Matrizes quadradas

Jacques Wainer

18/3/20

Matrizes

Capítulo 3 do livro texto

videos https://www.youtube.com/watch?v=kYB8IZa5AuE e https://www.youtube.com/watch?v=XkY2DOUCWMU

Matriz como transformação

Transformação linear

T é a transformação linear de um espaço vetorial a outro espaço ou ao mesmo espaço tal que

- $T(\vec{a}+\vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b})$
- $T(\alpha\vec{a}) = \alpha T(\vec{a})$

portanto

- $T\vec{0} = \vec{0}'$

onde $\vec{0}'$ é o vetor 0 no novo espaço.

Outras transformações lineares

- diferenciação $\frac{d}{dx}$
- integral definida $\int_a^b f dx$
- integral indefinida $\int f dx$

Matriz quadrada como endomorfismo

Uma transformação linear de um espaço nele mesmo

$f : V \to V$

Se V é um espaço R^n então transformações lineares nesse espaço podem ser representadas por matrizes quadradas.

Multiplicação matriz vezes vetor

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 9 \\ 10 & 20 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a + 2b + 3c \\ -3a + 0b + 9c \\ 10a + 20b - 30c \end{bmatrix}$$

o produto escalar de cada linha da matriz pelo vetor.

Para onde vao as bases?

[1,0,0] é a 1a base

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 9 \\ 10 & 20 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

[0,1,0] é a segunda base

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 9 \\ 10 & 20 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

As colunas da matriz são os novos vetores correspondente as bases.

Multiplicação matriz vezes vetor (outra versão)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 9 \\ 10 & 20 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a + 2b + 3c \\ -3a + 0b + 9c \\ 10a + 20b - 30c \end{bmatrix}$$

Voce só precisa saber para onde as bases vão (que são as colunas da matriz). Isso determina

Note que uma transformação linear gera um ponto NOVO. Não é o ponto velho numa base nova (veremos mudança de base mais tarde). O ponto é um novo ponto que tem os mesmo coeficientes do ponto velho mas multiplicando os vetores que correspondem as bases na transformação. Note que o ainda estamos falando da base velha.

Algumas transformações

identidade

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I = I_3$$

Projeção no plano x,y

o x e y ficam como estão e o z vai para o

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alongar o x e o y

Alongar o x por 2 e o y por 3.5

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3.5 \end{bmatrix}$$

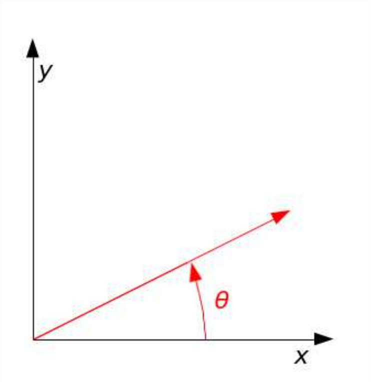
Rotação de 90 em 2D

o x vai para y e o y vai para -x

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotação de θ em 2D

o x vai para $[\cos\theta, \sin\theta]^T$ e o y vai para $[-\sin\theta, \cos\theta]^T$



$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotação em 3D

em volta do eixo y, por exemplo. O x vai para z, o y fica igual, e o z vai para -x

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

espelho em 2D em relação ao x

x fica igual e o y vai para -y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Null space

Algumas transformações lineares podem gerar 0 mesmo que aplicadas a vetores diferentes de 0

$Av = \vec{0}$

O null space de uma matriz é o conjunto de vetores que a matriz leva para o 0.

O null space é um subespaço do espaço de origem (verifique)

De vez em quando o null space é trivial, apenas o vetor $\vec{0}$ (para a rotação por exemplo)

Ou pode ser um subespaço "maior". Para a matriz que projeta para o plano x,y o subespaço gerado pelo $\vec{z}$ é o null space.

De vez em quando o null space é chamado de kernel.

rank de uma matriz

o rank de uma matriz é a dimensão do espaço original, menos a dimensão do null space.

o rank é a dimensão do espaço gerado (span) pelas colunas da matriz.

Uma matriz é full rank, se o rank dela é a dimensão do espaço original (ou seja a matriz não leva nenhum vetor não nulo para o 0)

Transposta

Troca linhas por colunas numa matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 9 \\ 10 & 20 & -30 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 2 & 0 & 20 \\ 3 & 9 & -30 \end{bmatrix}$$

Vetores

Transposta funciona para vetores.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}^T = [0 \quad 1 \quad 10]$$

E o dual

$$[0 \quad 1 \quad 10]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Notação para o produto interno (produto escalar)

produto escalar tradicional:

$< x, y >= x^T y$

$$< [\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}] [\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}] >= [0 \quad 1] [\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}] = 0 * 4 + 1 * 5 = 5$$

Alguns tipos de matrizes

- diagonal: só elementos na diagonal, o resto 0
- triangular (superior) todos os elementos abaixo da diagonal são 0.
- simétrica igual a sua transposta $M^T = M$
- triangular inferior

Produto de matrizes

$$A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$$

Combinação de transformações.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 9 \\ 10 & 20 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} < [1,2,3],[a,e,h] > & < [1,2,3],[b,f,i] > & < [1,2,3],[c,g,j] > \\ < [-1,0,9],[a,e,h] > & < [-1,0,9],[b,f,i] > & < [-1,0,9],[c,g,j] > \\ < [10,20,-30],[a,e,h] > & < [10,20,-30],[b,f,i] > & < [10,20,-30],[c,g,j] > \end{bmatrix}$$

Produto não é comutativo

normalmente $AB \neq BA$

há casos onde o produto é comutativo, em particular $AI = IA = A$

Inversa de uma matriz

Uma matriz full rank (sem null space) pode ser invertida de tal forma que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

ou se $y = Ax$ então $x = A^{-1}y$

Matrizes que não são full rank não tem inversa pois todo o null space é mapeado para um só vetor (o 0) e portando não da para inverte o 0.

Transposta e inversa de um produto

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

se eles existem

Onde matrizes quadradas aparecem

Relação par a par entre n entidades

- cada n linha o n coluna é uma entidade
- normalmente a matriz é simétrica pois as relações são normalmente simétricas

Grafos

- vértices são as n linha e n colunas da matriz, e o valor da matriz é o valor da aresta,

- se não direcionado, a matriz será simétrica

Matriz de covariância

x e y são dois conjuntos de n dados - pareados x_1 corresponde ao y_1 etc

$$Cov(x,y) = E[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})] = \bar{xy} - \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_{j>i} (x_i - x_j)(y_i - y_j)$$

$$Cov(x,x) = E[(x_i - barx)^2] = \bar{x^2} - \bar{x}^2 = Var(x)$$

onde $\bar{x}$ é a media dos x, e $E[x]$ também é a media dos x.

Matriz de covariância de 3 variáveis (dimensões) x, y e z

$$\begin{bmatrix} Cov(x,x) & Cov(x,y) & Cov(x,z) \\ Cov(y,x) & Cov(y,y) & Cov(y,z) \\ Cov(z,x) & Cov(z,y) & Cov(z,z) \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica.

Matriz de covariância é a extensão da variância (de uma variável só) para múltiplas variáveis.

Variância σ^2 aparece na distribuição normal

$$N(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\frac{x^2-\mu^2}{\sigma^2}}$$

Numa distribuição normal de múltiplas variáveis, a matriz de covariância “entra no lugar” do σ^2 (a ser visto na próxima aula)