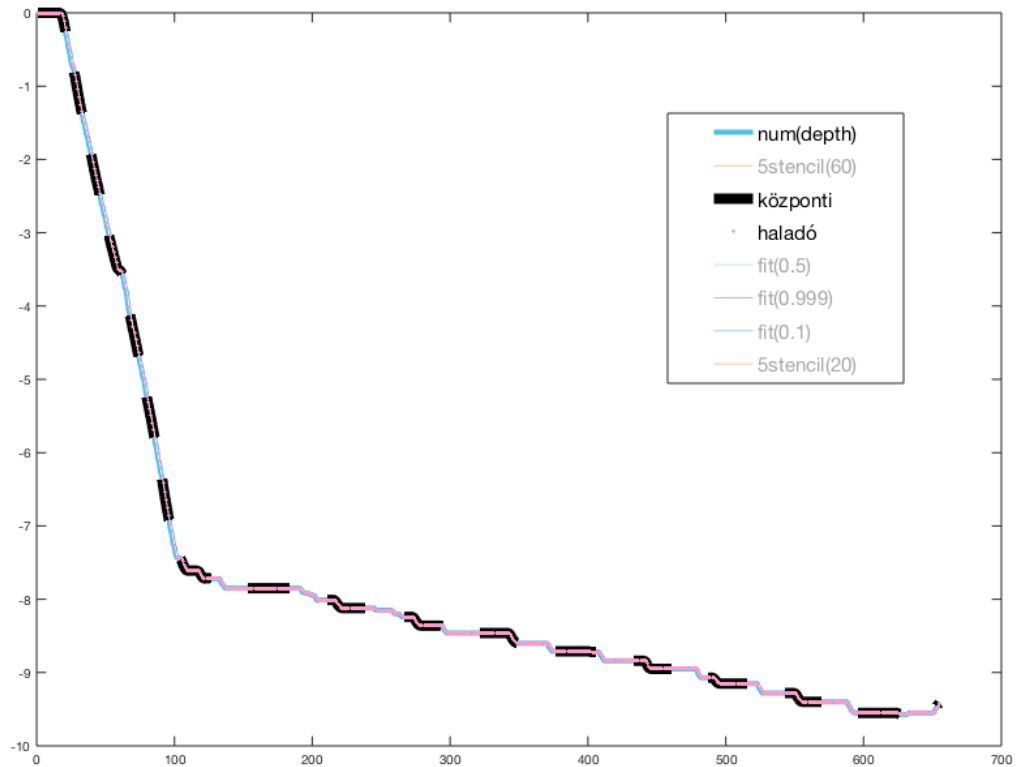
A módszer előnye, hogy itt látszik az egyik legjobban a rétegváltás. Amikor a váltáshoz ér a derivált hirtelen nagy meredekséggel felugrik. A képen egy függőleges piros vonallal jelöltem be, hol vált át a talaj. Észrevehető, hogy mindkét derivált szépen illeszkedik erre a vonalra. Ez a 100 másodperc környékén következik be, itt a puha agyag talajt egy tömör kavics réteg váltja fel.

	$l^2$ normája	$l^\infty$ normája
központi	0.1578	0.0225
haladó	0.4626	0.0750

2. táblázat. Mélység összehasonlítva a visszaintegrált függvénnyel

A központi differencia integrálja (lásd 6.ábra) és a mélység függvény különbségének az  $l^2$  normája igazán kicsi, tehát a derivált visszaintegrálás után nagy mértékben egyezik meg az eredeti függvényünkkel. Ez annak köszönhető, hogy a zajosabb adat jobban követi az eredetit, minden rezdülését zaj formájában tárolja. Ezzel szemben a haladó differenciánál már magasabb normát kapunk, de még ez is 0.5 alatti érték.

Összességében a véges differenciákkal való deriválás módszere nem tudta kellően elsimítani a zajt a deriválás közben, de a váltást kellő bizonyossággal meg lehet vele állapítani. A két differencia közül a központi ad pontosabb eredményt.



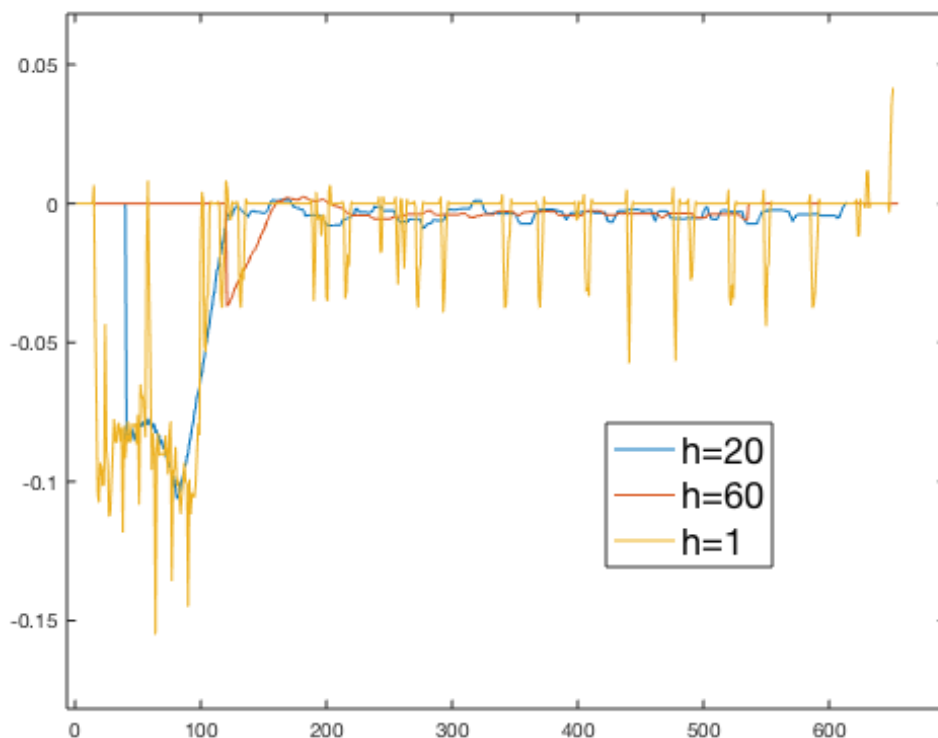
6. ábra. Központi és haladó differencia visszaintegrálva

## 4.2. Stencilek

A 7. ábrán a five-point stencileket különböző  $h$ -kal ábrázoltam. A  $h = 1$  eset, hasonlóan a központi differenciához, láthatóan kihozza az ugrás helyét, míg a másik két esetben elkeni azt. Észrevehető, hogy minél nagyobb  $h$ -t választunk, annál szélesebb intervallumban keni szét az ugrást. Ha  $h = 20$ , akkor még 40 másodpercig érezhető az ugrás hatása.

A  $h = 60$ -as stencil a 120-adik másodpercben értelmezhető először, ezért addig 0 az értéke, és ez már a talajváltás után van.

Elmondható a deriváltakról, hogy a kis sebességeknél a nagyobb  $h$  választás jobban közelíti az átlagot, ezt bizonyítja a  $h = 20$ ,  $h = 60$  esetben a relatív szórás (lásd 3. táblázat). Az első esetben 56.4% , a második esetben pedig már csak



7. ábra. Five-point stencilek különböző  $h$ -val

	Ugrás előtt	Ugrás után
$h = 1$	54.53%	295.56%
$h = 20$	63.62%	56.40%
$h = 60$	-	19.2%

3. táblázat. Five-point stencil relatív szórásai különböző  $h$ -ra

19.2%. Ezzel szemben a  $h = 1$  választásnál 295.5%-os a relatív szórás, ami azt jelenti, hogy értékek majdnem 2 – 3-szorosan szóródnak az átlag körül. Ebből következik, hogy  $h$  minél kisebb, a derivált annál kevésbé szűri meg a zajt.

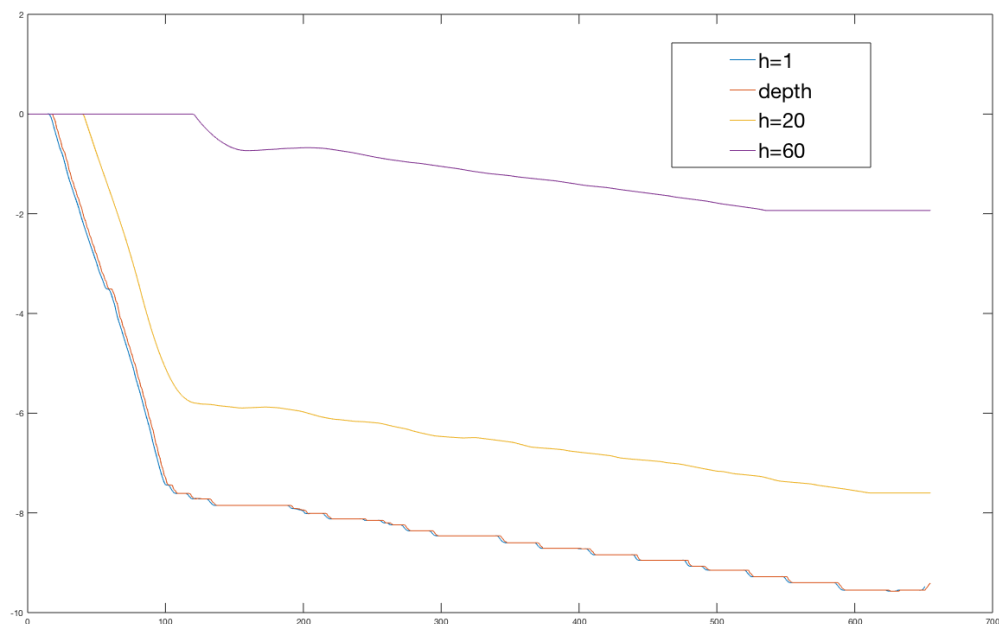
A five-point stencil módszernél megállapíthatjuk, hogy a  $h = 1$  választás előnye az ugrás kimutatása, a  $h = 60$  választás a kisebb sebességeken való jó közelítés. A  $h = 20$  eset azonban ennek a kettőnek éppen a hátrányait kombinálja, azaz sem az ugrást nem hozza ki, sem az átlagot nem közelíti jól.

	$l^2$ normája	$l^\infty$ normája
$h = 1$	0.1454	0.0217
$h = 20$	173.0142	2.2396
$h = 60$	44.7725	7.7015

4. táblázat. Mélység összehasonlítva a visszaintegrált függvénnyel

A 8. ábrán látható, hogy az ugrás után a függvények meredeksége stimmel. A  $h = 60$  esetben az integrál azért nem jó, mert gyakorlatilag a teljes 100%-át levágja a gyorsan haladó résznek, mivel a derivált először csak a 120-adik másodpercben értelmezhető. Hátránya a módszernek, hogy olyan nagy intervallumon kell deriválni, hogy kisimuljon a lassú rész, hogy eltünteti a gyors részt. Ezzel ellentétben a  $h = 1$  esetnél az integrálás után jól közelít az eredeti mélység függvényhez. Ezt az információt árulja el az  $l^2 = 0.1454$  és  $l^\infty = 0.0217$  norma is, vagyis a két vektor közel van egymáshoz. (lásd 4. ábra)

Az általános stencilek ábrázolása a 9. ábrán található. Ezekről elmondható, hogy az ugrás helyét pontosabban le lehet olvasni, nem kenik szét túl hosszú intervallumba. Mindhárom vektor az ugrás előtt közel 50%-kal szóródik az átlag körül.



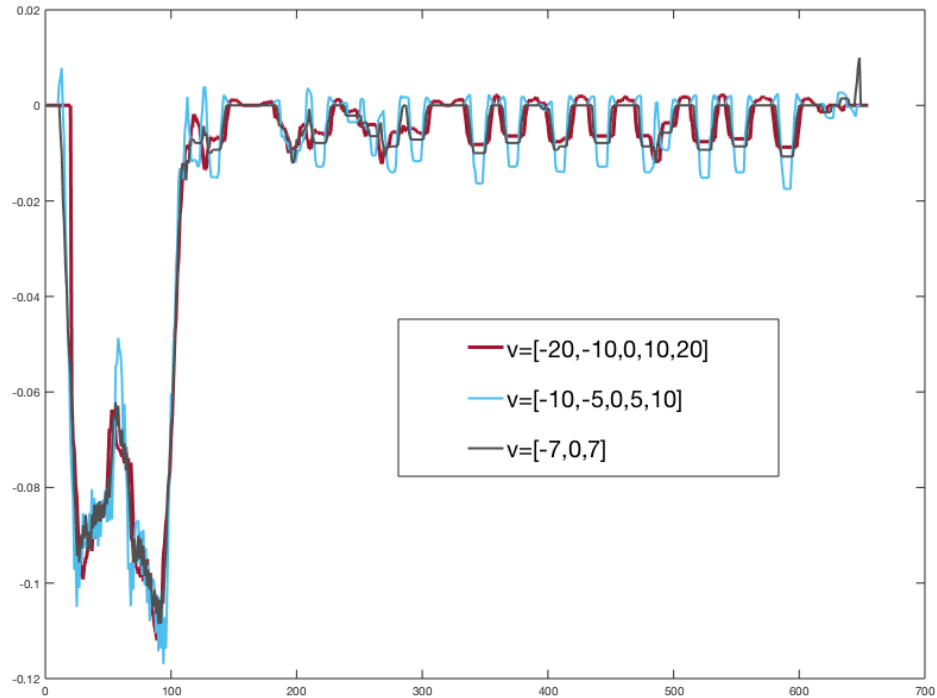
8. ábra. Five-point stencil visszaintegrálva

A  $v = [-20, -10, 0, 10, 20]$  vektorral előállított stencilnek a legmagasabb az ugrás előtt a relatív szórása (lásd 5. táblázat), ez azt jelenti, hogy ez szűri meg legkevésbé a zajt. Viszont az ugrás után láthatóan jól közelíti az átlagot, nem szóródik nagymértékben. Erre utal a relatív szórása is. A  $v = [-10, -5, 0, 5, 10]$ -vel konstruált stencilnek az ugrás után 164.91% a relatív szórása, ez magyarázza a 9. ábrán a derivált szóródását. A  $v = [-7, 0, 7]$  vektorral alkotott stencil szóródik a legkevésbé az ugrás előtt, tehát ez szűrte meg a legjobban a zajt, 44.31%-os relatív szórással.

Stencil csomópontjai	Ugrás előtt	Ugrás után
$[-10, -5, 0, 5, 10]$	48.26%	164.91%
$[-20, -10, 0, 10, 20]$	52.52%	108.41%
$[-7, 0, 7]$	44.31%	114.85%

5. táblázat. Általános stencillek relatív szórása különböző  $v$  vektor esetében



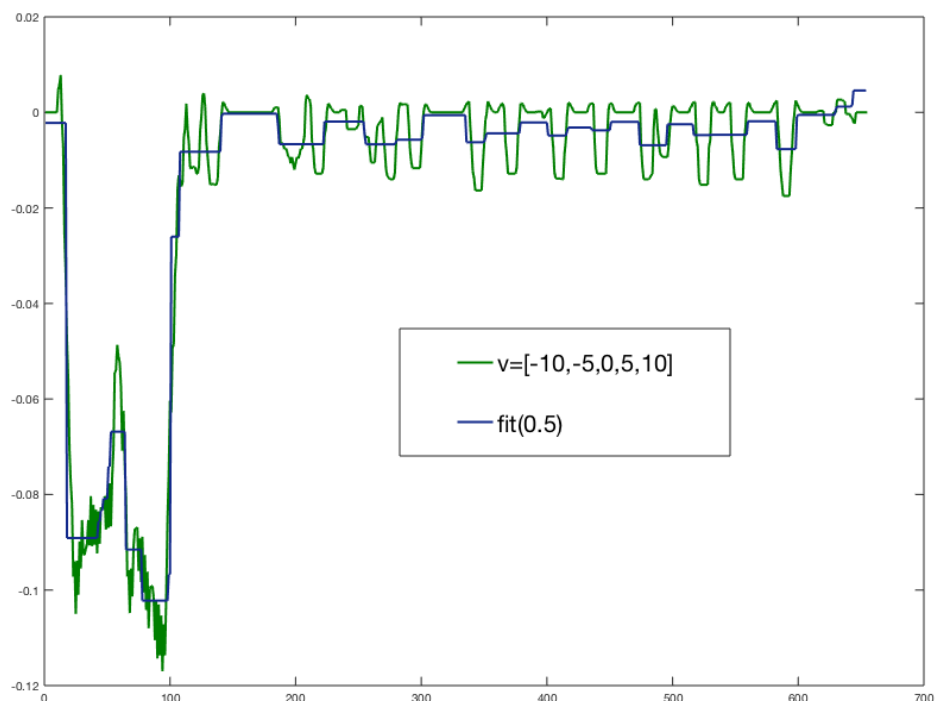


9. ábra. Általános stencillek különböző  $v$  vektorral

Összességében a  $v = [-7, 0, 7]$ -es stencil teljesítménye a másik két stencil teljesítménye között van, ezt mutatja a 5. táblázat is.

A  $v = [-10, -5, 0, 5, 10]$ -ből alkotott stencil és a TV(0.5) formula összehasonlításakor látható (lásd 10), hogy mindkét derivált jól kihozza az ugrást. Azonban a TV(0.5) derivált jobban megszűrte a zajt. Az ugrás előtt nagyjából csak 1%-kal, az ugrás után viszont 82%-kal teljesített jobban.

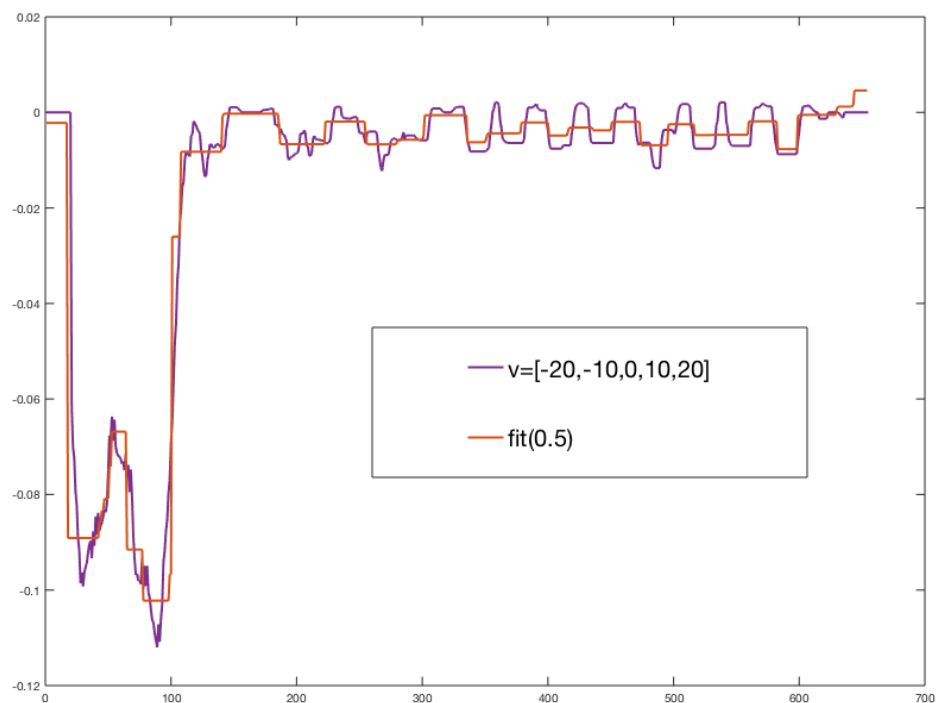
A 11. ábrán már nincsen akkora különbség a két derivált között, de még mindig kicsit zajos az általános stencil. Itt az ugrás után már csak 26%-os az eltérés a relatív szórások között, vagyis mindkét deriválási módszer közel hasonló pontossággal közelíti a kis sebességek átlagát.



10. ábra. Általános stencil és a TV formula összehasonlítása

### 4.3. Chartland módszere

Az 12. ábra alapján látszik, hogy ha  $\alpha$ -t növeljük, akkor annál simább deriváltat kapunk. Ha pedig  $\alpha$  értékét csökkentjük, az adat egyre zajosabb lesz, inkább az illeszkedésre törekszik, nem a simaságra. Ez nem csak jól látszik az ábrán, hanem leolvasható a 6. táblázatból is. Ugyanis az  $\alpha = 0.999$  esetben a relatív szórás  $10^{-6}$ -on nagyságrendű az ugrás előtt, utána pedig 2.74%, így elmondható, hogy szinte teljesen beállt a sebességek átlagára mind az ugrás előtt, mind utána. Amikor  $\alpha$ -t 0.5 környékén választjuk meg, akkor az ugrás után 82.88%-os a relatív szórása a derivátnak, tehát a kisebb sebességeken is be tudott állni az átlagsebességre. Relatív szórásban nincs akkora különbség, az ugrás előtt, az  $\alpha = 0.1$  és  $\alpha = 0.5$  választásnál, ám az ugrás után a 0.1 esetben majdnem kétszer akkora nőtt a szórása, mint a 0.5-é.



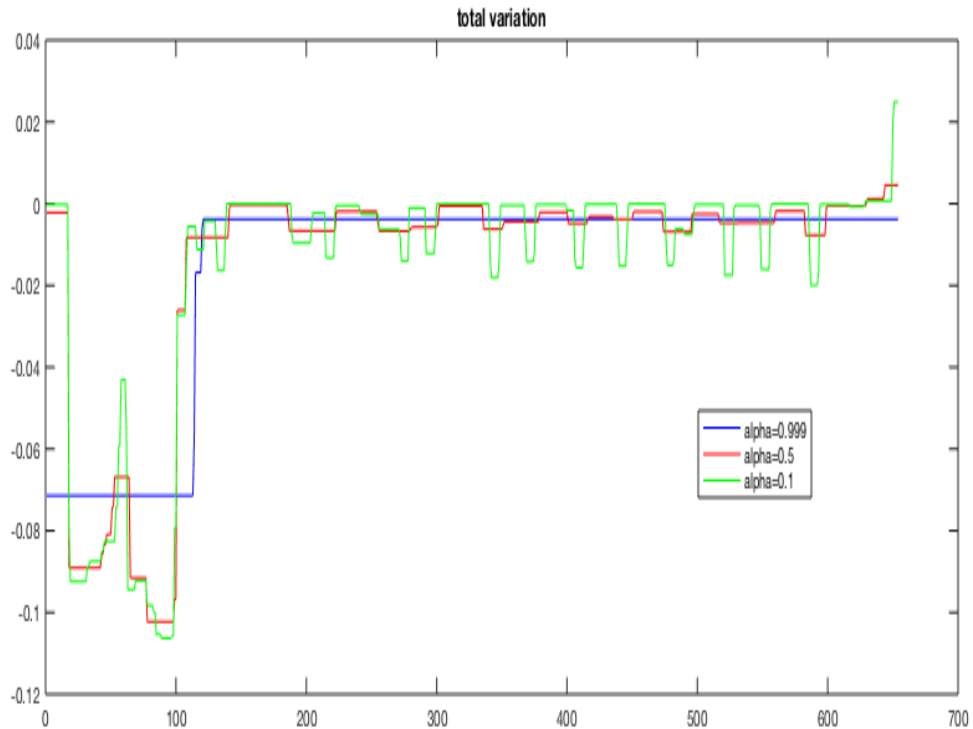
11. ábra. Általános stencil és a TV formula összehasonlítása 2.

Ezek alapján a módszernek az előnye, hogy ugrásonként hirtelen érzékeli a talajrétegek megváltozását, azonban hátránya, hogy  $\alpha$  egy hiperparaméter, amit állítgatni kell, de nem tudni, hogy pontosan mire állítsuk be.

	Ugrás előtt	Ugrás után
TV(0.1)	49.73%	191.08%
TV(0.5)	47.30%	82.88%
TV(0.999)	$2.6 \cdot 10^{-6}\%$	2.74%

6. táblázat. A TV formula relatív szórásai különböző  $\alpha$  értékekre

A 13. ábrán a total variation formula integrálját ábrázoltam a mélység függvényével. Jól lehet látni, hogy ahol a fúrás elkezd lelassulni nagyjából 8 méter környékén, ott a derivált nagy meredekséggel ugrik egyet. Tehát jól érzékelt a

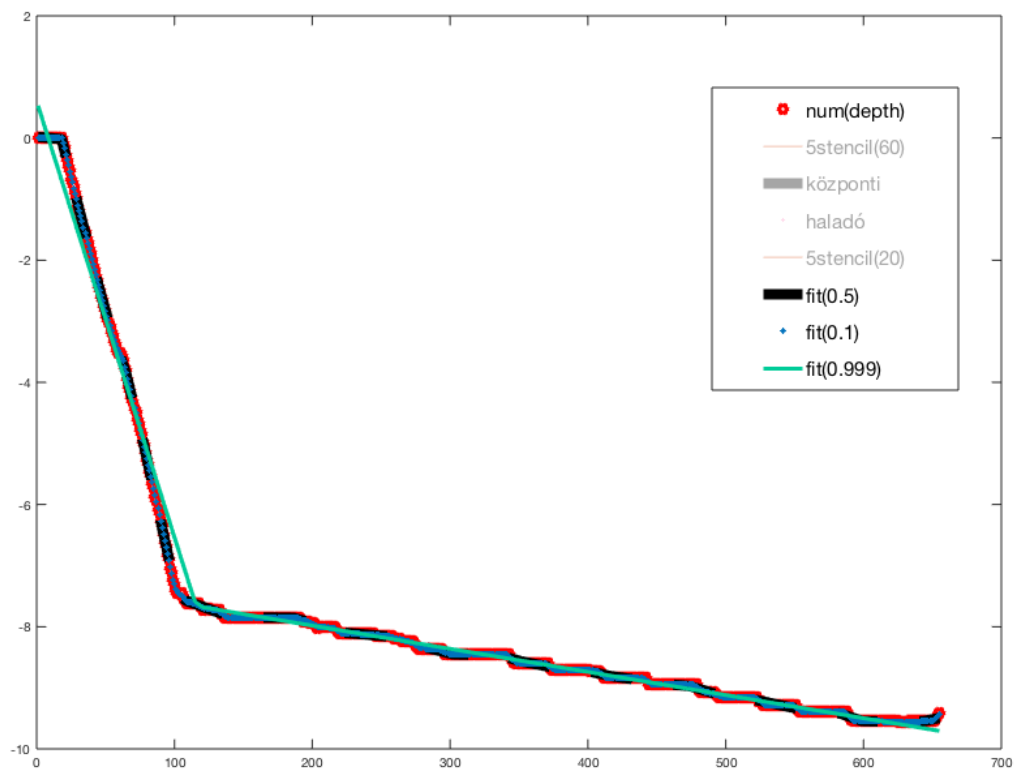


12. ábra. TV formula  $\alpha$  változó paraméterrel

talajréteg váltást. Ha  $\alpha$  paramétert 1-hez közeleink választjuk, akkor a regularizáció elsimítja a függvényt, nem marad meg benne ez a lépcsőzetesség, amit a gép billegése okozott. Ilyenkor a törés előtt és után is szinte egy egyenest csinál a függvényből.

Az eredeti mélység függvénytől az integrálás után, az  $\alpha = 0.999$  függvény áll, ezt mutatja a 7. táblázatban a különbségük  $l^\infty$  normája is. Ezzel ellentétben a másik két esetben igen közel vannak egymáshoz a függvények ugyanezen norma szerint. Összefüggés fedezhető fel az  $l^\infty$  norma és a relatív szórás között. Mégpedig ha az  $l^\infty$  norma minél alacsonyabb, nullához közelebb, akkor a relatív szórás annál nagyobb százalék lesz. Ezt jól mutatja a 7. és a 6. táblázat.

A 14. ábrán megállapítható a görbe mozgásából, hogy a föld minősége változó tendenciát mutat. Ezzel bizonyítható az, hogy a talaj struktúrájában változás következett be, amit a derivált jól elkapott, és egy hirtelen ugrással vissza is ad.



13. ábra. Total variation formula visszaintegrálva

Ez az ugrás a visszaintegrálás után jól illeszkedik az eredeti mélység függvény váltásának a helyére.

Összességében azt a megállapítást tehetjük, hogy az összes módszer közül ez bizonyult a legjobbnak.

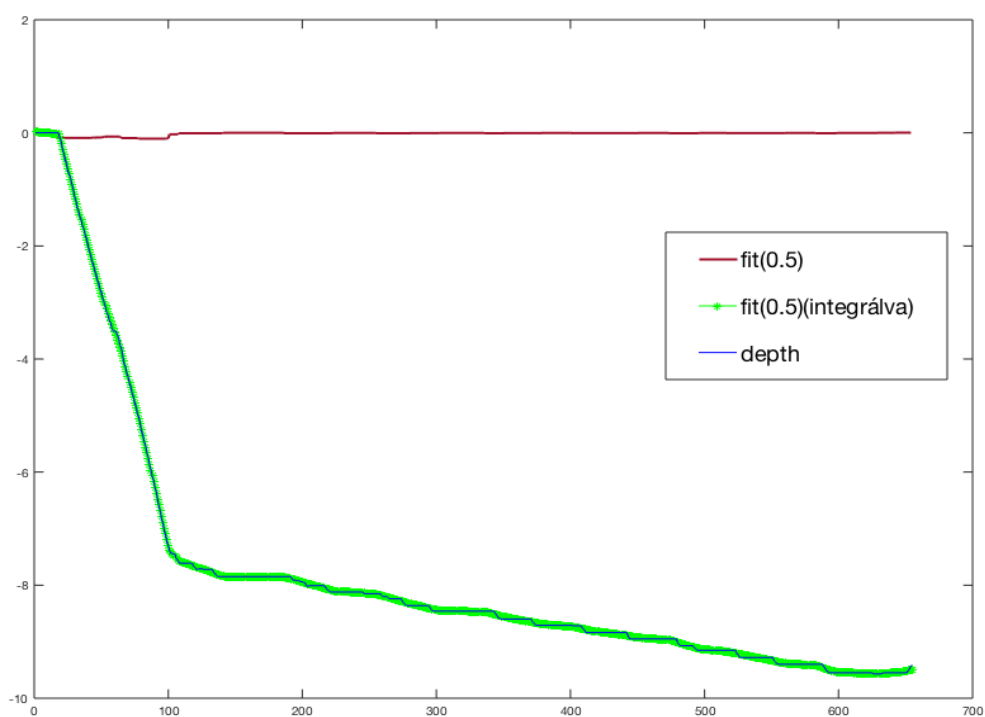
## 5. További irányok

A mai világban lassan minden digitalizálódik, ez okból kifolyólag az építőiparban is elterjedt, hogy gépiesítenek nagyon sok munkafolyamatot. Ezzel könnyíthető a mérnökök munkája. A kutatásom végső célja, egy osztályozó algoritmus épí-

	$l^2$ normája	$l^\infty$ normája
TV(0.1)	0.3107	0.0472
TV(0.5)	0.6183	0.0953
TV(0.999)	4.3218	0.7923

7. táblázat. Mélység összehasonlítva a visszaintegrált függvénnyel

tése, ami az elsődleges talaj mintákból meg tudja határozni a talaj összetételét, a pontos váltási helyet a rétegek között, és prediktálni tudja a cölöp megfúrásának idejét. Ezen algoritmus alapján folyamatosan jobb döntéseket tudnának hozni az építkezésen, ami végső soron jelentős megtakarításokat, hatékony erő-és energia-



14. ábra. TV formula, visszaintegrált TV formula és az eredeti mélység függvény egy grafikonon ábrázolva

felhasználást eredményez a beruházók, kivitelezők, illetve az ingatlanokat hasznosítók számára egyaránt.

## 5.1. Osztályozás

A cölöpök fúrhatóságát a fúrási paraméterek jellemzik. Ezen paraméterek alapján lehet osztályozni a talajt. Az osztályok a fúrás során megfigyelt viselkedésen alapulnak. Ezeket az osztályokat a statikus talajszondázás tesztelés alapján lehet becsülni. A behatolási sebesség és a fúrási osztályok korrelálnak, így a szakemberek meg tudják becsülni a termelési sebességet.

A három osztály a földtulajdonságok, a fúrószerszám geometriája és a talajtulajdonságok kombinációja. Ez jelzi a cölöp adott mélységben történő fúrásához szükséges időt és erőfeszítést.

Három fúrhatósági osztályt határozzunk meg, a "jó (good)", "közepes (fair)", és a "rossz (poor)" talajt. A "jó" osztályban a fúrás alacsony üzemi nyomást és nyomatékot igényel, a fordulat szám pedig a maximum környékén mozog. Ebben az osztályban a behatolási sebesség  $1.5 \frac{m}{min}$  fölötti. A "közepes" osztályban a behatolási sebesség leesik  $0.35 \frac{m}{min}$  és  $1.5 \frac{m}{min}$  közé. Itt az üzemi nyomás eléri a maximumot, és ingadozik, emellett a fordulatszám kissé elkezd csökkenni. A "rossz" osztályban a fordulatszám drasztikusan lecsökken a minimumra, a nyomaték magas százalékban van használva, és a behatolási sebesség  $0.1 \frac{m}{min}$  körül hullámzik.

Ha a talaj az első osztályba kerül, az azt jelenti, hogy puha. Ha a másodikba, akkor azt jelzi, hogy elértük a teherbíró talajt. Ha a harmadikba tartozik, akkor a talajba nehéz behatolni, ezért a fúrógép forgása lelassul.

A fúrhatósági osztályok azonosítása hozzájárul a projektek időben és költségvetésben történő megvalósításához. Az osztályozás lehetővé teszi a talaj és a fúrótorony teljesítményének jó megértését. A fúrási folyamatok összetettebb megértése hasznos ahhoz, hogy jó előrejelzést kapjunk a fúrási teljesítményről.

Drillability	Penetration rate values (m/min)		Typical drilling parameters associated with the drillability class			What limits penetration
	Min	Max	Working pressure (bar)	Torque (%)	Number of rotations NR (U/min)	
1 - GOOD	1,5	-	80 - 240	10% - 50 %	25 - 30	Penetration rate is not limited by the ground.
2 - FAIR	0,35	1,5	200 - 260	30 % - 65%	20 - 30	High vertical force -> rig tilts back -> blocked by automatic system
3 - POOR	0	0,35	240 - 300	40 % - 100 %	15 - 25	Max working pressure cannot maintain 30 RPM -> drill bit rotate slower

**Figure 6.** Drillability classification chart

15. ábra. Fúrési osztályok [2]

## 6. Összegzés

Dolgozatomban négyféle deriválását mutattam be a cölöpöző gép által mért mélység függvénynek. Először megvizsgáltam, hogyan működnek a véges differenciák, ám azok voltak a legpontatlanabbak, nem igazán sikerült velük a zajszűrés, de a talajréteg váltás okozta nagy meredekségű ugrást a deriváltban el tudták kapni. Ezek az ugrás után nem tudtak egy átlagsebességet megtalálni. Másodiknak a stencilekkel dolgoztam, melyek már jobbnak bizonyultak a zaj csillapítására, ennek ellenére a five-point stencil továbbra is nagyon elkenték a deriváltban a rétegváltást jelző ugrást. Az általános stencilek az ugrásnál jobban teljesítettek, ám az ugrás után ezek se tudtak beállni az átlagsebességre.

Utolsóként pedig a total variation minimization formulát értékeltem ki, amit kvadratikus programozási feladatként optimalizáltam. Ez a módszer sikeresen meg tudta szűrni a deriváltat zajoktól, beállt egy átlagsebességre, még az alacsonyabb, nulla közeli sebességeknél is. Az  $\alpha$  hiperparaméter megfelelő beállítása



az egyedüli komplikációja a módszernek. Összességében elmondható, hogy a paraméterek állításával minden algoritmus tudott valamilyen szintet javulni. Mindazonáltal a módszerek közül a Rick Chartrand cikkéből megismert total variation minimization algoritmus bizonyult a legpontosabbnak. A 14. ábrán szépen látszik, hogy a derivált pont ott ugrik egyet, ahol az eredeti függvény elkezd lelassulni. Ami pont azt jelenti, hogy egy puhább talajrétegből átértünk egy keményebbe. Ezzel az eredménnyel már el lehet indulni a későbbiekben az osztályozó algoritmus irányába.

## **Köszönetnyilvánítás**

Szeretném megköszönni Borbély Dánielnek a sok segítséget és türelmet, amivel hozzájárult a szakdolgozatom létrejöttéhez.

Egyúttal köszönöm Borbély Gábornak, hogy segített a programozásban, és válaszolt minden matematikával kapcsolatos szakmai kérdésemre.

## Hivatkozások

- [1] Kaltenbacher T., Sata L., Dr. Deli Á. *A Screwsol talajkiszorításos cölöpözés alkalmazásának lehetőségei*, Közúti és mélyépítési szemle, 58. évfolyam (9): 34–37. 2008
- [2] Borbély Dániel, Szepesházi Attila, Deroo Lucas, Scheuring Ferenc, *Drilling Performance Prediction for Screwed Displacement Piles Based on CPT Testing*
- [3] <http://www.southampton.ac.uk/~imw/jpg-Brownsea/10BSI-Pleistocene-Flint-Gravel-m.jpg>
- [4] <http://isc6.org/>
- [5] Horváth Róbert, Faragó István, *Numerikus módszerek*, 7 fejezet, 193–197.
- [6] <https://edu.epito.bme.hu/local/coursepublicity/mod/resource/view.php?id=58617>
- [7] Abraham Savitsky and Marcel J. E. Golay, *Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures*, Anal. Chem. 36, 1627–1639, 1964.
- [8] Rick Chartland, *Research Article Numerical Differentiation of Noisy, Non-smooth Data*, Theoretical Division, MS B284, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM 87545, USA
- [9] Jorge Nocedal, Stephen J. Wright, *Numerical Optimization*, 16.fejezet, 448–454, 2006
- [10] Prof. Dr. Závoti József, *MAtematika III.*, 8. fejezet, 2010 ([https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0027\\_MA3-8/ch01s04.html](https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0027_MA3-8/ch01s04.html))