

MO824A/MC859A – Tópicos em Otimização Combinatória
Primeiro semestre de 2022

Atividade 4

Entrega: 13 de maio de 2022, até 23:59

Prof. Fábio Luiz Usberti (fusberty@ic.unicamp.br)

Prof. Celso Cavellucci (celsocv@ic.unicamp.br)

1 Objetivo

O objetivo desta atividade consiste na implementação (em grupos de **dois** ou **três** alunos) de uma metaheurística “GRASP” (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) para a solução de um problema de maximização de uma função binária quadrática (“quadratic binary function” – QBF).

2 GRASP

Para esta atividade é essencial a leitura da seguinte referência:

Título: Greedy Randomized Adaptive Search Procedures: Advances and Extensions.

Autores: Maurício G. C. Resende e Celso Ribeiro

3 Problema MAX-QBF

Uma função binária quadrática (QBF) é uma função $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser expressa como uma soma de termos quadráticos:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

Onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i, j = 1, \dots, n$) são os coeficientes da função f . Em notação matricial, uma QBF pode ser expressa como:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & x_1 & (2x_1 + 3x_2 + 4x_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 + 4x_3^2 \end{aligned}$$

O problema de maximização de uma função binária quadrática (MAX-QBF) pode ser expresso como:

$$Z = \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) ,$$

O MAX-QBF é um problema NP-difícil [1], mesmo que nenhuma restrição adicional seja imposta sobre as variáveis binárias \mathbf{x} . No entanto, se os coeficientes a_{ij} forem todos não-negativos, o problema torna-se trivial, uma vez que $x_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$) é uma solução ótima.

4 Problema MAX-QBF com mochila

Uma variante do problema MAX-QBF é definida a seguir:

Problema MAX-KQBF (“Maximum knapsack quadratic binary function”): Considere uma capacidade $W \in \mathbb{R}$ e um peso $w_i \in \mathbb{R}$ associado a cada variável x_i . Deseja-se maximizar uma função binária quadrática tal que a soma dos pesos das variáveis que pertencem à solução não exceda a capacidade W . Este problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i \leq W \\ & x_i \in \mathbb{B} \quad \forall i = \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Onde $a_{ij}, w_i, W \in \mathbb{R}$ ($i, j = 1, \dots, n$) são parâmetros do problema.

5 Requisitos da atividade

Esta atividade envolve a implementação de uma metaheurística GRASP como um método de solução para o MAX-KQBF. Para esta atividade você pode utilizar como base o Framework GRASP em Java, disponível no ensino aberto, desenvolvido pelos docentes desta disciplina.

Para esta atividade é necessário a implementação de pelo menos dois *métodos de construção alternativos* discutidos no artigo de referência do GRASP [2]:

1. *Random plus greedy*
2. *Sampled greedy construction*
3. *Reactive GRASP*
4. *Cost perturbations*
5. *Bias functions*
6. *Intelligent construction*
7. *POP in construction*

A atividade exige a entrega do código-fonte e de um relatório (de aproximadamente 5 páginas) descrevendo brevemente as seguintes informações:

- Descrição do problema: variáveis de decisão e modelo matemático.
- Metodologia: descrição da lista restrita de candidatos (RCL – “restricted candidate list”), heurística construtiva, métodos de construção alternativos, operadores de busca local, métodos de busca (*first-improving* e *best-improving*), critérios de parada.
- Resultados: tabela de resultados e análise dos desempenhos obtidos para cada metodologia.

Devem ser avaliados dois métodos de busca (*first-improving* e *best-improving*), dois valores (α_1 e α_2) para o parâmetro $\alpha \in [0, 1]$ da lista RCL e três métodos de construção (padrão, alternativo 1 e alternativo 2). Desse modo, uma sugestão de possíveis configurações são:

1. PADRÃO: GRASP com parâmetro α_1 , *first-improving* e heurística construtiva padrão.
2. PADRÃO+ALPHA: GRASP PADRÃO mas com parâmetro α_2 .
3. PADRÃO+BEST: GRASP PADRÃO mas com *best-improving*.
4. PADRÃO+HC1: GRASP PADRÃO mas com método de construção alternativo 1.
5. PADRÃO+HC2: GRASP PADRÃO mas com método de construção alternativo 2.

Procure organizar os resultados em uma tabela, avaliando qual a estratégia obteve o melhor desempenho.

6 Instâncias

Testes computacionais devem ser realizados com um conjunto de sete instâncias disponíveis no ambiente ensino aberto. Adote um tempo de execução para cada instância de 30 minutos. Os nomes das instâncias, suas dimensões e os intervalos nos quais os valores das soluções ótimas se encontram são fornecidos a seguir:

Instância	$ x $	MAX-KQBF (Z^*)
kqbf020	20	[80, 151]
kqbf040	40	[275, 429]
kqbf060	60	[446, 576]
kqbf080	80	[729, 1000]
kqbf100	100	[851, 1539]
kqbf200	200	[3597, 5826]
kqbf400	400	[10846, 16625]

7 Referências

1. Kochenberger, et al. The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey. **J Comb Optim** (2014). 28:58–81. DOI:10.1007/s10878-014-9734-0.
2. Resende, M. G. C. e Ribeiro, C. Greedy Randomized Adaptive Search Procedures: Advances, Hybridizations, and Applications. In: M. Gendreau, J.-Y. Potvin (eds.), **Handbook of Metaheuristics**, International Series in Operations Research & Management Science 146, DOI: 10.1007/978-1-4419-1665-5.