Theoretische Informatik: Blatt 4

Abgabe bis 16. Oktober 2015
Assistent: Jerome Dohrau

Patrick Gruntz, Panuya Balasuntharam

Aufgabe 10

(a) Wir verwenden die Methode der Kolmogorov-Komplexitaet um zu zeigen das L_1 nicht regulaer ist. Sei $L_1 = \{0^{\binom{2n}{n}} | n \in \mathbb{N}\}$. *Angenommen* L_1 sei regulaer. Fuer jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\binom{2(m+1)}{(m+1)} - \binom{2m}{m} = \frac{(2m)!(m+1)(-m+1)}{((m+1)!)^2}$. $0^{\frac{(2m)!(m+1)(-m+1)}{((m+1)!)^2}} - 1$ ist das erste Wort in der Sprache

$$L_{\binom{2m}{m}+1} = \{y | 0^{\binom{2m}{m}+1} y \in L\}$$

Satz 3.1 folgend existiert eine Konstante c, die unabhaengig von x = $0^{\binom{2m}{m}+1}$ und y = $0^{\frac{(2m)!(m+1)(-m+1)}{((m+1)!)^2 - 1}}$ und somit von m ist, so dass

$$K(0^{\frac{(2m)!(m+1)(-m+1)}{((m+1)!)^2} - 1}) \leq \lceil log_2(1+1) \rceil + c = 1 + c$$

Dies ist ein Widerspruch. Es gibt nur endlich viele Programme der konstanten Laenge hoechstens 1+c gibt, aber es gibt unendlich viele Woerter der Form $0^{\frac{(2m)!(m+1)(-m+1)}{((m+1)!)^2 - 1}}$. Also ist die Annahme falsch und L_1 ist nicht regulaer.

(b) Wir zeigen indirekt, dass, $L_2 \notin L_{EA}$.
Annahme: L sei regulaer. Sei $A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$ ein EA mit L(A) = L.

Wir betrachten die Woerter

$$b^1, b^2, ...b^{|Q|+1}$$

Weil die Anzahl dieser Woerter $|Q| + 1$ ist, existieren $i, j \in \{1, 2, ..., |Q| + 1\}, i < j$, so dass

$$\hat{\delta}(q_0, b_i) = \hat{\delta}(q_0, b_j)$$

Nach Lemma 3.3 gilt $b^i z \in L \iff b^j z \in L$
fuer alle $z \in \Sigma^*$. Dies gilt aber nicht , weil $z = a^{2i}$ das Wort $b^i a^2 i \in L$ und das Wort $b^j a^{2i} \notin L$.

Weil $j > i$
$\Rightarrow 2j > 2i$
$\Rightarrow 2j > |w|_a$
$\Rightarrow |w|_b > |w|_a$
$\Rightarrow w \notin L$
Also ist die Annahme falsch und L_2 ist nicht regulaer

Aufgabe 11

(a) Wir fuehren ein Widerspruchsbeweis.
Annahme: L ist regulaer. Dann ist das *Pumping Lemma* anwendbar. Es existiert eine Konstante n_0 mit den in *Lemma 3.4* beschriebenen Eigenschaften. Wir betrachten das Wort

$$w = 0^{n_0} 1^{n_0}.$$

Offensichtlich gilt $|w| = 2n_0 \geq n_0$. Also muss eine Zerlegung w = yxz von w geben, die die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfuellt. Wegen (i) gilt $|yx| \leq n_0$ also ist

$$y = 0^a$$
$$x = 0^b$$
$$z = 0^{n_0-a-b}1^{n_0}$$

fuer irgendwelche $a, b \in \mathbb{N}$. Wegen (ii) gilt $b > 0$. Da $w \notin L_3$ gilt nach (iii)

$$\{yx^k z | k \in \mathbb{N}\} = \{0^{n_0+(k-1)b}1^{n_0} | k \in \mathbb{N}\} \cap \emptyset$$

Dies ist aber ein Widerspruch. Fuer k = 2 gilt $yx^2z = 0^{n_0+kb}1^{n_0} \in L_3$. Also ist die Annahme falsch und L_3 ist nicht regulaer

(b) Wir wollen zegen, dass die nichtregulaere Sprache L die Bedingungen des abgeschwaechte Pumping-Lemmas erfuellt.
Es sei $L := \{w \in \{0,1\}^* || w|_0 = |w|_1\}$. Es existiert eine Konstante n_0. Alle Woerter in der Sprache mit einer Laenge von mindestens n_0 muss eine Zerlegung besitzen, die die Eigenschaften (i'), (ii), (iii') erfuellt.
Woerter, die 01 oder 10 nicht als Infix haben sind nicht in der Sprache enthalten. Nach der abgeschwaechte Version des Pumping-Lemmas muessen wir nur die Woerter $w \in L$ betrachten.

Besitzt w hingegen 01 oder 10 als Infix, hat w die Form yxz. Dabei ist $x \in \{01, 10\}$. Da wir $n_0 := 2$ waelen, sind die Bedingungen (i') und (ii) erfuellt. Denn es gilt $1 \leq x \leq n_0$.
Die dritte Bedingung $\{yx^k z | k \in \mathbb{N}\} \subseteq istaucherfuelltdennesgilt:$

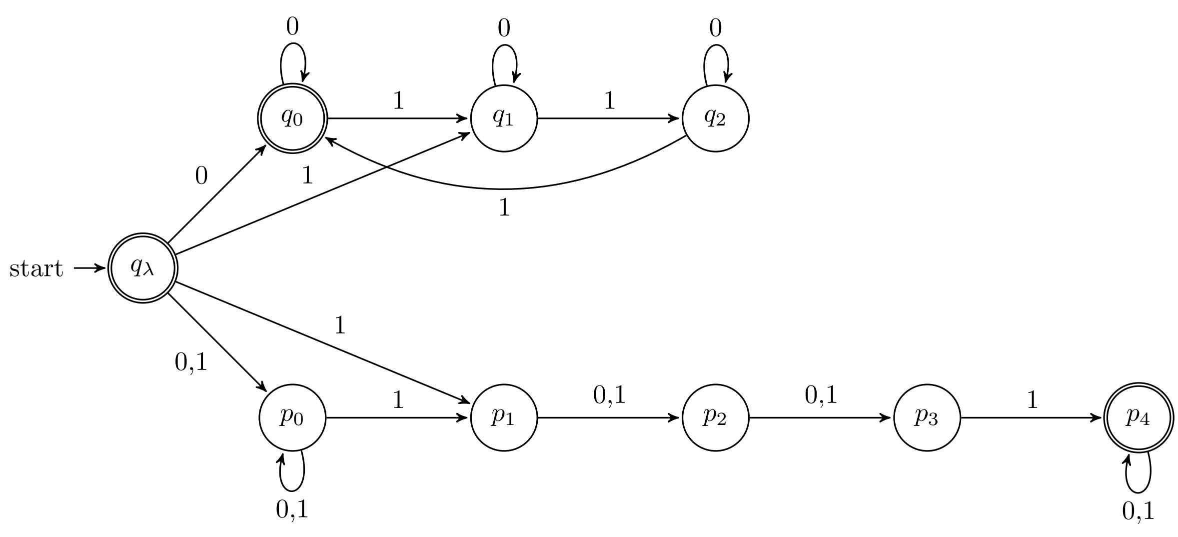
$$\begin{aligned}
&|yx^k z|_a - |yx^k z|_b \\
=&(|y|_a + |x^k|_a + |z|_a) - (|y|_b + |x^k|_b + |z|_b) \\
=&(|y|_a + k * |x|_a + |z|_a) - (|y|_b + k * |x|_b + |z|_b) \\
=&(|y|_a + k + |z|_a) - (|y|_b + k + |z|_b) \\
=&(|yz|_a + k) - (|yz|_b + k) \\
=&(|w|_a + (k-1)) - (|w|_b + (k-1)) \\
=&(|w|_a) - (|w|_b)
\end{aligned}$$

Da w in der Sprache ist, ist diese Zahl gleich null.

Aufgabe 12

(a) Der folgende nichtdeterministische endliche Automat A akzeptiert die Sprache

$$L = \{x \in \{0,1\}^* || x|_1 \bmod 3 = 0 \text{ oder x enthaelt ein Teilwort 1y1 fuer y} \in \{0,1\}^2\}:$$



Dieser Automat besteht aus zwei Teilautomaten. Der Teilautomat mit den Zustaenden q_1, q_2 und q_3 zaehlt die Einsen in der Eingabe modulo 3 und akzeptiert wenn dies 0 ergibt. Der zweite Teilautomat mit den Zustaenden p_1, p_2, p_3 und p_4 sucht das Teilwort 1y1 fuer $y \in \{0,1\}^2$ und akzeptiert wenn das Teilwort gefunden wurde. Im Startzustand q_λ verzweigt der Automat nichtdeterministisch in beiden Teilautomaten. Beim Uebergang in den ersten Teilautomaten muss die 1 mitgezaelt werden. Deshalb fuert diese Transition direkt zum Zustand q_1. Bei der Eingabe 1 gibt es im Uebergang zum zweiten Teilautomaten zwei Moeglichkeiten. Die gelesene 1 kann der Anfang des gesuchten Teilwortes sein oder nicht. Weil auch das leere Wort die Bedingung $|\lambda|_1 \bmod 3 = 0$ erfuellt, ist auch q_λ ein akzeptierender Zustand.

(b) Aus dem NEA generieren wir mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion einen aequivalenten EA. Da der NEA genau einen aktzeptierenden Zustand s hat und aus diesem keine Transitionen herausgeht, koennen wir bei der Durchfuerung der Potenzmengenkonstruktion einen neuen Zustand k verwenden, die s beinhaltet.

Es ergibt sich die folgende Transitionstabelle:

$Zustand$	a	b
$\{p\}$	$\{p,q\}$	$\{p\}$
$\{p,q\}$	$\{p,q,r\}$	$\{p,r\}$
$\{p,r\}$	$\{k\}$	$\{p\}$
$\{p,q,r\}$	$\{k\}$	$\{p,r\}$
$\{k\}$	$\{k\}$	$\{k\}$

In dieser Abbildung sind zur Vereinfachung der Darstellung die Klammern in den Zustandsnamen weggelassen worden dh. p steht fuer $< \{p\} >$ und pq steht fuer $< \{p,q\} >$