Ονοματεπώνυμο: Παντελεήμων Μαλέκας
Α.Μ: 1115201600268

1. α) (∀x) (Φοιτητής(x) ⇒ Έξυπνος(x))
   β) (∃x) Φοιτητής(x)
   γ) (∃x) (Φοιτητής(x) ^ Έξυπνος(x))
   δ) (∀x) (∃y) (Φοιτητής(x) ⇒ (Φοιτητής(y) ^ Συμπαθεί(x,y)))
   ε) (∀x) (∃y) (Φοιτητής(x) ⇒ (Φοιτητής(y) ^ ¬(x = y) ^ Συμπαθεί(x,y)))
   στ) (∀x) (∃y) (Φοιτητής(x) ^ (Φοιτητής(y) ^ ¬(x = y)) ⇒ Συμπαθεί(x,y))
   ζ) Φοιτητής(Γιάννης)
   η) ¬Παίρνει(Γιάννης, ΤεχνητήΝοημοσύνη)
   θ) (¬∃x) (Φοιτητής(x) ^ Συμπαθεί(x,Γιάννης))
   ι) (∃x) ΈχειΑδερφή(Γιάννης,x)
   ια) (¬∃x) ΈχειΑδερφή(Γιάννης,x)
   ιβ) (∀x,y) (ΈχειΑδερφή(Γιάννης,x) ^ ΈχειΑδερφή(Γιάννης,y) ⇒ x = y)
   ιγ) (∀x) (∃y) (Φοιτητής(x) ⇒ (Μάθημα(y) ^ Παίρνει(x,y)))
   ιδ) (∃x)(∀y) (Φοιτητής(x) ^ Απέτυχε(x,ΤεχνητήΝοημοσύνη) ^ (Φοιτητής(y) ^ Απέτυχε(y,ΤεχνητήΝοημοσύνη)⇒ x=y))
   ιε) (¬∃x) (∃y) (Φοιτητής(x) ^ Απέτυχε(x,ΤεχνητήΝοημοσύνη)) ^ (Φοιτητής(y) ^ Απέτυχε(y,ΒάσειςΔεδομένων))
   ιστ) (∀x) (Φοιτητής(x) ^ Παίρνει(x,ΤεχνητήΝοημοσύνη) ⇒ Παίρνει(x,ΛογικόςΠρογραμματισμός))
   ιζ) (¬∃x) (∀y) (Φοιτητής(x) ^ (Φοιτητής(y) ^ ¬(x = y) ⇒ Ξεγελάει(x,y)))
   ιη) (∀x) (Δίποδο(x) ⇒ Ζώο(x) ^ (∃y,z) (¬(y = z) ^ ΈχειΠόδι(x,y) ^ ΈχειΠόδι(x,z) ^ (∀w)(ΈχειΠόδι(x,w) ⇒ w = y V w = z)))
   ιθ) (∀t) (Τρίγωνο(t) ⇒ Πολύγωνο(t) ^ (∃x,y,z) (¬(x = y) ^ ¬(x = z) ^ ¬(y = z) ^ ΈχειΓωνία(t,x) ^ ΈχειΓωνία(t,y) ^ ΈχειΓωνία(t,z) ^ (∀w)(ΈχειΓωνία(t,w) ⇒ w = x V w = y V w = z)) ^ (∃a,b,c) (¬(a = b) ^ ¬(a = c) ^ ¬(b = c) ^ ΕυθυγραμμοΤμήμα(a) ^ ΕυθυγραμμοΤμήμα(b) ^ ΕυθυγραμμοΤμήμα(c) ^ ΕυθυγραμμοΤμήμα(a) ^ ΈχειΠλευρά(t,a) ^ ΈχειΠλευρά(t,b) ^ ΈχειΠλευρά(t,c) ^ (∀d)(ΕυθυγραμμοΤμήμα(d) ^ ΈχειΠλευρά(t,d) ⇒ d =a V d =b V d = c)))
   κ) (∀t) (ΟρθογώνιοΤρίγωνο(t) ⇒ Τρίγωνο(t) ^ (∃x) (ΟρθήΓωνία(x) ^ ΈχειΓωνία(t,x) ^ (∀y) (¬(x = y) ^ ΟρθήΓωνία(y) ^ ΈχειΓωνία(t,y) ⇒ x = y)))
   κα) (∀x,y) (Σύντεκνοι(x,y) ⇒ Άντρας(x) ^ Άντρας(x) ^ (∃z) (Παιδί(z) ^ (ΕίναιΠαιδίΤου(z,x) ^ ΈχειΒαπτίσει(y,z) V ΕίναιΠαιδίΤου(z,y) ^ ΈχειΒαπτίσει(x,z))))

2. α) Χρησιμοποιούμε τις σταθερές Piggy και Girly για να σχηματίσουμε το πεδίο της ερμηνείας I. Οι προτάσεις λοιπόν είναι:

   φ1: Pig(Piggy)
   φ2: Woman(Girly)
   φ3: (∃x)(∃y)(Pig(x)∧Woman(y)∧¬(x=y)∧Rides(y,x))

   Ἀρα ορίζουμε το πεδίο |I| = {piggy,girly}.

   Η |I| κάνει τις εξείς αντιστοιχίσεις με τα σύμβολα σταθερών:

   $Piggy^I$ = piggy, $Girly^I$ = girly

   Η |I| αντιστοιχίζει στο μοναδιαίο σύμβολο κατηγορήματος Pig την μοναδιαία σχέση: {<piggy>}

   Η |I| αντιστοιχίζει στο μοναδιαίο σύμβολο κατηγορήματος Woman την μοναδιαία σχέση: {<girly>}

   Η |I| αντιστοιχίζει στο δυαδικό σύμβολο κατηγορήματος Rides την δυαδική σχέση: {<girly>,<piggy>}

   β) Για την φ1 έχουμε:
   $|=_I$ Pig(Piggy)[s] ανν $<\bar{s}(Piggy)> \in Pig^I$

   Ισχύει ότι $<\bar{s}(Piggy)> = <s(Piggy)> = <piggy> \in Pig^I$
   Ἀρα η φ1 ικανοποιείται από την ερμηνεία I.

   Για την φ2 έχουμε:
   $|=_I$ Woman(Girly)[s] ανν $<\bar{s}(Girly)> \in Woman^I$

   Ισχύει ότι $<\bar{s}(Girly)> = <s(Girly)> = <girly> \in Woman^I$
   Ἀρα η φ2 ικανοποιείται από την ερμηνεία I.

   Για την φ3 έχουμε:
   $|=_I$ (∃x)(∃y)(Pig(x)∧Woman(y)∧¬(x=y)∧Rides(y,x))[s] ανν υπάρχουν dx,dy τέτοια ώστε
$|=_I$ (∃x)(∃y)(Pig(x)∧Woman(y)∧¬(x=y)∧Rides(y,x))[s(x,dx|y,dy)]

Παίρνουμε κάθε περίπτωση από τις αναθέσεις μεταβλητών:

Π1: dx = piggy,   dy = girly
Π2: dx = girly,   dy = piggy
Π3: dx = piggy,   dy = piggy
Π4: dx = girly ,   dy = girly

Αναλύουμε κάθε όρο για κάθε περίπτωση:

- Άρα, για την Π1:

$\models_I$ Pig(x)[s(x|piggy)] ανν $< \bar{s}$(x|piggy)(x) > $\in$ Pig^I

Ισχύει ότι $<\bar{s}$(x|piggy)(x) > = <s(x|piggy)(x)> = <piggy> $\in$ Pig^I
Άρα ο πρώτος όρος ικανοποιείται από την ερμηνεία I.

$\models_I$ Woman(y)[s(y|girly)] ανν $<\bar{s}$(y|girly)(y) > $\in$ $Woman^I$

Ισχύει ότι $<\bar{s}$(y|girly)(y) > = <s(y|girly)(y)> = <girly> $\in$ $Woman^I$
Άρα και ο δεύτερος όρος ικανοποιείται από την ερμηνεία I.

$\models_I$ ¬(x=y)[s(x,dx|y,dy)] ανν $\not\models_I$ (x=y)[s(x,dx|y,dy)]

Ελέγχουμε λοιπόν αν ισχύει $\bar{s}$(x|dx)(x) = $\bar{s}$(y|dy)(y)
s(x|dx)(x) = s(y|dy)(y)
dx = dy
piggy = girly, άτοπο, άρα δεν ικανοποιείται.
Άρα ικανοποιείται από την ερμηνεία I και ο τρίτος όρος.

$\models_I$ Rides(y,x)[s(y|dy,x|dx)] ανν $<\bar{s}$(y|girly)(y),$<\bar{s}$(x|piggy)(x) > $\in$ $Rides^I$

Ισχύει ότι: $<\bar{s}$(y|girly)(y),$<\bar{s}$(x|piggy)(x) > = <s(y|girly)(y),<s(x|piggy)(x) > = <girly,piggy> $\in$ $Rides^I$
Οπότε ικανοποιείται και αυτός ο όρος. Αρά για την περίπτωση Π1 ικανοποιείται η φ3.

- Για την Π2:

$\models_I$ Pig(x)[s(x|girly)] ανν $<\bar{s}$(x|girly)(x) > $\in$ Pig^I

Ισχύει ότι $<\bar{s}$(x|girly)(x) > = <s(x|girly)(x)> = <girly> $\notin$ Pig^I
Άρα στην περίπτωση Π2 η φ3 δεν ικανοποιείται από την ερμηνεία I.

- Για την Π3:

$|=_I$ Pig(x)[s(x|piggy)] ανν $<\bar{s}(x|piggy)(x)> \in Pig^I$

Ισχύει ότι $<\bar{s}(x|piggy)(x)> = <s(x|piggy)(x)> = <piggy> \in Pig^I$
Ἀρα ο πρώτος όρος ικανοποιείται από την ερμηνεία I.

$|=_I$ Woman(y)[s(y|piggy)] ανν $<\bar{s}(y|piggy)(y)> \in Woman^I$

Ισχύει ότι $<\bar{s}(y|piggy)(y)> = <s(y|piggy)(y)> = <piggy> \notin Woman^I$
Ἀρα στην περίπτωση Π3 η φ3 δεν ικανοποιείται από την ερμηνεία I.

- Για την Π4:

$|=_I$ Pig(x)[s(x|girly)] ανν $<\bar{s}(x|girly)(x)> \in Pig^I$

Ισχύει ότι $<\bar{s}(x|girly)(x)> = <s(x|girly)(x)> = <girly> \notin Pig^I$
Ἀρα στην περίπτωση Π4 η φ3 δεν ικανοποιείται από την ερμηνεία I.

Καταλήγουμε ότι η φ3 ικανοποιείται μόνο στην περίπτωση Π1. Άρα η φ3 δεν ικανοποιείται για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών της s.

3. α) Από τις διαφάνειες έχουμε το θεώρημα: φ|=ψ ανν ο τύπος φ⇒ψ είναι έγκυρος.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι: $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \models (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$
Το οποίο θα ισχύει ανν για κάθε ερμηνεία I και ανάθεση μεταβλητών s: Vars → |I| ισχύει ότι $|=_I (\forall x)(P(x) \vee Q(x))[s]$ και ισχύει επίσης: $|=_I (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)[s]$

Εμείς όμως θα δείξουμε με αντιπαράδειγμα ότι δεν ικανοποιείται.

Έστω ότι έχουμε το πεδίο |I| = N* και ότι οι προτάσεις μας δηλώνουν: P(x) = “ο x είναι θετικός” και Q(x) = “ο x είναι αρνητικός”.

- Παίρνουμε την περίπτωση dx = 1

Άρα: $|=_I$ P(x)[s(x|1)] ανν $<\bar{s}(x|1)(x)> \in P^I$

Ισχύει ότι $<\bar{s}(x|1)(x)> = <s(x|1)(x)> = <1> \in P^I$
Ικανοποιείται λοιπόν το $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))[s]$
Αρκεί να ικανοποιείται επίσης: $|=_I (\forall x)P(x)[s]$ ή $|=_I (\forall x)Q(x)[s]$

- Στην περίπτωση dx = -1

Έχουμε: $|=_I P(x)[s(x|-1)]$ ανν $<\bar{s}(x|-1)(x)> \in P^I$

Ισχύει ότι $<\bar{s}(x|-1)(x)> = <s(x|-1)(x)> = <-1> \notin P^I$
Δεν ικανοποιείται δηλαδή το $(\forall x)P(x)[s]$

- Στην περίπτωση dx = 1

Έχουμε: $|=_I Q(x)[s(x|1)]$ ανν $<\bar{s}(x|1)(x)> \in Q^I$

Ισχύει ότι $<\bar{s}(x|1)(x)> = <s(x|1)(x)> = <1> \notin Q^I$
Δεν ικανοποιείται δηλαδή το $(\forall x)Q(x)[s]$

Καταλήγουμε ότι η πρόταση του α) δεν είναι έγκυρη.

β) Με το θεώρημα που είδαμε προηγουμένως έχουμε ότι: $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \models (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$.

Το οποίο θα ισχύει ανν για κάθε ερμηνεία I και ανάθεση μεταβλητών s: Vars → |I| ισχύει ότι $|=_I (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)[s]$ και ισχύει επίσης: $|=_I (\forall x)(P(x) \vee Q(x))[s]$

Έστω μια τυχαία ερμηνεία I και μια τυχαία ανάθεση μεταβλητών s, τέτοιες ώστε:
$|=_I (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)[s]$

Τότε σύμφωνα με τον ορισμό της ικανοποίησης για τους τύπους με καθολικό ποσοδείκτη, για κάθε $d \in |I|$ ισχύει ότι: $|=_I (\forall x)P(x)$ ή $|=_I (\forall x)Q(x)[s]$.

Τότε σύμφωνα με τον ορισμό της ικανοποίησης για τους τύπους με διάζευξη έχουμε:
$|=_I (\forall x)P(x)[s]$ v $(\forall x)Q(x)[s]$.

Τότε σύμφωνα με τον ορισμό της ικανοποίησης για τους τύπους με καθολικό ποσοδείκτη, για κάθε $d \in |I|$ ισχύει ότι: $|=_I (\forall x)(P(x) \wedge Q(x))[s]$.

Τέλος με τον ορισμό της ικανοποίησης για τους τύπους με διάζευξη έχουμε:
$|=_I P(x)$ ή $|=_I Q(x))[s]$.

Άρα καταλήγουμε στο ότι η πρόταση β) είναι έγκυρη.

4. Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι η β) είναι έγκυρη.

Οπότε: Μετατρέπουμε αρχικά σε CNF, την πρόταση αριστερά από το σύμβολο $\Rightarrow$. Δηλαδή την $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$ και έστω ότι την ονομάζουμε KB.

Αρχικά προτυποποιούμε τις μεταβλητές άρα: $(\forall x_1)P(x_1) \vee (\forall x_1)Q(x_1)$
Και απαλοίφουμε τους καθολικούς ποσοδείκτες, οπότε έχουμε: $P(x_1) \vee Q(x_1)$
Η KB είναι λοιπόν σε CNF.

Συνεχίζουμε στο να μετατρέψουμε σε CNF την άρνηση της πρότασης δεξιά από το σύμβολο $\Rightarrow$. Δηλαδὴ την $\neg((\forall x)(P(x) \vee Q(x)))$, και έστω ότι την ονομάζουμε $\neg φ$ (όπου φ η αντίστοιχη θετική πρόταση).

Ξεκινάμε με την μετακίνηση της άρνησης προς τα μέσα, άρα: $(\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$
Συνεχίζουμε με την απαλοιφή του υπαρξιακού ποσοδείκτη: $\neg P(e) \wedge \neg Q(e)$
Και αφαιρούμε την σύζευξη, οπότε καταλήγουμε με $\neg P(e)$, $\neg Q(e)$

Προσθέτουμε την $\neg φ$ στην KB και εφαρμόζουμε ανάλυση.

Βλέπουμε ότι από την $P(x_1) \vee Q(x_1)$ και την $\neg P(e)$, με την αντικατάσταση $x_1 = e$, έχουμε την πρόταση Q(e).

Άρα από την πρόταση Q(e) και την $\neg Q(e)$ καταλήγουμε σε κενή φράση, δηλαδή σε αντίφαση.

Εφόσον λοιπόν δείξαμε ότι το σύνολο $KB \cup \neg φ$ δεν ικανοποιείται, αυτό σημαίνει ότι η φ έπεται λογικά από την KB.
Ἀρα είναι έγκυρη η πρόταση $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \models (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$.

5. α) Τα σύμβολα σταθερών είναι: Αντωνάκης, Βαγγελάκης, Μαιρούλα, ΠΚ, Σοσιαλισμός, Καπιταλισμός

   Τα σύμβολα κατηγορημάτων είναι: ΜέλοςΤου(x,y). Χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι η σταθερά ή μεταβλητή x είναι μέλος ενός κόμματος y. [Δυαδικό Κατηγόρημα]

   Δεξιός(x). Χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι το πρόσωπο που παριστάνεται από την σταθερά ή μεταβλητή x είναι δεξιός. [Μοναδιαίο Κατηγόρημα]

Φιλελεύθερος(x). Χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι το πρόσωπο που παριστάνεται από την σταθερά ή μεταβλητή x είναι φιλελεύθερος. [Μοναδιαίο Κατηγόρημα]

Αρέσει(x,y). Χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι η σταθερά ή μεταβλητή y αρέσει στην σταθερά ή μεταβλητή x. [Δυαδικό Κατηγόρημα]

Οπότε η βάση γνώσης ΚΒ που προκύπτει είναι:

i) ΜέλοςΤου(Αντωνάκης,ΠΚ) ^ ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ) ^ ΜέλοςΤου(Μαιρούλα,ΠΚ)
ii) (∀x) (ΜέλοςΤου(x,ΠΚ) ^ ¬(Δεξιός(x)) ⇒ Φιλελεύθερος(x))
iii) (∀x) (Δεξιός(x) ⇒ ¬(Αρέσει(x,Σοσιαλισμός)))
iv) (∀x) (¬(Αρέσει(x,Καπιταλισμός)) ⇒ ¬(Φιλελεύθερος(x)))
v) (∀y) (Αρέσει(Βαγγελάκης,y) ⇒ ¬(Αρέσει(Αντωνάκης,y)) ^ ¬(Αρέσει(Βαγγελάκης,y)) ⇒ Αρέσει(Αντωνάκης,y))
vi) Αρέσει(Βαγγελάκης,Σοσιαλισμός) ^ Αρέσει(Βαγγελάκης,Καπιταλισμός)

Και η πρόταση φ που προκύπτει είναι:

vii) (∃x) (ΜέλοςΤου(x,ΠΚ) ^ Φιλελεύθερος(x) ^ ¬(Δεξιός(x)))

β) Μετατρέπουμε σε CNF τις προτάσεις της ΚΒ.

Ξεκινάμε με απαλοιφή συνεπαγωγών και μετακίνησης άρνησης προς τα μέσα.
i) ΜέλοςΤου(Αντωνάκης,ΠΚ) ^ ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ) ^ ΜέλοςΤου(Μαιρούλα,ΠΚ)
ii) (∀x) (¬ΜέλοςΤου(x,ΠΚ) V Δεξιός(x) V Φιλελεύθερος(x))
iii) (∀x) (¬Δεξιός(x) V ¬(Αρέσει(x,Σοσιαλισμός)))
iv) (∀x) (Αρέσει(x,Καπιταλισμός) V ¬(Φιλελεύθερος(x)))
v) (∀y) (¬(Αρέσει(Βαγγελάκης,y)) V ¬(Αρέσει(Αντωνάκης,y)) ^ Αρέσει(Βαγγελάκης,y) V Αρέσει(Αντωνάκης,y))
vi) Αρέσει(Βαγγελάκης,Σοσιαλισμός) ^ Αρέσει(Βαγγελάκης,Καπιταλισμός)

Συνεχίζουμε με προτυποποίηση μεταβλητών
i) ΜέλοςΤου(Αντωνάκης,ΠΚ) ^ ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ) ^ ΜέλοςΤου(Μαιρούλα,ΠΚ)
ii) (∀x_1) (¬ΜέλοςΤου(x_1,ΠΚ) V Δεξιός(x_1) V Φιλελεύθερος(x_1))
iii) (∀x_2) (¬Δεξιός(x_2) V ¬(Αρέσει(x_2,Σοσιαλισμός)))
iv) (∀x_3) (Αρέσει(x_3,Καπιταλισμός) V ¬(Φιλελεύθερος(x_3)))
v) (∀y_4) (¬(Αρέσει(Βαγγελάκης,y_4)) V ¬(Αρέσει(Αντωνάκης,y_4)) ^ Αρέσει(Βαγγελάκης,y_4) V Αρέσει(Αντωνάκης,y_4))
vi) Αρέσει(Βαγγελάκης,Σοσιαλισμός) ^ Αρέσει(Βαγγελάκης,Καπιταλισμός)

Αφαιρούμε τους καθολικούς ποσοδείκτες
i) ΜέλοςΤου(Αντωνάκης,ΠΚ) ^ ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ) ^ ΜέλοςΤου(Μαιρούλα,ΠΚ)
ii) (¬ΜέλοςΤου(x_1,ΠΚ) V Δεξιός(x_1) V Φιλελεύθερος(x_1))

iii) (¬Δεξιός(x_2) V ¬(Αρέσει(x_2,Σοσιαλισμός)))
iv) (Αρέσει(x_3,Καπιταλισμός) V ¬(Φιλελεύθερος(x_3)))
v) (¬(Αρέσει(Βαγγελάκης,y_4)) V ¬(Αρέσει(Αντωνάκης,y_4)) ^ Αρέσει(Βαγγελάκης,y_4) V Αρέσει(Αντωνάκης,y_4))
vi) Αρέσει(Βαγγελάκης,Σοσιαλισμός) ^ Αρέσει(Βαγγελάκης,Καπιταλισμός)

Αφαιρούμε την σύζευξη και καταλήγουμε σε:
i) ΜέλοςΤου(Αντωνάκης,ΠΚ), ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ), ΜέλοςΤου(Μαιρούλα,ΠΚ)
ii) ¬ΜέλοςΤου(x_1,ΠΚ) V Δεξιός(x_1) V Φιλελεύθερος(x_1)
iii) ¬Δεξιός(x_2) V ¬Αρέσει(x_2,Σοσιαλισμός)
iv) Αρέσει(x_3,Καπιταλισμός) V ¬Φιλελεύθερος(x_3)
v) ¬Αρέσει(Βαγγελάκης,y_4) V ¬Αρέσει(Αντωνάκης,y_4), Αρέσει(Βαγγελάκης,y_4) V Αρέσει(Αντωνάκης,y_4)
vi) Αρέσει(Βαγγελάκης,Σοσιαλισμός), Αρέσει(Βαγγελάκης,Καπιταλισμός)

Η άρνηση της φ είναι η:
¬((∃x) (ΜέλοςΤου(x,ΠΚ) ^ Φιλελεύθερος(x) ^ ¬(Δεξιός(x))))

Μετατρέπουμε λοιπόν και αυτήν σε CNF.
Ξεκινάμε με απαλοιφή συνεπαγωγών και μετακίνησης άρνησης προς τα μέσα.
((∀x) (¬ΜέλοςΤου(x,ΠΚ) V ¬Φιλελεύθερος(x) V (Δεξιός(x))))

Απαλοίφουμε και τον καθολικό ποσοδείκτη και καταλήγουμε:
¬ΜέλοςΤου(x,ΠΚ) V ¬Φιλελεύθερος(x) V Δεξιός(x)

Εφόσον φέραμε την ΚΒ και την ¬φ σε CNF ξεκινάμε να εφαρμόζουμε ανάλυση.
Από την iii) ¬Δεξιός(x_2) V ¬Αρέσει(x_2,Σοσιαλισμός) και την Αρέσει(Βαγγελάκης,Σοσιαλισμός) από την vi), με την αντικατάσταση x_2=Βαγγελάκης παίρνουμε την πρόταση: ¬Δεξιός(Βαγγελάκης), έστω viii)

Από την ¬φ:¬ΜέλοςΤου(x,ΠΚ) V ¬Φιλελεύθερος(x) V Δεξιός(x) και την viii) ¬Δεξιός(Βαγγελάκης) με την αντικατάσταση x=Βαγγελάκης, παίρνουμε την πρόταση ix) ¬ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ) V ¬Φιλελεύθερος(Βαγγελάκης)

Από την ix) ¬ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ) V ¬Φιλελεύθερος(Βαγγελάκης) και την ii) ¬ΜέλοςΤου(x_1,ΠΚ) V Δεξιός(x_1) V Φιλελεύθερος(x_1) με την αντικατάσταση x_1=Βαγγελάκης, παίρνουμε την x) ¬ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ) V Δεξιός(Βαγγελάκης)

Από την x) ¬ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ) V Δεξιός(Βαγγελάκης) και ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ) της i), παίρνουμε την xi) Δεξιός(Βαγγελάκης)

Από την xi) Δεξιός(Βαγγελάκης) και την iii) ¬Δεξιός(x_2) V ¬Αρέσει(x_2,Σοσιαλισμός) με την αντικατάσταση x_2 = Βαγγελάκης παίρνουμε την πρόταση

xii) ¬Αρέσει(Βαγγελάκης,Σοσιαλισμός)

Από την xii) ¬Αρέσει(Βαγγελάκης,Σοσιαλισμός) και την
vi) Αρέσει(Βαγγελάκης,Σοσιαλισμός) καταλήγουμε σε κενή φράση.

Εφόσον λοιπόν δείξαμε ότι το σύνολο φράσεων ΚΒ ∪ ¬φ δεν ικανοποιείται, αυτό σημαίνει ότι η φ έπεται λογικά από την ΚΒ, άρα ΚΒ |= φ.

γ) Προσθέτουμε την πρόταση Ans(x_5) V ¬φ στην ΚΒ και εφαρμόζουμε ανάλυση.

Συγκεκριμένα παίρνουμε την πρόταση
vii) Ans(x_5) V ¬ΜέλοςΤου(x,ΠΚ) V ¬Φιλελεύθερος(x) V Δεξιός(x)

Άρα έχουμε:
Από την iii) ¬Δεξιός(x_2) V ¬Αρέσει(x_2,Σοσιαλισμός) και την
Αρέσει(Βαγγελάκης,Σοσιαλισμός) από την vi), με την αντικατάσταση x_2=Βαγγελάκης παίρνουμε την πρόταση: ¬Δεξιός(Βαγγελάκης), έστω viii).

Από την vii) Ans(x_5) V ¬ΜέλοςΤου(x,ΠΚ) V ¬Φιλελεύθερος(x) V Δεξιός(x)
και την viii) ¬Δεξιός(Βαγγελάκης) με την αντικατάσταση x, x_5=Βαγγελάκης, παίρνουμε την πρόταση ix) Ans(Βαγγελάκης) V ¬ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ) V ¬Φιλελεύθερος(Βαγγελάκης)

Από την ix) Ans(Βαγγελάκης) V ¬ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ) V ¬Φιλελεύθερος(Βαγγελάκης) και την
ii) ¬ΜέλοςΤου(x_1,ΠΚ) V Δεξιός(x_1) V Φιλελεύθερος(x_1) με την αντικατάσταση x_1=Βαγγελάκης, παίρνουμε την x) Ans(Βαγγελάκης) V ¬ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ) V Δεξιός(Βαγγελάκης).

Από την x) Ans(Βαγγελάκης) V ¬ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ) V Δεξιός(Βαγγελάκης) και ΜέλοςΤου(Βαγγελάκης,ΠΚ) της i), παίρνουμε την xi) Ans(Βαγγελάκης) V Δεξιός(Βαγγελάκης)

Από την xi) Ans(Βαγγελάκης) V Δεξιός(Βαγγελάκης) και την iii) ¬Δεξιός(x_2) V ¬Αρέσει(x_2,Σοσιαλισμός) με την αντικατάσταση x_2 = Βαγγελάκης παίρνουμε την πρόταση xii) Ans(Βαγγελάκης) V ¬Αρέσει(Βαγγελάκης,Σοσιαλισμός)

Από την xii) Ans(Βαγγελάκης) V ¬Αρέσει(Βαγγελάκης,Σοσιαλισμός) και την
vi) Αρέσει(Βαγγελάκης,Σοσιαλισμός) καταλήγουμε στην xiii) Ans(Βαγγελάκης).

Η xiii) Ans(Βαγγελάκης) είναι η μοναδική φράση στην οποία καταλήγουμε.

Αυτό λοιπόν μας δίνει την πληροφορία ότι το μέλους του ΠΚ που έχει την ιδιότητα φ είναι ο Βαγγελάκης.

6. Αρχικά μετατρέπουμε τις προτάσεις σε λογική πρώτης τάξης.

α) (∀file) (∃pc,x) (ΒρίσκεταιΣε(file,pc) ^ ΠρόσβασηΣε(x,pc) ⇒ ΠροσπελάσιμοΜεFTP(file))
β) (∀file,mag) (ΔημοσιεύταιΣε(file,mag) ^ ΕκδίδεταιΑπο(mag,Student) ⇒ ΒρίσκεταιΣε(file,ftp.press.std.gr))
γ) (∀pc) (ΠροσφέρειAnonFTP(pc) ⇒ (∀x)ΠρόσβασηΣε(x,pc)
δ) ΠροσφέρειAnonFTP(ftp.press.std.gr)
ε) ΔημοσιεύταιΣε(“ΠωςΝαΔιαβάσετεΑποδοτικάΣτηνΕξεταστική”,”ΦοιτητικήΖωή”) ^ ΕκδίδεταιΑπο(“ΦοιτητικήΖωή”,Student)

Μετατρέπουμε λοιπόν τις προτάσεις σε μορφή Horn

α) ΒρίσκεταιΣε(file,pc) ^ ΠρόσβασηΣε(x,pc) ⇒ ΠροσπελάσιμοΜεFTP(file)
β) ΔημοσιεύταιΣε(file,mag) ^ ΕκδίδεταιΑπο(mag,Student) ⇒ ΒρίσκεταιΣε(file,ftp.press.std.gr)
γ) ΠροσφέρειAnonFTP(pc) ⇒ ΠρόσβασηΣε(x,pc)
δ) ΠροσφέρειAnonFTP(ftp.press.std.gr)
ε) ΔημοσιεύταιΣε(“ΠωςΝαΔιαβάσετεΑποδοτικάΣτηνΕξεταστική”,”ΦοιτητικήΖωή”) ^ ΕκδίδεταιΑπο(“ΦοιτητικήΖωή”,Student)

Για να αποδείξουμε ότι το άρθρο: ΠωςΝαΔιαβάσετεΑποδοτικάΣτηνΕξεταστική είναι προσπελάσιμο με ftp, θα χρησιμοποιησουμε forward chaining. Οπότε έχουμε:

Από τις προτάσεις:
ε) ΔημοσιεύταιΣε(“ΠωςΝαΔιαβάσετεΑποδοτικάΣτηνΕξεταστική”,”ΦοιτητικήΖωή”) ^ ΕκδίδεταιΑπο(“ΦοιτητικήΖωή”,Student) και
β) ΔημοσιεύταιΣε(file,mag) ^ ΕκδίδεταιΑπο(mag,Student) ⇒ ΒρίσκεταιΣε(file,ftp.press.std.gr), με την αντικατάσταση file = ΠωςΝαΔιαβάσετεΑποδοτικάΣτηνΕξεταστική και mag = “ΦοιτητικήΖωή”, δημιουργούμε την πρόταση
στ) ΒρίσκεταιΣε(“ΠωςΝαΔιαβάσετεΑποδοτικάΣτηνΕξεταστική”,ftp.press.std.gr)

Από τις προτάσεις δ) ΠροσφέρειAnonFTP(ftp.press.std.gr) και
γ) ΠροσφέρειAnonFTP(pc) ⇒ ΠρόσβασηΣε(x,pc), με την αντικατάσταση pc = ftp.press.std.gr δημιουργούμε την πρόταση
ζ) ΠρόσβασηΣε(x,ftp.press.std.gr)

Τέλος από τις προτάσεις
στ) ΒρίσκεταιΣε(“ΠωςΝαΔιαβάσετεΑποδοτικάΣτηνΕξεταστική”,ftp.press.std.gr),
ζ) ΠρόσβασηΣε(x,ftp.press.std.gr) και

α) ΒρίσκεταιΣε(file,pc) ^ ΠρόσβασηΣε(x,pc) ⇒ ΠροσπελάσιμοΜεFTP(file), με την αντικατάσταση file = “ΠωςΝαΔιαβάσετεΑποδοτικάΣτηνΕξεταστική” και pc = ftp.press.std.gr, δημιουργούμε την πρόταση η) ΠροσπελάσιμοΜεFTP(“ΠωςΝαΔιαβάσετεΑποδοτικάΣτηνΕξεταστική”)

Η η) αναπαριστά την πληροφορία που θέλαμε να αποδείξουμε, άρα εδώ σταματάει ο αλγόριθμος.

7. α) Μετατρέπουμε την φ: $(\forall x)(((\exists y)P(x,y) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall z)(R(z) \Rightarrow (\exists w)S(x,z,w)))$ σε CNF

   Ξεκινάμε με την απαλοιφή της συνεπαγωγής και μετακίνησης της άρνησης προς τα μέσα
   $(\forall x)((\forall y)(\neg P(x,y) \vee Q(x)) \wedge (\forall z)(\neg R(z) \vee (\exists w)S(x,z,w)))$

   Προτοτυποιούμε τις μεταβλητές, αντικαθιστούμε τον υπαρξιακό ποσοδείκτη και απαλοίφουμε τον καθολικό ποσοδείκτη.
   $(\neg P(x_1,y_1) \vee Q(x_1)) \wedge (\neg R(z_1) \vee S(x_1,z_1,F(x_1,z_1)))$

   Αφαιρούμε την σύζευξη και καταλήγουμε σε:
   $\neg P(x_1,y_1) \vee Q(x_1)$, $\neg R(z_1) \vee S(x_1,z_1,F(x_1,z_1))$

   Οπότε φέραμε την φ σε CNF.

   β) Ας ονομάσουμε την πρόταση $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists w)((P(x,y) \Rightarrow Q(x)) \wedge (R(z) \Rightarrow S(x,z,w)))$ ως χ.

   Θέλουμε την άρνηση της χ για να εφαρμόσουμε ανάλυση άρα
   ¬χ: $\neg((\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists w)((P(x,y) \Rightarrow Q(x)) \wedge (R(z) \Rightarrow S(x,z,w))))$

   Φέρνουμε την ¬χ σε CNF.
   Ξεκινάμε με απαλοιφή συνεπαγωγών και μετακίνησης της άρνησης προς τα μέσα.
   $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\forall w)((P(x,y) \vee \neg Q(x)) \wedge (R(z) \vee \neg S(x,z,w)))$

   Αντικαθιστούμε τους υπαρξιακούς ποσοδείκτες
   $(\forall w)((P(A,B) \vee \neg Q(A)) \wedge (R(C) \vee \neg S(A,C,w)))$

   Απαλοίφουμε τον καθολικό ποσοδείκτη
   $(P(A,B) \vee \neg Q(A)) \wedge (R(C) \vee \neg S(A,C,w))$

   Εφαρμόζουμε επιμερισμό V ως προς ^
   1. $((P(A,B) \wedge \neg Q(A)) \vee R(C)) \wedge ((P(A,B) \wedge \neg Q(A)) \vee \neg S(A,C,w))$
   2. $(P(A,B) \vee R(C)) \wedge (\neg Q(A) \vee R(C)) \wedge (P(A,B) \vee \neg S(A,C,w)) \wedge (\neg Q(A) \vee \neg S(A,C,w))$

   Αφαιρούμε την σύζευξη και καταλήγουμε σε:
   $(P(A,B) \vee R(C))$, $(\neg Q(A) \vee R(C))$, $(P(A,B) \vee \neg S(A,C,w))$, $(\neg Q(A) \vee \neg S(A,C,w))$

Ξεκινάμε λοιπόν να εφαρμόζουμε ανάλυση:
Από την $\neg P(x_1,y_1) \vee Q(x_1)$ της φ, και την $(P(A,B) \vee R(C))$ της ¬χ με την αντικατάσταση $x_1 = A$, $y_1 = B$ παίρνουμε την $Q(A) \vee R(C)$

Από την $(\neg Q(A) \vee R(C))$ της ¬χ και την νέα $Q(A) \vee R(C)$ παίρνουμε την $R(C)$

Από την $\neg R(z_1) \vee S(x_1,z_1,F(x_1,z_1))$ της φ, και την νέα $R(C)$ με την αντικατάσταση z_1=C, παίρνουμε την $S(x_1,C,F(x_1,C))$

Από την $\neg P(x_1,y_1) \vee Q(x_1)$ της φ, και $(P(A,B) \vee \neg S(A,C,w))$ της ¬χ, με την αντικατάσταση $x_1 = A$, $y_1 = B$ παίρνουμε την $Q(A) \vee \neg S(A,C,w)$

Από την $(\neg Q(A) \vee \neg S(A,C,w))$ της ¬χ και την $Q(A) \vee \neg S(A,C,w)$ παίρνουμε την $\neg S(A,C,w)$

Από την νέα $S(x_1,C,F(x_1,C))$ και την νέα $\neg S(A,C,w)$ με την αντικατάσταση $w = F(x_1,C)$, $x_1 = A$, καταλήγουμε στην κενή φράση.

Εφόσον λοιπόν δείξαμε ότι το σύνολο φράσεων $\varphi \cup \neg\chi$ δεν ικανοποιείται, αυτό σημαίνει ότι η χ έπεται λογικά από την φ, άρα φ |= χ.

8. α) Θα χρησιμοποιήσω τις οριστικές φράσεις Horn χωρίς σύμβολα συναρτήσεων, όπως αναφέρουν οι διαφάνειες του μαθήματος, για την αναπαράσταση της Datalog.

   Οπότε για την σχεσιακή βάση έχουμε:
   Professor(Manolis)
   Professor(Stavros)
   Professor(Elena)
   Course(AI)
   Course(Compilers)
   Course(DB)
   Course(Algebra)
   Name(Manolis)
   Name(Stavros)
   Name(Elena)
   Name(Yannis)
   Dept(ECE)
   Dept(Math)

TeachesIn(Manolis,AI)
TeachesIn(Manolis,Compilers)
TeachesIn(Stavors,DB)
TeachesIn(Elena,Algebra)
WorksIn(Manolis,ECE)
WorksIn(Stavros,ECE)
WorksIn(Elena,Math)
WorksIn(Yannis,Math)

H SQL ερώτηση:
TeachesIn(x,y) ^ WorksIn(x,Math)

Και η απάντηση της:
TeachesIn(Elena,Algebra) ^ WorksIn(Elena,Math)

β) Χρησιμοποιούμε την τεχνική του forward chaining για να βρούμε ότι TeachesIn(Elena,Algebra) ^ WorksIn(Elena,Math).

Παρατηρούμε ότι αν εφαρμόσουμε την αντικατάσταση x = Elena και y = Algebra στην SQL ερώτηση μας, δηλαδή στην: TeachesIn(x,y) ^ WorksIn(x,Math), τότε θα δημιουργηθει η TeachesIn(Elena,Algebra) ^ WorksIn(Elena,Math), η οποία είναι η ζητούμενη πρόταση. Ἀρα βρήκαμε αυτό που θέλαμε.

9. Τα σύμβολα σταθερών/μεταβλητών είναι: Fname, Minit, Lname, Ssn, Birthday, Address, TypingSpeed, Tgrade, EngType, Salary, PayScale

   Τα σύμβολα κατηγορημάτων είναι:

   Name(Fname, Minit, Lname)

   Employee(Ssn, Name(x, y, z), Birthday, Address)

   Secretary(Ssn, TypingSpeed)

   Technician(Ssn, Tgrade)

   Engineer(Ssn, EngType)

   Manager(Ssn)

   Project(x)

   Manages(Manager(Ssn),Project(x))

SalariedEmployee(Ssn,Salary)

HourlyEmployee(Ssn,PayScale)

TradeUnion(t)

BelongsTo(HourlyEmployee(Ssn,PayScale),TradeUnion(t))

Επέλεξα να συμβολίσω με κατηγορήματα τους τύπους οντοτήτων και τις συσχετίσεις. Μοναδική εξαίρεση είναι το χαρακτηριστικό γνώρισμα Name επειδή περιέχει με την σειρά του και άλλα χαρακτηριστικά γνωρίσματα. Τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά γνωρίσματα αναπαριστώνται από σύμβολα σταθερών/μεταβλητών. Επίσης το Ssn εφόσον είναι το πρωτεύον κλειδί του Employee εμπεριέχεται σε κάθε άλλη υποκατηγορία.

Οπότε από αυτά που έχουμε σχηματίζουμε τις εξείς σύνθετες προτάσεις:

(∃ Ssn) (Employee(Ssn, Name(x, y, z), Birthday, Address) ⇒ (Secretary(Ssn,TypingSpeed)) V Technician(Ssn, Tgrade) V Engineer(Ssn, EngType))

(∃ Ssn) (Employee(Ssn, Name(x, y, z), Birthday, Address) ⇒ Manager(Ssn))

(∃ Ssn) (Manager(Ssn) ⇒ Manages(Manager(Ssn),Project(x))

(∃ Ssn) (Employee(Ssn, Name(x, y, z), Birthday, Address) ⇔ SalariedEmployee(Ssn,Salary))

(∃ Ssn) (Employee(Ssn, Name(x, y, z), Birthday, Address) ⇔ HourlyEmployee(Ssn,PayScale))

(∃ Ssn) (HourlyEmployee(Ssn,PayScale) ⇒ BelongsTo(HourlyEmployee(Ssn,PayScale),TradeUnion(t)))

Θεώρησα ότι εφόσον δεν αρκούν τα κατηγορήματα για την απεικόνιση κάποιων σημείων του σχήματος ήταν απαραίτητη η χρήση αυτών των σύνθετων προτάσεων. Αναπαριστούν τις πληροφορίες σχετικά με το isA και τις υποκατηγορίες, καθώς και τον συνδυασμό των οντοτήτων με τις συσχετίσεις Manages και BelongsTo. Να σημειωθεί ότι έχω χρησιμοποιήσει το σύμβολο της ισοδυναμίας στις προτάσεις με τους SalariedEmployee και HourlyEmployee, σε αντίθεση με το σύμβολο της συνεπαγωγής όπως στις υπόλοιπες προτάσεις, μιας και στο σχήμα χρησιμοποιείται η διπλή γραμμή που δηλώνει ότι ο διαμερισμός σε υποκατηγορίες είναι πλήρης.

β) Κάνουμε τις απαραίτητες αναθέσεις στις προτάσεις που σχηματίσαμε προηγουμένως άρα έχουμε:

Name(Γιώργος, Γ., Μαυρόπουλος)

Employee(Ssn, Name(Γιώργος, Γ., Μαυρόπουλος), Birthday, Αθήνα)

Και σχηματίζουμε την τελική σύνθετη πρόταση:
Employee(Ssn, Name(Γιώργος, Γ., Μαυρόπουλος), Birthday, Αθήνα) ⇒ Technician(Ssn, Tgrade)

10. Έχουμε τις προτάσεις: 1) Loves(John,Mary), 2) Loves(John,Kate) και
    3) Loves(x,y)⇒GivesPresentsTo(x,y)

    Μετατρέπουμε λοιπόν τις ερωτήσεις σε λογική πρώτης τάξης.

    α) GivesPresentsTo(John,Mary)
    β) GivesPresentsTo(Kate,Mary)
    γ) GivesPresentsTo(Kate,Susan)
    δ) (∃x) (GivesPresentsTo(John,x))
    ε) (∀x) ((∃y) Loves(x,y) V (∃z) (GivesPresentsTo(z,x)))

    Οι απαντήσεις λοιπόν είναι:
    α) Ναι. Από την 1) έχουμε ότι ο John αγαπάει την Mary, και η 3) μας λέει ότι εφόσον είναι αληθές το Loves(x,y) τότε ισχύει και το GivesPresentsTo(x,y), άρα ο John δίνει δώρα στην Mary.
    β) Οχι. Δεν βλέπουμε να προκύπτει από τις προτάσεις μας ότι η Kate αγαπά την Mary, άρα δεν τις δίνει δώρα.
    γ) Οχι. Δεν βλέπουμε να προκύπτει από τις προτάσεις μας ότι η Kate αγαπά την Susan, άρα δεν τις δίνει δώρα.
    δ) Ναι. Από τις 1) και 2) βλέπουμε ότι ο John αγαπά και την Mary και την Kate άρα δίνει δώρα και στις δύο, λόγω της 3).
    ε) Οχι. Η Mary δεν αγαπά τον John, το ίδιο και η Kate. Επίσης οι δυό τους δεν αλληλοαγαπιούνται. Οπότε δεν αγαπά κάθε άνθρωπος κάποιον άλλον. Για τον ίδιο λόγο δεν υπάρχει κάποιος που να του δίνει δώρα.

    Για να είναι οι απαντήσεις: Ναι, Οχι, Οχι, Ναι, Ναι

Στις α), β), γ) και δ) δεν χρειάζεται να αλλάξουμε κάτι γιατί οι απαντήσεις είναι ήδη αυτές που θέλουμε.

Στην ε) θα χρειαστεί να προσθέσουμε κάθε πιθανό συνδυασμό του Loves. Άρα να έχουμε και τις Loves(Mary,John), Loves(Kate,John), Loves(Mary,Kate), Loves(Kate,Mary), Loves(Kate,Susan), Loves(Mary,Susan), Loves(John,Susan), Loves(Susan,Mary), Loves(Susan,Kate) και Loves(Susan,John). Έτσι θα ισχύει ότι κάθε άνθρωπος αγαπά κάποιον άλλον. Ταυτόχρονα εφόσον ισχύει ότι καθένας αγαπά κάποιον άλλον θα ισχύει και το δεύτερο σκέλος, δηλαδή ότι υπάρχει κάποιος που δίνει δώρα σε κάθε άνθρωπο, λόγω της πρότασης 3).

11. Έχω παραθέσει τα σχετικά αρχεία στον φάκελο μου. Συγκεκριμένα τα q5_input.txt, q5_output.txt και q5_proof.txt είναι για την απόδειξη του ερωτήματος 5β) και τα q7_input.txt, q7_output.txt και q7_proof.txt για την απόδειξη του ερωτήματος 7β). Όσον αφορά την έκδοση από το Prover9 χρησιμοποίησα το GUI για τα Windows.

    Γενικά, έχω γράψει στο πεδίο του Assumptions την αντίστοιχη KB σε CNF μορφή και στο πεδίο του Goals την φ, αλλά στην κανονική της μορφή. Χωρίς μετατροπές σε CNF δηλαδή. Επίσης όσες φράσεις ήταν στα Ελληνικά τις ξαναέγραψα στα Αγγλικά, γιατί δεν δέχοταν ελληνικούς χαρακτήρες.