A DYNAMICAL SYSTEM FOR NEIGHBORHOODS IN PLANT COMMUNITIES

Подготовили Потоцкий Михаил и Пановицына Анастасия

Модель Дикмана-Лоу

- одно или несколько сообществ неподвижных видов (например, растений);
- пренебрегаем размерами особи на масштабах рассматриваемого ареала обитания;
- индивид испытывает на себе неблагоприятные внешние условия;
- каждый индивид может порождать новые особи этого вида.

Базовые стохастические события

1. Передвижение (m)
2. Смерть (d)
3. Рождение потомка (b)

Передвижение

- Передвижение у растений хоть и ограничено, но все же иногда оно может происходить
- Вероятность на единицу времени того, что представитель вида i, находящийся в точке x, передвинется в точку x’:

$$M_i(x, x', p) = m_i(x' - x)$$

Вероятность смерти растения в точке x в заданном паттерне p

$$D_i(x, p) = d_i + \sum_j \left[d_{ij} \int w_{ij}^{(d)}(x' - x) \times [p_j(x') - \delta_{ij} \times \delta_x(x')] \, dx' \right].$$

d_i -компонента смерти(единая для всех представителей вида i)

d_{ij} -зависимость смертности вида i от представителей вида j в некоторой окрестности

$w_{ij}^{(d)}(x' - x)$ -функция, оценивающая влияние на смертность в зависимости от расстояния

δ_{ij} - символ кронекера

$\delta_x(x')$ - дельта функция Дирака

Вероятность рождения растениемм в точке x потомка в точке x’ в заданном паттерне p

$$B_i(x, x', p)$$

$$= \left(b_i + \sum_j \left[b_{ij} \int w_{ij}^{(b)}(x'' - x) \right.\right.$$

$$\left.\left. \times [p_j(x'') - \delta_{ij} \times \delta_x(x'')]\, dx'' \right] \right)$$

$$\times\, m_i^{(b)}(x' - x). \qquad (3)$$

Обозначения схожи

Пример

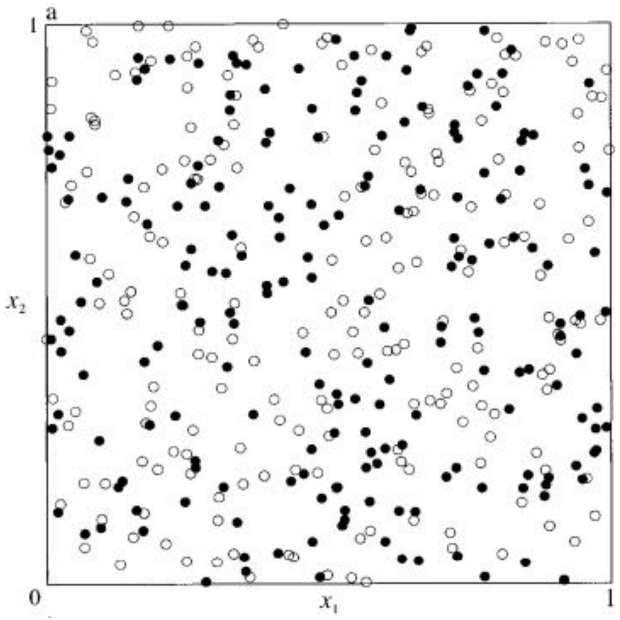
TABLE 1. Nonzero parameters used in defining a community of two competing species.

State	Parameter	Value for species i	
		$i = 1$	$i = 2$
Death	d_i	0.2	0.2
	d_{i1}	0.001	0.002
	d_{i2}	0.0005	0.001
	$r_{i1}^{(d)}$	0.12	0.12
	$r_{i2}^{(d)}$	0.12	0.12
	$s_{i1}^{(d)}$	0.03	0.03
	$s_{i2}^{(d)}$	0.03	0.03
Birth	b_i	0.4	0.4
	$r_i^{(bm)}$	0.12	0.5
	$s_i^{(bm)}$	0.03	0.2

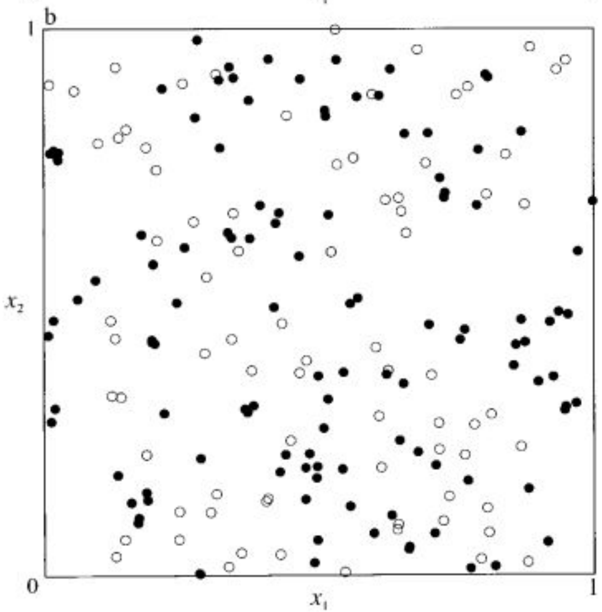
Note: Parameters are defined in *A stochastic birth–death–movement process*.

- Возьмем сообщество из двух видов (с параметрами из таблицы)
- Передвижение только путем рассеивания семян
- Окружение влияет только на смертность
- Первый вид доминирует и выселяет второй вид из определенной окрестности
- Семена второго растения могут разлетаться дальше

Запуск модели(200 представителей двух видов)



в момент времени 0



в момент времени 5

Первый и второй моменты

- Первые пространственные моменты: обозначаю $N_j(t)$ и несут смысл средней плотности вида j в конкретный момент времени.
- Вторые пространственные моменты: обозначаю $C_{ij}(x,t)$ и несут смысл смысл средней плотности пар индивидов, в которой первая особь принадлежит виду i , а вторая виду j и сдвинута относительно первой особи на вектор x.

Обратимся к формулам

$$N_i(p) = \frac{1}{A}\int p_i(x)\,dx$$ – первый момент паттерна p;

$$C_{ij}(\xi, p) = \frac{1}{A}\int p_i(x) \times [p_j(x+\xi) - \delta_{ij} \times \delta(\xi)]\,dx.$$

Это включает в себя произведение плотности особей вида i и особей вида j на расстоянии $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ от i, усредненное по региону из области A.

$\delta_{ij} \times \delta(\xi)$ вычитается, чтобы удалить ложный член, возникающий из собственной пары в i = j и $\xi = (0, 0)$.

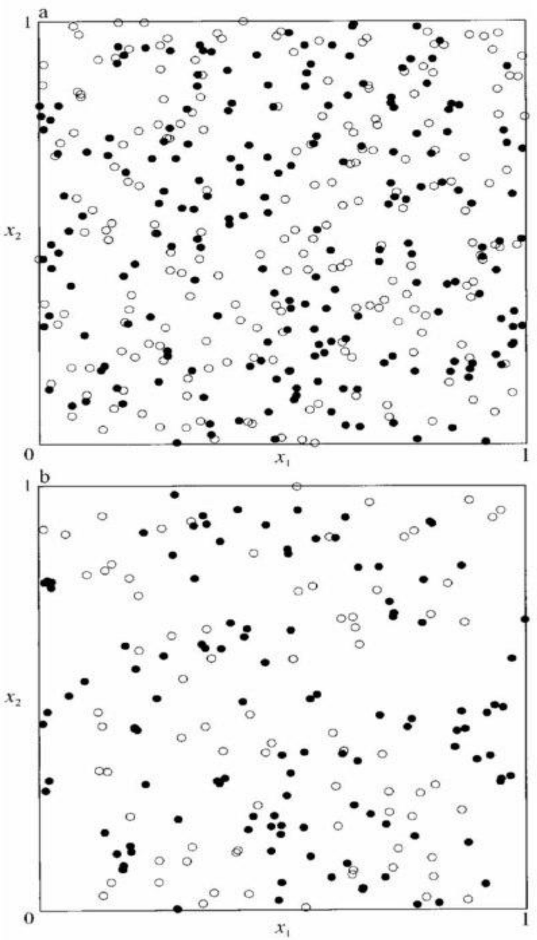


рисунок 2(a: в момент времени 0, b: в момент времени 5)

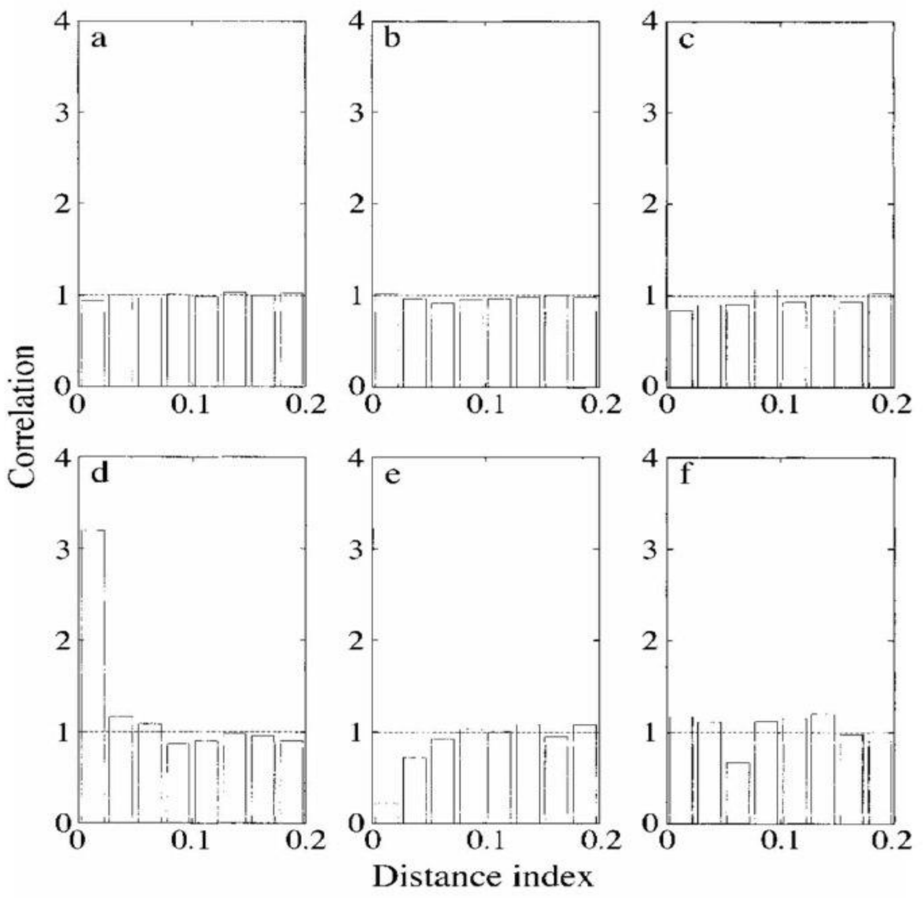


рисунок 3(корреляционные функции)

Третий момент

$$N_i = \int P(p) \times N_i(p)\, dp \tag{6}$$

$$C_{ij}(\xi) = \int P(p) \times C_{ij}(\xi, p)\, dp \tag{7}$$

$$\begin{aligned} T_{ijk}&(\xi, \xi', p) \\ &= \frac{1}{A} \int \{p_i(x) \times [p_j(x + \xi) - \delta_{ij} \times \delta(\xi)] \\ &\qquad \times [p_k(x + \xi') - \delta_{ik} \times \delta(\xi') \\ &\qquad - \delta_{jk} \times \delta(\xi - \xi')]\}\, dx. \end{aligned} \tag{8}$$

$$T_{ijk}(\xi, \xi') = \int P(p) \times T_{ijk}(\xi, \xi', p)\, dp. \tag{9}$$

Динамика моментов

Надо продифференцировать 6 и 7

$$N_i = \int P(p) \times N_i(p)\, dp \qquad (6)$$

$$C_{ij}(\xi) = \int P(p) \times C_{ij}(\xi, p)\, dp \qquad (7)$$

$$\frac{d}{dt}N_i = (b_i - d_i) \times N_i + \sum_j b_{ij} \times W_{ij}^{(b)} - \sum_j d_{ij} \times W_{ij}^{(d)} \qquad (10)$$

where

$$W_{ij}^{(b)} = \int w_{ij}^{(b)}(\xi') \times C_{ij}(\xi')\, d\xi' \quad \text{and}$$

$$W_{ij}^{(d)} = \int w_{ij}^{(d)}(\xi') \times C_{ij}(\xi')\, d\xi'.$$

-Дифференциал первого момента по времени

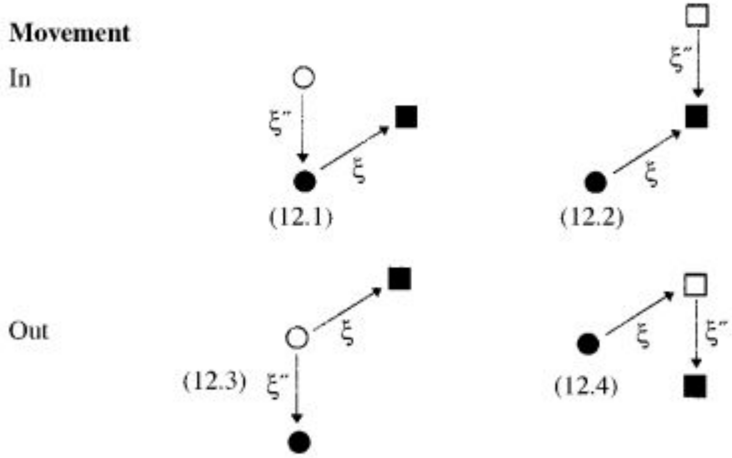
Динамика второго момента

Отслеживание кол-ва пар представителей ij, где j на расстоянии ξ от i. Для удобства разобьем на несколько составляющих.

$$\frac{d}{dt}C_{ij}(\xi) = (\text{Movements}) + (\text{Deaths}) + (\text{Births}) + (\text{Corrections}).$$

Movement

$$
\begin{aligned}
(\text{Movements}) = &+\int m_i(\xi'') \times C_{ij}(\xi + \xi'')\, d\xi'' && (12.1)\\
&+\int m_j(\xi'') \times C_{ji}(-\xi + \xi'')\, d\xi'' && (12.2)\\
&- |m_i| \times C_{ij}(\xi) && (12.3)\\
&- |m_j| \times C_{ji}(-\xi). && (12.4)
\end{aligned}
$$



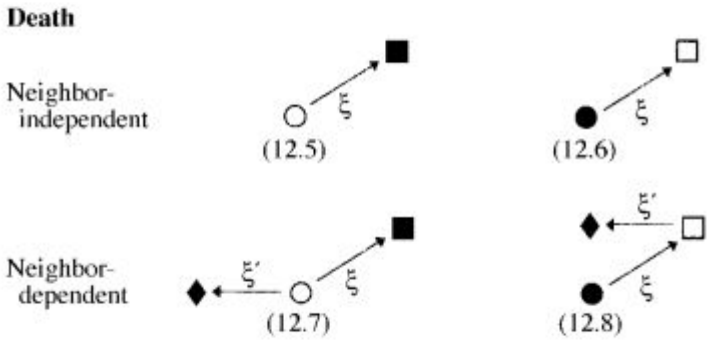
Death

$$\text{(Deaths)} = -d_i \times C_{ij}(\xi) \qquad (12.5)$$

$$-d_j \times C_{ji}(-\xi) \qquad (12.6)$$

$$-\sum_k d_{ik} \int w_{ik}^{(d)}(\xi') \times T_{ijk}(\xi, \xi')\, d\xi' \qquad (12.7)$$

$$-\sum_k d_{jk} \int w_{jk}^{(d)}(\xi') \times T_{jik}(-\xi, \xi')\, d\xi'. \qquad (12.8)$$



Birth

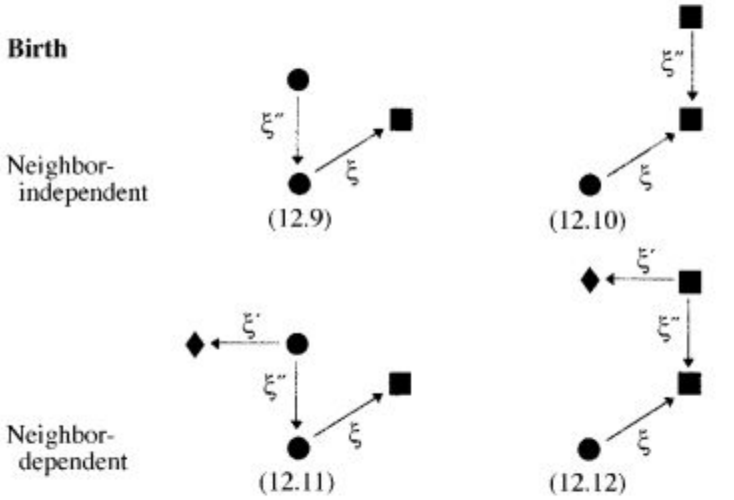
(Births)

$$= +b_i \times \int m_i^{(b)}(\xi'') \times C_{ij}(\xi + \xi'')\, d\xi'' \qquad (12.9)$$

$$+b_j \times \int m_j^{(b)}(\xi'') \times C_{ji}(-\xi + \xi'')\, d\xi'' \qquad (12.10)$$

$$+ \sum_k b_{ik} \times \int w_{ik}^{(b)}(\xi') \times \int m_i^{(b)}(\xi'') \times T_{ijk}(\xi + \xi'', \xi')\, d\xi''\, d\xi' \qquad (12.11)$$

$$+ \sum_k b_{jk} \times \int w_{jk}^{(b)}(\xi') \times \int m_j^{(b)}(\xi'') \times T_{jik}(-\xi + \xi'', \xi')\, d\xi''\, d\xi'. \qquad (12.12)$$



Corrections

$$
\begin{aligned}
\text{(Corrections)} \\
&= -d_{ij} \times w_{ij}^{(d)}(\xi) \times C_{ij}(\xi) && (12.13) \\
&\quad -d_{ji} \times w_{ji}^{(d)}(-\xi) \times C_{ji}(-\xi) && (12.14) \\
&\quad + \delta_{ij} \times m_i^{(b)}(-\xi) \times b_i \times N_i && (12.15) \\
&\quad + \delta_{ji} \times m_j^{(b)}(\xi) \times b_j \times N_j && (12.16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \delta_{ij} \times m_i^{(b)}(-\xi) \times \sum_k b_{ik} \\
&\quad \times \int w_{ik}^{(b)}(\xi') \times C_{ik}(\xi')\, d\xi' && (12.17) \\
&+ \delta_{ji} \times m_j^{(b)}(\xi) \times \sum_k b_{jk} \\
&\quad \times \int w_{jk}^{(b)}(\xi') \times C_{jk}(\xi')\, d\xi' && (12.18) \\
&+ b_{ij} \int w_{ij}^{(b)}(\xi + \xi'') \times m_i^{(b)}(\xi'') \\
&\qquad \times C_{ij}(\xi + \xi'')\, d\xi'' && (12.19) \\
&+ b_{ji} \int w_{ji}^{(b)}(-\xi + \xi'') \times m_j^{(b)}(\xi'') \\
&\qquad \times C_{ji}(-\xi + \xi'')\, d\xi''. && (12.20)
\end{aligned}
$$

Делаем замкнутую динамическую систему

Пока у нас система из двух уравнений не является замкнутой, так как зависит от третьего момента. Нужно сделать какое-то приближение. Один из возможных вариантов:

$$T_{ijk}(\xi, \xi') = \frac{C_{ij}(\xi) \times C_{ik}(\xi')}{N_i}.$$

Пример

$$\frac{d}{dt}N_i = (b_i - d_i) \times N_i + \sum_j b_{ij} \times W_{ij}^{(b)} - \sum_j d_{ij} \times W_{ij}^{(d)} \tag{10}$$

$$(\text{Deaths}) = -d_i \times C_{ij}(\xi) \tag{12.5}$$

$$-d_j \times C_{ji}(-\xi) \tag{12.6}$$

$$-\sum_k d_{ik} \int w_{ik}^{(d)}(\xi') \times T_{ijk}(\xi, \xi')\, d\xi' \tag{12.7}$$

$$-\sum_k d_{jk} \int w_{jk}^{(d)}(\xi') \times T_{jik}(-\xi, \xi')\, d\xi'. \tag{12.8}$$

(Births)

$$= +b_i \times \int m_i^{(b)}(\xi'') \times C_{ij}(\xi + \xi'')\, d\xi'' \tag{12.9}$$

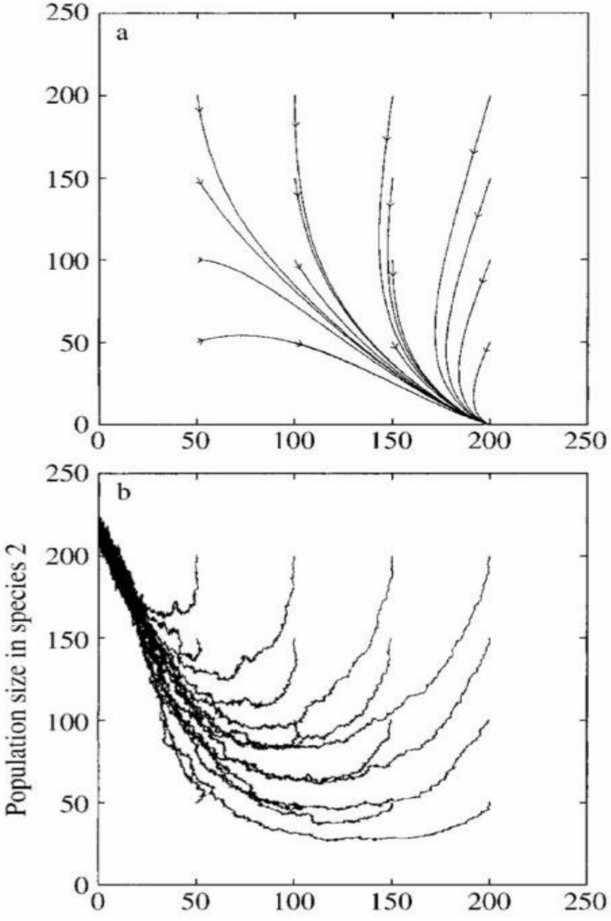
$$+b_j \times \int m_j^{(b)}(\xi'') \times C_{ji}(-\xi + \xi'')\, d\xi'' \tag{12.10}$$

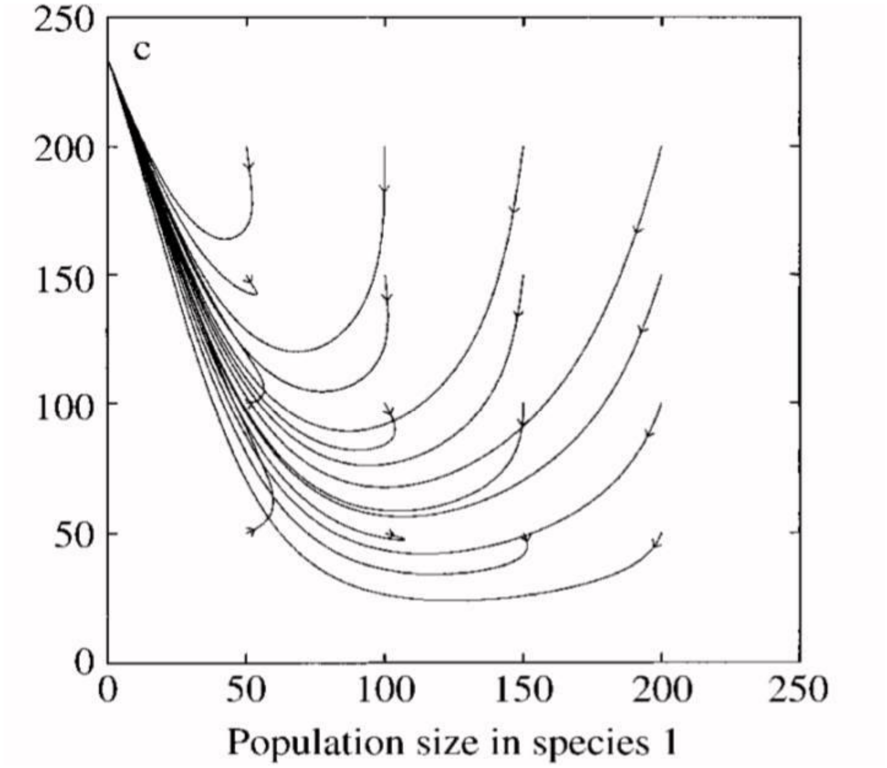
$$+ \sum_k b_{ik}$$

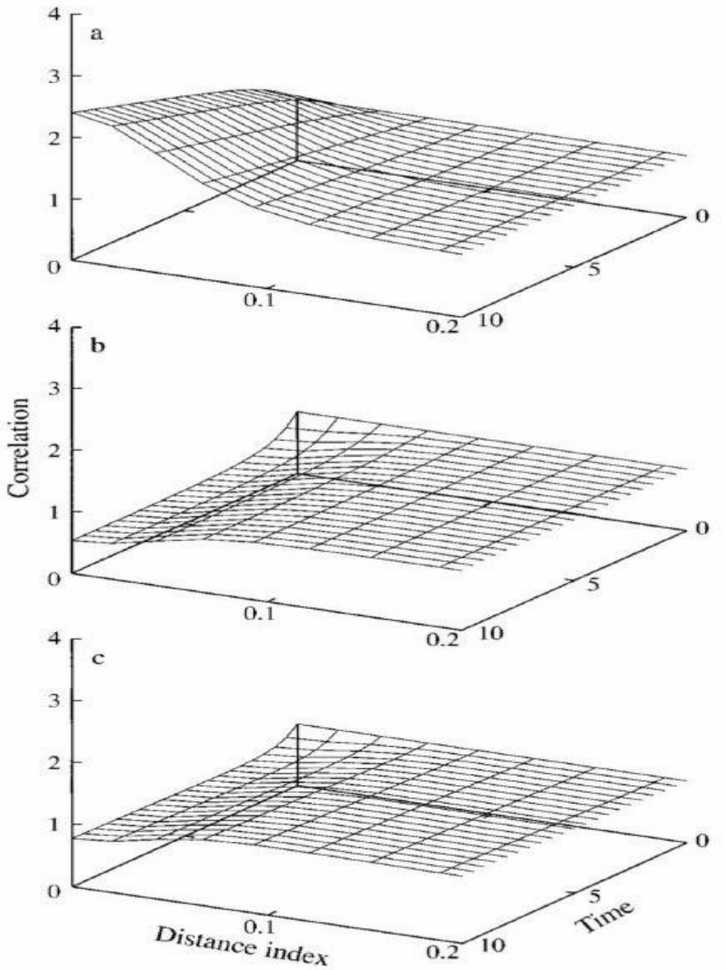
$$\times \int w_{ik}^{(b)}(\xi') \times \int m_i^{(b)}(\xi'') \times T_{ijk}(\xi + \xi'', \xi')\, d\xi''\, d\xi' \tag{12.11}$$

$$+ \sum_k b_{jk}$$

$$\times \int w_{jk}^{(b)}(\xi') \times \int m_j^{(b)}(\xi'') \times T_{jik}(-\xi + \xi'', \xi')\, d\xi''\, d\xi'. \tag{12.12}$$




250
200
150
100
50
0
c
0
50
100
150
200
250
Population size in species 1


a
b
c
Correlation
Distance index
Time
0.1
0.2
0
5
10

Основные выводы

- Метод моментов помогает достаточно точно фиксировать динамику окрестностей в растительных сообществах, поэтому является хорошим приближением описанной ранее модели.
- Влияние пространственной структуры на динамику очень сильно (в примере слабейший вид выжил, а сильнейший был обречен на вымирание)