MO824 - Tópicos em Otimização Combinatória

Relaxação Lagrangiana

Equipe 8

Gian Franco, Luiz Gustavo S. Aguiar, Pedro R. S. Mota

RAs: 234826, 240499, 185853

29 de Abril de 2022

Objetivo

O objetivo desta atividade consiste na aplicação da técnica de relaxação Lagrangiana, resolvida pelo método dos subgradientes, para a obtenção de limitantes primais e duais do problema dos caixeiros viajantes k-semelhantes (k-STSP).

Descrição do k-STSP

O kSTSP pode ser descrito da seguinte forma: seja um grafo não-orientado completo $G(V, E)$, onde V é o conjunto dos vértices e E é o conjunto das arestas, onde para cada aresta $e \in E$ há dois custos $c_e^1, c_e^2 : E \Rightarrow \mathbb{R}^+$, o objetivo do problema consiste em encontrar dois ciclos Hamiltonianos com custo total mínimo, de forma que pelo menos k arestas do grafo sejam visitadas por ambos os ciclos. O parâmetro k define a similaridade entre os ciclos, de modo que $k = |V|$ implica em uma solução onde os dois ciclos contém exatamente as mesmas $|V|$ arestas, enquanto $k = 0$ implica em uma solução onde os ciclos podem ser completamente distintos. O custo das arestas será sempre um inteiro positivo, pois será o teto da distância euclidiana.

Modelagem

Um modelo de programação linear inteira para o k-STSP é descrito a seguir:

$$MIN \sum_{k \in \{1,2\}} \sum_{e \in E} c_e^k \, x_e^k \tag{1}$$

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e^k = 2, \, \forall i \in V, \, \forall k \in \{1,2\} \tag{2}$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e^k \leq |S| - 1, \, \forall S \subset V, \, \forall k \in \{1,2\} \tag{3}$$

$$x_e^k \geq z_e, \, \forall e \in E, \, \forall k \in \{1,2\} \tag{4}$$

$$\sum_{e \in E} z_e \geq k \tag{5}$$

$$x_e^k, \, z_e \in \{0,1\}, \, \forall e \in E, \, \forall k \in \{1,2\} \tag{6}$$

Onde:

- x_e^k : Variável binária que diz se a aresta e foi utilizada no ciclo k;
- z_e : Variável binária que diz se a aresta e foi utilizada em ambos os ciclos;
- $\delta(v)$: conjunto de arestas incidentes no vértice v;
- S C V é um subconjunto próprio de vértices;
- $E(S)$ é o conjunto das arestas cujos dois vértices terminais estão em S

A função objetivo (1) minimiza o custo da solução, composto pela soma dos custos de todas as arestas presentes na solução. O conjunto de restrições (2) diz que cada vértice deve possuir duas arestas incidentes para o ciclo de cada um dos dois caixeiros. O conjunto de restrições (3) visa a eliminação de subciclos ilegais, ou seja, a rota de cada caixeiro deve corresponder a um único ciclo que visita todos os vértices. O conjunto de restrições (4) garante que, caso ze = 1, então a aresta e estará presente nos ciclos dos dois caixeiros. Finalmente, a restrição (5) força pelo menos k arestas em comum nos ciclos dos dois caixeiros.

Relaxação Lagrangiana

A relaxação Lagrangiana foi feita relaxando a restrição expressa na equação (4) e fazendo $k \geq 0$ na restrição da equação (5). Dessa forma o problema relaxado consiste em achar o melhor ciclo hamiltoniano para cada caixeiro, sem a necessidade de que eles tenham uma similaridade mínima. Dessa forma, podemos formular um modelo para o problema do limitante inferior Lagrangiano, descrito a seguir:

$$MIN \sum_{k\in\{1,2\}} \sum_{e\in E} c_e^k\, x_e^k + \lambda_k(z_e^k - x_e^k) \tag{7}$$

$$\sum_{e\in\delta(i)} x_e^k = 2,\ \forall i \in V,\ \forall k \in \{1,2\} \tag{8}$$

$$\sum_{e\in E(S)} x_e^k \le |S| - 1,\ \forall S \subset V,\ \forall k \in \{1,2\} \tag{9}$$

$$\sum_{e\in E} z_e \ge k \tag{10}$$

$$x_e^k,\ z_e \in \{0,1\},\ \forall e \in E,\ \forall k \in \{1,2\} \tag{11}$$

A partir desse problema, podemos formular o modelo do dual Lagrangiano:

$$MAX\ \lambda\ MIN\ x \sum_{k\in\{1,2\}} \sum_{e\in E} c_e^k\, x_e^k + \lambda_k(z_e^k - x_e^k) \tag{12}$$

$$\sum_{e\in\delta(i)} x_e^k = 2,\ \forall i \in V,\ \forall k \in \{1,2\} \tag{13}$$

$$\sum_{e\in E(S)} x_e^k \le |S| - 1,\ \forall S \subset V,\ \forall k \in \{1,2\} \tag{14}$$

$$\sum_{e\in E} z_e \ge k \tag{15}$$

$$x_e^k,\ z_e \in \{0,1\},\ \forall e \in E,\ \forall k \in \{1,2\} \tag{16}$$

Heurística Lagrangiana

1. Encontre dois ciclos C_1 e C_2 de TSP.

2. Escolha o ciclo com menor custo para ser o ciclo base, suponha que nesse caso seja o C_1.

3. Construa um ciclo hamiltoniano C seguindo os seguintes passos:

(a) Insira as arestas duplicadas de C_1 e C_2 em C.

(b) Caso o número de arestas duplicadas ainda não seja k insira arestas factíveis(não forma ciclo sem ser hamiltoniano) de C_1 em C.

(c) Insira as de G em relação ao caixeiro 1 em C até que C seja um Hamiltoniano.

As arestas inseridas nos passos anteriores são escolhidas por critério de menor custo. No momento em que C for um ciclo hamiltoniano basta retornar $W(C)+W(C_1)$ onde $W(X)$ é o custo do ciclo X.

Realizando o algoritmo descrito anteriormente nós conseguimos encontrar o ciclo desejado com pelo menos k arestas compartilhadas mas note que isto é uma heurística logo não temos garantia de resposta ótima.

Resultados

Implementamos o modelo descrito com o solver Gurobi na versão 9.5.1 utilizando a linguagem Python utilizando a versão 3.8.9, numa máquina com o processador Intel Core i7 com 2.60 GHz, 16GB de memória RAM e sistema operacional macOS Monterey 12.3.1.

O código implementado utiliza-se das coordenadas fornecidas e executa o modelo um total de 12 vezes, variando entre as possíveis combinações de V = {100, 150, 200, 250} e K = {0, V/2, V}.

Table 1: Métricas do modelo para as instâncias citadas no formato Heurística lagrangiana (limitante inferior, limitante superior, tempo de execução) e Relaxação linear (limitante inferior, limitante superior, tempo de execução.

		$k=0$	$k=\frac{v}{2}$	$k=v$
v = 100	h. lagrangiana	(2528.4, 2531.0, 1.87)	(5343.7, 5355.0, 1.37)	(7442.2, 7460.0, 1.24)
	r. linear	(1670.0, 2531.0, 0.81)	(1670.0, 5355.0, 0.92)	(1670.0, 7460.0, 0.83)
v = 150	h. lagrangiana	(3084.5, 3088.0, 5.91)	(6254.9, 6269.0, 7.28)	(9414.3, 9439.0, 7.41)
	r. linear	(2026.0, 3088.0, 5.06)	(2026.0, 6269.0, 4.97)	(2026.0, 9439.0, 5.18)
v = 200	h. lagrangiana	(3757.2, 3762.0, 13.32)	(9087.7, 9111.0,14.99)	(13364.8, 13403.0, 14.99)
	r. linear	(2388.0, 3762.0, 6.93)	(2388.0, 9111.0,7.10)	(2388.0, 13403.0, 7.55)
v = 250	h. lagrangiana	(4149.8, 4155.0, 41.29)	(9781.8, 9807.0, 1:48.16)	(14739.1, 14782.0, 39.07)
	r. linear	(2697.0, 4155.0, 30.21)	(2697.0, 9807.0, 29.91)	(2697.0, 14782.0, 29.81)

Análise

Os resultados apresentados mostram que ao final das iterações do subgradiente, a relaxação lagrangiana obteve soluções com custo alto. Isso acontece por conta da heurística usada, que encontra uma solução factível e não necessariamente ótima. Apesar disso, os valores de upper bound e lower bound para o método do subgradiente com a heurística lagrangiana, são muito mais próximos do que os valores da relaxação linear. Essa diminuição do GAP entre os bounds, mostra que a relaxação lagrangiana teve efeito.