MO824A/MC859A – Tópicos em Otimização Combinatória
Primeiro semestre de 2022

Atividade 3
Entrega: 29 de abril até 23:59

Prof. Fábio Luiz Usberti (fusberti@ic.unicamp.br)
Prof. Celso Cavellucci (celsocv@ic.unicamp.br)

---

1 Objetivo

O objetivo desta atividade consiste na aplicação da técnica de relaxação Lagrangiana, resolvida pelo método dos subgradientes, para a obtenção de limitantes primais e duais de um problema de programação linear inteira.

A atividade deve ser realizada em equipes de 2 a 3 alunos. Os docentes vão sortear as equipes aleatoriamente. As equipes com 2 alunos ganharão um bônus na nota em virtude do número menor de alunos.

2 Descrição do Problema

O problema dos caixeiros viajantes k-semelhantes (k-similar travelling salesmen problem, kSTSP) pode ser descrito da seguinte forma. Seja um grafo não-orientado completo $G(V, E)$, onde V é o conjunto dos vértices e E é o conjunto das arestas. Em cada aresta $e \in E$ há dois custos $c_e^1, c_e^2 : E \to \mathbb{R}^+$. O objetivo do problema consiste em encontrar dois ciclos Hamiltonianos com custo total mínimo, tal que pelo menos k arestas do grafo sejam visitadas por ambos os ciclos. O parâmetro k define a similaridade entre os ciclos, de modo que $k = |V|$ implica que uma solução factível corresponda a dois ciclos Hamiltonianos contendo as mesmas $|V|$ arestas, enquanto $k = 0$ resulta em uma solução factível ser qualquer par de ciclos Hamiltonianos.

Um modelo de programação linear inteira para o kSTSP é fornecido a seguir:

$$MIN \quad \sum_{k \in \{1,2\}} \sum_{e \in E} c_e^k x_e^k \tag{1}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e^k = 2 \qquad \forall i \in V, \forall k \in \{1,2\} \tag{2}$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e^k \leqslant |S| - 1 \qquad \forall S \subset V, \forall k \in \{1,2\} \tag{3}$$

$$x_e^k \geqslant z_e \qquad \forall e \in E, \forall k \in \{1,2\} \tag{4}$$

$$\sum_{e \in E} z_e \geqslant k \tag{5}$$

$$x_e^k, z_e \in \{0,1\} \qquad \forall e \in E, \forall k \in \{1,2\} \tag{6}$$

Onde:

- x_e^k é uma variável de decisão binária associada à presença ($x_e^k = 1$) ou não ($x_e^k = 0$) da aresta e na rota do caixeiro k;
- z_e é uma variável de decisão binária associada à presença ($z_e = 1$) ou não ($z_e = 0$) da aresta e nas rotas de ambos caixeiros;
- $\delta(i)$ é o conjunto de arestas que incidem no vértice i;
- $S \subset V$ é um subconjunto próprio de vértices;
- $E(S)$ é o conjunto das arestas cujos dois vértices terminais estão em S.

A função objetivo (1) minimiza o custo da solução, composto pela soma dos custos de todas as arestas presentes na solução. O conjunto de restrições (2) diz que cada vértice deve possuir duas arestas incidentes para o ciclo de cada um dos dois caixeiros. O conjunto de restrições (3) visa a eliminação de subciclos ilegais, ou seja, a rota de cada caixeiro deve corresponder a um único ciclo que visita todos os vértices. O conjunto de restrições (4) garante que, caso $z_e = 1$, então a aresta e estará presente nos ciclos dos dois caixeiros. Finalmente, a restrição (5) força pelo menos k arestas em comum nos ciclos dos dois caixeiros.

3 Requisitos da atividade

Nesta atividade você deverá propôr, modelar e resolver uma relaxação Lagrangiana do kSTSP através do método dos subgradientes. Se por ventura o subproblema resultante da relaxação proposta consistir na resolução de um TSP (travelling salesman problem), você pode resolver o TSP utilizando o modelo de *lazy constraints* do Gurobi [1], ou ainda você pode considerar usar o estado-da-arte para a resolução do TSP, o solver Concorde [2].

3.1 Formulação do problema

Apresente a formulação da relaxação Lagrangiana proposta para o kSTSP.

3.2 Geração de instâncias

As instâncias desta atividade serão as mesmas da Atividade 2, ou seja, devem ser geradas 12 instâncias, combinando quatro conjuntos de vértices ($|V| = \{100, 150, 200, 250\}$) e três valores de similaridade ($k = \{0, \frac{|V|}{2}, |V|\}$).

Será fornecido um arquivo texto com coordenadas inteiras (x_i^1, y_i^1) e (x_i^2, y_i^2) para $i = \{1, \ldots, 250\}$. Os dados no arquivo estarão organizados conforme abaixo:

```
<coordenada x^1_1> <coordenada y^1_1> <coordenada x^2_1> <coordenada y^2_1>
<coordenada x^1_2> <coordenada y^1_2> <coordenada x^2_2> <coordenada y^2_2>
...
<coordenada x^1_250> <coordenada y^1_250> <coordenada x^2_250> <coordenada y^2_250>
```

A partir dessas coordenadas você deverá gerar os custos c_e^1 e c_e^2 de uma aresta $e = (i, j)$ calculando o teto da distância Euclidiana dos pares de coordenadas, conforme as equações abaixo:

$$c_e^1 = \left\lceil \sqrt{(x_i^1 - x_j^1)^2 + (y_i^1 - y_j^1)^2} \right\rceil$$
$$c_e^2 = \left\lceil \sqrt{(x_i^2 - x_j^2)^2 + (y_i^2 - y_j^2)^2} \right\rceil$$

Para cada instância com conjunto de vértices V você deverá utilizar as primeiras $|V|$ linhas do arquivo de coordenadas para gerar os custos c_e^1 e c_e^2.

3.3 Método do subgradiente

Resolva o problema do dual Lagrangiano proposto para o kSTSP utilizando o método do subgradiente.

3.4 Heurística Lagrangiana

Projete uma heurística Lagrangiana que, partindo de uma solução do problema relaxado, obtenha uma solução factível para o kSTSP, permitindo assim obter um limitante superior (primal) para o problema.

3.5 Execução de experimentos

Resolva as instâncias utilizando o método dos subgradientes, aplicando a heurística Lagrangiana em cada iteração, e reporte os tempos de execução e os melhores limitantes inferiores e superiores obtidos. Resolva as mesmas instâncias utilizando o modelo do 2TSP, anotando os tempos de execução e os melhores limitantes inferiores e superiores obtidos, assim como a relaxação linear do modelo na raiz. Você deve limitar o tempo de execução em 30 minutos para ambas as metodologias.

3.6 Entrega

A atividade exige a entrega do código-fonte e de um relatório (de aproximadamente 5 páginas) contendo:

- Modelo matemático: apresente o modelo de relaxação Lagrangiana para o kSTSP.
- Método do subgradiente: apresente o pseudo-código de sua implementação do método do subgradiente.
- Heurística Langrangiana: apresente o pseudo-código de sua implementação da heurística Lagrangiana.
- Resultado: tabela de resultados contendo, para cada instância: limitantes inferiores e superiores e tempo de execução para o método do subgradiente com a heurística Lagrangiana. Relaxação linear, limitantes inferiores e superiores e tempo de execução para a resolução do problema kSTSP utilizando o modelo de programação linear inteira apresentado na Seção 2.
- Análise: faça uma avaliação dos resultados obtidos.

3.7 Critério de avaliação

A correção do relatório será pautada pela qualidade dos seguintes quesitos:

- Texto: qualidade da redação, clareza, síntese, estrutura, organização.

- Modelo e algoritmos: descrição do modelo e algoritmos, variáveis, parâmetros, restrições, domínios.
- Experimentos: implementação dos algoritmos, descrição dos experimentos, configuração da máquina, geração de instâncias, linguagem de programação.
- Análise: análise dos resultados fundamentada em tabelas e gráficos para subsidiar as conclusões.

4 Referências

1. Exemplo de código Gurobi para resolver o TSP:
   https://www.gurobi.com/documentation/9.0/examples/tsp_java.html#subsubsection:Tsp.java
2. Solver Concorde: https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde.html