Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра общей математики

Николаев Михаил Викторович

# Исследование нелинейного интегрального уравнения, возникающего в модели биологических сообществ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**Научный руководитель:**
к.ф.-м.н., доцент
Никитин А.А.

Москва, 2019

# Содержание

# 1 Введение

В данной работе рассматривается модель самоструктурирующихся биологических сообществ, предложенная Ульфом Дикманом и Ричардом Лоу в [3], [4] и являющаяся обобщением модели, описанной в [5]. Ее преимущестовм является использование информации о пространственной структуре сообщества. Модель учитывает поведение каждого индивида и его влияние на всю популяцию в целом, что позволяет более эффективно описывать динамику популяции и взаимодействие видов во многовидовых сообществах между собой. Для сравнения: модель Лотки–Вольтерры (см. [2]), которая описывает взаимодействие двух видов, один из которых является хищником, а другой — жертвой, не может учесть кластеризацию в пространственной структуре распределения двух видов на общем ареале сосуществования.

Главным предметом изучения в текущей работе является нелинейное интегральное уравнение, описывающее одновидовое стационарное биологическое сообщество. Оно естественным образом возникает при описании динамики популяции индивидов с использованием так называемых пространственных моментов, определение которых будет дано ниже. Идея такого описания опирается на тот факт, что в рассматриваемой модели сообщество можно эффективно исследовать при помощи его усредненных пространственных характеристик.

Основной целью работы является исследование вопросов о существовании и единственности решения вышеуказанного нелинейного интегрального уравнения. Это исследование проводится путем построения нелинейного интегрального оператора, порожденного уравнением, для которого решается задача о нахождении неподвижных точек.

# 2 Описание модели биологических сообществ

Прежде чем приступать к описанию модели биологических сообществ отметим, что все термины и понятия, касающиеся данной модели и приведенные в этой работе, взяты из оригинальных статей ([3], [4]). Однако им был придан более строгий и корректный математический характер без изменения основных идей.

Рассматривается некоторая популяция неподвижных организмов в определенной области $A \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$. Примерами таких популяций могут служить сообщества растений, грибов или некоторых видов фитопланктона (фитопланктон движется вместе с водой, поэтому относительно воды он остается неподвижным). При этом предполагается, что мера области $A$ конечна и отлична от нуля. Все индивиды являются материальными точками и ничем не отличаются друг от друга, кроме положения в пространстве. Множество позиций всех индивидов обозначим за $X$ и будем называть конфигурацией сообщества. Ясно, что это множество зависит от времени, то есть $X = X(t)$. Вообще говоря, на одном ареале могут сосуществовать несколько различных видов с различными характеристиками, но в данной работе будет рассмотрен одновидовой случай.

Время в модели непрерывно, и в каждый момент могут произойти два события, которые мы будем называть основными событиями модели: рождение нового индивида или смерть существующего индивида. Особи в сообществе могут умирать из-за неблагоприятных условий среды или из-за конкуренции с другими особями. Подразумевается, что среда изотропна и действует на индивидов независимо от их положения. Смертность из-за неблагоприятных условий среды задается неотрицательной константой $d$. Рождение новых индивидов и конкуренция описываются соответствующими функциями $m(x)$ и $\omega(x)$, которые называются ядрами рождения (движения) и конкуренции. Это сферически симметричные функции, удовлетворяющие следующим требованиям:

$$m(x) \geqslant 0, \int\limits_{\mathbb{R}^n} m(x)\, dx = 1, \lim_{|x|\to+\infty} m(x) = 0,$$

$$\omega(x) \geqslant 0, \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x)\, dx = 1, \lim_{|x|\to+\infty} \omega(x) = 0.$$

Здесь и далее под величиной $|x|$ в многомерном случае понимается длина вектора $x$. Ядра рождаемости и конкуренции можно рассматривать как плотности вероятностей некоторых случайных величин, описывающих, соответственно, процесс рождения новых и процесс смерти уже живущих особей. Конкретно, индивид, находящийся в точке $\xi$, может породить новую особь в точке $\xi'$ с вероятностью $m(\xi - \xi')$; индивид, находящийся в точке $\eta$, может убить особь, находящуюся в точке $\eta'$, с вероятностью $\omega(\eta - \eta')$.

Таким образом, ядра конкуренции и рождаемости описывают пространственную структуру конкуренции и рассеивания индивидов в процессе рождения. За описание количественных характеристик основных событий модели отвечают неотрицательные вещественные параметры $b$ и $d'$, которые несут смысл плодовитости и агрессивности вида соответственно.

Основная проблема использования конфигурации сообщества состоит в стохастичности данной модели. Действительно, каким бы малым не было число $\varepsilon > 0$, зная множество $X' = X(t - \varepsilon)$, мы не сможем узнать, каким будет множество $X = X(t)$. Это не позволяет судить о том, как характеристики вида влияют на сообщество и его изменение во времени. Для решения этой проблемы вводятся усредненные величины, описывающие популяцию.

Зафиксируем момент времени $t_0$ и рассмотрим множество $X = X(t_0)$. Обозначим через $\mathbb{1}_{X\cap A}(x)$ характеристическую функцию множества $X \cap A$, а именно функцию, определяемую выражением

$$\mathbb{1}_{X\cap A}(x) = \begin{cases} 1,\ x \in X \cap A, \\ 0,\ x \notin X \cap A. \end{cases}$$

Фактически эта функция является индикатором того, что в конкретной точке области $A$ находится особь из сообщества (при этом все особи, которые не находятся в рассматриваемой области, исключаются из рассмотрения).

**Определение 1.** *Корелляционной плотностью порядка $m$ в области $A$ при фиксированной конфигурации сообщества $X$ называется функция*

$$C_m(\xi_1,\, \xi_2\, \ldots\, \xi_{m-1},\, X) = \frac{1}{\mu(A)} \sum_{x \in X\cap A} \mathbb{1}_{X\cap A}(x) \prod_{k=1}^{m-1} \mathbb{1}_{X\cap A}(x+\xi_k).$$

Здесь и всюду далее под $\mu(A)$ понимается мера множества $A$. Для конкретной конфигурации сообщества корреляционная плотность порядка $m$ является некоторой количественной характеристикой групп из $m$ особей, живущих в области $A$, в которых сдвиг второй особи относительно первой равен $\xi_1$, сдвиг третьей особи относительно первой равен $\xi_2$ и т.д. Например, видно, что $C_1(X)$ — это просто средняя плотность особей в области $A$, а $C_2(\xi,\, X)$ — это деленное на меру области $A$ количество пар особей, в которых сдвиг второго индивида относительно первого равен $\xi$.

Нетрудно показать, что корелляционная плотность порядка $m$ полностью описывает сообщество из $m$ особей, живущих на области $A$, для конкретной конфигурации $X$ с точностью до сдвига и поворота области $A$. Действительно, предположим, что $X\cap A = \{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m\}$ и рассмотрим векторы сдвигов $x_i^j = x_j - x_i$. Тогда очевидно, что функция $C_m^X(\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_{m-1}) = C_m(\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_{m-1},\, X)$ будет иметь глобальные максимумы в точках $(x_1^2,\, x_1^3,\, \ldots,\, x_1^m)$, $(x_2^1,\, x_2^3,\, \ldots,\, x_2^m)$, $\ldots$, $(x_m^1,\, x_m^2,\, \ldots,\, x_m^{m-1})$. Это действительно так, поскольку в сообществе из $m$ существ найдется максимум одна группа из $m$ различных особей, расстояния между индивидами в которой соответствует заданным сдвигам. При этом, если аргументы корелляционной плотности равны реальным сдвигам особей, то функция $C_m^X$ будет равна $\dfrac{1}{\mu(A)}$, в противном случае, она обратится в ноль. Таким образом, зная функцию $C_m$ при фиксированной конфигурации $X$, можно найти сдвиги $x_i^j$, а зная их, можно найти $X\cap A$ с точностью до сдвига и поворота.

Вообще говоря, формально корректно рассматривать, например, пару особей, в которой первый и второй индивид совпадают, однако намного удобнее такие "пары" исключать из рассмотрения. Для этого корелляционные плотности корректируют так, чтобы они равнялись нулю в случае рассмотрения групп особей, в которых есть повторения. Перед проведением коррекции заметим, что с точки зрения математической постановки в группе из $m$ особей есть повторения тогда и только тогда, когда среди аргументов $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_{m-1}$ функции $C_m(\xi_1,\, \xi_2\, \ldots\, \xi_{m-1},\, X)$ существуют либо равные нулю, либо одинаковые величины. Данное утверждение следует из того, что аргументы корелляционной плотности суть сдвиги особей относительно первого индивида. Введем функцию $\lambda(x)$ по правилу

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0,\ |x| = 0, \\ 1,\ |x| \neq 0. \end{cases}$$

Используя данную функцию, можно определить скорректированные корелляционные плотности.

**Определение 2.** *Скорректированной корелляционной плотностью порядка $m$ в области $A$ при фиксированной конфигурации сообщества $X$ называется функция*

$$\widetilde{C}_m(\xi_1,\, \xi_2 \dots \xi_{m-1},\, X) = C_m(\xi_1,\, \xi_2 \dots \xi_{m-1},\, X) \prod_{k=1}^{m-1} \lambda(\xi_k) \prod_{k=1}^{m-2} \prod_{j=k+1}^{m-1} \lambda(\xi_k - \xi_j),$$

*где $C_m(\xi_1,\, \xi_2 \dots \xi_{m-1},\, X)$ — корелляционная плотность порядка $m$ в области $A$.*

Как было отмечено, корелляционная плотность порядка $m$ описывает сообщество из $m$ особей почти также, как и его конфигурация (за исключением возможных сдвигов и поворотов области, которые в случае гомогенной среды обитания не играют роли). Однако корелляционные плотности можно попытаться осреднить, тем самым избавившись от стохастичности и перейдя к детерминированным величинам.

**Определение 3.** *Пространственным моментом порядка $m$ в области $A$ назывется математическое ожидание скорректированной корелляционной плотности порядка $m$ по всевозможным конфигурациям сообщества, то есть функция вида*

$$C_m(\xi_1,\, \xi_2,\, \dots,\, \xi_{m-1}) = \int\limits_{\mathcal{P}} \widetilde{C}_m(\xi_1,\, \xi_2,\, \dots,\, \xi_{m-1},\, X)\, dP(X).$$

*Здесь $\mathcal{P}$ — вероятностное пространство на множестве всевозможных конфигураций сообщества, а $P(X)$ — вероятностная мера в этом пространстве.*

Пространственные моменты обозначаются теми же буквами, что и корелляционные плотности, однако это не вызывает путаницы, так как моменты не зависят от конкретной конфигурации, а значит, имеют на один аргумент меньше. Таким образом, мы осуществили переход к детерминированным величинам, что существенно упрощает исследование сообщества.

# 3 Случай области бесконечной меры

Всюду ранее мы предполагали, что мера области $A \subset \mathbb{R}^n$ отлична от нуля и конечна. Предположим теперь, что сообщество каким-то образом распределено на области бесконечной меры (например, на всем пространстве $\mathbb{R}^n$).

Нам придется доопределить понятие корелляционной плотности порядка $m$. Учтем, что каждая из них зависит, помимо прочего, еще и от рассматриваемой области, то есть $C_m(\xi_1,\, \xi_2,\, \dots,\, \xi_{m-1},\, X) = C_m(\xi_1,\, \xi_2,\, \dots,\, \xi_{m-1},\, X;\, A)$. Действительно, как бы индивиды не были рассеяны в пространстве, с помощью выбора области $A$ мы можем рассматривать только часть сообщества. Значит, мы можем взять последовательность областей конечной меры, которая в некотором смысле "стремится" к области бесконечной меры, а затем доопределить корелляционную плотность как соответствующий предел функций. Отметим тот факт, что конфигурация сообщества в таком случае будет задана заранее для всей области $A$ и не будет зависеть от конкретной ее подобласти.

**Определение 4.** *Исчерпыванием области $A \subset \mathbb{R}^n$ конечной или бесконечной меры будем называть счетное семейство множеств $\mathcal{D} = \{D_k\}_{k=1}^{+\infty}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1. $\forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow$ *множество $D_k$ — открытое связное подмножество $A$ конечной меры*
2. $\forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \overline{D_k} \subset D_{k+1}$
3. $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} D_k = A$

Например, в качестве исчерпывания всего пространства $\mathbb{R}^n$ можно взять систему открытых шаров с общим центром, радиусы которых равны натуральным числам. Отметим, что данная система не универсальна и не позволяет исчерпать, например, бесконечную полосу на плоскости в случае $n = 2$.

Теперь, используя исчерпывания, мы можем расширить понятие корелляционной плотности на случай распределения особей в области бесконечной меры.

**Определение 5.** *Пусть сообщество индивидов распределено на области $A \subset \mathbb{R}^n$ бесконечной меры, а $\mathcal{D} = \{D_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — исчерпывание этой области. В таком случае корелляционной плотностью порядка $m$ назовем следующую величину*

$$C_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, X; A) = \lim_{k \to +\infty} C_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, X; D_k).$$

Далее аналогично случаю области конечной меры вводятся пространственные моменты, как математические ожидания соответствующих скорректированных корелляционных плотностей по пространству всевозможных конфигураций $X$. Для упрощения записи всюду, где это не вызовет недопонимания, мы не будем обозначать их зависимость от рассматриваемой области.

В рамках модели подразумевается, что, как и в реальном мире, любое биологическое взаимодействие имеет лишь конечный радиус. Данный факт означает, что в сообществах, распределенных на области бесконечной меры, в среднем не могут существовать устойчивые бесконечно большие пространственные структуры. Иными словами, если взаимные расстояния в группах из $m$ особей станут больше некоторого конечного значения, то плотность распределения таких групп в области окажется равномерной в силу изотропности среды и отсутствия силы взаимодействия между индивидами. В терминах конфигураций сообщества этот факт означает, что вероятность появления конфигурации $X$, в котором группы из $m$ достаточно далеко отдаленных друг от друга особей распределены в области неравномерно, нулевая. Тогда получим, что для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется такое положительное число $r_m$, что для любого набора точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1} \in \mathbb{R}^n$ такого, что $|\xi_j| > r_m,\ j = \overline{1, m-1}$, верно следующее условие

$$C_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}) = q \equiv \text{const}.$$

Найдем константу $q$. Вообще говоря, из определения пространственных моментов в общем случае нетрудно понять, что для любого исчерпывания $\mathcal{D}$ области $A$ имеет место следующее условие:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\left(\mu(D_k)\right)^{m-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\cdots\int\limits_{\mathbb{R}^n} C_m(\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_{m-1};\,D_k)\,d\xi_1\,d\xi_2\,\ldots\,d\xi_{m-1} = N^m. \tag{1}$$

Действительно, количество всевозможных групп из $m$ особей, находящихся на всех возможных расстояниях друг от друга, в сумме дает не что иное, как $m$-ю степень количества всех особей. Корректировка, заключающаяся в исключении из рассмотрения групп, в которых некоторые особи совпадают, на интеграл, в конечном итоге, не влияет, а значит, для усреднения таких величин утверждение остается верным с точностью до нормировки. Нормировка здесь, очевидно, сводится к делениию результирующей величины на $(m-1)$-ю степень меры рассматриваемой подобласти ареала распределения сообщества. Отметим, что в (1) интеграл понимается в обычном смысле, а не в смысле повторного интеграла.

Обозначим $B_{r_m} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ |\xi| \leqslant r_m\}$. Приведенный выше предел можно переписать в виде

$$\lim_{k\to+\infty} \left( \frac{1}{\left(\mu(D_k)\right)^{m-1}} \int\limits_{\left(B_{r_m}\right)^{m-1}} C_m(\xi;\,D_k)\,d\xi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\left(\mu(D_k)\right)^{m-1}} \int\limits_{\left(\mathbb{R}^n\right)^{m-1}\setminus\left(B_{r_m}\right)^{m-1}} C_m(\xi;\,D_k)\,d\xi \right) = N^m. \tag{2}$$

Здесь для упрощения записи введен вектор переменных $\xi = \left(\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_{m-1}\right)$. Поскольку область $A$ имеет бесконечную меру, то, начиная с некоторого номера $k_0$, множества $D_k$ будут иметь диаметр больше $r_m$. Под диаметром здесь подразумевается супремум всевозможных расстояний между парами точек множества. Это значит, что

$$\forall k \geqslant k_0 \Longrightarrow \int\limits_{\left(B_{r_m}\right)^{m-1}} C_m(\xi;\,D_k)\,d\xi = \int\limits_{\left(B_{r_m}\right)^{m-1}} C_m(\xi;\,D_{k_0})\,d\xi \equiv \mathrm{const}.$$

Однако $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\mu(D_k)\right)^{m-1} = +\infty$. В таком случае предел (2) эквивалентен пределу

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\left(\mu(D_k)\right)^{m-1}} \int\limits_{\left(\mathbb{R}^n\right)^{m-1}\setminus\left(B_{r_m}\right)^{m-1}} C_m(\xi;\,D_k)\,d\xi = N^m.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\left(\mathbb{R}^n\right)^{m-1}\setminus\left(B_{r_m}\right)^{m-1}} C_m(\xi;\, D_k)\, d\xi = \frac{q}{\mu(D_k)}\cdot\mu(\Omega_k).$$

Здесь под множеством $\Omega_k$ подразумевается множество, на котором функция $C(\xi;\, D_k)$ не равна нулю при $|\xi| > r_m$. Понятно, что мера множества $\Omega_k$ отличается от $\Big(\mu(D_k)\Big)^{m-1}$ не более, чем на константу, равную $\Big(\mu(B_{r_m})\Big)^{m-1}$. Это означает, что в пределе при $k\to+\infty$ отношение $\dfrac{\mu(\Omega_k)}{\Big(\mu(D_k)\Big)^{m-1}}$ стремится к единице. Тогда получим, что $q = N^m$.

Итак, можно утверждать, что

$$\lim_{\substack{|\xi_1|\to+\infty\\ |\xi_2|\to+\infty\\ \cdots\\ |\xi_{m-1}|\to+\infty}} C_m(\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_{m-1}) = N^m.$$

В частности,

$$\lim_{|x|\to+\infty} C(x) = N^2. \tag{3}$$

Данное условие нам понадобится далее.

# 4 Оператор равновесия

Далее, чтобы не перегружать выкладки индексами, будем обозначать пространственные моменты первого, второго и третьего порядков через $N$, $C$ и $T$ соответственно.

Пространственные моменты на самом деле зависят еще и от времени. Эта зависимость заключена в функции $P(X)$ в том смысле, что в каждый момент времени вероятность появления конфигурации $X$ различна. Таким образом, можно говорить о динамике пространственных моментов, то есть их изменении во времени. Данный процесс был описан в [4], в этой же работе была выведена система интегро–дифференциальных уравнений динамики первых двух пространственных моментов, как самых интересных с точки зрения биологии. Эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = (b-d)N - d'\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\xi)w(\xi)\,d\xi, \\ \dfrac{dC(\xi)}{dt} = bm(\xi)N + \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} bm(\xi')C(\xi+\xi')\,d\xi' - \Big(d + d'\omega(\xi)\Big)C(\xi) - \\ \qquad - \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} d'\omega(\xi')T(\xi,\xi')\,d\xi'. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь как и выше константы $b$ и $d'$ суть плодовитость и агрессивность вида, константа

$d$ — смертность вида от неблагоприятных условий среды, а функции $m$ и $\omega$ — ядра рождения и конкуренции соответственно.

С экологической точки зрения интересен случай, когда сообщество находится в состоянии равновесия, то есть когда стабилизируются его средние пространственные характеристики. Поставим задачу о нахождении первых двух пространственных моментов, соответствующих данному состоянию. С математической точки зрения данная задача формулируется как задача о нахождении стационарной точки системы (4). Уравнение (3) дает нам условие на искомое решение, позволяющее отобрать его среди множества всех других решений.

Отметим, что поставленная задача всегда имеет нулевое решение. Действительно, если сообщество вымерло, то и первый, и второй, и третий пространственные моменты равны нулю, также как и их производные по времени, а кроме того, верно уравнение (3). Поэтому мы накладываем еще одно условие на решение — оно не должно быть тривиальным. Всюду далее мы будем использовать это условие для обоснования корректности некоторых выкладок.

Видно, что динамика первого пространственного момента зависит от второго пространственного момента, а второго — от третьего. Данная тенденция будет сохраняться, то есть, сколько бы мы ни брали уравнений динамики и как бы мы не расширяли систему (4), в ней всегда будет на одно уравнение меньше, чем неизвестных величин. В работе [6] было предложено воспользоваться методом замыканий для решения данной проблемы.

Суть метода состоит в том, что неизвестный пространственный момент наибольшего порядка среди всех рассматриваемых выражается через остальные, таким образом, количество неизвестных уменьшается. Такое выражение пространственного момента называется замыканием. Способ замыкания находится эмпирическим путем, исходя из некоторых физических или биологических свойств рассматриваемой задачи. Естественно, данный подход вносит некоторую долю ошибки, однако удачно подобранное замыкание может свести эту ошибку к приемлимым величинам.

Замыкание второго момента сведет нашу модель к модели Ферхюльста (см. [1]), поскольку единственный способ, которым можно выразить второй момент через первый, учитывая условие (3), это $C(x) = N^2 \equiv \text{const}$. Данная модель хорошо известна и изучена многими математиками. Более того, она, как и модель Лотки–Вольтерры, не учитывает пространственную структуру сообщества, таким образом, мы потеряем все преимущества текущей модели при таком замыкании.

Итак, попытаемся замкнуть третий пространственный момент. Необходимые условия на замыкание, а также подробное исследование этого вопроса изложено в [6]. Мы лишь приведем основные условия, которым замыкание должно удовлетворять:

1. $\lim\limits_{|x| \to +\infty} T(x,\, y) = NC(y)$.

2. $\lim\limits_{|y| \to +\infty} T(x,\, y) = NC(x)$.

3. Если $C(x) \equiv N^2$, то $T(x,\, y) \equiv N^3$.

В данной работе рассматривается семейство замыканий вида:

$$\begin{aligned} T_\alpha(\xi,\xi') =& \frac{\alpha}{2}\left(\frac{C(\xi)C(\xi')}{N} + \frac{C(\xi)C(\xi'-\xi)}{N} + \frac{C(\xi')C(\xi'-\xi)}{N} - N^3\right) + \\ &+ (1-\alpha)\frac{C(\xi)C(\xi')}{N}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\alpha \in [0;\ 1]$. Видно, что данное семейство удовлетворяет описанным выше условиям. Отметим, что деление на $N$ в определении этого семейства обосновано, поскольку мы подразумеваем, что решение задачи ненулевое, в частности $N \neq 0$.

Для упрощения дальнейших выкладок удобно ввести ряд обозначений. Опустим аргументы у всех функций. Скалярное произведение $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx$ будем записывать в виде $\langle f, g\rangle$. Свертку двух функций $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$ обозначим через $[f*g]$. Кроме того, положим $d'\omega(x) = \overline{\omega}(x)$ и $bm(x) = \overline{m}(x)$, где $d'$ — агрессивность вида, $b$ — плодовитость вида, $m(x)$ и $\omega(x)$ — ядра рождения и конкуренции соответственно.

В новых обозначениях после подстановки замыкания (5) с учетом того, что $\dfrac{dN}{dt} = 0$ и $\dfrac{dC}{dt} = 0$, система (4) примет вид

$$\begin{cases} 0 =(b-d)N - \langle C, \overline{\omega}\rangle, \\ 0 =\overline{m}N + [C*\overline{m}] - dC - \overline{\omega}C - \\ \qquad - \dfrac{\alpha}{2N}\Big(C\langle\overline{\omega}, C\rangle + C[\overline{\omega}*C] + [\overline{\omega}C*C] - d'N^4\Big) + \\ \qquad + \dfrac{1-\alpha}{N}C\langle\overline{\omega}, C\rangle. \end{cases} \tag{6}$$

Разделим оба уравнения системы (6) на $N^2$ и обозначим $\overline{C} = \dfrac{C}{N^2}$, $\langle\overline{\omega}, \overline{C}\rangle = Y$. Тогда из первого уравнения получим

$$N = \frac{b-d}{\langle\overline{\omega}, \overline{C}\rangle} = \frac{b-d}{Y}.$$

Отметим, что $C(x)$ не может быть меньше нуля в силу биологического смысла второго пространственного момента (он отображает среднее для всевозможных конфигураций количество пар особей, расстояние между которыми равно $x$). Поэтому число $Y$ при условии, что $C \not\equiv 0$, а $\overline{\omega}(x) \geqslant 0$, не может быть равно нулю, а значит, деление на него корректно. Подставив данное выражение во второе уравнение системы, будем иметь:

$$\begin{aligned} 0 =&\frac{\overline{m}Y}{b-d} + [\overline{C}*\overline{m}] - d\overline{C} - \overline{\omega}\overline{C} - \alpha\frac{b-d}{2Y}\Big(Y\overline{C} + \overline{C}[\overline{\omega}*\overline{C}] + [\overline{\omega}\overline{C}*\overline{C}] - d'\Big) + \\ &+ (1-\alpha)(b-d)\overline{C}. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных: $\overline{C} = Q + 1$. Тогда после упрощения получим уравнение

$$\begin{aligned}\left(\overline{\omega} + b - \frac{\alpha}{2}\left(b - d - \frac{d'(b-d)}{Y}\right)\right)Q = \frac{Y\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * Q] - \\ - \alpha\frac{b-d}{2Y}\Big((Q+2)[\overline{\omega} * Q] + [\overline{\omega}Q * Q]\Big),\end{aligned} \tag{7}$$

где $Y = Y(Q) = \langle \overline{\omega}, Q + 1\rangle$. Будем называть (7) уравнением равновесия.

Известно, что $Q(x) = \dfrac{C(x)}{N^2} - 1$, однако $C(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} N^2$ (в силу (3)). Значит, функция $Q$ должна стремиться к нулю на бесконечности. Таким образом, мы свели исходную задачу к задаче о нахождении функции, стремящейся к нулю на бесконечности и удовлетворяющей уравнению равновесия.

Прежде чем приступать к дальнейшему анализу этого уравнения, отметим один замечательный факт.

**Теорема 1.** *Если (7) имеет какое-либо решение, то оно имеет и радиально-симметричное решение.*

*Доказательство.* В самом деле, допустим $\widetilde{Q}$ — решение (7). Значит, эта функция обращает уравнение равновесия в верное тождество. Тождество сохранится, если взять от его левой и правой частей усреднение по поверхности $n$-мерной сферы. Иными словами, для любого $r > 0$ верно равенство

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|S_r|}\oint\limits_{S_r}\left(\overline{\omega} + b - \frac{\alpha}{2}\left(b - d - \frac{d'(b-d)}{Y}\right)\right)\widetilde{Q}\,dS = \\ =&\frac{1}{|S_r|}\oint\limits_{S_r}\left(\frac{Y\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * \widetilde{Q}] - \alpha\frac{b-d}{2Y}\Big((\widetilde{Q}+2)[\overline{\omega} * \widetilde{Q}] + [\overline{\omega}\widetilde{Q} * \widetilde{Q}]\Big)\right)dS,\end{aligned}$$

где $Y = \langle \overline{\omega}, \widetilde{Q} + 1\rangle$, а $|S_r| = \dfrac{n\pi^{n/2}r^{n-1}}{\Gamma\left(1 + \dfrac{n}{2}\right)}$.

Введем функцию $V = V(x) = \dfrac{1}{|S_{|x|}|}\oint\limits_{S_{|x|}}\widetilde{Q}\,dS$. Далее учтем, что константу и, вообще говоря, любую радиально-симметричную функцию можно вынести за знак интегрирования по сфере. Кроме того, используя переход к сферическим координатам, а также теорему Фубини, нетрудно показать, что интегрирование по сфере можно внести внутрь свертки. В итоге имеем

$$\begin{aligned}\left(\overline{\omega} + b - \frac{\alpha}{2}\left(b - d - \frac{d'(b-d)}{Y}\right)\right)V = \frac{Y\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * V] - \\ - \alpha\frac{b-d}{2Y}\Big((V+2)[\overline{\omega} * \widetilde{Q}] + [\overline{\omega}V * \widetilde{Q}]\Big).\end{aligned}$$

Остается лишь сказать, что функция $V$ является радиально-симметричной, и взять еще раз усреднение по сфере произвольного радиуса, чтобы получить верное равенство:

$$\left(\overline{\omega} + b - \frac{\alpha}{2}\left(b - d - \frac{d'(b-d)}{Y}\right)\right)V = \frac{Y\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * V] -$$
$$- \alpha\frac{b-d}{2Y}\Big((V+2)[\overline{\omega} * V] + [\overline{\omega}V * V]\Big).$$

□

Теорема 1 дает нам право говорить, что представленная формулировка задачи корректна, поскольку по своему биологическому смыслу второй пространственный момент должен быть сферически симметричной функцией.

Перепишем уравнение (7) в виде $\mathcal{A}Q = Q$, где оператор $\mathcal{A}$ действует по правилу

$$\mathcal{A}f = \frac{\frac{Y\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * f] - \alpha\frac{b-d}{2Y}\Big((f+2)[\overline{\omega} * f] + [\overline{\omega}f * f]\Big)}{\overline{\omega} + b - \frac{\alpha}{2}\left(b - d - \frac{d'(b-d)}{Y}\right)}. \tag{8}$$

Здесь и всюду далее зависимость $Y$ от $f$ опущена, однако подразумевается. Будем называть оператор (8) оператором равновесия. Таким образом, задача о нахождении решения уравнения (7) сведена к задаче о нахождении неподвижной точки оператора (8).

Всюду далее для упрощения выкладок будем рассматривать лишь одномерный случай. Однако все представленные в данной работе теоремы без труда переносятся и на случаи $n = 2,\ 3$.

## 5 Вспомогательные утверждения

Для дальнейшей работы нам понадобятся следующие утверждения.

**Лемма 1.** *Пусть $f$ — измеримая функция, $g \in L_1(\mathbb{R})$ и для почти всех $x \in \mathbb{R}$ верно $|f(x)| \leqslant g(x)$, тогда $f \in L_1(\mathbb{R})$.*

*Доказательство.* Будем называть измеримые функции, принимающие не более чем счетное число значений, простыми. Известно, что функция измерима тогда и только тогда, когда она может быть представлена как равномерный предел простых функций (см. [13, с.292]). Кроме того, функция интегрируема по Лебегу тогда и только тогда, когда она может быть представленна в виде равномерного предела простых функций, каждая из которых интегрируема (см. [13, с.294]).

$g \in L_1(\mathbb{R})$, то есть $\forall k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow g \in L_1\Big([k;\ k+1]\Big)$, причём $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_k^{k+1} g(x)\,dx < +\infty$. Фиксируем $\forall k \in \mathbb{Z}$. В силу интегрируемости $g$ на отрезке $[k;\ k+1]$ существует последовательность интегрируемых простых функций $\{g_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}:\ g_n(x) \underset{\substack{n\to+\infty \\ x\in[k;\ k+1]}}{\rightrightarrows} g(x)$. В свою очередь $f$ — измерима, то есть для неё существует последовательность простых функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}:\ f_n(x) \underset{\substack{n\to+\infty\\ x\in[k;\ k+1]}}{\rightrightarrows} f(x)$. Таким образом,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\forall n>N,\ \forall x\in[k;\ k+1]\Longrightarrow\begin{cases}|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon/2\\|g(x)-g_n(x)|\leqslant\varepsilon/2.\end{cases}$$

Значит,

$$\begin{cases}|f_n(x)|\leqslant|f(x)|+\varepsilon/2\\|g(x)|\leqslant|g_n(x)|+\varepsilon/2\end{cases}\Longrightarrow|f_n(x)|\leqslant|g_n(x)|+\varepsilon.$$

Из свойства мажорируемости следует интегрируемость $f_n$ на отрезке $[k;\ k+1]$ при любом натуральном $n$, что влечёт интегрируемость и самой функции $f$ на том же отрезке. Кроме того, получаем, что $\int\limits_k^{k+1}|f(x)|\,dx\leqslant\int\limits_k^{k+1}g(x)\,dx$, то есть по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_k^{k+1}|f(x)|\,dx<+\infty$, что означает, что $f\in L_1(\mathbb{R})$. $\square$

**Следствие 1.** *Если $f\in L_1(\mathbb{R})$, а $g$ — ограничена и измерима, то $fg\in L_1(\mathbb{R})$.*

**Лемма 2.** *Пусть $f\in C(\mathbb{R})$ и $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=0$, тогда $f$ ограничена.*

*Доказательство.* По условию $\forall\varepsilon>0\ \exists R=R(\varepsilon)>0:\ \forall x\in\mathbb{R}:\ |x|>R\Longrightarrow|f(x)|\leqslant\varepsilon$. На отрезке $[-R;\ R]$ функция $f$ ограничена по теореме Вейерштрасса. Таким образом, она ограничена всюду. $\square$

**Лемма 3.** *Пусть $f\in C(\mathbb{R})$ и $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=0$, тогда $f$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.*

*Доказательство.* Исходя из стремления функции $f$ к нулю на бесконечности, получим

$$\forall\varepsilon>0\ \exists R=R(\varepsilon)>0:\ \forall x\in\mathbb{R}:\ |x|\ >\ R\Longrightarrow|f(x)|\ \leqslant\ \varepsilon/4.$$

Таким образом,

$$\forall x,\,y\in\mathbb{R}:\ |x|>R,\,|y|>R\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon/2.$$

На отрезке $[-R-1;\ R+1]$ непрерывная функция $f$ равномерно непрерывна по теореме Кантора, то есть

$$\exists\delta'\ =\ \delta'(\varepsilon)\ >\ 0:\ \forall x,\,y\in\mathbb{R}:\ |x-y|<\delta'\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon/2.$$

Положим $\delta=\min\{\delta',1/2\}$, тогда, если $x,y\in\mathbb{R}:\ |x-y|<\delta$, то возможны три случая:

1. $x,\,y\in[-R-1;R+1]$. Тогда $|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon/2$.

2. $x,\, y \notin [-R-1;\ R+1]$. Тогда $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon/2$.

3. $x \in [-R-1; R+1]$, $y \notin [-R-1;\ R+1]$ или наоборот. Тогда

$$\exists z \in (-R-1;\ -R) \cup (R;\ R+1) : \begin{cases} |f(y)-f(z)| \leqslant \varepsilon/2 \\ |f(x)-f(z)| \leqslant \varepsilon/2, \end{cases}$$

то есть $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Таким образом, $f$ равномерно непрерывна в $\mathbb{R}$. □

**Лемма 4.** *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall h \in \mathbb{R} :\ |h| \leqslant \delta \Longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+h)-f(x)|\, dx \leqslant \varepsilon.$$

*Доказательство.* См. [14, с. 216]. □

**Теорема** (Критерий Рисса)**.** *Множество $K \subset L_p(\mathbb{R})$ является предкомпактом тогда и только тогда, когда*

1. *$K$ — равномерно ограничено, то есть $\exists M > 0 :\ \forall f \in K \Longrightarrow \|f\|_p \leqslant M$*

2. *$K$ — равностепенно непрерывно в смысле $L_p(\mathbb{R})$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$ $\forall h \in \mathbb{R} :\ |h| \leqslant \delta, \forall f \in K \Longrightarrow$*

$$\Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+h)-f(x)|^p\, dx\Bigr)^{1/p} \leqslant \varepsilon.$$

*Доказательство.* Основную идею доказательства можно найти в [14, с. 291]. □

**Теорема** (Фубини)**.** *Пусть для почти всех $y \in \mathbb{R}$ существует интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x,\, y)|\, dx = F(y)$, причем $\int\limits_{\mathbb{R}} F(y)\, dy < +\infty$, тогда существуют интегралы $\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,\, y)\, dx\, dy$ и $\int\limits_{\mathbb{R}} \Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,\, y)\, dy\Bigr)\, dx$, а кроме того, верно равенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,\, y)\, dx\right)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,\, y)\, dy\right)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,\, y)\, dx\, dy.$$

*Доказательство.* См. [13, с. 318]. □

**Замечание 1.** *В дальнейших выкладках мы будем пользоваться следующим очевидным утверждением:*

$$\forall f \in L_1(\mathbb{R}),\, \forall y \in \mathbb{R} \Longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+y)|\, dx = \|f\|_1.$$

*Также мы будем считать известным тот факт, что функция суммируема тогда и только тогда, когда суммируем ее модуль.*

**Замечание 2.** *Напомним, что ядра рождения и конкуренции ($m$ и $\omega$) являются радиально-симметричными стремящимися к нулю на бесконечности суммируемыми функциями, норма которых в пространстве $L_1(\mathbb{R})$ равна единице. Всюду далее дополнительно будем считать, что $m, \omega \in C(\mathbb{R})$. Исходя из леммы 2 и леммы 3 видно, что в таком случае $m$ и $\omega$ ограничены и равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$.*

**Замечание 3.** *Под $B(R)$ при $R > 0$ в дальнейшем будем понимать замкнутый шар радиуса $R$ в пространстве $L_1(\mathbb{R})$, то есть множество*

$$B(R) = \{f \in L_1(\mathbb{R}) :\ \|f\|_1 \leqslant R\}.$$

# 6 Существование неподвижной точки оператора равновесия

**Лемма 5.** *Оператор $\mathcal{B}_\omega f = [\omega * f]$ является компактным, как действующий из $L_1(\mathbb{R})$ в $L_1(\mathbb{R})$.*

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что из сумируемости свертки суммируемых функций, напрямую следует, что оператор действует в $L_1(\mathbb{R})$.

Пусть $M > 0$. Рассмотрим любую функцию $f \in B(M)$.

$$\|\mathcal{B}_\omega f\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \omega(x-y) f(y)\, dy \right| dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |\omega(x-y) f(y)|\, dy\, dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} |f(y)| \int\limits_{\mathbb{R}} |\omega(x-y)|\, dx\, dy = \|\omega\|_1 \cdot \|f\|_1 \leqslant M.$$

Корректность смены порядка интегрирования следует из теоремы Фубини, которая здесь применима в силу того, что свертка является суммируемой функцией, а значит, внутренний интеграл существует при любом $x$ и суммируем.

Далее оценим выражение $\int\limits_{\mathbb{R}} \Big| [\mathcal{B}_\omega f](x+h) - [\mathcal{B}_\omega f](x) \Big|\, dx$ сверху. Используя теорему

Фубини и лемму 4, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Big| [\mathcal{B}_\omega f](x+h) - [\mathcal{B}_\omega f](x) \Big| \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} [\omega(x+h-y) - \omega(x-y)] \, f(y) \, dy \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |\omega(x+h-y) - \omega(x-y)| \cdot |f(y)| \, dy \, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} |f(y)| \int\limits_{\mathbb{R}} |\omega(x+h-y) - \omega(x-y)| \, dx \, dy \leqslant \varepsilon \|f\|_1 \leqslant \varepsilon M.$$

Значит, при достаточно малых $h$ значение выражения также мало.

Итак, образ $B(M)$ под действием оператора $\mathcal{B}_\omega$ равномерно ограничен и равностепенно непрерывен в смысле $L_1(\mathbb{R})$. По критерию Рисса это означает, что множество предкомпактно. Таким образом, оператор $\mathcal{B}_\omega$ переводит ограниченные множества в предкомпактные, а следовательно, является компактным. □

**Замечание 4.** *Очевидно, что оператор* $\mathcal{B}_m f = [m * f]$ *также компактен.*

**Лемма 6.** *Оператор* $\mathcal{C}f = \varphi(x) \int\limits_{\mathbb{R}} \omega(y) f(y) \, dx + \psi(x)$, *где* $\varphi$, $\psi$ *— непрерывные суммируемые функции, является компактным, как действующий из* $L_1(\mathbb{R})$ *в* $L_1(\mathbb{R})$.

*Доказательство.* По леммам 2 и 4 функции $\varphi$ и $\psi$ являются ограниченными и непрерывными в смысле $L_1$ на $\mathbb{R}$. Воспользуемся критерием Рисса. Пусть $M > 0$, $f \in B(M)$.

$$\|\mathcal{C}f\| = \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| \, dx \cdot \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \omega(y) f(y) \, dy \right| + \int\limits_{\mathbb{R}} |\psi(x)| \, dx \leqslant M \|\varphi\|_1 \|\omega\|_C + \|\psi\|_1,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Big| [\mathcal{C}f](x+h) - [\mathcal{C}f](x) \Big| \, dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x+h) - \varphi(x)| \, dx \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} |\omega(y) f(y)| \, dy +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} |\psi(x+h) - \psi(x)| \, dx \leqslant \varepsilon M \|\omega\|_C + \varepsilon.$$

Итак, оператор $\mathcal{C}$ компактен. □

Оператор 8 можно представить в виде суммы $\mathcal{A} = \mathcal{K} + \mathcal{S}$, где

$$\mathcal{K}f = \frac{\dfrac{Y\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * f] - \alpha \dfrac{b-d}{Y} [\overline{\omega} * f]}{\overline{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2} \left( b - d - \dfrac{d'(b-d)}{Y} \right)},$$

$$\mathcal{S}f = -\alpha \frac{b-d}{2Y} \cdot \frac{f[\overline{\omega} * f] + [\overline{\omega} f * f]}{\overline{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2} \left( b - d - \dfrac{d'(b-d)}{Y} \right)}.$$

Идея такого разложения заключается в попытке отделить компактную часть оператора от некомпактной. В определении введенных выше операторов фигурируют дроби, знаменатели которых зависят от $f$ (через $Y$). Этот факт может вызвать затруднения в исследовании операторов на компактность. Однако имеют место следующие леммы.

**Лемма 7.** *Пусть* $R < \dfrac{1}{\|\omega\|_C}$ *и* $d' > 0$, *тогда дробь* $\dfrac{1}{Y}$ *равномерно по* $f$ *отделена от нуля и бесконечности при всех* $f \in B(R)$.

*Доказательство.* Рассмотрим любую функцию $f \in B(R)$. Так как

$$Y = Y(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(f(x) + 1\Big)\overline{\omega}(x)\,dx = d' + \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\omega}(x)\,dx,$$

то $Y \geqslant d' - \|\overline{\omega}\|_C \cdot \|f\|_1$, значит, учитывая, что по условию $1 > R\|\omega\|_C$, получим

$$\frac{1}{Y} \leqslant \frac{1}{d'(1 - \|\omega\|_C \cdot \|f\|)} \leqslant \frac{1}{d'(1 - R\|\omega\|_C)} < +\infty.$$

С другой стороны $Y \leqslant d' + \|\overline{\omega}\|_C \cdot \|f\|_1$, значит

$$\frac{1}{Y} \geqslant \frac{1}{d'(1 + \|\omega\|_C \cdot \|f\|)} \geqslant \frac{1}{d'(1 + R\|\omega\|_C)} > 0.$$

□

**Лемма 8.** *Пусть* $b > d \geqslant 0$, $d' > 0$, $\alpha \in [0;\ 1]$, *тогда, при условии, что* $R < \dfrac{1}{\|\omega\|_C}$, *функция*

$$g_Y(x) = \frac{1}{\overline{\omega}(x) + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{Y}\right)}$$

*непрерывна и отделена от нуля и бесконечности равномерно по* $f$ *при всех* $f \in B(R)$.

*Доказательство.* Рассмотрим функцию $g_s(x) = \dfrac{1}{\overline{\omega}(x) + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{s}\right)}$.
Фиксируем $x = x_0$, при котром знаменатель функции обращается в ноль, и выразим параметр $s$ из следующего уравнения:

$$\overline{\omega}(x_0) + b - \frac{\alpha}{2}\left(b - d - \frac{d'(b-d)}{s}\right) = 0,$$
$$s = \frac{\alpha d'(b-d)}{(\alpha - 2)b - \alpha d - 2\overline{\omega}(x_0)}.$$

Так как $b > d$, $d' > 0$ и $\alpha \in [0;\ 1]$, получаем, что $s \leqslant 0$. В таком случае можно провести следующую оценку

$$s \leqslant \frac{\alpha d'(b-d)}{(\alpha - 2)b - \alpha d} = q.$$

Из этого делаем вывод, что $g_s(x)$ непрерывна при $s > q$, как отношение непрерывных функций, знаменатель которого не обращается в нуль.

С другой стороны, $Y \geqslant d' - \|\overline{\omega}\|_C \cdot \|f\|_1$, таким образом, если $\|f\|_1 < \dfrac{d'-q}{\|\overline{\omega}\|_C}$, то $Y > q$, а значит, функция $g_Y(x)$ непрерывна при всех $f \in B(R)$. Однако $q \leqslant 0$, значит, $d' - q \geqslant d'$, то есть

$$\frac{d'-q}{\|\overline{\omega}\|_C} \geqslant \frac{d'}{\|\overline{\omega}\|_C} = \frac{1}{\|\omega\|_C}.$$

Итак, если $\|f\|_1 \leqslant R < \dfrac{1}{\|\omega\|_C}$, то функция $g_Y(x)$ равномерно по $f$ непрерывна. Более того, в силу ограниченности функции $\overline{\omega}$ с учетом леммы 7 получим, что функция $g_Y(x)$ равномерно по $f$ отделена от нуля и бесконечности. □

**Теорема 2.** *Пусть $b > d \geqslant 0$, $d' > 0$, $\alpha \in [0;\ 1]$, тогда, при условии, что $R < \dfrac{1}{\|\omega\|_C}$, оператор $\mathcal{K}$ определен, как действующий из $B(R)$ в $L_1(\mathbb{R})$ и является компактным.*

*Доказательство.* По лемме 8 функция $g_Y(x)$ равномерно по $f$ ограничена и непрерывна, то есть, измерима в $\mathbb{R}$. Это значит, что домножение ее на любую суммируемую функцию не выводит из класса $L_1(\mathbb{R})$ (следствие 1).

$\mathcal{K}$ можно представить в виде

$$\mathcal{K}f = g_Y \cdot \left(\mathcal{C} + \mathcal{B}_{\overline{m}} - \alpha\frac{b-d}{Y}\mathcal{B}_{\overline{\omega}}\right) f,$$

где

$$\mathcal{C}f = \frac{Y\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega},$$
$$\mathcal{B}_{\overline{m}}f = [\overline{m} * f],$$
$$\mathcal{B}_{\overline{\omega}}f = [\overline{\omega} * f].$$

При условии

$$\|f\|_1 \leqslant R < \frac{1}{\|\omega\|_C}$$

выражение $-\alpha\dfrac{b-d}{2Y}$ равномерно ограничено по $f$ в силу леммы 7. По леммам 5 и 6 операторы $\mathcal{C}, \mathcal{B}_{\overline{m}}$ и $\mathcal{B}_{\overline{\omega}}$ действуют в $L_1(\mathbb{R})$ и являются компактными. В таком случае $-\alpha\dfrac{b-d}{2Y}\mathcal{B}_{\overline{\omega}}$ тоже компактный оператор. Сумма компактных операторов компактна, и домножение на функцию $g_Y(x)$ на компактность не влияет. Таким образом, $\mathcal{K}$ компактен. □

**Теорема** (Лере–Шаудер)**.** *Если оператор $\mathcal{A}$, определенный на замкнутом шаре $B$ банахова пространства, является компактным и $\mathcal{A}[\partial B] \subset B$, то $\exists f \in B :\ f = \mathcal{A}f$.*

*Доказательство.* Доказательство можно найти, например в [12, с.162]. Отметим лишь, что оно опирается на так называемое понятие вращения отображения. В частности, если вращение компактного оператора на границе шара не равно нулю, то у него существуют неподвижные точки. □

**Теорема 3.** *В условиях теоремы 2, если* $\rho = 1 - R\|\omega\|_C > 0$ *и* $\alpha > 0$, *то* $\exists d' \in \left(0;\ \dfrac{3}{4}\rho\right)$ *такое, что оператор* $\mathcal{K}$ *имеет в* $B(R)$ *неподвижную точку.*

*Доказательство.* Оценим норму образа функции $f$ из $B(R)$ под действием оператора $\mathcal{K}$. Для начала проведем оценку для $Y$. Так как $0 < R\|\omega\|_C < 1$, то $1+R\|\omega\|_C < 2$, тогда

$$0 < d'\rho = d'(1 - R\|\omega\|_C) \leqslant Y \leqslant d'(1 + R\|\omega\|_C) < 2d'.$$

Таким образом

$$\frac{1}{d'\rho} \geqslant \frac{1}{Y} > \frac{1}{2d'}.$$

Значит, для функции $g_Y(x)$, определенной в лемме 8, верна следующая оценка:

$$|g_Y(x)| < \frac{1}{\omega(x) + \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{d'(b-d)}{2d'} + b - \dfrac{\alpha}{2}(b-d)} < \frac{1}{\dfrac{3}{4}\alpha(b-d) + b}.$$

Оценим норму сверток, входящих в определение оператора $\mathcal{K}$.

$$\Big\|[\overline{m} * f]\Big\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{m}(x-y) f(y)\, dy \right| dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |\overline{m}(x-y)| \cdot |f(y)|\, dy\, dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} |f(y)| \int\limits_{\mathbb{R}} |\overline{m}(x-y)|\, dx\, dy = \|\overline{m}\|_1 \cdot \|f\|_1 \leqslant b\, R.$$

Смена порядка интегрироания возможна в силу применения теоремы Фубини (поскольку свертка суммируемых функций суммируема). Аналогично

$$\Big\|[\overline{\omega} * f]\Big\|_1 \leqslant d'R.$$

В итоге получим следующие оценки

$$\|\mathcal{K}f\|_1 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\left|\dfrac{Y\overline{m}(x)}{b-d}\right| + |\overline{\omega}(x)| + \Big|[\overline{m} * f](x)\Big| + \left|\alpha \dfrac{b-d}{Y} [\overline{\omega} * f](x)\right|}{\left|\overline{\omega}(x) + b - \dfrac{\alpha}{2}(1 - \dfrac{d'}{Y})(b-d)\right|}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\dfrac{2bd'}{b-d}|\overline{m}(x)| + |\overline{\omega}(x)| + \Big|[\overline{m} * f](x)\Big| + \alpha \dfrac{b-d}{\rho}\Big|[\overline{\omega} * f](x)\Big|}{\dfrac{3}{4}\alpha(b-d) + b}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\dfrac{2bd'}{b-d} + d' + bR + \alpha d' \dfrac{b-d}{\rho} R}{b + \dfrac{3}{4}\alpha(b-d)} = \frac{d'\left(\dfrac{2bd'}{b-d} + 1\right) + \left(b + \alpha d' \dfrac{b-d}{\rho}\right) R}{b + \dfrac{3}{4}\alpha(b-d)}.$$

Обозначим

$$\xi = \frac{d'\left(\dfrac{2bd'}{b-d}+1\right)}{b+\dfrac{3}{4}\alpha(b-d)},$$

$$\eta = \frac{b+\dfrac{d'}{\rho}\alpha(b-d)}{b+\dfrac{3}{4}\alpha(b-d)},$$

тогда $\|\mathcal{K}f\|_1 \leqslant \xi + \eta R$. Видно, что $\eta < 1$ при $\dfrac{d'}{\rho} < \dfrac{3}{4} \Longleftrightarrow d' < \dfrac{3}{4}\rho$ и $\alpha > 0$. Кроме того, $\xi \xrightarrow[d' \longrightarrow 0]{} 0$. Из этих двух фактов следует, что

$$\exists d' \in \left(0;\ \frac{3}{4}\rho\right):\ \forall f \in B(R) \Longrightarrow \|\mathcal{K}f\|_1 < R \Longleftrightarrow \mathcal{K}f \in B(R).$$

Итак, найдется настолько малое число $d' \in \left(0;\ \dfrac{3}{4}\rho\right)$, при котором оператор $\mathcal{K}$ переводит шар $B(R)$ внутрь шара $B(R)$. Тогда, учитывая его компактность в этом шаре, по теореме Лере–Шаудера этот оператор имеет в $B(R)$ неподвижную точку. $\square$

**Замечание 5.** *Отметим, что в дальнейших теоремах существенен тот факт, что при $\alpha > 0$ образ $B(R)$ под действием оператора $\mathcal{K}$ переходит в некоторый замкнутый подшар $B' \subset B(R)$, такой, что $d\Big(\partial B',\, \partial B(R)\Big) > 0$. Здесь под $d(A,\, B)$ подразумевается расстояние между множествами $A$ и $B$ в метрике, порожденной нормой пространства $L_1(\mathbb{R})$.*

**Замечание 6.** *Заметим, что оператор $\mathcal{S}$ также определен, как действующий из $B(R)$ в $L_1(\mathbb{R})$ (где условие, налагаемое на $R$ такое же, что и в теореме 2), но не является компактным.*

*Доказательство.* Пусть $f \in B(R)$. В силу свойств функции $\overline{\omega}$ по лемме 1 получим, что $\overline{\omega}f \in L_1(\mathbb{R})$. Так как свертка суммируемых функций суммируема, то $[\overline{\omega}f * f] \in L_1(\mathbb{R})$. Кроме того

$$\Big|[\overline{\omega} * f](x)\Big| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\omega}(x-y)f(y)\,dy\right| \leqslant R\|\overline{\omega}\|_C,$$

то есть, по следствию 1 получим, что $f[\overline{\omega} * f] \in L_1(\mathbb{R})$. Из лемм 7 и 8 следует, что при условии $f \in B(R)$ функция

$$h_Y(x) = -\alpha\frac{b-d}{2Y} \cdot g_Y(x) = -\frac{\alpha\dfrac{b-d}{2Y}}{\omega(x)+b-\dfrac{\alpha}{2}\left(b-d-\dfrac{d'(b-d)}{Y}\right)}$$

отделена от бесконечности равномерно по $f$ и более того равномерно по $f$ непрерывна. Таким образом, оператор $\mathcal{S}$ действительно действует из $B(R)$ в $L_1(\mathbb{R})$.

Для того, чтобы показать его некомпактность, достаточно найти последовательность функций $f_n \in B(R)$, из образа которой нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность.

Так как $\overline{\omega}(x)$ — неотрицательная непрерывная функция, равная по норме единице, то $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0 :\ \ \forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta) \implies \overline{\omega}(x_0) \geqslant \mu > 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 > 0$, так как функция радиально симметрична. Пусть $I_n = [nx_0;\ (n+1)x_0],\ n \in \mathbb{N}$, рассмотрим функции

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{R}{2x_0},\ x \in I_n, \\ 0,\ x \notin I_n. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_n$ лежат в $B(R)$. Заметим также, что, поскольку $h_Y(x)$ равномерно по $f$ отделена от нуля и бесконечности, достаточно показать некомпактность оператора $\mathcal{P}f = f[\overline{\omega} * f] + [\overline{\omega} f * f]$. В дальнейших выкладках учтем тот факт, что при $x \in \big(nx_0;\ (n+1)x_0\big),\ y \in \big(mx_0;\ (m+1)x_0\big),\ m \neq n$ имем $f_n(x-y) = f_m(x-y) = 0$.

Пусть $n,\ p \in \mathbb{N}$, тогда

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{P}f_{n+p} - \mathcal{P}f_n\|_1 = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big| f_{n+p}(x)[\overline{\omega} * f_{n+p}](x) + [\overline{\omega} f_{n+p} * f_{n+p}](x) - f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) - [\overline{\omega} f_n * f_n](x) \Big|\, dx \geqslant \\
&\geqslant \int\limits_{I_n} \Big| f_{n+p}(x)[\overline{\omega} * f_{n+p}](x) + [\overline{\omega} f_{n+p} * f_{n+p}](x) - f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) - [\overline{\omega} f_n * f_n](x) \Big|\, dx = \\
&= \int\limits_{I_n} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\omega}(y) f_{n+p}(y) f_{n+p}(x-y)\, dy - f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) - [\overline{\omega} f_n * f_n](x) \right| dx = \\
&= \int\limits_{I_n} \left| \frac{R}{2x_0} \int\limits_{I_{n+p}} \overline{\omega}(y) f_{n+p}(x-y)\, dy - f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) - [\overline{\omega} f_n * f_n](x) \right| dx = \\
&= \int\limits_{I_n} \Big| f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) + [\overline{\omega} f_n * f_n](x) \Big|\, dx.
\end{aligned}$$

В последнем выражении оба слагаемых неотрицательны в силу неотрицательности функций $f_n$ и $\overline{\omega}$, поэтому

$$\int\limits_{I_n} \Big| f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) + [\overline{\omega} f_n * f_n](x) \Big| \, dx = \int\limits_{I_n} \Big( f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) + [\overline{\omega} f_n * f_n](x) \Big) \, dx \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{I_n} f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) \, dx = \frac{R}{2x_0} \int\limits_{I_n} [\overline{\omega} * f_n](x) \, dx = \frac{R^2}{4x_0^2} \int\limits_{I_n} \int\limits_{I_n} \overline{\omega}(x-y) \, dy \, dx \geqslant$$
$$\geqslant \frac{R^2 \delta^2}{4x_0^2} \mu > 0.$$

Таким образом, $\exists \varepsilon = \dfrac{R^2\delta^2}{4x_0^2}\mu > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall p \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$\|\mathcal{P} f_{n+p} - \mathcal{P} f_n\|_1 \geqslant \varepsilon,$$

что означает, некомпактность оператора $\mathcal{P}$, а соответственно и $\mathcal{S}$. □

Исследуем оператор $\mathcal{S}$ более подробно.

**Лемма 9.** *При выполнении условий лемм 7 и 8 оператор $\mathcal{S}$ является липшицевым с некоторой константой $L = L(d')$, при этом $L(d') \xrightarrow[d' \to 0+0]{} 0$.*

*Доказательство.* Пусть $f \in B(R)$. В силу условия, накладываемого на $R$, функция

$$h_Y(x) = -\frac{\alpha \dfrac{b-d}{2Y}}{\overline{\omega}(x) + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{Y}\right)}$$

равномерно по $f$ отделена от нуля и бесконечности (следствие лемм 7 и 8), поэтому достаточно показать липшицевость оператора $\mathcal{P} f = f[\overline{\omega} * f] + [\overline{\omega} f * f]$.

Верны следующие оценки

$$\Big\| f[\overline{\omega} * f] - g[\overline{\omega} * g] \Big\|_1 = \Big\| f[\overline{\omega} * f] - f[\overline{\omega} * g] + f[\overline{\omega} * g] - g[\overline{\omega} * g] \Big\|_1 =$$
$$= \Big\| f[\overline{\omega} * (f-g)] + (f-g)[\overline{\omega} * g] \Big\|_1 \leqslant \Big\| f[\overline{\omega} * (f-g)] \Big\|_1 + \Big\| (f-g)[\overline{\omega} * g] \Big\|_1 =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left| f(x) \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\omega}(x-y) \big[ f(y) - g(y) \big] \, dy \right| dx + \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \big[ f(x) - g(x) \big] \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\omega}(x-y) g(y) \, dy \right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \|\overline{\omega}\|_C \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)| \int\limits_{\mathbb{R}} \big| f(y) - g(y) \big| \, dy \, dx + \|\overline{\omega}\|_C \int\limits_{\mathbb{R}} \big| f(x) - g(x) \big| \int\limits_{\mathbb{R}} |g(y)| \, dy \, dx =$$
$$= \|\overline{\omega}\|_C \cdot \|f - g\|_1 \cdot \Big( \|f\|_1 + \|g\|_1 \Big) \leqslant 2R \|\overline{\omega}\|_C \cdot \|f-g\|_1 < 2d' \|f-g\|_1.$$

$$
\Big\|[\overline{\omega}f*f]-[\overline{\omega}g*g]\Big\|_1=\Big\|[\overline{\omega}f*f]-[\overline{\omega}f*g]+[\overline{\omega}f*g]-[\overline{\omega}g*g]\Big\|_1=
$$

$$
=\Big\|[\overline{\omega}f*(f-g)]+[\overline{\omega}(f-g)*g]\Big\|_1\leqslant\Big\|[\overline{\omega}f*(f-g)]\Big\|_1+\Big\|[\overline{\omega}(f-g)*g]\Big\|_1=
$$

$$
=\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}}\overline{\omega}(y)f(y)\big[f(x-y)-g(x-y)\big]\,dy\right|dx+\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}}\overline{\omega}(y)\big[f(y)-g(y)\big]g(x-y)\,dy\right|dx\leqslant
$$

$$
\leqslant\|\overline{\omega}\|_C\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}|f(y)|\cdot\big|f(x-y)-g(x-y)\big|\,dy\,dx+\|\overline{\omega}\|_C\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\big|f(y)-g(y)\big|\cdot|g(x-y)|\,dy\,dx=
$$

$$
=\|\overline{\omega}\|_C\int\limits_{\mathbb{R}}|f(y)|\int\limits_{\mathbb{R}}\big|f(x-y)-g(x-y)\big|\,dx\,dy+\|\overline{\omega}\|_C\int\limits_{\mathbb{R}}\big|f(y)-g(y)\big|\int\limits_{\mathbb{R}}|g(x-y)|\,dx\,dy=
$$

$$
=\|\overline{\omega}\|_C\cdot\|f-g\|_1\Big(\|g\|_1+\|f\|_1\Big)\leqslant 2R\|\overline{\omega}\|_C\cdot\|f-g\|_1<2d'\|f-g\|_1.
$$

Смена порядка интегрирования обусловлена теоремой Фубини. Таким образом, если $f,\,g\in B(R)$, то

$$
\|\mathcal{P}f-\mathcal{P}g\|_1\leqslant 4d'\|f-g\|_1.
$$

.

В силу отделимости функции $h_Y(x)$ от бесконечности получим, что константа липшицевости оператора $\mathcal{S}$ стремится к нулю при $d'\to 0+0$. $\square$

**Лемма 10.** *При выполнении условий лемм 7 и 8 норма оператора $\mathcal{S}$ стремится к нулю при $d'\to 0+0$.*

*Доказательство.* Рассмотрим по отдельности выражения $f[\overline{\omega}*f]$ и $[f\overline{\omega}*f]$.

$$
\Big\|f[\overline{\omega}*f]\Big\|_1=\int\limits_{\mathbb{R}}\left|f(x)\int\limits_{\mathbb{R}}\overline{\omega}(x-y)f(y)\,dy\right|dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x)|\int\limits_{\mathbb{R}}|\overline{\omega}(x-y)|\cdot|f(y)|\,dy\,dx\leqslant
$$

$$
\leqslant\|\overline{\omega}\|_C\cdot\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x)|\int\limits_{\mathbb{R}}|f(y)|\,dy\,dx=\|\overline{\omega}\|_C\cdot\|f\|_1^2\leqslant\|\overline{\omega}\|_C R\|f\|_1<d'\|f\|_1.
$$

$$
\Big\|[f\overline{\omega}*f]\Big\|_1=\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}}f(x-y)\overline{\omega}(x-y)f(y)\,dy\right|dx\leqslant
$$

$$
\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x-y)|\cdot|\overline{\omega}(x-y)|\cdot|f(y)|\,dy\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}}|f(y)|\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x-y)|\cdot|\overline{\omega}(x-y)|\,dx\,dy\leqslant
$$

$$
\leqslant\|\overline{\omega}\|_C\int\limits_{\mathbb{R}}|f(y)|\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x-y)|\,dx\,dy=\|\overline{\omega}\|_C\cdot\|f\|_1^2\leqslant d'\|f\|_1.
$$

Итак, норма оператора $\mathcal{P}=f[\overline{\omega}*f]+[\overline{\omega}f*f]$ не превосходит $2d'$, значит, она стремится к нулю, когда $d'$ стремится к нулю. Это означает, что и норма $\mathcal{S}$ тоже стремится к нулю, когда $d'$ стремится к нулю, поскольку по леммам 7 и 8 функция

$$h_Y(x) = -\frac{\alpha \dfrac{b-d}{2Y}}{\overline{\omega}(x) + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{Y}\right)}$$

равномерно по $f$ отделена от бесконечности. □

Далее нам потребуется теорема, доказанная в [12, с.129].

**Теорема** (Теорема о неподвижных точках возмущенного компактного оператора)**.** *Пусть на области $G$ банахова пространства задан компактный оператор с ненулевым вращением на границе, при этом он переводит область $G$ в некоторую подобласть $H \subset G$, такую, что $d(\partial G, \partial H) = \delta > 0$. Если его возмутить липшецевым оператором, норма которого не превосходит $\delta$, то возмущенный оператор будет иметь в $G$ неподвижные точки.*

**Теорема 4.** *Пусть выполнены условия теорем 2 и 3. Если $\alpha > 0$, то при достаточно малом $d'$ оператор $\mathcal{A}$ имеет в $B(R)$ неподвижную точку.*

*Доказательство.* По леммам 9 и 10 оператор $\mathcal{S}$ липшицев, причем его норма стремится к нулю, когда $d'$ стремится к нулю. При $\alpha > 0$ величина $d\Big(\partial B(R),\, \partial\mathcal{K}\big[B(R)\big]\Big)$ положительна и не зависит от $d'$ (замечание 5). Таким образом, по теореме о неподвижных точках возмущенного компактного оператора оператор $\mathcal{K} + \mathcal{S} = \mathcal{A}$ имеет в $B(R)$ неподвижную точку при достаточно малом значении $d'$. □

**Следствие 2.** *Уравнение равновесия при выполнении условий теоремы 4 имеет решение.*

**Следствие 3.** *Если $\dfrac{d'\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} \not\equiv 0$, то неподвижная точка оператора $\mathcal{A}$ ненулевая.*

*Доказательство.* Пусть $f \equiv 0$. Тогда $\mathcal{A}f = \dfrac{\dfrac{d'\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega}}{\overline{\omega} + b}$. По условию следствия $\mathcal{A}f \not\equiv 0$, значит, нулевая функция не является неподвижной точкой оператора равновесия. Однако теорема 4 все еще верна, выходит, что оператор $\mathcal{A}$ имеет неподвижную точку, и она не может быть нулевой. □

# 7 Единственность неподвижной точки оператора равновесия

Рассмотрим вопрос о достаточных условиях единственности неподвижной точки оператора $\mathcal{A}$. Имеет место следующая лемма.

**Лемма 11.** *Пусть оператор $\mathcal{A}$ липшицев с константой липшицевости $L < 1$, тогда у него не может существовать более одной неподвижной точки.*

*Доказательство.* Предположим, что у оператора $\mathcal{A}$ существуют две различные неподвижные точки. Обозначим их $f$ и $g$ соответсвенно. Поскольку $\mathcal{A}$ липшицев, то $\|\mathcal{A}f - \mathcal{A}g\|_1 \leqslant L\|f - g\|_1$. Однако $f = \mathcal{A}f$ и $g = \mathcal{A}g$, таким образом

$$0 < \|f - g\|_1 = \|\mathcal{A}f - \mathcal{A}g\|_1 \leqslant L\|f - g\|_1 < \|f - g\|_1.$$

Однако это невозможно. Значит, у оператора $\mathcal{A}$ не может быть двух различных неподвижных точек. □

Исследуем оператор $\mathcal{K}$ на липшицевость.

**Лемма 12.** *Оператор $\mathcal{B}_{\overline{\omega}}f = [\overline{\omega} * f]$ липшицев с константой липшицевости $d'$.*

*Доказательство.* Рассмотрим любые функции $f$ и $g$ из $L_1(\mathbb{R})$. Имеем

$$\|\mathcal{B}_{\overline{\omega}}f - \mathcal{B}_{\overline{\omega}}g\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big|[\overline{\omega} * f](x) - [\overline{\omega} * g](x)\Big|\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big|\big[\overline{\omega} * (f - g)\big]\Big|\, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\omega}(x - y)\Big(f(y) - g(y)\Big)\, dy\right| dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \Big|f(y) - g(y)\Big| \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} |\overline{\omega}(x - y)|\, dx\, dy = d'\|f - g\|_1.$$

□

**Замечание 7.** *Аналогично можно показать, что оператор $\mathcal{B}_{\overline{m}}f = [\overline{m} * f]$ является липшицевым с константой липшицевости $b$.*

**Лемма 13.** *При условии, что $b > d$, оператор $\mathcal{N}f = \dfrac{Y\overline{m}}{b - d} - \overline{\omega}$ является липшицевым с константой липшицевости равной $bd'\dfrac{\|\omega\|_C}{b - d}$.*

*Доказательство.* Рассмотрим любые функции $f$ и $g$ из $L_1(\mathbb{R})$. Имеем

$$\|\mathcal{N}f - \mathcal{N}g\|_1 = \frac{1}{b - d} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(f(y) + 1\Big)\overline{\omega}(y)\, dy - \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(g(y) + 1\Big)\overline{\omega}(y)\, dy\right| \cdot \Big|\overline{m}(x)\Big|\, dx =$$

$$= \frac{1}{b - d} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} \Big|f(y) - g(y)\Big| \cdot \Big|\overline{\omega}(y)\Big|\, dy \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{m}(x)\, dx \leqslant \frac{b}{b - d}\|\overline{\omega}\|_C\|f - g\|_1 = bd'\frac{\|\omega\|_C}{b - d}\|f - g\|_1.$$

□

**Теорема 5.** *В условиях теоремы 2 существует такое $b_0 > 0$, что для всех $b \in (0;\ b_0)$ и для всех $d \in [0;\ b)$, существует $d_0' = d_0'(b, d) > 0$ такое, что при всех $d' \in (0;\ d_0')$ оператор $\mathcal{K}$ является липшицевым с константой липшицевости $L < 1$.*

*Доказательство.* Рассмотрим оператор

$$\mathcal{Q}f = \frac{Y\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * f] - \alpha\frac{b-d}{Y}[\overline{\omega} * f]$$

Имеет место представление

$$\mathcal{Q} = \mathcal{N} + \mathcal{B}_{\overline{m}} - \alpha\frac{b-d}{Y}\mathcal{B}_{\overline{\omega}}.$$

По лемам 12 и 13 с учетом оценки $\frac{1}{Y} \leqslant \frac{1}{d'\rho}$, получим, что оператор $\mathcal{Q}$ является липшицевым с константой липшицевости $L_Q = bd'\frac{\|\omega\|_C}{b-d} + b + \alpha\frac{b-d}{\rho}$. Видно, что существует настолько малое $b' > 0$, что при всех $b \in (0;\ b')$ и $d \in (0;\ b)$ найдется такое $\overline{d_0'}$, что $\forall d' \in (0;\ \overline{d_0'}) \Longrightarrow L_Q < 1$.

Заметим, что по лемме 8 функция $g_Y(x) = \dfrac{1}{\overline{\omega}(x) + b - \frac{\alpha}{2}\left(b - d - \frac{d'(b-d)}{Y}\right)}$ равномерно по $f$ отделена от нуля и бесконечности при всех $f \in B(R)$. В таком случае оператор $\mathcal{K}$ также является липшицевым с некоторой константой $L$. Кроме того, нетрудно заметить, что верно следующее утверждение

$$\exists b_0 > 0 :\ \forall b \in (0;\ b_0),\ \forall d \in (0;\ b)\ \exists d_0' = d_0'(b,\ d) :\ \forall d' \in (0;\ d_0') \Longrightarrow L < 1.$$

□

Итак, оператор $\mathcal{K}$ является липшицевым, а кроме того, при достаточно малых значениях констант $b, d$ и $d'$ его константа липшицевости строго меньше единицы. В доказательстве теоремы 4 показано, что оператор $\mathcal{S}$ также является липшицевым, причем его константа липшицевости стремится к нулю, когда $d'$ стремится к нулю. Суммируя эти факты, мы можем доказать следующую теорему.

**Теорема 6.** *В условиях теорем 4 и 5 существуют такие константы $b > d \geqslant 0$ и настолько малое $d' > 0$, что оператор $\mathcal{A}$ имеет в шаре $B(R)$ единственную неподвижную точку.*

*Доказательство.* По лемме 9 и теореме 5 операторы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{S}$ липшицевы. Поскольку $\mathcal{A} = \mathcal{K} + \mathcal{S}$, то из липшицевости операторов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{S}$ следует и липшицевость оператора $\mathcal{A}$, причем его константа липшицевости $L$ равна сумме соответствующих констант операторов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{S}$ .

Кроме того, по лемме 9 и теореме 5 можно подобрать настолько малые константы $b, d$ и $d'$, что $L$ будет строго меньше единицы. В таком случае по лемме 11 у оператора не может быть больше одной неподвижной точки. Однако теорема 4 гарантирует ее существование. □

## 8 Заключение

В данной работе был изучен оператор равновесия. Показано, что данный оператор определен на некотором шаре $B(R)$ в пространстве $L_1(\mathbb{R})$ и действует в $L_1(\mathbb{R})$. Также было получено представление оператора равновесия в виде суммы

$$\mathcal{A} = \mathcal{K} + \mathcal{S}.$$

При этом показано, что $\mathcal{K}$ является компактным в шаре $B(R)$, $\mathcal{S}$ липшицев в том же шаре, а кроме того, $\|\mathcal{S}\| \xrightarrow[d' \to 0+0]{} 0$, где $d'$ — это константа, описывающая агрессивность вида.

Были найдены достаточные условия существования и единственности неподвижной точки оператора равновесия в случае, когда ядра конкуренции и рождения непрерывны. А именно, при условии, что $b > d \geqslant 0$, $1 \geqslant \alpha > 0$, $1 - R\|\omega\|_C > 0$, существует такое достаточно малое $d' > 0$, что оператор равновесия имет неподвижную точку в шаре $B(R)$. Если же помимо прочего константа $b$ достаточно мала с сохранением условия $b > d$, то такая неподвижная точка единственна. Здесь $b$ — плодовитость исследуемого вида, $d'$ — его агрессивность, $d$ — смертность вида от неблагоприятных условий среды, $\alpha$ — коэффициент, фигурирующий в определении рассматриваемого в работе замыкания третьего пространственного момента (5), а $\omega(x)$ — ядро конкуренции.

При этом, если $\dfrac{bm(x)}{b-d} - \omega(x) \not\equiv 0$, где $m(x)$ — ядро рождения, то неподвижная точка оператора ненулевая. Это означает, что стационарная точка системы (4), описывающей динамику первых двух пространственных моментов сообщества, также ненулевая, значит, сообщество находится в состоянии равновесия и не вымерло. Если же $\dfrac{bm(x)}{b-d} - \omega(x) \equiv 0$, и выполнены условия единственности, то оператор равновесия может иметь лишь нулевую неподвижную точку, а значит, единственным вариантом того, что сообщество будет находиться в состоянии равновесия, является его полное вымирание.

Отметим, что вопрос о существовании и единственности неподвижной точки оператора равновесия до этого момента не изучался, а исследование уравнения равновесия проводилось лишь численно (см. [9], [10], [11]). Направлением дальнейших исследований может стать вопрос об устойчивости состояния равновесия. Кроме того, приведенные в работе условия носят весьма абстрактный характер и требуют существенного уточнения для того, чтобы их можно было использовать в практических целях.

Изучение свойств интегральных уравнений, получающихся в результате других замыканий третьего пространственного момента через первые два, также может стать темой дальнейших работ. Ранее в [7] и [8] было показано, что замыкание вида

$$T(\xi, \xi') = \frac{C(\xi)C(\xi')}{N^2}$$

сводит задачу о нахождении стационарной точки системы динамики пространственных моментов к линейному интегральному уравнению. Однако это уравнение при всех адекватных биологических предположениях имеет лишь тривиальное решение. Доказанное в текущей работе существование и единственность решения уравнения равновесия иллюстрирует тот факт, что удачный выбор замыкания влияет не только на точность решения, но и на сам факт разрешимости задачи о нахождени ненулевогои состояния равновесия. Вопрос о нахождении условий на замыкание, гарантирующих разрешимость задачи, является интересным с точки зрения не только математики, но и биологии и также мог бы стать одним из направлений дальнейших исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] Verhulst P.F. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement // Correspondance mathématique et physique. P. 113 – 121. **1838**.

[2] Lotka A.J. Elements of physical biology // Baltimore: Williams Wilkins Company, P. 460. **1925**.

[3] Dieckmann U., Law R. Moment approximations of individual-based models // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. P. 252–270. **2000**.

[4] Dieckmann U., Law R. Relaxation projections and the method of moments // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. P. 412–455. **2000**.

[5] Bolker B., Pacala S. Using moment equations to understand stochastically driven spatial pattern formation in ecological systems// Theor. Population Biol. 52. №3. P. 179–197. **1997**.

[6] Murrell D. J., Dieckmann U. On moment closures for population dynamics in continuous space // J. Theor. Biology. **229**. P. 421–432. **2004**.

[7] Давыдов А.А., Данченко В.И., Никитин А.А. Об интегральном уравнении для стационарных распределений биологических сообществ // Проблемы динамического управления. Сборник научных трудов, С. 15 – 29. **2009**.

[8] Давыдов А.А., Данченко В.И., Звягин М.Ю. Существование и единственность стационарного распределения биологического сообщества // Труды математического института имени В.А. Стеклова, т. 267, С. 46 – 55. **2009**.

[9] Бодров А.Г., Никитин А.А. Качественный и численный анализ интегрального уравнения, возникающего в модели стационарных сообществ // Докл. АН. 455. 5. С. 507–511. **2014**.

[10] Бодров А.Г., Никитин А.А. Исследование интегрального уравнения плотности биологического вида в пространствах различных размерностей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 4. С. 7–13. **2015**.

[11] Николаев М.В., Никитин А.А. Исследование интегрального уравнения равновесия с ядрами-куртозианами в пространствах различных размерностей // Вестник Московского университета. Сер 15: Вычисл. матем. и киберн. №3. С. 11–19. **2018**.

[12] Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. // М.: ГИТТЛ. **1956**.

[13] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. // М.: Наука. **1976**.

[14] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.5 // М.:Наука. **1974**.