

笔记

潘叙润

2025 年 1 月 9 日

课程总结与考试建议

课程特点：

“材料工程力学基础”是一门将理论力学和材料力学结合在一起的课程。与高中物理相比，它有很大的区别。课程内容较多，结课较早，因此授课速度较快，可能会给学生带来一定的学习难度。然而，考试内容相对基础，只要掌握书上的课后习题和 PPT 上的题目，就能取得不错的成绩。

复习建议：

考试前会有一节复习课，建议学生将每张 PPT 拍照保存，因为复习 PPT 不会发到群里。

理论力学与材料力学的考试内容：

- 理论力学：主要学习静力学和运动学。2024 年与本部联考，理论力学占 30%。
- 静力学：考了一道大题，其余全是选择和填空。
- 运动学：由于本部不学科氏加速度，因此考试内容较简单，只考了一道选择题和一道填空题。
- 材料力学：全部学习，占 70%。每章都考了一道答题。

笔记说明：

本笔记结合了复习 PPT、2024 年的考试题以及编者的一些理解进行整理。由于编者水平有限，且时间仓促，难免存在疏漏及不妥之处，敬请读者批评指正。

1 第四章-应力与应变状态分析

切应力与坐标轴正向相同，与坐标轴方向相反为负。这个很重要。书上的写着应力顺时针为正，逆时针为负。与这里的应力方向是两个概念。

$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_x - (\sigma_x dA \cos \alpha) \cos \alpha + (\tau_{xy} \cos \alpha) \sin \alpha - (\sigma_y dA \sin \alpha) \sin \alpha + (\tau_{xy} dA \sin \alpha) \cos \alpha = 0$$

$$\text{同理 } \sigma_y = 0$$

用倍角公式得

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (1)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (2)$$

1.1 主应力与主方向

主应力为应力的极值及满足下式子

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha\right)$$

$$\tan 2\alpha_{\sigma} = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

由上式可以求出一个角度在 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, 另一个加 $\frac{\pi}{2}$ 即可。

1.2 主切应力与主切面

可利用应力圆或者 (2) 式求导即可求出。建议以上均用应力圆求解。

1.3 应变

1.3.1 线应变

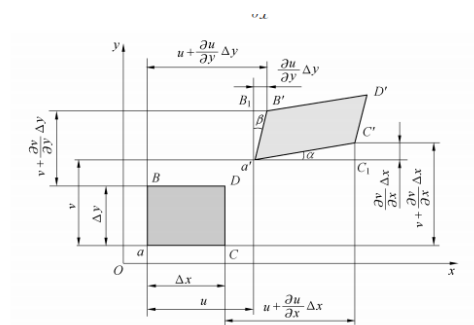
$$\xi_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \mu}{\Delta x}$$

1.3.2 切应变

$$\gamma_{xy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} (\alpha + \beta)$$

切应变使角度减小, 切应变为正, 反之为负。

1.4 应变与位移的关系



$$\xi_x = \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \quad (4)$$

其他同理。体应变是线应变的叠加。

1.4.1 斜向方向应变

设矩阵 A 为

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\mu} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \mu \\ v \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \gamma_{x'y'} &= \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} = \left(\frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} \right) + \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} \right) \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{x'} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \\ \frac{\gamma_{x'y'}}{2} &= -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\}$$

根据以上图片和应变圆即可求解。

2 第五章-材料力学的性能与应力应变的关系

2.1 低碳钢的拉伸试验

- 1、**线性：** 弹性变形，利于变形成正比。
- 2、**屈服：** 外力不增加，在小范围内波动，变形继续增大。
- 3、**强化：** 需要不断的增加外力，使其继续变形，力与变形为非线性关系。
- 4、**颈缩：** 试件某处开始逐渐变细，形同细颈。

$$\text{伸长率} \quad \delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \times 100\%$$

$$\text{断面收缩率} \quad \psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \times 100\%$$

- 1、比例极限： 线性关系的极限应力。
- 2、弹性极限： 卸载后不产生塑性变形的最大应力，可以认为与比例极限相等。
- 3、屈服极限： 屈服阶段应力上下波动，锯齿形最高点为上屈服点，最低点为下屈服点，下屈服点又叫屈服点。

$$\sigma_s = \frac{F_s}{A_0}$$

- 4、强度极限： 试件拉断前所能承受的最大应力。

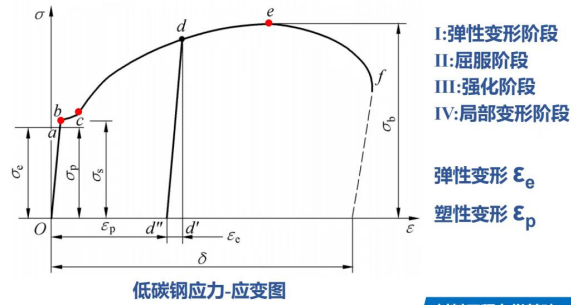
$$\sigma_b = \frac{F_b}{A_0}$$



第五章 材料的力学性能与应力应变关系

5.2 轴向拉伸与压缩试验——低碳钢的拉伸试验

二、低碳钢拉伸的力学性能



材料工程力学基础 14

2.2 冷作硬化

经过弹性阶段或屈服阶段后，从某点开始卸载力，力与变形间的关系沿与弹性阶段直线大体平行回到横轴上的点。导致材料的比例极限提高，塑性变形和伸长率有所降低。

2.3 广义胡克定律

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (7)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (8)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (10)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (11)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (12)$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

2.4 应变能

2.4.1 体积应变

体积应变为

$$\theta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (13)$$

$$\theta = \frac{\sigma_m}{K} \quad (14)$$

$$\epsilon_m = \frac{\sigma_m}{3K} \quad (15)$$

$$K = \frac{E}{3(1+2\nu)} \quad (16)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (17)$$

$$\epsilon_m = \frac{\theta}{3} \quad (18)$$

2.4.2 单向应力状态下的应变能

杆的变性能

$$E = \frac{1}{2} F \Delta l$$

单元体内的应变能

$$dE = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dV$$

应变比能

$$e = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x$$

2.4.3 纯切应力状态下的应变能

$$dE_\gamma = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dV$$

$$e = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}$$

2.4.4 空间应力状态下的应变比能

体积应变 e_v ，形状应变 e_f 。

$$e = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$$

$$e = e_v + e_f$$

$$e_v = \frac{3}{2} \sigma_m \epsilon_m = \frac{\sigma_m^2}{2K} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$e_f = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$e_f = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

特殊情况： $\sigma_1 = \tau_{xy}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau_{xy}$ ，推出

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

3 第六章-拉压与扭转

3.0.1 扭转的内力与切应力

外力偶矩

$$M = \frac{p}{\omega} = 1000 \frac{p_k}{\omega}$$

$$\int_A \rho \tau_{x\phi} dA - T = 0$$

$$\gamma_{x\phi} = \rho \frac{d\phi}{dx}$$

$$\tau_{x\phi} = G \gamma_{x\phi}$$

$$\tau_{x\phi} = G \rho \frac{d\phi}{dx}$$

联立可得

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$\tau_{x\phi} = G \rho \frac{T}{GI_p} = \frac{T}{I_p} \rho$$

$$\tau_{x\phi max} = \frac{T}{W_p}$$

$$w_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

$$\alpha = \frac{d}{D}$$

计算扭转角

$$\phi = \frac{Tl}{GI_p}$$

应变能密度

$$e = \frac{1}{2} \tau_{x\phi} \gamma_{x\phi} = \frac{\tau_{x\phi}^2}{G}$$

变性能

$$E_\gamma = \frac{T^2 L}{2GI_p}$$

3.0.2 矩形截面杆的自由扭转

长为 h, 宽为 b。

$$\tau_{xy max} = \frac{T}{\alpha h b^2}$$

$$\tau_{xz max} = \gamma \tau_{xy max}$$

$$\phi = \frac{Tl}{G \beta h b^3}$$

扭转	弯曲的梁
无剪力，有弯矩	有剪力，有弯矩

表 1: 扭转与弯曲的区别

3.1 第七章-弯曲

3.1.1 弯曲的概念

原因：扭转的切应力垂直于直径，合力为 0，故剪力为 0。但是扭转的部分含有切应力。

3.2 梁的内力-剪力与弯矩

3.2.1 梁的种类

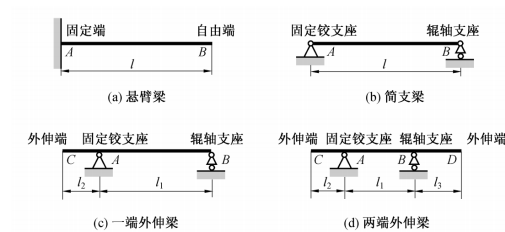


图 7.2 梁的力学模型

分析受力与列平衡方程与理论力学分析一样。

3.2.2 符号规则

使梁截开的部分产生逆时针转动的趋势为正，反之为负。使梁产生“笑脸”的弯矩为正，反之为负。

3.2.3 控制面

集中力作用点的两侧截面。

集中力偶作用点的两侧截面。

集度相同的均布载荷起点和终点处截面。

3.2.4 载荷剪力弯矩的关系

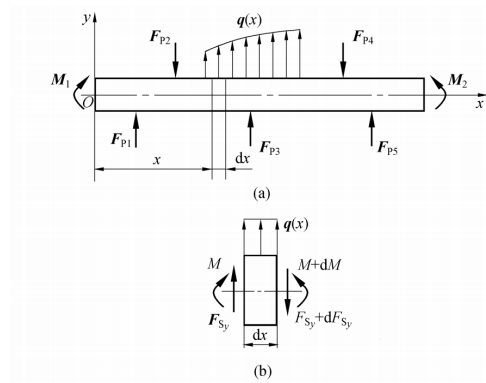


图 7.9 载荷集度、剪力、弯矩之间的微分关系

$$\Sigma F_y = F_{sy} + qdx - (F_{sy} + dF_{sy}) = 0$$

$$\Sigma M_c = -M - F_{sy}dx - qdx \frac{dx}{2} + M + dM = 0$$

忽略二阶微分小量

$$\frac{dF_{sy}}{dx} = -q(x)$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -F_{sy}$$

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q(x)$$

3.2.5 剪力图和弯矩图

剪力图中，在集中力作用的截面的两侧剪力值得大小为该集中力的突变。弯矩图中，在集中力偶的作用的截面有弯矩突变为力偶的突变。

3.3 设正法

这是一个比较重要的做题方法，我们设杆的应力的时候，设拉力为正，压力为负。如果设的力的方向与坐标轴正向相同就为正，相反就为负。设弯矩的时候，使杆成“笑脸”为正。

3.4 与应力相关的截面的几何性质

3.4.1 静矩

$$S_y = \int_A z dA$$

$$S_z = \int_A y dA$$

静矩等于面积乘形心坐标

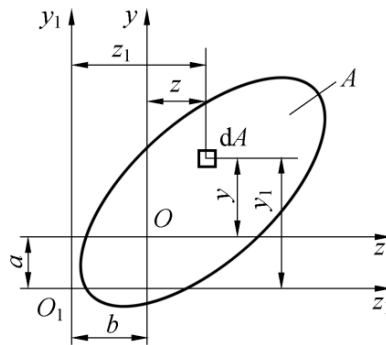
$$S_z = Ay_c$$

$$S_y = Az_c$$

惯性矩	极惯性矩	惯性积	惯性半径
$I_Y = \int_A z^2 dA$	$I_p = \int_A r^2 dA$	$I_{yz} = \int_A yz dA$	$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

表 2: 公式

惯性矩与惯性积移轴定理



$$I_{z_1} = I_z + 2aS_z + a^2 A$$

$$I_{y_1} = I_y + 2aS_y + b^2 A$$

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + aS_y + bS_z + abA$$

惯性矩与惯性积的转轴定理

使用坐标变换，用前面的矩阵 A。得到如下公式。

$$I_{z_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{y_1 z_1} = -\frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha$$

注意书上这里写反了，和 PPT 的公式相反，以 PPT 的公式为主。

形心主轴与形心主惯性矩

主轴：图形对于过一点的坐标轴的惯性积为 0。

形心主轴：过形心的主轴。

主轴是成对出现的。

4 纯弯曲梁的正应力

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}$$

$$|\sigma_x| = \frac{|M_z|}{I_z} |y|_{\max}$$

$$W_z = \frac{I_z}{|y|_{\max}}$$

矩形	圆形	空心圆截面
$W_z = \frac{bh^2}{6}$	$W_z = \frac{\pi d^3}{32}$	$W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$

表 3: 常见截面的抗弯矩截面系数

4.1 弯曲切应力

矩形截面梁	工字形截面梁	圆形截面梁	环形截面梁
$\tau_{xy} = \frac{F_{sy}}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$	$\tau_{xy} = \frac{F_{sy} S_z^*}{dI_z}$	$\tau_{xy} = \frac{F_{sy} S_z^*}{bI_z}$	$\tau = \frac{F_{sy} S_z^*}{2\delta I_z}$
$\tau_{xy\max} = \frac{3}{2} \frac{F_{SY}}{bh}$	$\tau \approx \frac{F_{sy}}{bh}$	$\tau_{xy\max} = \frac{4}{3} \frac{F_{sy}}{\pi R^2}$	$\tau_{xy\max} = \frac{F_{sy}}{\pi R\delta}$

表 4: 常见截面梁的切应力

4.2 叠加原理

24 年考试这里主要靠查表法，一般会给一个多余的表格（用不上的），不过毕竟是第一次考，以后也说不定都用上或用不上的更多。只需要掌握 PPT 里的做题方法以及书上的课后习题即可。主要就是两部，硬化，平移。这里便不再赘述。

5 强度理论与强度刚度的计算

24 年考试考了四个强度理论的名字，只考了一道填空，~~第一二三四强度理论。~~

5.1 最大拉应力理论

$$\sigma_1 = \sigma_{1u} = \sigma_b$$

$$\tau_{max} \leq [\sigma]$$

5.2 最大拉应变理论

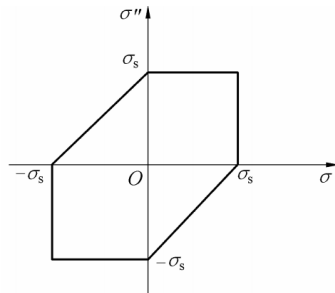
$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b$$

$$\tau_{max} \leq \frac{1}{1+\nu} [\sigma]$$

5.3 最大切应力理论

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$$

$$\tau_{max} \leq \frac{1}{2}[\sigma]$$



5.4 形变应变能理论

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$\tau_{max} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}[\sigma]$$

5.5 刚体条件

$$\phi_{max} = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{T}{GI_{p_{max}}} \leq [\phi]$$

6 压杆稳定

表 9.1 压杆的长度因数

杆端约束情况	两端铰支	一端固定、一端铰支	一端固定、一端滑动	一端固定、一端自由	一端固定、一端双向滑动
失稳后挠曲线形状					
长度因数	$\mu = 1$	$\mu = 0.7$	$\mu = 0.5$	$\mu = 2$	$\mu = 1$

考试的时候表格是不给的，需要记住这里 μ 的值。

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}$$

$$i^2 = \frac{I}{A}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

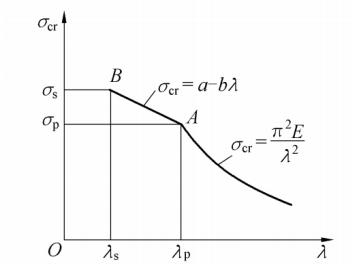


图 9.8 临界应力总图

24 年考试只考直线公式，抛物线公式不考，掌握临界应力总图即可。

7 理论力学

理论力学 24 年主要考静力学，运动学考了一个选择，一个填空。静力学填空主要考概念。平面力系可以简化为力偶,合力，平衡。自锁现象的概念：全约束力的作用线也不能超出摩擦角（锥）之外，即全约束力的作用线必在摩擦角（锥）之内。

表 1.1 空间约束类型与其约束力举例	
约束力未知量	约束类型
1 	光滑表面 滚动支座 绳索 二力杆
2 	径向轴承 圆柱铰链 铁轨 铰链
3 	球形铰链 止推轴承
4 	导向轴承 万向接头
5 	带有销子的夹板 导轨
6 	空间的固定端支座