Εργαστηριακή Άσκηση 1
Εξοικείωση με το MATLAB®- Σήματα Διακριτού χρόνου

Σκοπός της πρώτης σειράς ασκήσεων είναι, αφ' ενός η εξοικείωση με το προγραμματιστικό περιβάλλον της εφαρμογής MATLAB, αφ' ετέρου, η εισαγωγή στους τρόπους παράστασης και επεξεργασίας τηλεπικοινωνιακών σημάτων στη συγκεκριμένη πλατφόρμα λογισμικού. Το MATLAB (www.mathworks.com) είναι ένα διαδραστικό εμπορικό πρόγραμμα (Windows, Linux, Unix) με το οποίο μπορείτε να κάνετε εύκολα αριθμητικές πράξεις με πίνακες. Μπορεί να το έχετε εγκατεστημένο τοπικά, στον προσωπικό σας υπολογιστή ή να εργάζεστε σε κάποιο Εργαστήριο Προσωπικών Υπολογιστών (ΕΠΥ) της Σχολής σας που διαθέτει το συγκεκριμένο λογισμικό[1].

Μέρος 1: Εξοικείωση με το περιβάλλον MATLAB

(Σε περίπτωση που νιώθετε άνετα με το περιβάλλον του MATLAB μπορείτε να το παραλείψετε).

Η εφαρμογή MATLAB περιλαμβάνει λειτουργίες για διάφορες εφαρμογές, οργανωμένες με τη μορφή εργαλειοθηκών (toolboxes), όπως DSP, επικοινωνίες, νευρωνικά δίκτυα, κλπ. Χρησιμοποιεί για προγραμματισμό τη γλώσσα m-code (παρόμοια με τις γλώσσες C και Fortran). Ξεκινήστε την με διπλό κλικ στο εικονίδιο της MATLAB που θα βρείτε στην επιφάνεια εργασίας. Όταν ξεκινήσει η εφαρμογή θα εμφανισθούν, ανάλογα με τις ρυθμίσεις της προβολής (view settings), τα παρακάτω παράθυρα:

- Το παράθυρο εντολών (Command Window)
- Ο τρέχων κατάλογος αρχείων (Current Folder)
- Ο χώρος εργασίας (Workspace)
- Το ιστορικό εντολών (Command History)

Καλό είναι να εξοικειωθείτε (εάν δεν το έχετε ήδη κάνει) με τη λειτουργία τους. Μπορείτε πάντα να τα επαναφέρετε στην αρχική τους κατάσταση κάνοντας κλικ στο εικονίδιο *Layout* της καρτέλας Home και επιλέγοντας το *Default*[2]. Για μια σύντομη περιήγηση[3] δείτε το βίντεο στην ιστοθέση http://www.mathworks.com/videos/new-matlab-desktop-70403.html.

[1] Στο Εργαστήριο Προσωπικών Υπολογιστών (ΕΠΥ) της Σχολής ΗΜΜΥ ΕΜΠ, θα βρείτε εγκατεστημένη έκδοση >= R2015. Για να εισέλθετε στο σταθμό εργασίας του ΕΠΥ, χρησιμοποιείστε **το όνομα χρήστη και συνθηματικό για πρόσβαση στις ηλεκτρονικές υπηρεσίες του Ιδρύματος** (που σας έχει δοθεί από το ΚΗΥ). Μετά από επιτυχή ταυτοποίησή σας από τον εξυπηρετητή LDAP, θα αποκτήσετε πρόσβαση στον τοπικό υπολογιστή με όνομα χρήστη `labuser`. Εάν στην οθόνη δεν εμφανίζεται σχετικό παράθυρο διαλόγου για την εισαγωγή στο σύστημα, πιέστε ταυτόχρονα τα πλήκτρα *`Alt+Ctrl+Del`*. Στις συγκεκριμένες ασκήσεις, το λειτουργικό σύστημα που θα χρησιμοποιηθεί είναι τα Windows XP.

[2] Σε παλαιότερες εκδόσεις (π.χ.στην R2011b) μενού *Desktop* → *Desktop Layout* → *Default*

[3] Στην έκδοση R2011b ανατρέξτε στο μενού *Help* → *Using the Desktop*

Περιβάλλον

Όλες οι μεταβλητές (variables) είναι πίνακες m*n. Ειδική περίπτωση αποτελούν οι μονοδιάστατοι. Σταθερές (Constants): pi (ο αριθμός π), i ή j (η φανταστική μονάδα), inf (το άπειρο), realmax και realmin (ο μέγιστος και ελάχιστος πραγματικός αριθμός), κλπ. Ενσωματωμένες συναρτήσεις (built-in functions): ημίτονο (sin), συνημίτονο (cos), εκθετική (exp), δεκαδικός λογάριθμος (log10), απόλυτη τιμή (abs), ύψωση σε δύναμη (power), τετραγωνική ρίζα (sqrt), κλπ. Μπορείτε να αναζητήσετε βοήθεια για τις συναρτήσεις καλώντας τον πλοηγό συναρτήσεων (function browser) πιέζοντας τον συνδυασμό πλήκτρων Shift+F1 ή κάνοντας κλικ στο κουμπί του (το σύμβολο *fx* δίπλα από την προτροπή >>).

Μπορείτε να αναζητήσετε συναρτήσεις με το όνομά τους ή να ψάξετε στους εμφανιζόμενους κατάλογους. Εάν αφήσετε για λίγο τον δρομέα του ποντικιού ακίνητο πάνω από το όνομα μιας συνάρτησης θα δείτε επιπλέον πληροφορίες για τη σύνταξή της. Σύντομες πληροφορίες για συναρτήσεις μπορείτε να διαβάσετε στο παράθυρο εντολών πληκτρολογώντας:

```
>>help function
```

Για περισσότερες πληροφορίες μεταβείτε στην τεκμηρίωση του MATLAB πληκτρολογώντας

```
>>doc function
```

Σημείωση: για να λάβετε πληροφορίες για συγκεκριμένη συνάρτηση, αντί `function` γράψτε το όνομά της, π.χ., `sin` για το ημίτονο.

Εξάσκηση

Δοκιμάστε τις παρακάτω εντολές στο παράθυρο εντολών του MATLAB. Στην προτροπή >> πληκτρολογείστε τις εντολές που ακολουθούν (σε περίπτωση που δεν ορίζεται μεταβλητή το αποτέλεσμα εμφανίζεται ως η μεταβλητή ans).

<u>1.1. Δημιουργήστε ένα μονοδιάστατο μέγεθος</u>

```
>>s=2
```

<u>1.2. Δημιουργήστε ένα πίνακα</u>

```
>>a=[1 3;6 9]
```

<u>1.3. Δημιουργήστε ένα διάνυσμα</u>

```
>>v=[1 5 9]
```

<u>1.4. Αθροίστε</u>

```
>>a+5
```

<u>1.5. Πολλαπλασιάστε</u>

```
>>b=s*v
```

<u>1.6. Πολλαπλασιάστε στοιχείο-προς-στοιχείο (elementwise)</u>

```
>>v.*b
```

1.7. Ελέγξτε το μήκος ενός διανύσματος

```
>>length(v)
```

1.8. Ελέγξτε το μέγεθος ενός πίνακα

```
>>size(a)
```

1.9. Προσπελάστε συγκεκριμένα στοιχεία ενός πίνακα

```
>>a(1,2)
```

1.10. Προσπελάστε συγκεκριμένα τμήματα ενός πίνακα

```
>>v(1:2)
```

1.11. Δημιουργήστε ένα διάνυσμα με στοιχεία από το 0 έως το 0.5 και βήμα 0.1

```
>>t=0:0.1:0.5
```

ή εναλλακτικά

```
>>t=linspace(0,0.5,6)
```

Αρχεία MATLAB (M-files)

Τα αρχεία M-files είναι αρχεία ASCII με κατάληξη .m που περιλαμβάνουν εντολές MATLAB. Για να δημιουργήσετε ένα αρχείο M-file κάντε κλικ στο *New* → *Blank M-file*[4] της καρτέλας Home οπότε θα ανοίξει το παράθυρο επεξεργασίας κειμένου (Editor window). Εναλλακτικά, μπορείτε να εκτελέσετε την εντολή `edit 'mfilename'`, όπου `'mfilename'`[5] είναι το επιθυμητό όνομα του αρχείου. Θα δημιουργηθεί έτσι στον τρέχοντα φάκελο αρχείων το αρχείο mfilename.m, εκτός και εάν ήδη υπάρχει αρχείο με το όνομα αυτό, οπότε θα ανοίξει για επεξεργασία. Μπορείτε να εκτελέσετε τις εντολές ενός αρχείου M-file γράφοντας στη γραμμή εντολών το όνομα του αρχείου **χωρίς** την κατάληξη .m ή σύροντας και αφήνοντας το αρχείο από τον τρέχοντα φάκελο στο παράθυρο εντολών. Τα M-files μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως συναρτήσεις.

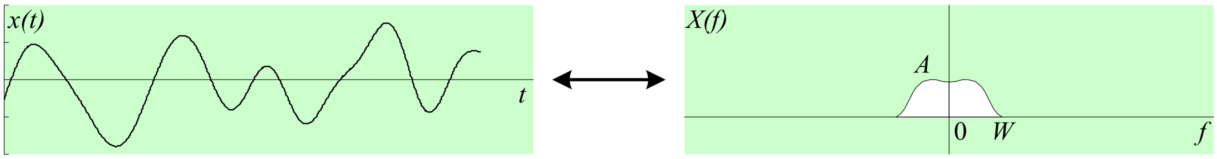
Μέρος 2: Δειγματοληψία - Ψηφιοποίηση

Τα πρωτογενή σήματα είναι κυρίως αναλογικά (συνεχούς χρόνου). Για να τα παραστήσουμε και επεξεργαστούμε στον υπολογιστή μας (ή άλλη ψηφιακή μηχανή) θα πρέπει πρώτα να τα **ψηφιοποιήσουμε**. Υποθέστε ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier (Continuous Time Fourier Transform – CTFT):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)dt$$

[4] Στην έκδοση R2011b, ακολουθήστε τη διαδρομή *File*→*New*→*Script*

[5] ΠΡΟΣΟΧΗ! Το όνομα ενός αρχείου M-file δεν μπορεί να ξεκινά με αριθμό και δεν μπορεί να περιλαμβάνει στην ονομασία του ειδικούς χαρακτήρες. Το MATLAB μπορεί να εκλάβει τέτοιες ονομασίες ως εντολές και όχι ως M-file, όταν προσπαθείτε να το τρέξετε.



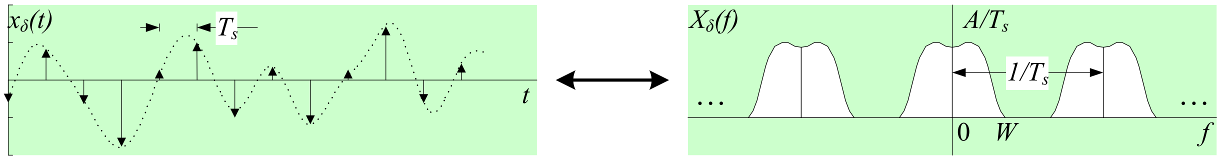
Λαμβάνοντας δείγματα του $x(t)$ με ρυθμό f_s=1/T_s παράγεται σήμα διακριτού χρόνου $x(nT_s)$. Μαθηματικά το αναπαριστάνουμε ως σειρά συναρτήσεων δέλτα

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

με μετασχηματισμό Fourier

$$X_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\exp(-j2\pi fnT_s) = X(f) * 1/T_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-k/T_s) = 1/T_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f-k/T_s)$$

που είναι περιοδική συνάρτηση.

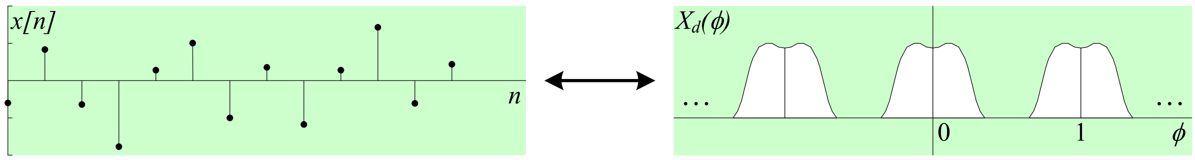


Για βαθυπερατά σήματα $x(t)$ εύρους ζώνης W, με την υπόθεση ότι ο ρυθμός δειγματοληψίας $f_s \geq 2W$, ισχύει ότι $X(f) = T_s\, X_\delta(f)$, $0 \leq f \leq W$, δηλαδή, το σήμα $X(f)$ προκύπτει μετά από διάβαση του δειγματοληπτημένου $x_\delta(t)$ μέσω ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου κέρδους T_s. Από το προηγούμενο σχήμα γίνεται φανερό ότι εάν η δειγματοληψία γίνει με συχνότητα μικρότερη του διπλασίου της ανώτερης συχνότητας W του σήματος (υποδειγμάτιση – undersampling), τότε εμφανίζονται στην περιοχή συχνοτήτων του σήματος «είδωλα» φάσματος από ανώτερες συχνότητες που δεν επιτρέπουν την ακριβή αποκατάσταση του αρχικού σήματος συνεχούς χρόνου. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **αναδίπλωση** ή **επικάλυψη** (aliasing), το δε σφάλμα κατά την αποκατάσταση του αρχικού σήματος αποκαλείται σφάλμα αναδίπλωσης (aliasing error).

Η δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου αποτελεί τη βάση για τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου (Discrete Time Fourier Transform – DTFT). Για μια σειρά διακριτών αριθμών $x[n]$, ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου ορίζεται ως:

$$X_d(\phi) \triangleq \overset{\infty}{\underset{n=-\infty}{}} \qquad \exp(-j2\pi n\phi)$$

Ο DTFT είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 1, επομένως, αρκεί ο υπολογισμός του στο διάστημα συχνοτήτων [0,1] ή ισοδύναμα [-½,½]. Να σημειωθεί ότι ο DTFT, παρότι προκύπτει από μια σειρά διακριτών αριθμών $x[n]$, είναι συνεχής συνάρτηση της μεταβλητής ϕ όπως παραστατικά φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Με τη σειρά των διακριτών αριθμών να προκύπτει ως αποτέλεσμα δειγματοληψίας, $x[n]=x(nT_s)$, ο DTFT και ο μετασχηματισμός Fourier $X_\delta(f)$ του δειγματοληπτημένου σήματος συνδέονται μέσω της αντιστοιχίας $\phi \leftrightarrow f/f_s$. Η συνήθης πρακτική είναι να παριστάνουμε τον λόγο f/f_s ως κανονικοποιημένη συχνότητα ϕ (f_D, στις σημειώσεις σας) και οι πραγματικές συχνότητες να προκύπτουν ως πολλαπλάσιά[6] της (συνήθως κλασματικά). Για τη σύνδεση του DTFT με τον μετασχηματισμό

[6] Επειδή η μεταβλητή f παριστάνει τη φυσική συχνότητα (κύκλους ανά δευτερόλεπτο - Hz) και η συχνότητα δειγματοληψίας f_s δηλώνει δείγματα ανά δευτερόλεπτο, ο λόγος τους ϕ παριστάνει κύκλους ανά δείγμα.

Fourier $X(f)$ του σήματος πρέπει επιπλέον να γίνει αναγωγή στην περίοδο δειγματοληψίας με πολλαπλασιασμό επί T_s (ή διαίρεση με f_s).

Κατ΄ αναλογία με τη δειγματοληψία σημάτων στο χρόνο μπορούμε να κάνουμε δειγματοληψία στο πεδίο της συχνότητας λαμβάνοντας διακριτές τιμές $X(kf_o)$ του μετασχηματισμού Fourier που αντιστοιχούν σε ανάλυση συχνότητας f_o=1/T_o. Αυτό ισοδυναμεί με περιοδική επανάληψη του σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ κάθε T_o, αφού το περιοδικό σήμα

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_o)$$

έχει μετασχηματισμό Fourier

$$X(f)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi f n T_o) = X(f)\frac{1}{T_o}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/T_o) = \frac{1}{T_o}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k/T_o)\delta(f - k/T_o)$$

Επομένως, $X[k] = X(kf_o)/T_o$ είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος σε σειρά Fourier.του περιοδικού σήματος $x_p(t)$. Προφανώς, για σήματα $x(t)$ πεπερασμένης διάρκειας, όπου $x(t)$=0 για $|t| \geq T$, με την υπόθεση ότι η περίοδος $T_o \geq 2T$, ισχύει ότι $x(t) = x_p(t)$ για $|t| \leq T$.

Στην πράξη, τα σήματα έχουν πολύ μεγάλη διάρκεια για να μπορέσουμε να τα αναλύσουμε στην ολότητά τους. Έτσι εφαρμόζουμε ένα ορθογωνικό χρονικό παράθυρο, ώστε να διατηρήσουμε μόνο το πιο σημαντικό τους μέρος για το διάστημα παρατήρησης και $x(t)$= 0, αλλού. Κατά τον υπολογισμό του DTFT $X_d(\phi)$ ενός τέτοιου ακρωτηριασμένου σήματος, αντί του απείρου αθροίσματος, περιοριζόμαστε σε μια πεπερασμένου μήκους L σειρά αριθμών $x[n]$, οπότε

$$X_d(\phi) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]\exp(-j2\pi n\phi)$$

Η δειγματοληψία του $X_d(\phi)$ στο πεδίο συχνότητας σε N ισαπέχουσες κανονικοποιημένες συχνότητες 0, 1/N, 2/N, …, (N-1)/N, δίνει

$$X[k] = X_d(\frac{k}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi n\frac{k}{N}), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

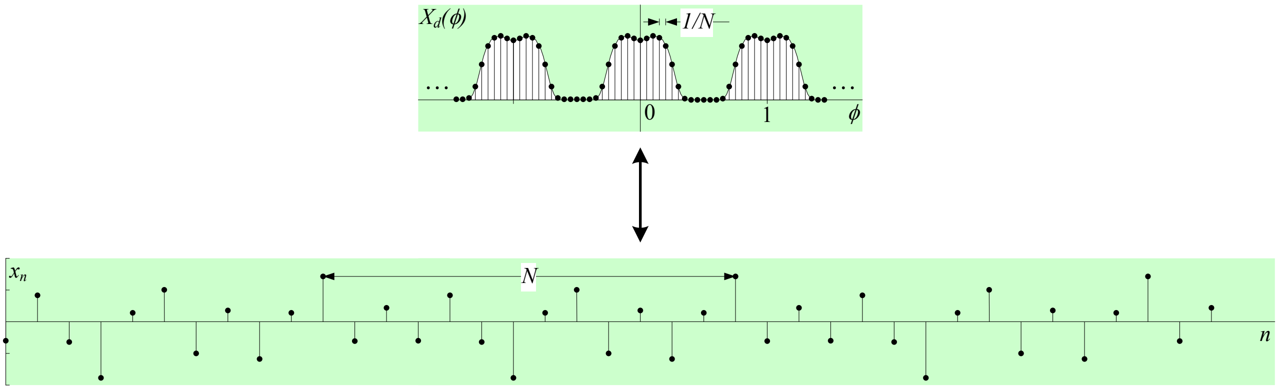
όπου, εάν $N \geq L$, θέτουμε $x[n]$=0 για $n \geq L$. Η τελευταία σχέση αναγνωρίζεται ως ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform – DFT), ο οποίος για μια πεπερασμένη σειρά x_n, n=0, 1, …, N-1, ορίζεται ως:

$$X_k \triangleq \underset{n=0}{\overset{N-1}{}} \qquad \mathrm{p}(-j2\pi n\frac{k}{N}), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

και ο αντίστροφός του είναι

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp(j2\pi n\frac{k}{N}), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Η $X_d(\phi)$ ως DTFT είναι περιοδική συνάρτηση και εάν η αρχική σειρά x_n ήταν περιοδική (και δεν εφαρμόζαμε το παράθυρο), τότε η $X_d(\phi)$ θα ήταν μηδέν παντού εκτός των σημείων της δειγματοληψίας k/N. Δηλαδή, εάν θεωρήσουμε μια πεπερασμένου μήκους σειρά αριθμών που επαναλαμβάνεται περιοδικά, ο διακριτού χρόνου μετασχηματισμός Fourier της (DTFT) είναι και αυτός περιοδικός και διακριτός. Επιπλέον, ο DFT και ο αντίστροφός του IDFT, εάν δεν περιορίζαμε τους δείκτες n και k μεταξύ 0 και N-1, θα ήταν περιοδικές συναρτήσεις. Άρα η πεπερασμένη σειρά x_n μπορεί να θεωρηθεί ως ένα περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου ιδωμένο μόνο κατά τη διάρκεια μιας περιόδου και ο DFT, η σειρά X_k, ως τα δείγματα με ανάλυση 1/N του DTFT $X_d(\phi)$ στο πεδίο κανονικοποιημένων συχνοτήτων [0,1], όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Φασματική ανάλυση

Για τον υπολογισμό της ενέργειας ή ισχύος της κυματομορφής $x(t)$, ανάλογα με την περίπτωση σήματος, ισχύει

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$$P_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df$$

όπου για σήματα ισχύος $S_X(f)$ είναι η πυκνότητα φάσματος ισχύος (Power Spectral Density – PSD) της $x(t)$. Για σήματα διακριτού χρόνου που προκύπτουν από δειγματοληψία της $x(t)$ με περίοδο T_s, οι αντίστοιχες σχέσεις υπολογισμό της ενέργειας ή ισχύος γίνονται

$$E_X = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$$

$$P_X = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n]$$

Ένας απλός τρόπος να εκτιμηθεί η πυκνότητα φάσματος ισχύος της κυματομορφής $x(t)$ είναι να ληφθεί ο DTFT των δειγμάτων του σήματος και μετά να υψωθεί στο τετράγωνο το μέτρο του αποτελέσματος. Αυτός ο εκτιμητής αποκαλείται περιοδόγραμμα (periodogram). Το περιοδόγραμμα ενός πεπερασμένου μήκους L σήματος $x[n]$ ορίζεται ως

$$P_{xx}(f) \triangleq \frac{|X_d(f/f_s)|^2}{f_s L}$$

όπου $X_d(\phi)$ ο DTFT του σήματος. Με το μήκος L να τείνει στο άπειρο, το περιοδόγραμμα $P_{xx}(f)$ τείνει στην πυκνότητα φάσματος ισχύος $S_X(f)$. Ο υπολογισμός του περιοδογράμματος σε πεπερασμένο πλήθος συχνοτήτων kf_s/N, k=0, 1, … , N δίνει

$$P_{xx}[k] = \frac{|X_k|^2}{f_s L}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

όπου X_k και ο DFT της πεπερασμένου μήκους L σειράς δειγμάτων του σήματος. Η ισχύς του σήματος είναι τότε

$$P_X = \frac{1}{f_s L}\sum_{k=0}^{N-1}|X_k|^2 f_o = \frac{1}{NL}\sum_{k=0}^{N-1}|X_k|^2 = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1}|x_n|^2$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το θεώρημα Parseval, που για την περίπτωση του DFT εκφράζεται ως:

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x_n|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X_k|^2$$

Στην ειδική περίπτωση περιοδικών σημάτων έχουμε

$$S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|X[k]|^2\,\delta(f-k/T_o)$$

$$P_X = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|X[k]|^2$$

όπου $X[k]$ οι συντελεστές του αναπτύγματος σε σειρά Fourier και T_o η περίοδος του σήματος.

Εφαρμογή στο MATLAB

Το περιβάλλον MATLAB είναι ψηφιακό και πρέπει να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο κυματομορφές συνεχούς χρόνου και οι μετασχηματισμοί Fourier τους περιγράφονται με πεπερασμένο πλήθος δεδομένων. Προς τούτο, τα σήματα συνεχούς χρόνου μέσω δειγματοληψίας γίνονται διακριτού χρόνου και το φασματικό τους περιεχόμενο αναλύεται σε διακριτές συχνότητες με τη βοήθεια του DFT.

Όταν η σειρά x_n παριστάνει μέρος των δειγμάτων της κυματομορφής $x(t)$, η διαδικασία γένεσής της μπορεί να περιγραφεί ως η εφαρμογή μιας συνάρτησης παραθύρου (window function) στην $x(t)$ ακολουθούμενη από δειγματοληψία (ή το αντίστροφο). Πρέπει να κατανοηθεί πώς η εφαρμογή αυτών των πράξεων επηρεάζει την παρατήρηση του μετασχηματισμού Fourier $X(f)$. Ο πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου ισοδυναμεί με συνέλιξη στο πεδίο συχνοτήτων, επομένως η συνάρτηση παράθυρο εξαπλώνει κάθε φασματική συνιστώσα του $X(f)$ σύμφωνα με την απόκρισή της στο πεδίο συχνότητας. Το φαινόμενο αυτό αποκαλείται **φασματική διαρροή** (spectral leakage) και συνήθως, εμφανίζεται με τη μορφή σειράς "λοβών". Η φασματική διαρροή εμφανίζεται ως εάν κάποια ενέργεια έχει "διαρρεύσει" σε συχνότητες πέραν αυτών του φάσματος του αρχικού σήματος. Για παράδειγμα, στην απλή περίπτωση ορθογωνικού παραθύρου κάθε συχνότητα του αρχικού σήματος εξαπλώνεται όπως η συνάρτηση δειγματοληψίας sinc. Επομένως, βλέπουμε ότι η εφαρμογή της συνάρτησης παραθύρου έχει ως αποτέλεσμα το θόλωμα του $X(f)$ και άρα οδηγεί σε απώλεια διακριτικής ικανότητας.

Περαιτέρω, η δειγματοληψία της κυματομορφής αλλάζει τον υποκείμενο μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου και οδηγεί σε περιοδική συνάρτηση. Αυτή η περιοδική συνάρτηση (DTFT), περιλαμβάνει αντίγραφα της "θολής" εκδοχής του $X(f)$ επαναλαμβανόμενα περιοδικά κάθε f_s και αθροιζόμενα στα σημεία όπου υπάρχει επικάλυψη. Επομένως, τα αντίγραφα είναι παραλλαγές (aliases) των αρχικών συχνοτήτων. Ειδικότερα, στα σημεία επικάλυψης η αναδίπλωση μπορεί να δημιουργήσει σημαντικές παραμορφώσεις, εάν η συχνότητα δειγματοληψίας f_s δεν είναι αρκούντως υψηλή. Με κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης παραθύρου και του ρυθμού δειγματοληψίας μπορούμε τελικά να έχουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση του $X(f)$.

Για να αποφευχθούν φαινόμενα αναδίπλωσης (aliasing) του φάσματος, η κυματομορφή πρέπει να περάσει από βαθυπερατό φίλτρο αντι-αναδίπλωσης (anti-aliasing) εύρους ζώνης $W \le f_s/2$. Το εύρος ζώνης W του φίλτρου αντι-αναδίπλωσης (ή συχνότητα δειγματοληψίας f_s.) επιλέγεται έτσι ώστε η αλλοίωση που θα προκληθεί να είναι αρκούντως μικρή. Μέσω του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT), που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `fft` του MATLAB, λαμβάνουμε την αναπαράσταση του σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων. Όταν χρησιμοποιούμε τον DFT για φασματική ανάλυση, η πεπερασμένη σειρά x_n μήκους L έχει προκύψει από ισαπέχοντα δείγματα της κυματομορφής $x(t)$ μετά την εφαρμογή της συνάρτησης παραθύρου. Το μήκος N του DFT και η μορφή του παραθύρου επιλέγονται με σκοπό την ελαχιστοποίηση αυτής της δεύτερης αλλοίωσης. Το μήκος N του DFT ορίζει και την ανάλυση συχνότητας f_o με την οποία αναπαριστούμε τον DTFT του συνεχούς σήματος μέσω της αντιστοιχίας $1/N \leftrightarrow f_o/f_s$., δηλαδή, $f_o = f_s /N$. Στην πράξη είναι σύνηθες να επιλέγουμε $N>L$ και να συμπληρώνουμε με μηδέν (zero padding) τους ελλείποντες όρους. Σημειώστε ότι παρότι το N ορίζει την ανάλυση συχνότητας, το L είναι αυτό που εγγενώς περιορίζει την ακρίβεια της αναπαράστασης του DTFT. *Οι επιπλέον μηδενικοί όροι δεν αλλάζουν τον DTFT, απλώς αυξάνουν τα σημεία όπου υπολογίζονται οι τιμές του.* Το αποτέλεσμα είναι να αλλάζει η ανάλυση με την οποία γίνεται η αναπαράσταση, αλλά όχι η ακρίβειά της. Έτσι στο MATLAB

- Ένα συνεχές σήμα $x(t)$ απεικονίζεται με το διάνυσμα $[x(0), x(1), \ldots , x(L\text{-}1)]$ μήκους L, που προκύπτει από ακρωτηριασμό (περιορισμό της διάρκειάς του) στο διάστημα $[0, T]$ και δειγματοληψία στα σημεία $t_n, = nT_s$, όπου T_s η περίοδος δειγματοληψίας.
- Η συχνότητα δειγματοληψίας f_s=1/T_s επιλέγεται πολύ μεγαλύτερη από τη συχνότητα Nyquist, ώστε το δειγματοληπτημένο σήμα να «μοιάζει» με αναλογικό. Ένας πρακτικός κανόνας είναι 10 φορές η μέγιστη συχνότητα του σήματος.
- Η διάρκεια $T = LT_s$ του σήματος επιλέγεται αρκετά μεγάλη ώστε να έχουμε ικανοποιητική πληροφορία.
- Στο πεδίο συχνότητας το σήμα απεικονίζεται με διάνυσμα $[X(0), X(1), \ldots , X(N\text{-}1)]$ μήκους N που αντιστοιχεί σε N ισαπέχουσες διακριτές συχνότητες στο διάστημα $[0, f_s]$ με ανάλυση f_o=f_s/N=1/(NT_s).
- Συνήθως, λαμβάνουμε το N να είναι δύναμη του 2 μεγαλύτερη ή ίση από το μήκος L του σήματος για λόγους βελτιστοποίησης των υπολογισμών του FFT, παρότι στην πράξη N=L έχει ελάχιστη διαφορά στους χρόνους εκτέλεσης.
- Για την αμφίπλευρη αναπαράσταση στο πεδίο συχνοτήτων ολισθαίνουμε τις τιμές κατά f_s /2 προς τα αρνητικά, ώστε το μηδέν να βρεθεί στο μέσο του διαστήματος (αυτό γίνεται στο MATLAB με τη συνάρτηση `fftshift`).

Εξάσκηση

Δοκιμάστε στη συνέχεια τις παρακάτω εντολές στο παράθυρο εντολών του MATLAB. Στην προτροπή >> πληκτρολογείστε τις εντολές που ακολουθούν.

<u>2.0 Διαγράψτε το παρελθόν</u>

```
>>clear all        % διαγραφή του χώρου εργασίας
>>close all        % κλείσιμο όλων των γραφικών παραστάσεων
>>clc              % εκκαθάριση του παραθύρου εντολών
```

<u>2.1 Δημιουργήστε ένα ημιτονοειδές σήμα</u>

Εκτελέστε στο παράθυρο εντολών του MATLAB τις επόμενες εντολές:

```
>>Fs=1000;              % συχνότητα δειγματοληψίας 1000 Hz
>>Ts=1/Fs;              % περίοδος δειγματοληψίας
>>T=0.2;                % διάρκεια του σήματος 0.1 sec
>>t=0:Ts:T-Ts;          % χρονικές στιγμές δειγματοληψίας
>>A=1;                  % πλάτος σήματος
>>x=A*sin(2*pi*50*t);   % διάνυσμα σήματος
>>L=length(x);          % μήκος διανύσματος
>>plot(t,x)             % σχεδιάγραμμα συναρτήσει του χρόνου
>>pause                 % αναμονή για να δείτε το σχήμα
                        % πιέστε ένα πλήκτρο για να συνεχίσετε
```

<u>2.2 Σχεδιάστε τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier του ημιτονοειδούς σήματος</u>

```
>>N=1*L;               % μήκος μετασχηματισμού Fourier
```

```
>>Fo=Fs/N;              % ανάλυση συχνότητας
>>Fx=fft(x,N);          % Αριθμητικός υπολογισμός του διακριτού μετασχηματισμού
                        % Fourier (DFT) για N σημεία. Εάν το μήκος του x είναι
                        % μικρότερο του N, το x θα παραγεμισθεί με μηδενικά
                        % μέχρι το μήκος N, αλλιώς θα κολοβωθεί.
>>freq=(0:N-1)*Fo;      % διάνυσμα συχνοτήτων
>>plot(freq,abs(Fx))    % πλάτος του FFT
>>title('FFT')          % τίτλος διαγράμματος
>>pause                 % αναμονή, πιέστε ένα πλήκτρο για να συνεχίσετε
>>axis([0 100 0 L/2])% εμφάνιση στην περιοχή 0 έως 100 με κλίμακα 0 έως L/2
>>pause                 % αναμονή, πιέστε ένα πλήκτρο για να συνεχίσετε
```

2.3 Σχεδιάστε το περιοδόγραμμα

```
power = Fx.*conj(Fx)/Fs/L;   % Υπολογισμός πυκνότητας φασματικής ισχύος
                             % Εναλλακτικά, abs(x).^2
plot(freq,power)             % ισχύς ανά συνιστώσα συχνότητας
xlabel('Frequency (Hz)')     % λεζάντα στον άξονα x
ylabel('Power')              % λεζάντα στον άξονα y
title('{\bf Periodogram}')   % τίτλος διαγράμματος με παχιά γράμματα (\bf)
```

2.4 Υπολογίστε την ισχύ του ημιτονοειδούς σήματος

```
>>power_theory=A^2/2                 % ισχύς βάση της θεωρίας
>>dB=10*log10(power_theory)          % σε dB
>>power_time_domain=sum ...          % συνέχεια στην επόμενη γραμμή
(abs(x).^2)/L                        % υπολογισμός στο πεδίο του χρόνου
>>power_frequency_domain=sum ...     % συνέχεια στην επόμενη γραμμή
(power)*Fo                           % υπολογισμός στο πεδίο συχνότητας
```

2.5 Αποθηκεύστε την εργασία σας

Από το παράθυρο με το ιστορικό εντολών επιλέξτε τις εντολές που γράψατε πριν και αποθηκεύστε τις ως αρχείο M-file στο φάκελο εργασίας σας (My Documents\MATLAB). Χρησιμοποιήστε για το αρχείο το όνομα lab1_2_nnnnn.m, όπου nnnnn τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας (ποτέ μην ξεκινάτε την ονομασία αρχείων ή μεταβλητών με αριθμούς).

2.6 Πειραματισθείτε

Τώρα μπορείτε να εκτελέσετε το αρχείο, πληκτρολογώντας το όνομά του στο παράθυρο εντολών χωρίς την επέκταση .m. Επιβεβαιώστε ότι λειτουργεί σωστά, κάνοντας διορθώσεις εάν είναι αναγκαίο.

Στη συνέχεια θα πειραματισθείτε αλλάζοντας τις τιμές της συχνότητας δειγματοληψίας. Συγκρίνατε τα αποτελέσματα για τις τιμές f_s=500, 1000 και 2000 Hz. Ακολούθως, για f_s=1000 μεταβάλετε το μήκος του μετασχηματισμού Fourier. Συγκρίνατε τα αποτελέσματα για τις τιμές N=L, 2L, 4L και παρατηρείστε πώς εκδηλώνεται το φαινόμενο της φασματικής διαρροής. Προσέξτε πώς αλλάζει η πυκνότητα φάσματος ισχύος με την αύξηση του N.

Τέλος, πειραματισθείτε αλλάζοντας τη διάρκεια T του σήματος και θέτοντας N=2L. Συγκρίνατε τα αποτελέσματα για τις τιμές T=0.2, 0.5, 1 και παρατηρείστε πώς το φάσμα συγκλίνει προς τη συνάρτηση δέλτα.

2.7 Επιδείξτε τη σωστή λειτουργία του προγράμματός σας

Μέρος 3: Εφαρμογή Α

Στη συνέχεια θα εφαρμόσετε όσα μάθατε σε ένα πιο πολύπλοκο παράδειγμα παραγωγής σημάτων που περιλαμβάνει διαμόρφωση και προσθήκη θορύβου. Για ευκολία δίδεται ημιτελής κώδικας MATLAB με σχόλια, τον οποίο πρέπει να συμπληρώσετε και αποθηκεύσετε σε αρχείο M-file.

1. Ξεκινήστε το MATLAB.
2. Ανοίξτε ένα νέο αρχείο M-file.
3. Αντιγράψτε και επικολλήστε τον παρακάτω κώδικα.
4. Σώστε το αρχείο στο φάκελο εργασίας σας (My Documents\MATLAB) χρησιμοποιώντας ονομασία lab1_3_nnnnn.m, όπου nnnnn τα πέντε τελευταία νούμερα του αριθμού μητρώου σας.
5. Συμπληρώστε τα κενά στις εντολές και τα μέρη που λείπουν σύμφωνα με τις οδηγίες.
6. Τώρα μπορείτε να εκτελέσετε το αρχείο, πληκτρολογώντας το όνομά του στο παράθυρο εντολών (χωρίς την επέκταση .m).
7. Στον κώδικα υπάρχουν εντολές παύσης (pause). Όταν ο κώδικας συναντάει τέτοιες εντολές σταματάει η εκτέλεσή του και συνεχίζεται πατώντας οποιοδήποτε πλήκτρο.
8. Επιβεβαιώστε και επιδείξτε την ορθή λειτουργία του.
9. Αντιγράψτε τον κώδικα του 3ου μέρους (Part 3), καθώς και τα δύο σχήματα που θα παραχθούν, σε αρχείο κειμένου. Φροντίστε με τις κατάλληλες σμικρύνσεις όλα να χωρέσουν σε μία σελίδα, στην οποία να αναγράφεται και το ονοματεπώνυμό σας. Μπορεί να σας δοθούν διαφορετικές τιμές των βασικών παραμέτρων την ώρα του εργαστηρίου.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Part 1 Δημιουργήστε το σήμα
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

_________           % κλείστε όλες τις γραφικές παραστάσεις
_________           % καθαρίστε τον χώρο εργασίας
_________           % καθαρίστε το παράθυρο εντολών
Fs=1000;            % συχνότητα δειγματοληψίας 1000 Hz
Ts=____;            % περίοδος δειγματοληψίας
L=1000;             % μήκος σήματος (αριθμός δειγμάτων)
T=L*Ts;             % διάρκεια σήματος
t=0:Ts:(L-1)*Ts;    % χρονικές στιγμές υπολογισμού το σήματος

x=sin(2*pi*30*t)...             % ημιτονικό σήμα συχνότητας 30 Hz
 + 0.5*sin(2*pi*80*(t-2))...    % συνιστώσα 80 Hz
 + sin(2*pi*60*t);              % συνιστώσα 60 Hz

% Σχεδιάστε το σήμα στο πεδίο του χρόνου

figure(1)                       % άνοιγμα παραθύρου για γραφική παράσταση
plot(t,x)                       % γραφική παράσταση του σήματος
title('Time domain plot of x')  % τίτλος γραφικής παράστασης
xlabel('t (sec)')               % λεζάντα στον άξονα x
ylabel('Amplitude')             % λεζάντα στον άξονα y
pause                           % αναμονή, πιέστε ένα πλήκτρο για να συνεχίσετε
axis([0 0.3 -2 2])              % εμφάνιση του σήματος από 0 έως 0.3 sec και
                                % κλίμακα από -2 έως 2
pause                           % αναμονή, πιέστε ένα πλήκτρο για να συνεχίσετε
```

```
% Υπολογίστε τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier

N = 2^nextpow2(L);       % μήκος μετασχηματισμού Fourier.
                         % η nextpow2 βρίσκει τον εκθέτη της δύναμης του 2 που
                         % είναι μεγαλύτερη ή ίση από το όρισμα L
                         % εναλλακτικά, =ceil(log2(L))
Fo=____;                 % ανάλυση συχνότητας
f=(0:N-1)*Fo;            % διάνυσμα συχνοτήτων
X=________;              % αριθμητικός υπολογισμός του διακριτού μετασχηματισμού
                         % Fourier (DFT) για N σημεία

% Σχεδιάστε το σήμα στο πεδίο συχνότητας
% Αφού το σήμα είναι πραγματικό μπορείτε
% να σχεδιάσετε μόνο τις θετικές συχνότητες

figure(2)                            % άνοιγμα παραθύρου για γραφική παράστα-ση
plot(f(1:_____)),abs(X(1:_____)))    % γραφική παράσταση των θετικών συχνοτή-των
title('Frequency domain plot of x')  % τίτλος γραφικής παράστασης
xlabel('f  (Hz)')                    % λεζάντα στον άξονα x
ylabel('Amplitude')                  % λεζάντα στον άξονα y
pause                                % αναμονή για να δείτε το σχήμα
                                     % πιέστε ένα πλήκτρο για να συνεχίσετε

% για τη γραφική παράσταση του αμφίπλευρου φάσματος
% πρέπει να χρησιμοποιήσετε την fftshift ώστε ο όρος για
% τη συχνότητα μηδέν να μετακινηθεί στην αρχή των αξόνων
% δείτε help fftshift για περισσότερες λεπτομέρειες

figure(3)             % άνοιγμα παραθύρου για γραφική παράσταση
f=f-Fs/2;             % ολίσθηση συχνοτήτων προς τα αριστερά κατά -Fs/2
X=fftshift(X);        % ολίσθηση της μηδενικής συχνότητας στο κέντρο
                      % του φάσματος
                      % (ακολουθούν πολλές εντολές σε μια γραμμή)
plot(f,abs(X));title('Two sided spectrum of x'); xlabel('f  (Hz)');
ylabel('Amplitude')
pause                 % αναμονή, πιέστε ένα πλήκτρο για να συνεχίσετε

% Υπολογίστε την ισχύ

power=X.*conj(X)/N/L;         % υπολογισμός πυκνότητας ισχύος
figure(4)                     % άνοιγμα παραθύρου για γραφική παράσταση
plot(f,power)                 % ισχύς ανά συνιστώσα συχνότητα
xlabel('Frequency (Hz)')      % λεζάντα στον άξονα x
ylabel('Power')               % λεζάντα στον άξονα y
title('{\bf Periodogram}')    % τίτλος διαγράμματος με παχιά γράμματα
pause

disp('Part2')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Part 2 Προσθέστε θόρυβο στο σήμα
% Συμπληρώστε τον κώδικα για τη δημιουργία του σήματος θορύβου n με τη
% βοήθεια της συνάρτησης randn.
% Το διάνυσμα θορύβου n θα πρέπει να είναι του ίδιου μεγέθους με αυτό της
% ημιτονοειδούς κυματομορφής x του πρώτου μέρους. Δείτε help size.
% Σχεδιάστε το σήμα θορύβου στο διάστημα  από 0 έως 0.3 sec και κλίμακα
% από -2 έως 2
% Υπολογίστε το περιοδόγραμμα του n και σχεδιάστε την πυκνότητα φάσματος
% ισχύος του σήματος θορύβου.
% Προσθέστε το σήμα θορύβου και το x για να λάβετε το σήμα με θόρυβο s.
% Σχεδιάσατε το σήμα με θόρυβο s στο πεδίο του χρόνου στην περιοχή 0 έως
```

```
% 0.2 sec και κλίμακα από -2 έως 2 καθώς και το αμφίπλευρο φάσμα του
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

…
disp('Part3')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Part 3. Πολλαπλασιασμός σημάτων
% Συμπληρώστε τον κώδικα δημιουργίας ενός ημιτονοειδούς σήματος συχνότητας
% 100 Hz και πολλαπλασιάστε με το προηγούμενο σήμα s.
% Τα δύο σήματα θα πρέπει να είναι του ίδιου μεγέθους και να χρησιμοποιηθεί
% ο τελεστής  '.*' για ανά στοιχείο πολλαπλασιασμό.
% Σχεδιάστε το αποτέλεσμα στο πεδίο του χρόνου στην περιοχή 0 έως 0.2 sec
% και κλίμακα από -2 έως 2 καθώς και στο πεδίο της συχνότητας
% χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση  fftshift.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
…
```

Μέρος 4: Εφαρμογή Β[7]

Άσκηση 4.1

Να γραφεί σε MATLAB συνάρτηση φασματικής ανάλυσης, παρόμοια με την `pwelch()`: θα δέχεται ως είσοδο διάνυσμα πραγματικού σήματος καθώς και τη συχνότητα δειγματοληψίας, F_s, και θα σχεδιάζει τη μονόπλευρη φασματική πυκνότητα του σήματος στην περιοχή [0-F_s/2). Το σήμα θα τεμαχίζεται σε τμήματα μήκους ίσου με τη δύναμη του 2 την πλησιέστερη στο 1/8 του συνολικού του μήκους, αλλά όχι μικρότερου από 256. Τα τμήματα θα είναι επικαλυπτόμενα κατά 50%. Το τελευταίο τμήμα, εάν υπολείπεται σε μήκος των άλλων, θα αγνοείται. Θα υπολογίζεται με FFT το φάσμα κάθε τμήματος και θα λαμβάνεται η μέση τιμή όλων των τμημάτων. Η συνάρτηση να δοκιμαστεί με το σήμα του παραδείγματος 1.1 και να συγκριθεί το αποτέλεσμα με το αντίστοιχο της `pwelch()`.

Παραδοτέο

Ένα έγγραφο word ή open office με τον κώδικα MATLAB της εφαρμογής, καθώς και τα σχήματα με τη φασματική πυκνότητα του σήματος, υπολογισμένη (1) με την `pwelch()` του MATLAB, (2) με τη δική σας συνάρτηση.

Στον τίτλο των σχημάτων να είναι «τυπωμένο» και το ονοματεπώνυμό σας (μέσα από τον κώδικα MATLAB).

[7] Προαιρετικό. Για όσους είναι ήδη εξοικειωμένοι με το MATLAB και μπορούν να διατρέξουν εν τάχει το Μέρος 3.