Report: Optimization Techniques (Part 1)

Panagiotis Koutris

November 2024

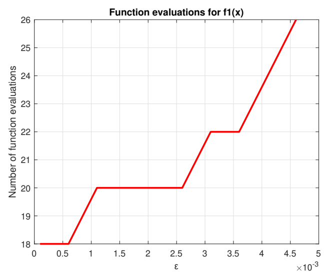
1 Μέθοδος της Διχοτόμου (χωρίς παράγωγο)

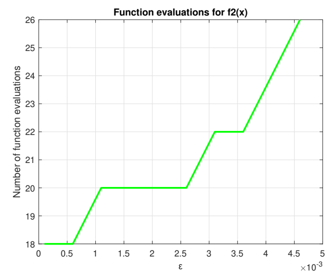
1.1 Περιγραφή

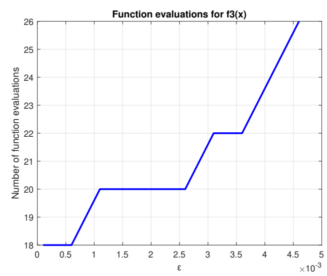
Η μέθοδος διχοτόμου χρησιμοποιείται για την εύρεση τοπικού ελαχίστου μιας συνάρτησης f μέσα σε ένα διάστημα $[a, b]$. Ο βρόχος συνεχίζεται μέχρι το μήκος του διαστήματος να μειωθεί κάτω από μια προκαθορισμένη ανοχή l . Σε κάθε επανάληψη, το διάστημα διαιρείται σε σημεία x_1 και x_2, που βρίσκονται σε μικρή απόσταση e από το μέσο του διαστήματος. Απαραίτητη προυπόθεση για την ορθή λειτουργία του αλγορίθμου είναι η εξής σχέση $2\epsilon < l$. Με βάση τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία $f(x_1)$ και $f(x_2)$, το διάστημα προσαρμόζεται ώστε να επικεντρωθεί προς το σημείο με τη μικρότερη τιμή.

1.2 Ερώτημα 1ο

Κρατώντας σταθερό το τελικό εύρος αναζήτησης $l = 0.01$ μελετάμε τη μεταβολή των υπολογισμών των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3 για τιμές της σταθεράς ϵ στο διάστημα $[0.0001, 0.0005]$. Οι υπολογισμοί της κάθε συνάρτησης σε κάθε επανάληψη αυξάνονται κατά 2.Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα.





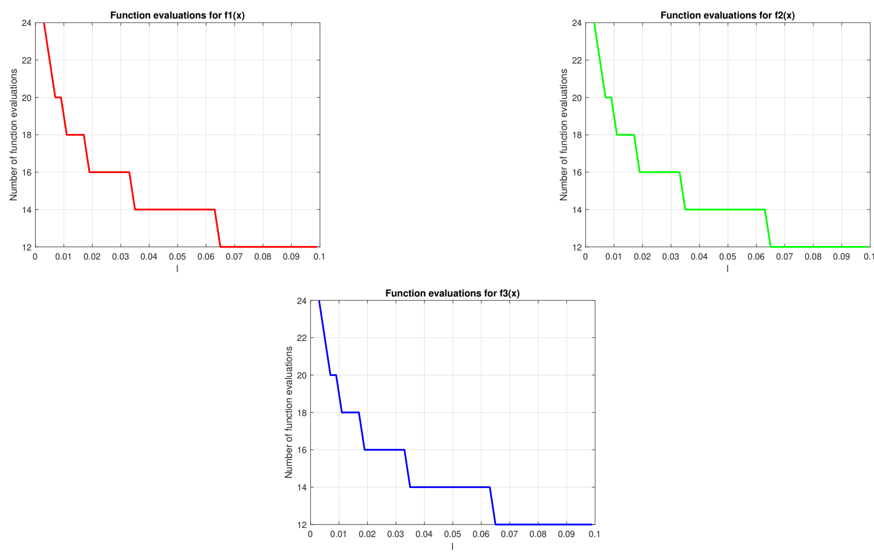


1.2.1 Σημείωση

Παρατηρούμε και για τις τρεις συναρτήσεις πως όσο αυξάνεται το ε , τόσο αυξάνεται και ο αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό οφείλεται στο ότι η αύξηση της απόστασης από τη διχοτόμο (ε) συνεπάγεται και μικρότερη μεταβολή των άκρων a και b ανά επανάληψη με αποτέλεσμα να χρειάζονται περισσότεροι υπολογισμοί τους για να συγκλίνουμε στο ελάχιστο.

1.3 Ερώτημα 2ο

Κρατώντας σταθερό το $\epsilon = 0.001$ μελετάμε τη μεταβολή των υπολογισμών των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3 για τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l στο διάστημα $[0.003, 0.1]$. Οι υπολογισμοί της κάθε συνάρτησης σε κάθε επανάληψη αυξάνονται κατά 2. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα.

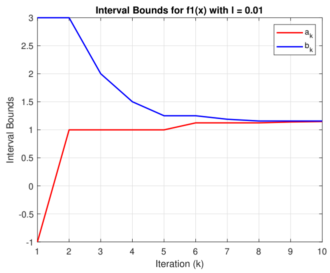


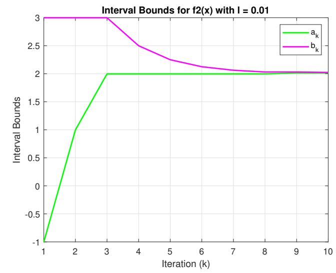
1.3.1 Σημείωση

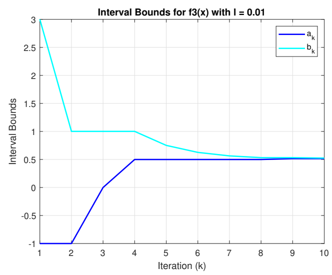
Παρατηρούμε και για τις τρεις συναρτήσεις πως όσο αυξάνεται το l , τόσο μειώνεται και ο αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό οφείλεται στο ότι η αύξηση διαστήματος ανοχής l συνεπάγεται και γρηγορότερη σύγκλιση στο επιθυμητό τελικό διάστημα.

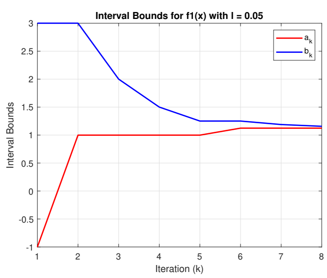
1.4 Ερώτημα 3ο

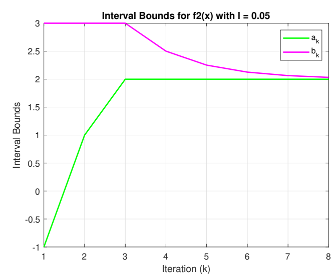
Σε συνέχεια του προηγούμενου ερωτήματος, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[\alpha_k, \beta_k]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, δηλαδή: (α_k, k) και (β_k, k) για τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης $l = [0.01, 0.05, 0.1]$.

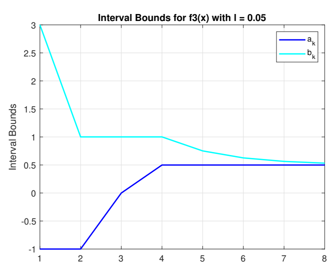

Interval Bounds for f1(x) with l = 0.01
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k

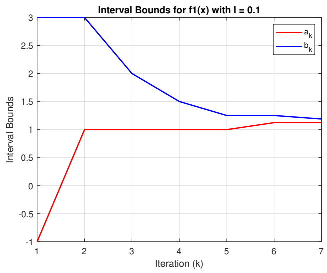

Interval Bounds for f2(x) with l = 0.01
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k

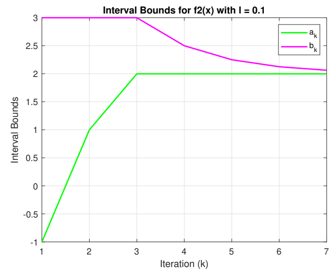

Interval Bounds for f3(x) with l = 0.01
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k

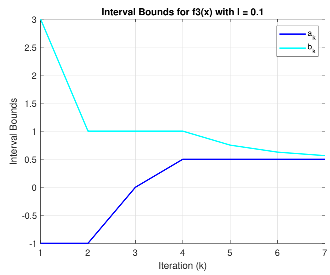

Interval Bounds for f1(x) with l = 0.05
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k


Interval Bounds for f2(x) with l = 0.05
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k


Interval Bounds for f3(x) with l = 0.05
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k







1.4.1 Σημείωση

Παρατηρούμε και για τις τρεις συναρτήσεις πως όσο αυξάνεται το l , τόσο μειώνονται οι επαναλήψεις k και κατ' επέκταση ο αριθμός των υπολόγιμών των $[\alpha_k, \beta_k]$ που χρειάζονται για να συγκλίνουμε στο τελικό διάστημα . Αυτό οφείλεται στο ότι η αύξηση διαστήματος ανοχής l συνεπάγεται και γρηγορότερη σύγκλιση στο επιθυμητό τελικό διάστημα.

1.5 Τελική Παρατήρηση

Τα σχεδιαγράμματα των συναρτήσεων f_1, f_2 και f_3 είναι παρόμοια. Αυτό οφείλεται στη φύση της μεθόδου διχοτόμησης η οποία χρησιμοποιείται για να ελαχιστοποιήσει τις συναρτήσεις στο ίδιο αρχικό διάστημα $[-1, 3]$ με παρόμοιες παραμέτρους ανοχής l και απόστασης e. Η μέθοδος αυτή μειώνει σταδιακά το μήκος του διαστήματος μέσα στο οποίο βρίσκεται το ελάχιστο, ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη μορφή της συνάρτησης. Ως αποτέλεσμα, το πλήθος των αξιολογήσεων συναρτήσεων και οι τελικές τιμές a και b συγκλίνουν με παρόμοιο ρυθμό και έτσι τα γραφήματα φαίνονται ίδια.

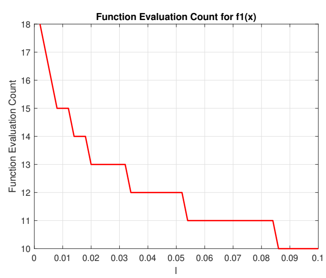
2 Μέθοδος του Χρυσού Τομέα

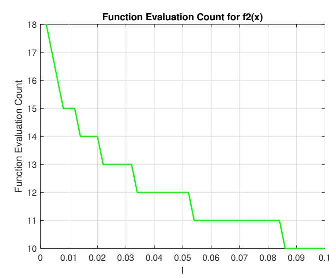
2.1 Περιγραφή

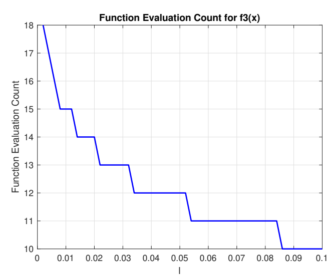
Η μέθοδος του χρυσού τομέα χρησιμοποιείται για την εύρεση τοπικού ελαχίστου μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα $[a, b]$. Στη μέθοδο αυτή, υπολογίζονται δύο σημεία x_1 και x_2 εντός του διαστήματος με βάση μια σταθερά γ (χρυσή τομή), και συγκρίνονται οι τιμές της συνάρτησης σε αυτά τα σημεία. Το διάστημα προσαρμόζεται διαδοχικά κρατώντας ένα από τα άκρα της προηγούμενης επανάληψης για την επόμενη. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι το διάστημα να μειωθεί κάτω από μια προκαθορισμένη ανοχή l.

2.2 Ερώτημα 1ο

Παίρνοντας το $\gamma = 0.628$ μελετάμε τη μεταβολή των υπολογισμών των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3 για τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l στο διάστημα $[0.002, 0.1]$. Οι υπολογισμοί της κάθε συνάρτησης σε κάθε επανάληψη αυξάνονται κατά 1 , καθώς κρατάμε ένα από τα άκρα της προηγούμενης επανάληψης. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα.





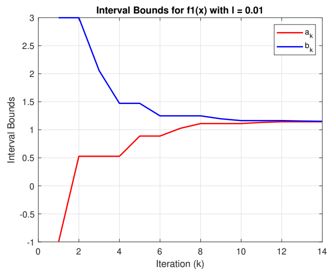


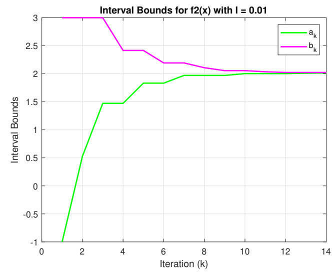
2.2.1 Σημείωση

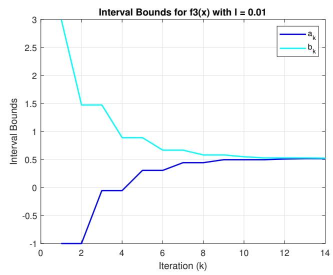
Όπως και στη προηγούμενη μέθοδο όσο αυξάνεται το l , τόσο μειώνεται και ο αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό οφείλεται στο ότι η αύξηση διαστήματος ανοχής l συνεπάγεται και γρηγορότερη σύγκλιση στο επιθυμητό τελικό διάστημα.

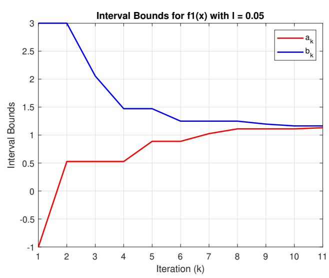
2.3 Ερώτημα 2ο

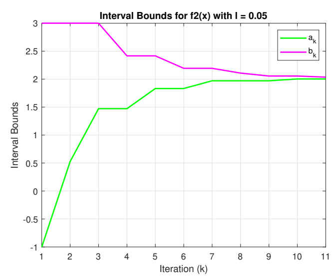
Σε συνέχεια του προηγούμενου ερωτήματος, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[\alpha_k, \beta_k]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, δηλαδή: (α_k, k) και (β_k, k) για τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης $l = [0.01, 0.05, 0.1]$.

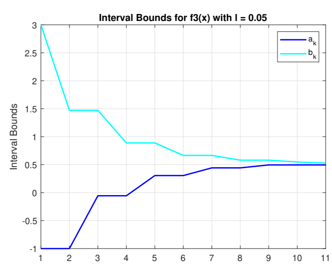

Interval Bounds for f1(x) with l = 0.01
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k

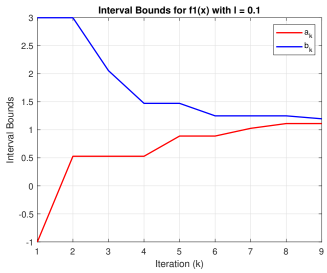

Interval Bounds for f2(x) with l = 0.01
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k

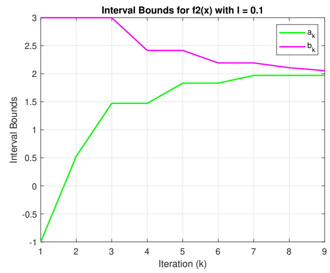

Interval Bounds for f3(x) with l = 0.01
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k

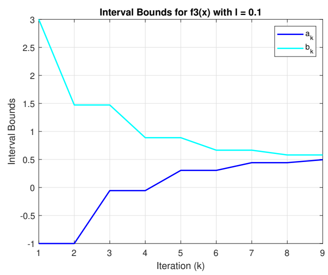

Interval Bounds for f1(x) with l = 0.05
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k


Interval Bounds for f2(x) with l = 0.05
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k


Interval Bounds for f3(x) with l = 0.05
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k







2.3.1 Σημείωση

Και για τις τρεις συναρτήσεις όσο αυξάνεται το l , τόσο μειώνονται οι επαναλήψεις k και κατ' επέκταση ο αριθμός των υπολόγιμών των $[\alpha_k, \beta_k]$. Αυτό οφείλεται στο ότι η αύξηση διαστήματος ανοχής l συνεπάγεται και γρηγορότερη σύγκλιση στο επιθυμητό τελικό διάστημα.

2.4 Τελική Παρατήρηση

Για τους ίδιους λόγους με τη προηγούμενη μέθοδο τα σχεδιαγράμματα των συναρτήσεων f_1, f_2 και f_3 είναι παρόμοια. Ωστόσο, συγκριτικά με τη μέθοδο διχοτόμου, στη μέθοδο του χρυσού τομέα χρειαζόμαστε λιγότερους υπολογισμούς της κάθε συνάρτησης αλλά περισσότερες επαναλήψεις.

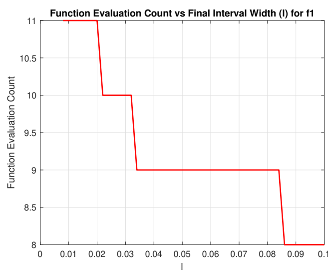
3 Μέθοδος Fibonacci

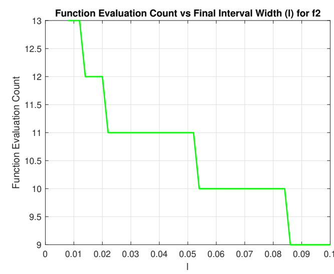
3.1 Περιγραφή

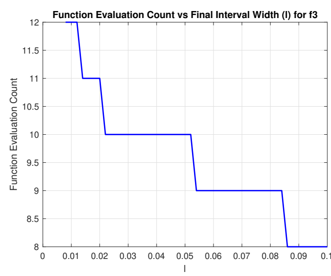
Η μέθοδος fibonacci χρησιμοποιείται για την εύρεση τοπικού ελαχίστου μιας συνάρ τησης f σε ένα διάστημα $[a, b]$.Η μέθοδος αυτή μοιάζει με αυτή του χρυσού τομέα, αλλά απαιτεί έναν επιπλέον υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης, το υποδιάστημα μιας επανάληψης δεν συνδέεται με αυτό της προηγούμενης με μία σταθερά και χρησιμοποιείται η σειρά Fibonacci για την τοποθέτηση των σημείων. Επίσης, ο αριθμός των επαναλήψεων n είναι προκαθορισμένος από την αρχή έτσι ώστε να είναι ο μικρότερος ακέραιος n που ικανοποιεί την συνθήκη $\frac{bk-ak}{l} < F_n$.

3.2 Ερώτημα 1ο

Παίρνοντας αυθαίρετα το $n = 15$ μελετάμε τη μεταβολή των υπολογισμών των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3 για τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l στο διάστημα $[0.008, 0.1]$. Οι υπολογισμοί της κάθε συνάρτησης σε κάθε επανάληψη αυξάνονται κατά 1 , καθώς κρατάμε ένα από τα άκρα της προηγούμενης επανάληψης. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα.





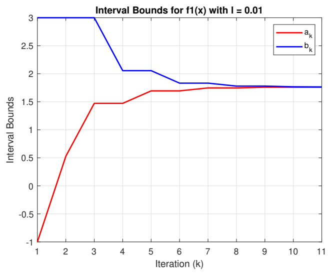


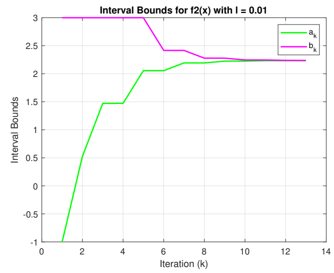
3.2.1 Σημείωση

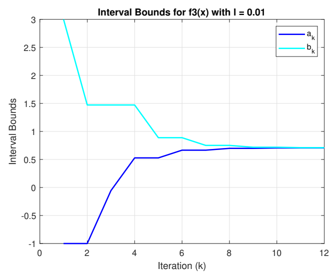
Όπως και στις προηγούμενες μεθόδους όσο αυξάνεται το l , τόσο μειώνεται και ο αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό οφείλεται στο ότι η αύξηση διαστήματος ανοχής l συνεπάγεται και γρηγορότερη σύγκλιση στο επιθυμητό τελικό διάστημα.

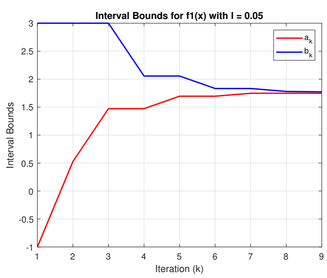
3.3 Ερώτημα 2ο

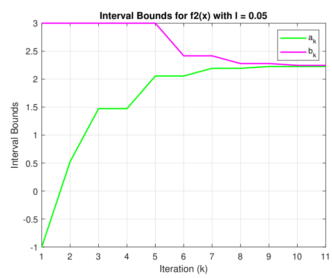
Σε συνέχεια του προηγούμενου ερωτήματος, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[\alpha_k, \beta_k]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, δηλαδή: (α_k, k) και (β_k, k) για τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης $l = [0.01, 0.05, 0.1]$.

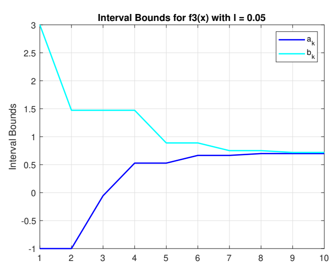

Interval Bounds for f1(x) with l = 0.01
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k

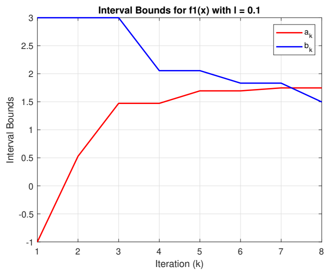

Interval Bounds for f2(x) with l = 0.01
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k

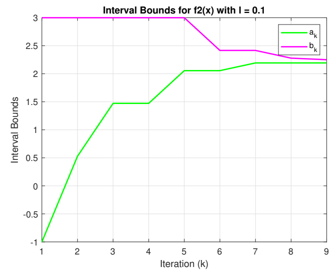

Interval Bounds for f3(x) with l = 0.01
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k

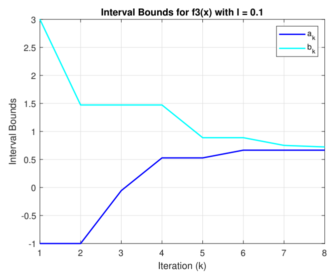

Interval Bounds for f1(x) with l = 0.05
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k


Interval Bounds for f2(x) with l = 0.05
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k


Interval Bounds for f3(x) with l = 0.05
Interval Bounds
Iteration (k)
a_k
b_k







3.3.1 Σημείωση

Κλασικά, για τις τρεις συναρτήσεις όσο αυξάνεται το l , τόσο μειώνονται οι επαναλήψεις k και κατ' επέκταση ο αριθμός των υπολόγιμών των $[\alpha_k, \beta_k]$. Αυτό οφείλεται στο ότι η αύξηση διαστήματος ανοχής l συνεπάγεται και γρηγορότερη σύγκλιση στο επιθυμητό τελικό διάστημα.

3.4 Τελική Παρατήρηση

Συγκριτικά με τις προηγούμενες μεθόδους τα σχεδιαγράμματα των συναρτήσεων f_1, f_2 και f_3 δεν είναι τόσο παρόμοια. Επίσης, αυτή η μέθοδος χρειάζεται τους λιγότερους υπολογισμούς συναρτήσεων και έχει την καλύτερη ακρίβεια ως τώρα. Όσον αφορά ωστόσο τις επαναλήψεις βρίσκεται ανάμεσα στις δύο προηγούμενες μεθόδους. Λαμβάνοντας τα όλα αυτά υπόψη θα μπορούσαμε να κατατάξουμε τις μεθόδους ως προς αποτελεσματικότητα τους με την εξής φθίνουσα σειρά: Fibonaci ¿ Χρυσού Τομέα ¿ Διχοτόμου.

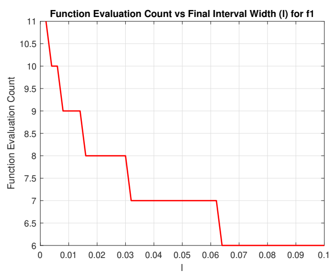
4 Μέθοδος της Διχοτόμου (με παράγωγο)

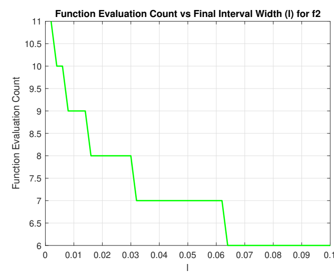
4.1 Περιγραφή

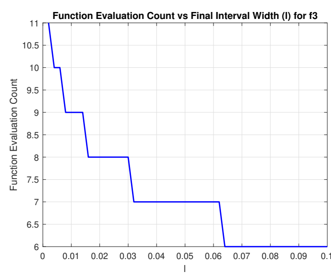
Η μέθοδος Διχοτόμου με τη χρήση παραγώγου χρησιμοποιείται για την εύρεση τοπικού ελαχίστου με βάση την παράγωγο της συνάρτησης f σε ένα διάστημα $[a, b]$. Η παράγωγος της συνάρτησης υπολογίζεται και χρησιμοποιείται για να καθοριστεί η κατεύθυνση της αναζήτησης στο διάστημα: αν η παράγωγος είναι αρνητική, το ελάχιστο βρίσκεται δεξιά του σημείου και το αριστερό όριο a μετακινείται, ενώ αν είναι θετική, το δεξιό όριο b προσαρμόζεται. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να φτάσει σε μια προκαθορισμένη ανοχή l.

4.2 Ερώτημα 1ο

Μελετάμε τη μεταβολή των υπολογισμών των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3 για τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l στο διάστημα [0.002, 0.1]. Οι υπολογισμοί της κάθε συνάρτησης σε κάθε επανάληψη αυξάνονται κατά 1 καθώς ένα από τα άκρα παραμένει σταθερό σε κάθε επανάληψη. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα.





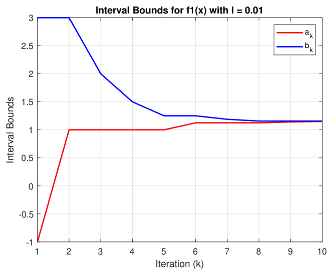


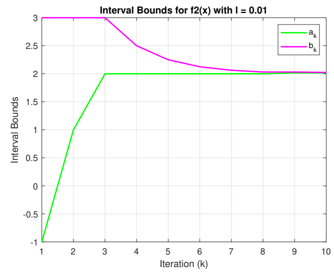
4.2.1 Σημείωση

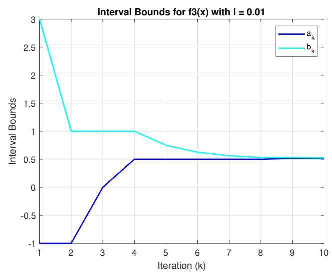
Όπως και στις προηγούμενες μεθόδους όσο αυξάνεται το l , τόσο μειώνεται και ο αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό οφείλεται στο ότι η αύξηση διαστήματος ανοχής l συνεπάγεται και γρηγορότερη σύγκλιση στο επιθυμητό τελικό διάστημα.

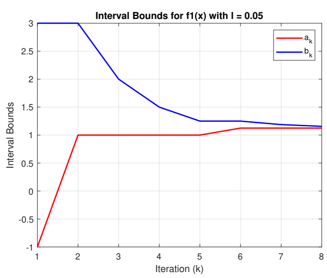
4.3 Ερώτημα 2ο

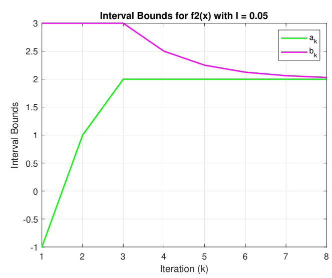
Σε συνέχεια του προηγούμενου ερωτήματος, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[\alpha_k, \beta_k]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, δηλαδή: (α_k, k) και (β_k, k) για τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης $l = [0.01, 0.05, 0.1]$.

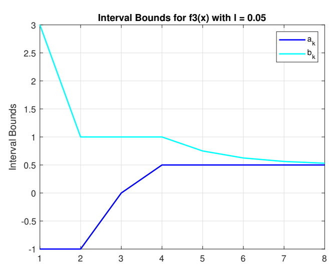

Interval Bounds for f1(x) with l = 0.01
a_k
b_k
Interval Bounds
Iteration (k)

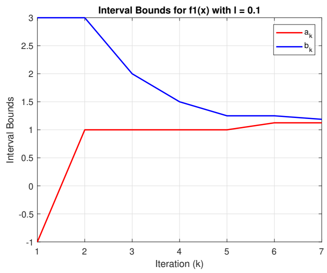

Interval Bounds for f2(x) with l = 0.01
a_k
b_k
Interval Bounds
Iteration (k)

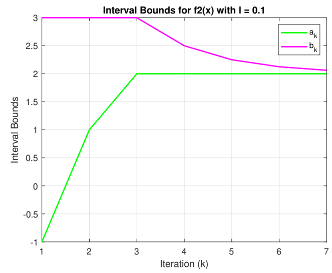

Interval Bounds for f3(x) with l = 0.01
a_k
b_k
Interval Bounds
Iteration (k)

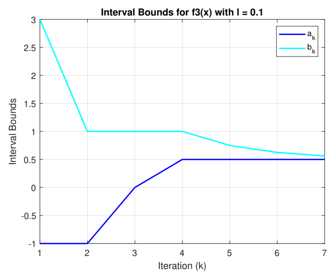

Interval Bounds for f1(x) with l = 0.05
a_k
b_k
Interval Bounds
Iteration (k)


Interval Bounds for f2(x) with l = 0.05
a_k
b_k
Interval Bounds
Iteration (k)


Interval Bounds for f3(x) with l = 0.05
a_k
b_k
Interval Bounds
Iteration (k)







4.3.1 Σημείωση

Κλασικά, για τις τρεις συναρτήσεις όσο αυξάνεται το l , τόσο μειώνονται οι επαναλήψεις k και κατ' επέκταση ο αριθμός των υπολόγιμών των $[\alpha_k, \beta_k]$. Αυτό οφείλεται στο ότι η αύξηση διαστήματος ανοχής l συνεπάγεται και γρηγορότερη σύγκλιση στο επιθυμητό τελικό διάστημα.

4.4 Τελική Παρατήρηση

Συγκριτικά με τις προηγούμενες μεθόδους, αυτή χρειάζεται τους λιγότερους υπολογισμούς συναρτήσεων και χρειάζεται τις λιγότερες επαναλήψεις. Επομένως, όπως περιμέναμε αυτή η μέθοδος είναι η πιο αποτελεσματική συγκριτικά με τις προηγούμενες. Ωστόσο, για να εφαρμοστεί πρέπει οι συναρτήσεις στις οποίες εφαρμόζεται να είναι παραγωγίσιμες, το οποίο αποτελεί μειονέκτημα καθώς περιορίζει τη χρήση της στις αντίστοιχες συναρτήσεις.