Vetores

Jacques Wainer

16/3/20

Vetores

Capítulo 2 do livro texto

video https://www.youtube.com/watch?v=fNk_zzaMoSs e
https://www.youtube.com/watch?v=k7RM-ot2NWY

Vetor como flecha

flecha com:

- tamanho (magnitude)
- direção
- sentido (de vez em quando)

as flechas **não estão presas a pontos**

você pode mexer um vetor/flecha desde que não mude a direção e o tamanho (deslocamento paralelo)

https://mathinsight.org/vector_introduction

Soma de vetores

$$\vec{a} + \vec{b}$$

Coloque um vetor no fim do outro. A soma é o vetor do inicio do primeiro até o fim do segundo

multiplicação por escalar

multiplicar um vetor pro um numero é multiplicar o tamanho da flecha por esse numero sem mexer na direção

vetor $\vec{0}$

um ponto

- tamanho 0
- sem direção

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

angulo entre 2 vetores

- move as 2 flechas saindo do mesmo ponto
- o angulo entre as 2 flechas

Vetor como ponto no espaço

um vetor é um ponto no espaço R^n.

representado por uma sequencia de números que são as coordenadas dos pontos

representado como um vetor de pé

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

nessas transparências eu vou representar o vetor como $[2, 4, -3]^T$ e de vez em quando vou nem usar o ^{T} (só porque fica mais fácil editar a página).

soma de vetores

[1,2,3]+[10,20,-10]=[11,22,-7]

4*[2,3,4] = [8,12,16]

Flechas e pontos são a mesma coisa

o ponto no espaço

$$[2, 3, -1]^T$$

é o vetor/flecha

$$2\vec{x} + 3\vec{y} - 1\vec{z}$$

onde $\vec{x}$ é o vetor de magnitude 1 na direção da coordenada x, $vecy$ o vetor de margnitude 1 na direção da coordenada y

Espaço vetorial

- um conjunto de objetos V
- uma operação $+$ entre objetos V
- um conjunto de escalares F
- uma operação . entre F e V
- um vetor $\vec{0} \in V$

regras: https://mathworld.wolfram.com/VectorSpace.html

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
- existe o vetor $\vec{0}$ tal que $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
- para cada vetor $\vec{a}$ existe $\vec{-a}$ tal que $\vec{a}+\vec{-a}=\vec{0}$
- $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$
- $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$
- $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$
- $1\vec{a}=\vec{a}$

subespaço

Se V é um espaço vetorial, S é um **subespaço** de V se

- $S \subseteq V$ e
- S é um espaço vetorial, isto é, é fechado para as operações $+$ e multiplicação por escalar ("infinito") e contem o 0.

Combinação linear

dados vetores a, b e c, uma combinação linear desses vetores é o vetor

$$\alpha a+\beta b+\gamma c$$

para algum α, β e γ real.

vetores linearmente independentes

um conjunto de vetores é linearmente independente se nenhum deles é a combinação linear dos outros.

span de vetores.

O span de vetores a e b é conjunto de vetores gerado por todas as combinações lineares de a e b.

- verifique que as regras de espaço vetorial se aplicam ao span de n vetores. Assim o span de um conjunto de vetores é um subespaço vetorial

Base

seção III cap 2 do livro texto

base é um conjunto linearmente independente de vetores cujo span é o próprio espaço vetorial.

o número de vetores na base é a **dimensão** do espaço.

Geometria?

Se temos pontos no espaço com 3 coordenadas, então **em principio** estamos falando do espaço R^3 que é um espaço de 3 dimensões.

Base: [1,0,0], [0,1,0], e [0,0,1]

Mas podemos estar interessados num **subespaço** desse espaço. Por exemplos os pontos $[x, y, z]$ onde $x = y = z$.

Esse subespaço tem como base [1,1,1], e portanto tem dimensão 1.

O espaço de dimensão 1 esta *embedded* no espaço "maior" de dimensão 3.

affine space

um affine space é um subespaço que não contem o $\vec{0}$

https://en.wikipedia.org/wiki/Affine_space

$[x, y, z]$ onde $x = y = z - 1$

isso é um "espaço" 1-dimensional, deslocado na direção z

veja que isso não é um **espaço vetorial** pois ele não contem o [0,0,0]. Mas pode ser pensado como um espaço vetorial deslocado

linhas e planos e hiperplanos

Num certo sentido, espaços affine captura a ideia de linhas (espaços affine 1 D) e planos (espaços affine 2D) embedded em espaços vetoriais maiores.

Um *linha* no espaço 3D é algo parecido com um subespaço de 1D embedded no espaço 3.

Um *plano* no espaço 3D é um espaço affine 2D embedded num espaço 3D

Normalmente chamamos de **hiperplano** um espaço affine de dimensão 1 menos a dimensão do espaço onde ele esta embedded. (Mas *acho* isso não é 100% necessário - *acho* que o hiperplano pode ter menos dimensões ainda - uma linha em 3D é um hiperplano)

Indo mais para geometria, **hiperesfera** é o conceito de esfera (pontos distantes r de um centro) para espaços de mais dimensões.

hipercubo estende cubos para mais dimensões.

simplex estende triângulos (e tetraedros) para N dimensões.

"subespaços" curvos - manifold

de vez em quando (mas não o curso de álgebra **linear**) queremos falar de uma "linha curva" ou um "plano curvo"

Isso são extensões não lineares de espaço affine.

superfície é um "espaço curvo" 2D

manifold é o nome genérico de um “espaço curvo” embedded dentro de um espaço maior.

Um espaço affine tradicional (não curvo) é um manifold linear

Produto interno - produto escalar

função de 2 vetores para um real $< a, b >$

segue regras: https://mathworld.wolfram.com/InnerProduct.html

- $< a + b, c > = < a, c > + < b, c >$
- $< \alpha a, b > = \alpha < a, b >$
- $< a, b > = < b, a >$
- $< a, a > \geq 0$
- $< a, a > = 0$ se e somente se $a = 0$

$< a, b >$ em algumas áreas de aprendizado de maquina é chamado de **kernel**.

dot product ou produto interno euclidiano (tradicional)

$$< a, b > = |a||b|cos\theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_n b_n$$

onde a_i é o valor da dimensão i do vetor a. θ é o angulo entre os vetores, $| a| $ é a magnitude do vetor a

produto interno como similaridade

dot product é uma medida de similaridade entre vetores

quanto mais parecidos maior o número.

quando os vetores são paralelos (mesma direção), $\theta = 0, cos\theta = 1$

tamanho de um vetor

para o produto interno tradicional

$$|v| = \sqrt{< v, v >}$$

Produto interno é uma forma de definir o tamanho de um vetor (que é mais relevante se os vetores são coisas esquisitas - ver abaixo)

distancia entre 2 vetores

$$d(x, y) = \sqrt{< x - y, x - y >}$$

ortogonalidade

Vetores são ortogonais (angulo entre eles é 90 graus) se $< a, b >= 0$

base ortogonal

base é ortogonal se cada par de vetores de uma base são ortogonais entre si.

base é **ortonormal** se alem de ortogonal cada vetor da base tem tamanho = 1

Espaços vetoriais "estranhos"

polinômios de grau 3

$$a + bx + cx^2 + dx^3$$

soma e produto são soma de polinômios e produto dos coeficientes pelo escalas.

Note que cada vetor é uma função.

a base tradicional desse espaço é $1, x, x^2, x^3$

Esse espaço tem dimensão 4

o polinômio acima pode ser representado como [a,b,c,d]. Veja que as operações funcionam com essa representação

Não há uma definição única para o produto interno de polinômios veja https://math.stackexchange.com/questions/2412804/examples-of-inner-products-on-a-polynomial-vector-space

qualquer polinômio

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

pode ser representado com o vetor infinito $[a_0, a_1, a_2, \dots, 0, 0 \dots]$

espaço de infinitas dimensões!

funções definida num intervalo fixo

todas as funções definidas no intervalo $[a, b]$.

soma de funções $f + g = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

produto por escalar $\alpha f = (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

base??

$< f, g >= \int_a^b fgdx$