Report: Optimization Techniques (Part 3)

Panagiotis Koutris

December 2024

Contents

Εισαγωγή

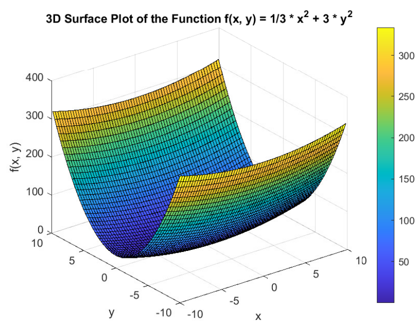
Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της συνάρτησης:

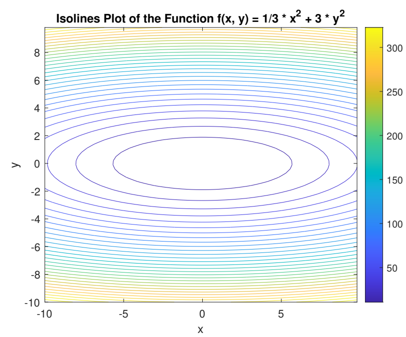
$$f(x,y) = \frac{1}{3}x_1^2 + 3x_2^2$$

μέσω της χρήσης των εξής αλγορίθμων αναζήτησης:

- **Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου**
- **Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή**

Παρακάτω παρατίθεται σχηματική απεικόνιση της f:





Από τα παραπάνω διαγράμματα και λόγω της μορφής τετραγώνων της συνάρτησης μπορούμε να δούμε ότι το ελάχιστο της είναι το (0,0,0)

1 Θέμα 1

Θα χρησιμοποιήσουμε τη Μέθοδο Μέγιστης Καθόδου με ακρίβεια $\epsilon = 0.001$ και βήμα i) $\gamma = 0.1$, ii) $\gamma = 0.3$, iii) $\gamma = 3$, iv) $\gamma = 5$ και αρχικό σημείο εκκίνησης το (4,5)

1.1 Μαθηματική Ανάλυση

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}x_1^2 + 3x_2^2$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x_1 \\ 6x_2 \end{bmatrix}$$

Μέγιστη Κάθοδος

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \gamma_k \nabla f$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{x}_{k+1}}{\mathbf{x}_k} = 1 - \gamma_k \frac{\nabla f}{\mathbf{x}_k}$$

Για να έχουμε σύγκλιση προς $\mathbf{x}$, θα πρέπει:

$$\left| \frac{\mathbf{x}_{k+1}}{\mathbf{x}_k} \right| < 1$$

$$\Rightarrow \left| 1 - \gamma_k \frac{\nabla f}{\mathbf{x}_k} \right| < 1$$

Όμως:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ως προς x_1:

$$\left| 1 - \gamma_k \frac{\frac{2}{3}x_1}{x_1} \right| < 1$$

$$\Rightarrow 1 - \gamma_k \frac{2}{3} < 1 \quad \text{και} \quad 1 - \gamma_k \frac{2}{3} > -1$$

$$\Rightarrow -2 < -\frac{2}{3}\gamma_k < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \gamma_k < 3 \quad (1)$$

Ως προς x_2:

$$\left| 1 - \gamma_k \frac{6x_2}{x_2} \right| < 1$$

$$\Rightarrow -2 < -6\gamma_k < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \gamma_k < \frac{1}{3} \quad (2)$$

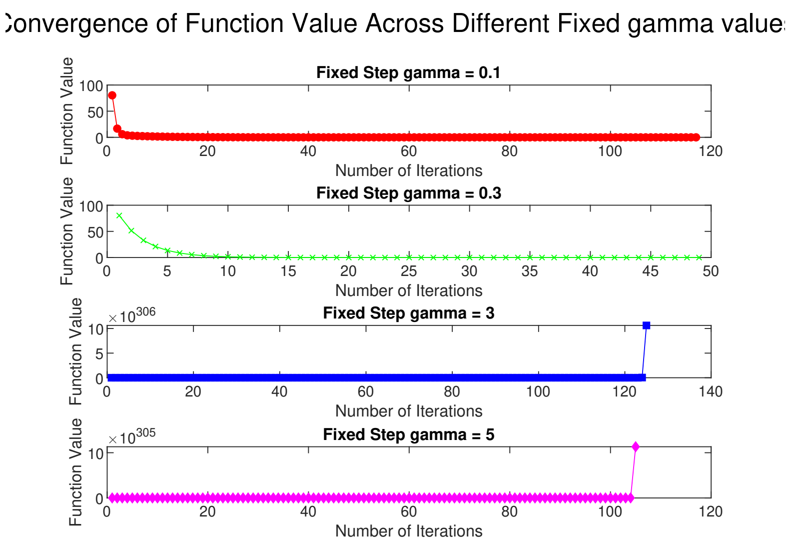
Συμπέρασμα

Από (1) και (2):

$$0 < \gamma_k < \frac{1}{3}$$

Αυτά τα αποτελέσματα επαληθεύονται και από την παρακάτω πειραματική ανάλυση:

1.2 Πειραματική Ανάλυση



	Gamma	Final_x	Final_y	Final_f_value
1	gamma = 0.1	0.0013	3.4509e-46	5.9639e-07
2	gamma = 0.3	8.9203e-05	1.1150e-04	3.9952e-08
3	gamma = 3	4	1.8463e+...	Inf
4	gamma = 5	6.2889e+55	1.1446e+...	Inf

1.3 Παρατηρήσεις

Από το διάγραμμα και τον πίνακα γίνεται φανερό ότι η μέθοδος συγκλίνει μόνο για τις πρώτες 2 τιμές του γ, το οποίο ήταν αναμενόμενο, καθώς μόνο αυτές βρίσκονται στο διάστημα που προέκυψε από τη μαθηματική ανάλυση. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι για $\gamma = 0.3$ έχουμε γρηγορότερη σύγκλιση λόγω του μεγαλύτερου βήματος.

Στα επόμενα θέματα θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Μέγιστης Καθόδου με Προβολή. Η μέθοδος αυτή προσαρμόζει την κλασική μέθοδο μέγιστης καθόδου ώστε να λαμβάνει υπόψη περιορισμούς. Σε κάθε βήμα, η κατεύθυνση καθόδου δίνεται από τον βαθμό κλίσης της συνάρτησης:

$$d_k = -\nabla f(x_k),$$

και το νέο σημείο υπολογίζεται ως:

$$\bar{x}_k = \mathrm{Pr}_X\{x_k + s_k d_k\},$$

όπου Pr_X είναι ο τελεστής προβολής που εξασφαλίζει ότι το νέο σημείο ανήκει στο εφικτό σύνολο X. Τελικά, η επικαιροποίηση γίνεται με τη χρήση ενός συντελεστή γ_k:

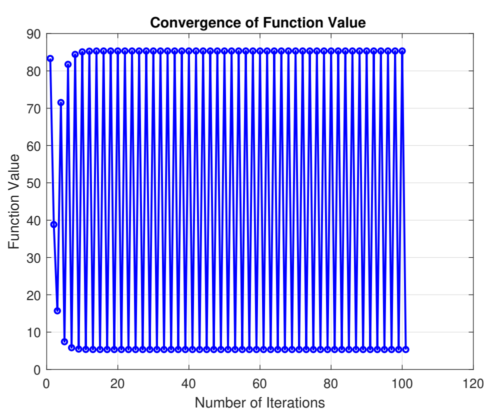
$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k(\bar{x}_k - x_k), \quad \gamma_k \in [0, 1].$$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ικανοποιηθεί μια συνθήκη τερματισμού, όπως $\|\nabla f(x_k)\| < \epsilon$, όπου $\epsilon > 0$ είναι μια προκαθορισμένη ακρίβεια.

2 Θέμα 2

Θα χρησιμοποιήσουμε τη Μέθοδο Μέγιστης Καθόδου με Προβολή, με $s = 5$, $\gamma = 0.5$, σημείο εκκίνησης το $(5, -5)$ και ακρίβεια $\epsilon = 0.01$.

2.1 Πειραματική Ανάλυση




```
Final point:
    0.0000
   -1.3333

Final function value:
    5.3333

Number of iterations:
   101
```

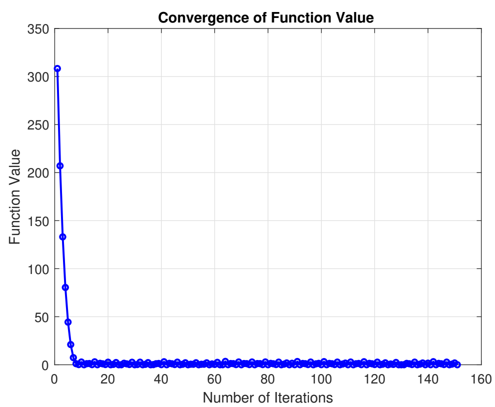
2.2 Παρατηρήσεις

Σε σχέση με το Θέμα 1 παρατηρούμε ότι η μέθοδος δεν συγκλίνει και μάλιστα έχουμε ταλαντώσεις. Αυτό είναι λογικό καθώς το γινόμενο $s_k * \gamma_k = 2,5 > \frac{1}{3}$.

3 Θέμα 3

Θα χρησιμοποιήσουμε τη Μέθοδο Μέγιστης Καθόδου με Προβολή, με $s = 15$, $\gamma = 0.1$, σημείο εκκίνησης το $(-5, 10)$ και ακρίβεια $\epsilon = 0.01$.

3.1 Πειραματική Ανάλυση

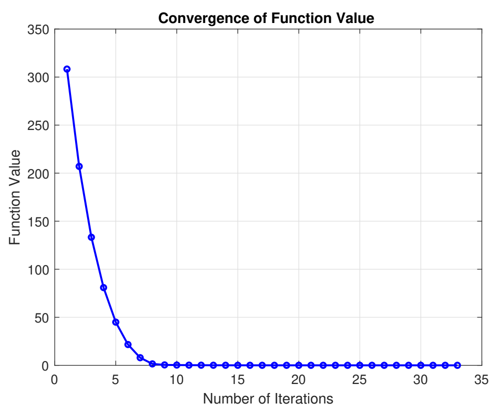



```
Final point:
        0
  -0.0905

Final function value:
    0.0246

Number of iterations:
   151
```

3.2 Παρατηρήσεις

Σε σχέση με τα προηγούμενα θέματα παρατηρούμε ότι η μέθοδος δεν συγκλίνει, το οποίο είναι λογικό, καθώς το γινόμενο $s_k * \gamma_k = 1,5 > \frac{1}{3}$. Ωστόσο, συγκριτικά με το Θέμα 2, έχουμε όχι τόσο έντονες ταλαντώσεις κοντά στο ελάχιστο, αλλά και μικρότερη ακρίβεια συγκριτικά με το Θέμα 1. Προκειμένου να βελτιώσουμε την αποδοτικότητα του αλγορίθμου, μπορούμε να μειώσουμε στο s_k θέτοντας το ίσο με 3, ώστε να βρισκόμαστε μέσα στα όρια, επιτυγχάνοντας σύγκλιση και να έχουμε ικανοποιητικό βήμα ώστε να βελτιώνεται η ταχύτητα. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

3.3 Πειραματική Ανάλυση

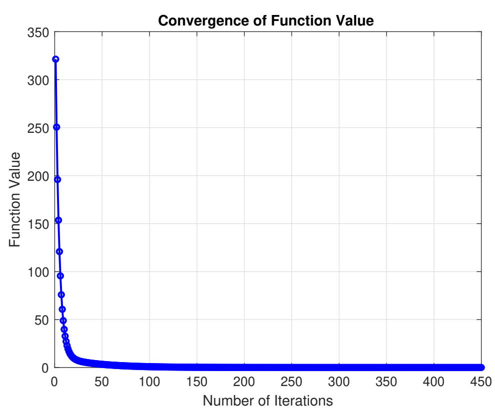



```
Final point:
   -0.0040
   -0.0012

Final function value:
   9.4657e-06

Number of iterations:
    33
```

4 Θέμα 4

Θα χρησιμοποιήσουμε τη Μέθοδο Μέγιστης Καθόδου με Προβολή, με $s = 0.1$, $\gamma = 0.2$, σημείο εκκίνησης το $(8, -10)$ και ακρίβεια $\epsilon = 0.01$.

4.1 Πειραματική Ανάλυση




```
Final point:
    0.0147
   -0.0000

Final function value:
   7.1897e-05

Number of iterations:
   450
```

4.2 Παρατηρήσεις

Εκ των προτέρων θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι η μέθοδος θα συγκλίνει καθώς το γινόμενο $s_k * \gamma_k = 0.02 < \frac{1}{3}$ σε αντίθεση με τις προηγούμενες 2 περιπτώσεις. Ωστόσο, το βήμα μας είναι πολύ μικρό ($= 0.02$) με αποτέλεσμα ο αλγόριθμος να συγκλίνει με πολύ αργό ρυθμό. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι ο αλγόριθμος ξεκινάει από μη εφικτό σημείο, σε αυτή τη περίπτωση, οπότε η προβολή μας επαναφέρει στον χώρο των εφικτών σημείων.