เอกสารประกอบการสอนคณิตศาสตร์

รายวิชาเพิ่มเติม ม.4 เล่ม 1

หัวข้อ : จำนวนจริง

อาจารย์ผู้สอน

ดร. ภาณุวิชญ์ เชื้อพล

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น วิทยาเขตหนองคาย

สารบัญ

1 จำนวนจริง **1**

1.1 จำนวนจริง 1
1.2 ระบบจำนวนจริง 5
1.3 พหุนามตัวแปรเดียว 11
1.4 การแยกตัวประกอบพหุนาม 18
1.5 สมการพหุนามตัวแปรเดียว 27
1.6 เศษส่วนของพหุนาม 31
1.7 สมการเศษส่วนของพหุนาม 36
1.8 การไม่เท่ากันของจำนวนจริง 42
1.9 อสมการพหุนามตัวแปรเดียว 45
1.10 ค่าสัมบูรณ์ 54
1.11 สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ของพหุนามตัวแปรเดียว 58

บรรณานุกรม **69**

บทที่ 1
จำนวนจริง

1.1 จำนวนจริง

จากหลักฐานที่ปรากฏ เชื่อกันว่ามนุษย์มีความคิดในเรื่องจำนวนมาตั้งแต่สมัยโบราณ สังเกตได้จากการบันทึกจำนวนสัตว์เลี้ยงโดยใช้ก้อนหินหรือรอยบากบนต้นไม้ ซึ่งเป็นการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างสัตว์แต่ละตัวกับก้อนหินหรือรอยบาก เซตของจำนวนดังกล่าว เรียกว่า **เซตของจำนวนนับ** หรือ **เซตของจำนวนธรรมชาติ** ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

เมื่อมีจำนวนนับขึ้นใช้แล้ว มนุษย์เริ่มใช้จำนวนในขอบข่ายที่กว้างขึ้น เช่น การรวมกัน การหักออก หรือการแบ่งสิ่งของ ก่อให้เกิดความคิดในด้านการบวก การลบ การคูณ และการหารของจำนวนขึ้น จึงมีการสร้างจำนวนเต็มลบ จำนวนตรรกยะ และศูนย์ขึ้นใช้

เรียกเซต $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ว่า **เซตของจำนวนเต็ม** จะเห็นว่าเซตของจำนวนนับเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเต็ม นั่นคือ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่เขียนได้ในรูป $\dfrac{a}{b}$ โดย a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ เขียนแทนเซตของจำนวนตรรกยะด้วย

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \;\middle|\; x = \frac{a}{b} \text{ เมื่อ } a, b \in \mathbb{Z} \text{ และ } b \neq 0 \right\}$$

สังเกตว่าจำนวนเต็มใด ๆ จะเขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้เสมอ เช่น $7 = \dfrac{7}{1}$, $0 = \dfrac{0}{1}$, $-2 = \dfrac{-2}{1}$ ฉะนั้นจำนวนเต็มใด ๆ จึงเป็นจำนวนตรรกยะด้วย ดังนั้น เซตของจำนวนเต็มเป็นสับเซตของเซตของจำนวนตรรกยะ นั่นคือ $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

เศษส่วนของจำนวนเต็มสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทศนิยมซ้ำได้เสมอ เช่น

$$\begin{aligned}
5 &= 5.000\ldots = 5.0 \\
\frac{3}{4} &= 0.75000\ldots = 0.75 \\
\frac{4}{3} &= 1.33333\ldots = 1.\dot{3} \\
\frac{13}{6} &= 2.16666\ldots = 2.1\dot{6} \\
\frac{10}{99} &= 0.101010\ldots = 0.\dot{1}\dot{0}
\end{aligned}$$

ในทางกลับกัน จำนวนที่เขียนได้ในรูปทศนิยมซ้ำ สามารถเขียนเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็มได้เสมอ เช่น

$$1.414 = 1.414000\ldots = \frac{1414}{1000}$$
$$-3.14 = -3.140000\ldots = \frac{-314}{100}$$
$$0.\dot{1}\dot{7} = 0.171717\ldots = \frac{17}{99}$$
$$0.\dot{1}7\dot{7} = 0.177177\ldots = \frac{177}{999}$$
$$0.2\dot{1}\dot{7} = 0.21717\ldots = \frac{215}{990}$$
$$1.5\dot{0}\dot{8} = 1.50808\ldots = \frac{1493}{990}$$

สรุปได้ว่า **จำนวนตรรกยะ** คือ จำนวนที่เขียนได้ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม หรือเขียนเป็นทศนิยมซ้ำได้

ยังมีจำนวนอีกชนิดที่เขียนเป็นทศนิยมแบบไม่ซ้ำ ซึ่งจำนวนชนิดนี้ไม่สามารถเขียนเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ เรียกว่า **จำนวนอตรรกยะ** เช่น ในการศึกษาความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากของพีทาโกรัสและคณะ พบว่า เมื่อด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากยาวด้านละ 1 หน่วย แล้วความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ นั่นคือไม่มีจำนวนตรรกยะที่เป็นคำตอบของสมการ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

ให้ x แทนความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$\text{หรือ} \quad x^2 = 2$$

ดังนั้น จึงมีการสร้างจำนวนชนิดใหม่ขึ้นเพื่อเป็นคำตอบของสมการดังกล่าว คือจำนวนบวกที่คูณกับตัวเองแล้วได้ 2 เรียกจำนวนดังกล่าวว่ารากที่สองที่เป็นจำนวนบวกของ 2 และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{2}$ เนื่องจาก $\sqrt{2}$ ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ แต่เขียนได้ในรูปทศนิยมไม่ซ้ำและกำหนดค่าโดยประมาณได้ ดังนั้น $\sqrt{2}$ จึงเป็นจำนวนอตรรกยะ

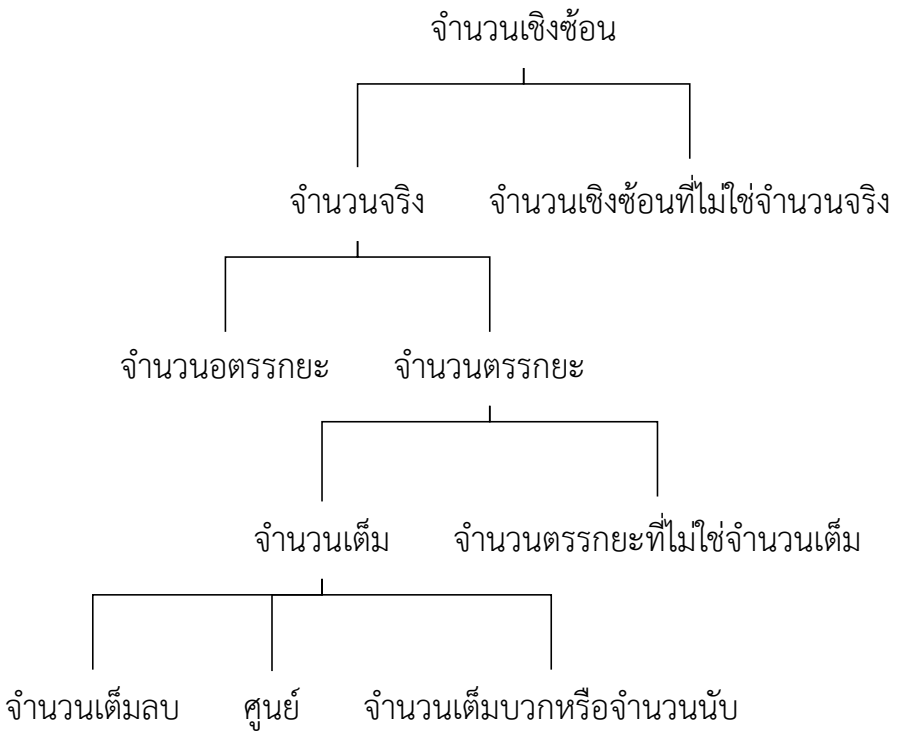
จำนวนต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของจำนวนอตรรกยะ

$\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$	มีค่าประมาณ 1.414
$\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$	มีค่าประมาณ 1.732
$\sqrt{5} = 2.2360679\ldots$	มีค่าประมาณ 2.236
$\sqrt{6} = 2.4494897\ldots$	มีค่าประมาณ 2.449
$\sqrt[3]{2} = 1.2599210\ldots$	มีค่าประมาณ 1.260
$\sqrt[3]{3} = 1.4422495\ldots$	มีค่าประมาณ 1.442
$-\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.8660254\ldots$	มีค่าประมาณ -0.866
$\pi = 3.14159265\ldots$	มีค่าประมาณ 3.1416
$0.1010010001\ldots$	มีค่าประมาณ 0.101
$0.353353335\ldots$	มีค่าประมาณ 0.353

เรียกยูเนียนของเซตของจำนวนตรรกยะและเซตของจำนวนอตรรกยะว่า **เซตของจำนวนจริง** ($\mathbb{R}$) เซตของจำนวนตรรกยะและเซตของจำนวนอตรรกยะต่างก็เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง อินเตอร์เซกชันของทั้งสองเซตนี้เป็นเซตว่าง ดังนั้น จำนวนจริงใด ๆ ต้องเป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะอย่างใดอย่างหนึ่ง และไม่มีจำนวนจริงจำนวนใดที่เป็นทั้งจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ เซตของจำนวนอตรรกยะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{Q}'$

นอกจากนี้ ยังมีจำนวนอีกประเภทหนึ่งที่ได้จากการแก้สมการพหุนาม เช่น $x^2 + 1 = 0$ จำนวนเหล่านี้ไม่ใช่จำนวนจริง เซตของจำนวนชนิดใหม่นี้เรียกว่า **เซตของจำนวนเชิงซ้อน** ($\mathbb{C}$) ซึ่งนักเรียนจะได้ศึกษาต่อไป

แผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนชนิดต่าง ๆ



แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณาจำนวนที่กำหนดให้ จำนวนใดบ้างที่เป็นจำนวนนับ จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะ

$$0, \quad \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \frac{-22}{7}, \quad 3.1416, \quad \sqrt{4}+1, \quad \sqrt{1-(-8)}, \quad \sqrt{6}-1$$
$$\frac{7\pi}{22}, \quad 0.0\dot{9}, \quad -\frac{12}{3}, \quad (\sqrt{2})^2, \quad -3.999, \quad \sqrt{(-1)^2}$$

2. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

   1) 1.010010001 เป็นจำนวนตรรกยะ

   2) $6.808808880\ldots$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

   3) $0.797797797\ldots$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

   4) $1-\sqrt{3}$ ไม่เป็นจำนวนจริง

   5) $\sqrt{\frac{64}{9}}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

   6) ถ้า A สามารถเขียนได้ในรูปทศนิยมซ้ำ แล้ว A เป็นจำนวนตรรกยะ

   7) มีจำนวนจริง x ที่ $\sqrt{x+1}=-1$

   8) มีจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 9

   9) มีจำนวนตรรกยะที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 9

1.2 ระบบจำนวนจริง

ในหัวข้อนี้จะศึกษาโครงสร้างของระบบจำนวนจริง ซึ่งประกอบด้วยเซตของจำนวนจริง ($\mathbb{R}$) และการดำเนินการ ได้แก่ การบวกและการคูณ

จากสมบัติของการเท่ากันของจำนวนที่ได้ศึกษามาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น สามารถกล่าวในรูปของสัจพจน์การเท่ากันของระบบจำนวนจริงได้ดังนี้

1. **กฎการสะท้อน (reflexive law)**
   สำหรับจำนวนจริง a จะได้ $a = a$

2. **กฎการสมมาตร (symmetric law)**
   สำหรับจำนวนจริง a และ b ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$

3. **กฎการถ่ายทอด (transitive law)**
   สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$

ให้ $+$ และ $\cdot$ เป็นสัญลักษณ์แทนการบวกและการคูณ ตามลำดับ จะเขียนแทนผลบวกของจำนวนจริง a และ b ด้วย $a + b$ และเขียนแทนผลคูณของจำนวนจริง a และ b ด้วย $a \cdot b$ หรือ ab

ระบบจำนวนจริงสอดคล้องสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณ ซึ่งเรียกว่า **สัจพจน์เชิงพีชคณิต (algebraic axioms)** ดังต่อไปนี้ โดยให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

สมบัติ	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	1. $a + b \in \mathbb{R}$	6. $ab \in \mathbb{R}$
สมบัติการสลับที่	2. $a + b = b + a$	7. $ab = ba$
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	3. $(a + b) + c = a + (b + c)$	8. $(ab)c = a(bc)$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	4. $a + 0 = a = 0 + a$ เรียก 0 ว่า *เอกลักษณ์การบวก*	9. $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ เรียก 1 ว่า *เอกลักษณ์การคูณ*
สมบัติการมีตัวผกผัน	5. $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ เรียก $-a$ ว่า *ตัวผกผันการบวก* หรือ*อินเวอร์สการบวก*ของ a	10. ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$ เรียก a^{-1} ว่า *ตัวผกผันการคูณ* หรือ*อินเวอร์สการคูณ*ของ a
สมบัติการแจกแจง	11. $a(b + c) = ab + ac$ และ $(a + b)c = ac + bc$	

โดยปกติการบวกและการคูณจำนวนจริงเป็นการกระทำระหว่างจำนวนจริงสองจำนวน แต่จากสมบัติการสลับที่และสมบัติการเปลี่ยนหมู่ของทั้งการบวกและการคูณ ทำให้สามารถเขียนแสดงการบวกและการคูณของจำนวนจริงมากกว่าสองจำนวนได้โดยไม่ต้องใส่วงเล็บ และการหาผลบวก ผลคูณ สามารถจับคู่ที่เหมาะสมได้ ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1

จงหาผลบวก $1+2+3+4+5+6+7+8+9$

วิธีทำ โดยใช้สมบัติการสลับที่และสมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก จะได้

$$\begin{aligned}1+2+3+4+5+6+7+8+9 &= (1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5\\ &= 10+10+10+10+5\\ &= 45\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกคือ 45

ตัวอย่าง 1.2

จงหาผลคูณ $75 \times 15\frac{1}{3}$

วิธีทำ โดยเปลี่ยนการแสดงจำนวนคละให้อยู่ในรูปการบวกของจำนวนเต็มและเศษส่วนแท้ และใช้สมบัติการแจกแจง จะได้

$$\begin{aligned}75 \times 15\frac{1}{3} &= 75 \times \left(15+\frac{1}{3}\right)\\ &= (75 \times 15) + \left(75 \times \frac{1}{3}\right)\\ &= 1,125 + 25\\ &= 1,150\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลคูณคือ $1,150$

จากสัจพจน์เชิงพีชคณิตของระบบจำนวนจริงที่กล่าวมาข้างต้นเพียงพอจะพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1: กฎการตัดออกสำหรับการบวก

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $a+c=b+c$ แล้ว $a=b$
2. ถ้า $a+b=a+c$ แล้ว $b=c$

ทฤษฎีบท 1.2: กฎการตัดออกสำหรับการคูณ

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $ac=bc$ และ $c \neq 0$ แล้ว $a=b$
2. ถ้า $ab=ac$ และ $a \neq 0$ แล้ว $b=c$

ทฤษฎีบท 1.3

ให้ a เป็นจำนวนจริง จะได้ $a \cdot 0 = 0$

ทฤษฎีบท 1.4

ให้ a เป็นจำนวนจริง จะได้ $(-1)a = -a$

ทฤษฎีบท 1.5

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จะได้ $ab = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ หรือ $b = 0$

ทฤษฎีบท 1.6

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $a(-b) = -ab$
2. $(-a)b = -ab$
3. $(-a)(-b) = ab$

ที่ผ่านมาในระบบจำนวนจริงกล่าวถึงการดำเนินการเฉพาะการบวกและการคูณเท่านั้น แต่เราสามารถนิยามการลบและการหารระหว่างจำนวนจริง โดยใช้ตัวผกผันการบวกและตัวผกผันการคูณตามลำดับได้ดังนี้

บทนิยาม 1.1

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

a ลบด้วย b เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a - b$ โดยที่

$$a - b = a + (-b)$$

จากบทนิยาม จะได้ว่า $a - b$ คือ ผลบวกของ a กับตัวผกผันการบวกของ b นั่นเอง เช่น

$$5 - 2 = 5 + (-2) = 3$$
$$(-4) - (-3) = (-4) + 3 = -1$$

บทนิยาม 1.2

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $b \neq 0$

a หารด้วย b เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\dfrac{a}{b}$ โดยที่

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$$

จากบทนิยาม จะได้ว่า $\dfrac{a}{b}$ คือ ผลคูณของ a กับตัวผกผันการคูณของ b

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก} \quad & \frac{1}{b} = 1 \cdot b^{-1} = b^{-1} \\ \text{และจาก} \quad & \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \\ \text{จะได้} \quad & \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \end{aligned}$$

จากบทนิยามการลบและการหาร สัจพจน์เชิงพีชคณิต และทฤษฎีบทที่กล่าวมาแล้วข้างต้น สามารถนำไปพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้

ทฤษฎีบท 1.7

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $a(b-c) = ab - ac$
2. $(a-b)c = ac - bc$

ทฤษฎีบท 1.8

ให้ a เป็นจำนวนจริง ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $a^{-1} \neq 0$

ทฤษฎีบท 1.9

ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{c} = \dfrac{a}{bc}$ เมื่อ $b \neq 0$ และ $c \neq 0$
2. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$ เมื่อ $b \neq 0$ และ $c \neq 0$
3. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$ เมื่อ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{ac}{bd}$ เมื่อ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$
5. $\left(\dfrac{b}{c}\right)^{-1} = \dfrac{c}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และ $c \neq 0$
6. $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\left(\dfrac{c}{d}\right)} = \dfrac{ad}{bc}$ เมื่อ $b \neq 0, c \neq 0$ และ $d \neq 0$

แบบฝึกหัด

1. จงบอกสมบัติของจำนวนจริงที่ทำให้สมการหรือข้อความต่อไปนี้เป็นจริง เมื่อตัวแปรที่ปรากฏแทนจำนวนจริงใด ๆ

   1) $\frac{1}{3}(2+7) = (2+7)\frac{1}{3}$

   2) $(-6)+0=-6$

   3) $1 \cdot x = x$

   4) $7(-3)$ เป็นจำนวนจริง

   5) $[2+(c+d)]+3(c+d) = 2+[(c+d)+3(c+d)]$

   6) $(x+y)(a+b) = (x+y)a+(x+y)b$

   7) $-5\left(\frac{1}{-5}\right) = 1$

   8) $\left(5 \times 9\frac{1}{2}\right) \times 2 = 5\left(9\frac{1}{2} \times 2\right)$

   9) $-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=0$

   10) $2+(m+1) = 2+(1+m)$

2. จงหาตัวผกผันการบวกและตัวผกผันการคูณของจำนวนต่อไปนี้

$$-4, \quad \sqrt{5}, \quad \frac{2}{7}, \quad -\frac{5}{\sqrt{11}}, \quad 1-\sqrt{7}, \quad \sqrt[3]{2}, \quad \frac{-8}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

3. จงพิจารณาว่าเซตที่กำหนดให้มีสมบัติใดต่อไปนี้บ้าง (สมบัติปิดของการบวก, สมบัติปิดของการลบ, สมบัติปิดของการคูณ, สมบัติปิดของการหาร เมื่อตัวหารไม่เป็นศูนย์)

   1) เซตของจำนวนนับ

   2) เซตของจำนวนเต็ม

   3) เซตของจำนวนคี่ลบ

   4) เซตของจำนวนคู่

   5) เซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 ลงตัว

   6) เซตของจำนวนตรรกยะ

7) $\{\ldots, -5, 0, 5, 10\}$

8) $\{-1, -2, -3, \ldots\}$

9) $\{-1, 0, 1\}$

10) $\left\{\ldots, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots\right\}$

1.3 พหุนามตัวแปรเดียว

จากที่ได้ศึกษาในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น พหุนามคือนิพจน์ที่เขียนอยู่ในรูปเอกนาม หรือเขียนอยู่ในรูปการบวกของเอกนามตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไป หรือกล่าวได้ว่า พหุนามคือนิพจน์ที่เขียนอยู่ในรูป

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง โดยนิยมใช้สัญลักษณ์ เช่น $p(x), q(x), r(x), a(x), b(x)$ แทนพหุนามที่มี x เป็นตัวแปร

ถ้า $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ โดยที่ $a_n \neq 0$ จะเรียกพหุนามนี้ว่า **พหุนามดีกรี n** ซึ่งมีส่วนประกอบดังนี้

- **ดีกรี (Degree):** คือค่า n ซึ่งเป็นเลขชี้กำลังสูงสุดของตัวแปร x เขียนแทนด้วย $\deg(p(x))$
- **สัมประสิทธิ์ (Coefficient):** คือจำนวนจริง $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$
- **สัมประสิทธิ์นำ (Leading Coefficient):** คือสัมประสิทธิ์ a_n ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีดีกรีสูงสุด

ตัวอย่าง 1.3

ตัวอย่างพหุนามและการพิจารณาดีกรี:

- $x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ เป็นพหุนามดีกรี 3 มีสัมประสิทธิ์นำคือ 1
- $x^5 + 5x^2 - 3x - 1$ เป็นพหุนามดีกรี 5 มีสัมประสิทธิ์นำคือ 1
- 7 เป็นพหุนามดีกรี 0 (เนื่องจากเขียนในรูป $7x^0$ ได้)
- 0 เป็นพหุนามที่ไม่นิยามดีกรี

พหุนามตัวแปรเดียวสองพหุนามจะเท่ากัน เมื่อพหุนามทั้งสองนั้นมีดีกรีเท่ากัน และพจน์ที่มีเลขชี้กำลัง ของตัวแปรเท่ากันมีสัมประสิทธิ์เท่ากัน

ตัวอย่าง 1.4

ให้ $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ และ $q(x) = x^3 - x - 5$ ถ้า $p(x) = q(x)$ จงหาค่าของ a, b และ c

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.5

ให้ $p(x) = x^2 - x + 2$ และ $q(x) = x - 1$
จงหา $p(x) + q(x)$, $p(x) - q(x)$ และ $p(x)q(x)$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.6

ให้ $p(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$ และ $q(x) = 3x - 2$
จงหา $p(x) + q(x)$, $p(x) - q(x)$ และ $p(x)q(x)$

วิธีทำ

ขั้นตอนวิธีการหารสำหรับพหุนาม

ในการหารจำนวนเต็มด้วยจำนวนเต็ม เช่น การหาร 7 ด้วย 3 จะได้ผลหารคือ 2 และมีเศษเหลือคือ 1 ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ในรูป $7 = 3 \times 2 + 1$

ในกรณีทั่วไป จะได้ความสัมพันธ์ในรูป

$$\text{ตัวตั้ง} = (\text{ตัวหาร} \times \text{ผลหาร}) + \text{เศษเหลือ}$$

การหารพหุนามด้วยพหุนามสามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.10: ขั้นตอนวิธีการหารสำหรับพหุนาม (Division Algorithm for Polynomials)

ถ้า $a(x)$ และ $b(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $b(x) \neq 0$ แล้วจะมีพหุนาม $q(x)$ และ $r(x)$ เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$a(x) = b(x)q(x) + r(x)$$

เมื่อ $r(x) = 0$ หรือ $\deg(r(x)) < \deg(b(x))$

เรียก $q(x)$ ว่า **ผลหาร (quotient)** และเรียก $r(x)$ ว่า **เศษเหลือ (remainder)** จากการหารพหุนาม $a(x)$ ด้วยพหุนาม $b(x)$

ตัวอย่าง 1.7

ให้ $a(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x - 5$ และ $b(x) = x^2$ จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหาร $a(x)$ ด้วย $b(x)$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.8

ให้ $a(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 10$ และ $b(x) = x - 5$ จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหาร $a(x)$ ด้วย $b(x)$

วิธีทำ

การหารยาวพหุนาม (Polynomial Long Division)

ตัวอย่าง 1.9

พิจารณาการหารยาวของพหุนาม $2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 4$ ด้วยพหุนาม $x^2 - 2x - 1$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.10

ให้ $a(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ และ $b(x) = x - 2$
จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหาร $a(x)$ ด้วย $b(x)$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.11

ให้ $a(x) = x^5 + 8x^3 - x^2 + 8x - 8$ และ $b(x) = x^3 + x - 1$
จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหาร $a(x)$ ด้วย $b(x)$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด

1. ให้ $p(x) = 3x^4 + 2x^2 - ax + 3$ และ $q(x) = bx^4 + cx^3 + 2x^2 - 5x + 3$ ถ้า $p(x) = q(x)$ จงหาค่าของ a, b และ c

2. ให้ $p(x) = x^2 - 1$ และ $q(x) = x^2 - 2x + 3$ จงหา
   1) $p(x) + q(x)$
   2) $q(x) - p(x)$
   3) $p(x)q(x)$

3. ให้ $p(x) = 3x^2 + 5x - 1$ และ $q(x) = x^4 - 5x^2 + 7$ จงหา $p(x)q(x)$

4. ถ้า $x^2 - 12x - 28 = (x - a)(x - b)$ จงหาค่าของ $a + b$ และ ab

5. ถ้า $x^2 - 2x + 5 = (x - a)^2 + b^2$ เมื่อ $b > 0$ จงหาค่าของ a และ b

6. จงหาพหุนามที่เมื่อหารด้วย $x^2 + 3x$ แล้วได้ผลหารคือ $x^2 - 1$ และเศษเหลือคือ $x - 1$

7. จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหารพหุนาม $a(x)$ ด้วยพหุนาม $b(x)$ เมื่อกำหนดให้
   1) $a(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5$ และ $b(x) = x^2$
   2) $a(x) = x^3 - 2$ และ $b(x) = x^2 + 2$
   3) $a(x) = x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ และ $b(x) = x + 2$
   4) $a(x) = x^5 + 1$ และ $b(x) = x^2 + 1$
   5) $a(x) = x^6 + x^3 + 1$ และ $b(x) = x^3 - 1$

1.4 การแยกตัวประกอบพหุนาม

ในหัวข้อนี้จะแนะนำให้รู้จักทฤษฎีบทเศษเหลือ ทฤษฎีบทตัวประกอบ และทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่ใช้หาตัวประกอบของพหุนาม โดยเฉพาะการหาตัวประกอบที่เป็นพหุนามดีกรี 1 หรือเรียกว่าพหุนามเชิงเส้น แต่ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบททั้งสาม จะต้องมีข้อกำหนดต่อไปนี้

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n และ a เป็นจำนวนจริง กำหนดให้ $p(a)$ เป็นค่าที่ได้จากการแทน x ในพหุนาม $p(x)$ ด้วย a

เช่น ถ้า $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ แล้ว

$$\begin{aligned} p(1) &= 1^3 - 4(1)^2 + 3(1) + 2 = 2 \\ p(-2) &= (-2)^3 - 4(-2)^2 + 3(-2) + 2 = -28 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทเศษเหลือ

ทฤษฎีบท 1.11: ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem)

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนาม $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$ ถ้าหารพหุนาม $p(x)$ ด้วยพหุนาม $x - c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง แล้วเศษเหลือจะเท่ากับ $p(c)$

จากขั้นตอนวิธีการหาร เมื่อหาร $p(x)$ ด้วย $x - c$ จะมีผลหาร $q(x)$ และเศษเหลือ $r(x)$ ซึ่ง

$$p(x) = (x - c)q(x) + r(x) \tag{1.1}$$

โดยที่ $r(x) = 0$ หรือ $\deg(r(x)) < \deg(x - c)$

แต่เนื่องจาก $\deg(x - c) = 1$ ดังนั้น $r(x) = 0$ หรือ $\deg(r(x)) = 0$ นั่นคือ $r(x)$ เป็นค่าคงตัว สมมติให้ $r(x) = d$ เมื่อ d เป็นค่าคงตัว

เขียนสมการ (1.1) ใหม่ได้เป็น

$$p(x) = (x - c)q(x) + d \tag{1.2}$$

แทน x ในสมการ (1.2) ด้วย c จะได้

$$p(c) = (c - c)q(c) + d = d$$

นั่นคือ เศษเหลือจะเท่ากับ $p(c)$

ทฤษฎีบทเศษเหลือทำให้สามารถหาเศษเหลือจากการหารพหุนามด้วยพหุนามดีกรี 1 ได้ดังนี้

ตัวอย่าง 1.12

จงหาเศษเหลือจากการหาร $9x^3 + 4x - 1$ ด้วย $x - \frac{1}{2}$

วิธีทำ

ข้อสังเกต 1.1: คำถาม

1. จงหาร $9x^3 + 4x - 1$ ด้วย $x - \dfrac{1}{2}$ โดยวิธีหารยาว แล้วพิจารณาว่าเศษเหลือที่ได้เท่ากับ $p\left(\dfrac{1}{2}\right)$ หรือไม่
2. จงหาร $9x^3 + 4x - 1$ ด้วย $2x - 1$ โดยวิธีหารยาว แล้วพิจารณาว่าเศษเหลือที่ได้เท่ากับ $p\left(\dfrac{1}{2}\right)$ หรือไม่

ตัวอย่าง 1.13

จงหาเศษเหลือจากการหาร $2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3$ ด้วย $x + 1$

วิธีทำ

ทฤษฎีบทตัวประกอบ

ทฤษฎีบท 1.12: ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนาม $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$

พหุนาม $p(x)$ มี $x - c$ เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ $p(c) = 0$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ จะต้องแสดงสองทิศทางดังนี้

1. ถ้า $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$ แล้ว $p(c) = 0$
2. ถ้า $p(c) = 0$ แล้ว $x - c$ จะเป็นตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$

พิสูจน์

1) สมมติให้ $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$
จะได้ว่า $x - c$ หาร $p(x)$ ลงตัว นั่นคือ การหาร $p(x)$ ด้วย $x - c$ มีเศษเหลือเท่ากับ 0
จากทฤษฎีบทเศษเหลือ เมื่อหารพหุนาม $p(x)$ ด้วยพหุนาม $x - c$ จะได้เศษเหลือเท่ากับ $p(c)$
ดังนั้น $p(c) = 0$

2) สมมติให้ $p(c) = 0$
จากขั้นตอนวิธีการหาร เขียนพหุนามได้ในรูป $p(x) = (x - c)q(x) + d$ เมื่อ d เป็นค่าคงตัว
จากทฤษฎีบทเศษเหลือ จะได้ว่า $d = p(c)$
เนื่องจากสัจพจน์ที่ตั้งไว้ $p(c) = 0$ ทำให้ได้ $d = 0$
จะได้ $p(x) = (x - c)q(x)$
ดังนั้น $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

จากข้อ 1) และ 2) สรุปได้ว่า พหุนาม $p(x)$ มี $x - c$ เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ $p(c) = 0$

ตัวอย่าง 1.14

จงแสดงว่า $x - 2$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

วิธีทำ

ทฤษฎีบทเศษเหลือและทฤษฎีบทตัวประกอบใช้ได้ในกรณีที่สัมประสิทธิ์ของพหุนามเป็นจำนวนจริงใด ๆ แต่ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นการแยกตัวประกอบของพหุนามที่สัมประสิทธิ์ของพหุนามเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น โดยแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่สัมประสิทธิ์นำเป็น 1 และกรณีที่สัมประสิทธิ์นำไม่เป็น 1

กรณีที่สัมประสิทธิ์นำเป็น 1

เมื่อพิจารณา $x-2,\ x+1,\ x-4$ ซึ่งเป็นตัวประกอบของ x^3-5x^2+2x+8 จะเห็นว่า $2,\ -1$ และ 4 เป็นตัวประกอบของ 8 ซึ่ง 8 เป็นพจน์ค่าคงตัวของพหุนาม x^3-5x^2+2x+8

ในกรณีทั่วไป ถ้า $x-c$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ โดยที่ c และสัมประสิทธิ์ของพหุนามนี้เป็นจำนวนเต็ม แล้ว c จะเป็นตัวประกอบของ a_0 ดังนั้น ในการหาจำนวนเต็ม c ดังกล่าวจึงพิจารณาจากตัวประกอบที่เป็นจำนวนเต็มของ a_0

การแยกตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$ ในกรณีนี้สามารถใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือได้ดังนี้

1. หาจำนวนเต็ม c ที่เป็นตัวประกอบของ a_0 ที่ทำให้ $p(c)=0$ ซึ่งแสดงว่า $x-c$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

2. นำ $x-c$ ไปหาร $p(x)$ ผลหารจะเป็นพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่าดีกรีของ $p(x)$ อยู่ 1

3. ถ้าผลหารในข้อ 2 มีดีกรีสูงกว่า 2 และสามารถแยกตัวประกอบต่อไปได้อีก ให้แยกตัวประกอบของผลหารนั้นตามขั้นตอนในข้อ 1 และ 2 แต่ถ้าผลหารมีดีกรี 2 จะใช้วิธีแยกตัวประกอบที่เคยศึกษามาหรือใช้วิธีในข้อ 1 และ 2 ก็ได้

ตัวอย่าง 1.15

จงแยกตัวประกอบของ x^3+2x^2-5x-6

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.16

จงแยกตัวประกอบของ $x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$

วิธีทำ

กรณีที่สัมประสิทธิ์นำไม่เป็น 1

การแยกตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$ จะหาตัวประกอบที่เป็นพหุนามดีกรี 1 ที่อยู่ในรูป $x - \frac{k}{m}$ เมื่อ m และ k เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $m \neq 0$ โดยทฤษฎีบทตัวประกอบ จะได้

"พหุนาม $p(x)$ มี $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ $p\left(\frac{k}{m}\right) = 0$"

การพิจารณาหา m และ k ที่เป็นจำนวนเต็มของพหุนาม $x - \frac{k}{m}$ ดังกล่าว จะใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.13: ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนาม $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a_n \neq 0$

ถ้า $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$ โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $m \neq 0$ และ ห.ร.ม. ของ m และ k เท่ากับ 1 แล้ว m หาร a_n ลงตัว และ k หาร a_0 ลงตัว

ดังนั้น การแยกตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$ ในกรณีนี้ทำได้ดังนี้

1. หา $\dfrac{k}{m}$ ซึ่ง ห.ร.ม. ของ m และ k คือ 1 โดยพิจารณา m และ k จากตัวประกอบของ a_n และ a_0 ตามลำดับ
2. ทดสอบว่า $p\left(\dfrac{k}{m}\right)$ เป็น 0 หรือไม่ ถ้า $p\left(\dfrac{k}{m}\right)$ เป็น 0 จะได้ $x - \dfrac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบ ของ $p(x)$ ในกรณีที่ไม่มี $\dfrac{k}{m}$ ที่ทำให้ $p\left(\dfrac{k}{m}\right)$ เป็น 0 แสดงว่า พหุนาม $p(x)$ ไม่มี ตัวประกอบที่เป็นพหุนามดีกรี 1 ที่อยู่ในรูป $x - \dfrac{k}{m}$
3. นำ $x - \dfrac{k}{m}$ ไปหาร $p(x)$ ผลหารจะเป็นพหุนามดีกรีต่ำกว่าดีกรีของ $p(x)$ อยู่ 1
4. ถ้าผลหารในข้อ 3 ยังมีดีกรีสูงกว่า 2 และสามารถแยกตัวประกอบต่อไปได้อีก ให้แยก ตัวประกอบของผลหารนั้นตามขั้นตอนในข้อ 1,2 และ 3 แต่ถ้าผลหารมีดีกรี 2 จะใช้วิธี แยกตัวประกอบตามที่เคยศึกษามา หรือใช้วิธีในข้อ 1,2 และ 3 ก็ได้

ตัวอย่าง 1.17

จงแยกตัวประกอบของ $12x^3 + 16x^2 - 5x - 3$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด

1. กำหนด $p(x)$ และ c ดังต่อไปนี้ จงหาเศษเหลือเมื่อหาร $p(x)$ ด้วย $x - c$

   1) $p(x) = x^4 - 3x + 5, \quad c = 2$

   2) $p(x) = 2x^3 + 7x^2 - 5x - 4, \quad c = -3$

   3) $p(x) = 6x^3 + 13x^2 - 4, \quad c = -2$

   4) $p(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 6, \quad c = 1$

   5) $p(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x + 1, \quad c = -\dfrac{1}{2}$

2. จงแสดงว่า $x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

3. จงแสดงว่า $x + 1$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 + x^2 + x + 1$

4. จงหาค่า m จากเงื่อนไขที่กำหนดให้

   1) $x - 5$ หาร $x^3 - 2x^2 + 8x - m$ ลงตัว

   2) $x + \dfrac{2}{3}$ หาร $3x^4 - 2x^3 + mx - 1$ เหลือเศษ -1

   3) $x + m$ หาร $x^2 - 5x - 2$ เหลือเศษ -8

5. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

   1) $x^3 - x^2 - 4x + 4$

   2) $x^3 + x^2 - 8x - 12$

   3) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6$

   4) $x^3 - 1$

   5) $x^4 - 1$

   6) $x^4 - 5x^2 + 4$

   7) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4$

   8) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$

6. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

   1) $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$

   2) $6x^3 + x^2 - 11x - 6$

   3) $8x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

   4) $3x^4 - 8x^3 + x^2 + 8x - 4$

1.5 สมการพหุนามตัวแปรเดียว

สมการพหุนามตัวแปรเดียว คือ สมการที่เขียนได้ในรูป

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริงที่เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนาม จะกล่าวว่า จำนวนจริง c เป็นคำตอบของสมการพหุนาม ก็ต่อเมื่อ แทน x ในสมการด้วย c แล้วได้สมการที่เป็นจริง ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาเซตคำตอบของสมการโดยใช้ขั้นตอนวิธีการหาร ทฤษฎีบทตัวประกอบ และทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะที่ได้ศึกษาไปแล้ว

ทั้งนี้ ในการหาเซตคำตอบของสมการ ถ้าจัดสมการให้จำนวนทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับเป็นศูนย์ และให้ทางซ้ายมืออยู่ในรูปการคูณกันของพหุนามแล้ว จะสามารถหาเซตคำตอบของสมการได้โดยการหาค่าของตัวแปรที่ทำให้พหุนามแต่ละพหุนามที่คูณกันมีค่าเป็นศูนย์ ตัวอย่างเช่น สมการ $(x-2)(x-3) = 0$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $x - 2 = 0$ หรือ $x - 3 = 0$ นั่นคือ $x = 2$ หรือ $x = 3$ ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{2, 3\}$

ตัวอย่าง 1.18

จงหาเซตคำตอบของสมการ $3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = 0$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.19

จงหาเซตคำตอบของสมการ $6x^3 - 11x^2 + 6x = 1$

วิธีทำ

การหาเซตคำตอบของสมการพหุนามตัวแปรเดียว บางครั้งอาจต้องใช้ความรู้เรื่องสมการกำลังสองที่นักเรียนได้ศึกษาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ดังต่อไปนี้

ข้อควรรู้ 1.1

สมการกำลังสอง (quadratic equation) คือ สมการที่เขียนได้ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$

ถ้า $b^2 - 4ac \geq 0$ แล้วจะมีจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของสมการกำลังสองนี้ โดยคำตอบของสมการคือ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ แล้วจะไม่มีจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของสมการกำลังสองนี้

ตัวอย่าง 1.20

จงหาเซตคำตอบของสมการ $2x^2 - 3x - 1 = 0$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.21

จงหาเซตคำตอบของสมการ $2x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.22

จงหาเซตคำตอบของสมการ $2x^3 - x^2 + 6x - 3 = 0$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.23

ถ้าผลคูณของจำนวนเต็ม 3 จำนวนเรียงติดกันเท่ากับ 336 จงหาจำนวนที่มากที่สุดในสามจำนวนนี้

วิธีทำ

แบบฝึกหัด

1. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

   1) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

   2) $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$

   3) $2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

   4) $3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 = 0$

   5) $4x^3 - 13x + 6 = 0$

   6) $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$

   7) $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 0$

   8) $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

   9) $4x^3 + 13x^2 + 4x - 12 = 0$

   10) $2x^4 - 13x^3 + 28x^2 - 23x + 6 = 0$

   11) $4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2 = 0$

   12) $3x^4 - 8x^3 + x^2 + 8x - 4 = 0$

   13) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$

2. ถ้าผลคูณของจำนวนคี่ 3 จำนวนที่เรียงติดกันเท่ากับ $1,287$ จงหาจำนวนที่น้อยที่สุดในสามจำนวนนี้

3. สมมติว่าโยนลูกบอลขึ้นไปในอากาศจากดาดฟ้าตึกซึ่งสูง 12 เมตร สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลา (วินาที) กับความสูงของลูกบอลจากพื้นดิน (เมตร) คือ $s(t) = 12 + 28t - 5t^2$ เมื่อ $s(t)$ แทนความสูงของลูกบอลจากพื้นดินในวินาทีที่ t จงหาว่าลูกบอลจะลอยอยู่ในอากาศนานกี่วินาทีก่อนตกกระทบพื้นดินเป็นครั้งแรก

1.6 เศษส่วนของพหุนาม

ให้ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $q(x) \neq 0$ จะเรียก $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ว่า **เศษส่วนของพหุนาม** ที่มี $p(x)$ เป็นตัวเศษ และ $q(x)$ เป็นตัวส่วน เช่น

1) $\dfrac{1}{x}$ 2) $\dfrac{x-2}{x^2-2}$ 3) $\dfrac{x^3+1}{2x-5}$

เศษส่วนของพหุนามที่จะกล่าวต่อไปนี้ให้ถือว่าพหุนามที่เป็นตัวส่วนไม่เท่ากับ 0 ถึงแม้ว่าจะไม่ได้ระบุไว้

พิจารณาเศษส่วนของพหุนาม $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$ ซึ่งเขียนในรูปเศษส่วนของพหุนามอีกแบบหนึ่งได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} &= \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{x+3}{x+1} \qquad \text{เมื่อ } x \neq 2\end{aligned}$$

เรียก $\dfrac{x+3}{x+1}$ ว่า **เศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ** ของ $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

ตัวอย่าง 1.24

จงเขียนเศษส่วนของพหุนามให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

1) $\dfrac{x-1}{x^2-1}$

2) $\dfrac{4x+8}{3x^2+6x}$

วิธีทำ

การคูณและการหารเศษส่วนของพหุนาม

การคูณและการหารเศษส่วนของพหุนาม มีหลักเกณฑ์เช่นเดียวกับการคูณและการหารเศษส่วนของจำนวนเต็ม ดังนี้:

1) **การคูณเศษส่วนของพหุนาม:** ให้ $p(x), q(x), r(x)$ และ $s(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $q(x) \neq 0$ และ $s(x) \neq 0$ จะได้ว่า:

$$\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x) \cdot r(x)}{q(x) \cdot s(x)}$$

2) **การหารเศษส่วนของพหุนาม:** ให้ $p(x), q(x), r(x)$ และ $s(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $q(x) \neq 0, r(x) \neq 0$ และ $s(x) \neq 0$ จะได้ว่า:

$$\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{s(x)}{r(x)}$$

เมื่อเปลี่ยนหารเป็นคูณและกลับเศษเป็นส่วนแล้ว ตัวพหุนาม $r(x)$ ซึ่งเดิมเป็นตัวเศษจะกลายเป็นตัวส่วนทันที ดังนั้นในกรณีการหาร เราจึงต้องเพิ่มเงื่อนไขว่า $r(x) \neq 0$ ด้วย

ในการหาผลคูณหรือผลหาร **ไม่ควร** รีบกระจายพหุนามเข้าหากัน แต่ควรคงรูปการคูณ (Factor Form) ไว้ เพื่อให้ง่ายต่อการตัดทอนเศษส่วนให้เป็นรูปผลสำเร็จในขั้นตอนสุดท้าย

ตัวอย่าง 1.25

จงหาผลลัพธ์ในรูปผลสำเร็จ

1) $\dfrac{2x^2+4x}{x-3} \cdot \dfrac{x}{x+2}$

2) $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4} \cdot \dfrac{x+2}{x-2}$

3) $\dfrac{1}{x^2+4x} \div \dfrac{1}{x}$

4) $\dfrac{x}{x+1} \div \dfrac{x+2}{x^2-1}$

วิธีทำ

การบวกและการลบเศษส่วนของพหุนาม

การบวกและการลบเศษส่วนของพหุนามใช้หลักการเดียวกันกับการบวกและการลบเศษส่วนของจำนวนเต็ม โดยมีหลักเกณฑ์ดังนี้:

1) **กรณีตัวส่วนเท่ากัน:** ให้ $p(x), q(x)$ และ $r(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $q(x) \neq 0$ จะได้ว่า:

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{q(x)} = \frac{p(x) + r(x)}{q(x)}$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{r(x)}{q(x)} = \frac{p(x) - r(x)}{q(x)}$$

2) **กรณีตัวส่วนไม่เท่ากัน:** ต้องดำเนินการทำตัวส่วนให้เท่ากันก่อน (โดยการหา ค.ร.น. ของตัวส่วน) แล้วจึงใช้วิธีการบวกหรือลบเช่นเดียวกับในข้อ 1

ในการลบเศษส่วนของพหุนาม เมื่อนำตัวเศษมาลบกัน **ควรใส่เครื่องหมายวงเล็บ** ครอบพหุนามตัวหลังไว้เสมอ เพื่อป้องกันความผิดพลาดในการกระจายเครื่องหมายลบ เช่น:

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{r(x)}{q(x)} = \frac{p(x) - r(x)}{q(x)}$$

ตัวอย่าง 1.26

จงหาผลลัพธ์ในรูปผลสำเร็จ

1) $\dfrac{2x+4}{x+3} + \dfrac{x-3}{x+3}$

2) $\dfrac{1}{x+4} - \dfrac{2-x}{x+4}$

3) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}$

4) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด

1. จงเขียนเศษส่วนของพหุนามให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

   1) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$

   2) $\dfrac{4x^2-9}{2x^2+x-3}$

   3) $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-4x^3+4x^2-1}$

2. จงหาผลลัพธ์ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

   1) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-x-2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$

   2) $\dfrac{x^3-1}{x^2-x+1}\cdot\dfrac{x^3+1}{x^2+x+1}$

   3) $\dfrac{x^2+3x-10}{x+2}\div\dfrac{x+5}{x+2}$

   4) $\dfrac{2x-8}{x^2}\div\dfrac{x^2-16}{x^3+x^2}$

3. จงหาผลลัพธ์ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

   1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$

   2) $\dfrac{x}{x^2+x-6}+\dfrac{x-1}{x^2+5x+6}$

   3) $\dfrac{2}{3x}-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$

4) $\dfrac{x^2-5}{x^2-5x+6}-\dfrac{4}{x^2-4}$

1.7 สมการเศษส่วนของพหุนาม

สมการเศษส่วนของพหุนาม คือสมการที่อยู่ในรูป $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$ โดยที่ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นพหุนาม และ $q(x) \neq 0$

หลักการหาคำตอบของสมการ

จำนวนจริง c จะเป็นคำตอบของสมการ $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$ ก็ต่อเมื่อ แทน x ในสมการด้วย c แล้วได้สมการเป็นจริง กล่าวคือ $\dfrac{p(c)}{q(c)} = 0$

ข้อสังเกตคือ $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $p(x) = 0$ และ $q(x) \neq 0$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$ คือ เซตของจำนวนจริง x ซึ่ง $p(x) = 0$ และ $q(x) \neq 0$

ตัวอย่าง 1.27

จงหาเซตคำตอบของสมการ

$$\frac{x(x+1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{2}{(x-1)(x-3)}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.28

จงหาเซตคำตอบของสมการ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 1$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.29

จงหาเซตคำตอบของสมการ

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.30

จงหาเซตคำตอบของสมการ

$$\frac{4}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{1}{2}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.31

น้ำว้าทำงานอย่างหนึ่งเสร็จภายในเวลา 2 ชั่วโมง ถ้าลูกหว้าช่วยทำด้วย งานนั้นจะเสร็จในเวลา 1 ชั่วโมง 30 นาที ถ้าลูกหว้าทำงานชิ้นนี้คนเดียวจะเสร็จในเวลาเท่าใด

วิธีทำ ให้ลูกหว้าทำงานคนเดียวได้งาน 1 หน่วย เสร็จในเวลา x ชั่วโมง
ดังนั้น ในเวลา 1 ชั่วโมง ลูกหว้าทำงานคนเดียวได้งาน $\frac{1}{x}$ หน่วย
เนื่องจากในเวลา 2 ชั่วโมง น้ำว้าทำงานได้งาน 1 หน่วย
ดังนั้น ในเวลา 1 ชั่วโมง น้ำว้าทำงานได้งาน $\frac{1}{2}$ หน่วย
ในเวลา 1 ชั่วโมง น้ำว้าและลูกหว้าช่วยกันทำงาน จะได้งาน $\frac{1}{2}+\frac{1}{x}=\frac{x+2}{2x}$ หน่วย
ดังนั้น งาน 1 หน่วย น้ำว้าและลูกหว้าช่วยกันทำงานเสร็จในเวลา $\frac{2x}{x+2}$ ชั่วโมง
จากโจทย์ น้ำว้าและลูกหว้าช่วยกันทำงานเสร็จในเวลา $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ชั่วโมง
ดังนั้น

$$\frac{2x}{x+2}=\frac{3}{2}$$
$$\frac{2x}{x+2}-\frac{3}{2}=0$$
$$\frac{4x-3(x+2)}{2(x+2)}=0$$
$$\frac{x-6}{2(x+2)}=0$$

จะได้ $x-6=0$ และ $2(x+2)\neq 0$
นั่นคือ $x=6$ โดยที่ $x\neq -2$
ดังนั้น $x=6$
จะได้ เซตคำตอบของสมการคือ $\{6\}$
ดังนั้น ลูกหว้าทำงานชิ้นนี้คนเดียวเสร็จในเวลา 6 ชั่วโมง

แบบฝึกหัด

1. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

   1) $\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{2}{(x+1)(x+2)}$

   2) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x+1}{x} = 0$

   3) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x+6}{x^2+3}$

   4) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x-1} = 1$

   5) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

   6) $\dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{6}{5}$

   7) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{6}$

   8) $\dfrac{1}{x^2-x+1} - \dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{2}{3x}$

2. ในการบินระยะทาง $1,500$ กิโลเมตร ครั้งหนึ่ง เครื่องบินพบกับสภาพอากาศแปรปรวนทำให้ต้องบินช้าลงกว่าปกติ พบว่าอัตราเร็วลดลง 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ทำให้ถึงที่หมายช้ากว่าปกติ 10 นาที จงหาอัตราเร็วของการบินปกติ

1.8 การไม่เท่ากันของจำนวนจริง

ในหัวข้อที่ 3.2 ได้กล่าวถึงสัจพจน์เชิงพีชคณิตของระบบจำนวนจริง และสมบัติบางประการเกี่ยวกับ "การเท่ากัน" สำหรับหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์เกี่ยวกับ "การไม่เท่ากัน" ของระบบจำนวนจริง ได้แก่ ความสัมพันธ์มากกว่า น้อยกว่า มากกว่าหรือเท่ากับ และน้อยกว่าหรือเท่ากับ

ในระบบจำนวนจริง $\mathbb{R}$ จะมีสับเซต $\mathbb{R}^+$ ซึ่งสอดคล้องกับสัจพจน์เชิงอันดับ 3 ข้อ ดังต่อไปนี้

1. สำหรับ $a \in \mathbb{R}^+$ และ $b \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $a + b \in \mathbb{R}^+$ (สมบัติปิดการบวก)
2. สำหรับ $a \in \mathbb{R}^+$ และ $b \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $ab \in \mathbb{R}^+$ (สมบัติปิดการคูณ)
3. สำหรับจำนวนจริง a จะได้ว่า $a = 0$ หรือ $a \in \mathbb{R}^+$ หรือ $-a \in \mathbb{R}^+$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น (สมบัติไตรวิภาค)

ถ้ากำหนดสัญลักษณ์ $a > 0$ หมายถึง $a \in \mathbb{R}^+$ และ $a < 0$ หมายถึง $-a \in \mathbb{R}^+$ สัจพจน์ข้างต้นทั้งสามข้อสามารถเขียนได้อีกแบบหนึ่ง ดังนี้

1. สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ และ $b \in \mathbb{R}$ ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $a + b > 0$
2. สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ และ $b \in \mathbb{R}$ ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $ab > 0$
3. สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $a = 0$ หรือ $a > 0$ หรือ $a < 0$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

บทนิยาม 1.3

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

$$a > b \quad \text{หมายถึง} \quad a - b > 0$$
$$a < b \quad \text{หมายถึง} \quad a - b < 0 \quad (\text{หรือ} \ \ b - a > 0)$$
$$a \geq b \quad \text{หมายถึง} \quad a > b \ \ \text{หรือ} \ \ a = b$$
$$a \leq b \quad \text{หมายถึง} \quad a < b \ \ \text{หรือ} \ \ a = b$$

จากสัจพจน์เชิงอันดับที่กล่าวมาข้างต้น จะสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ ซึ่งเป็นสมบัติที่สำคัญของการไม่เท่ากัน

ทฤษฎีบท 1.14

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

1) **สมบัติการถ่ายทอด**
ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$

2) **สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน**
ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$

3) **สมบัติของการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากันที่ไม่เป็นศูนย์**
กรณีที่ 1: ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
กรณีที่ 2: ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

4) **สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก**
ถ้า $a + c > b + c$ แล้ว $a > b$

5) **สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ**
กรณีที่ 1: ถ้า $ac > bc$ และ $c > 0$ แล้ว $a > b$
กรณีที่ 2: ถ้า $ac > bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a < b$

ทฤษฎีบท 1.15

ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง

ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $a + c > b + d$

บทนิยาม 1.4

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$a < b < c$ หมายถึง $a < b$ และ $b < c$

$a \leq b \leq c$ หมายถึง $a \leq b$ และ $b \leq c$

$a < b \leq c$ หมายถึง $a < b$ และ $b \leq c$

$a \leq b < c$ หมายถึง $a \leq b$ และ $b < c$

แบบฝึกหัด

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

1. จริงหรือไม่ ถ้า $a > b$ แล้ว $a^2 > b^2$

2. จริงหรือไม่ ถ้า $a \neq 0,\ b \neq 0$ และ $a > b$ แล้ว
$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

3. จริงหรือไม่ ถ้า $a > b$ แล้ว $-a < -b$

4. จริงหรือไม่ ถ้า $a < 0$ และ $b < 0$ แล้ว $ab > 0$

5. จริงหรือไม่ ถ้า $a > 0$ และ $b < 0$ แล้ว $ab < 0$

6. จริงหรือไม่ ถ้า $a > 0$ แล้ว $\dfrac{1}{a} > 0$

7. กรณีใดบ้าง ถ้า $a > b$ แล้ว
$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$
เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

8. กรณีใดบ้าง ถ้า $a > b$ แล้ว
$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$
เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

1.9 อสมการพหุนามตัวแปรเดียว

ก่อนจะกล่าวถึงอสมการพหุนามตัวแปรเดียว จะนิยามสับเซตของเซตของจำนวนจริงซึ่งเรียกว่า **ช่วง (interval)** ดังนี้

บทนิยาม 1.5

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a < b$

(a, b) หมายถึง เซต $\{x \mid a < x < b\}$

$[a, b]$ หมายถึง เซต $\{x \mid a \leq x \leq b\}$

$(a, b]$ หมายถึง เซต $\{x \mid a < x \leq b\}$

$[a, b)$ หมายถึง เซต $\{x \mid a \leq x < b\}$

(a, ∞) หมายถึง เซต $\{x \mid x > a\}$

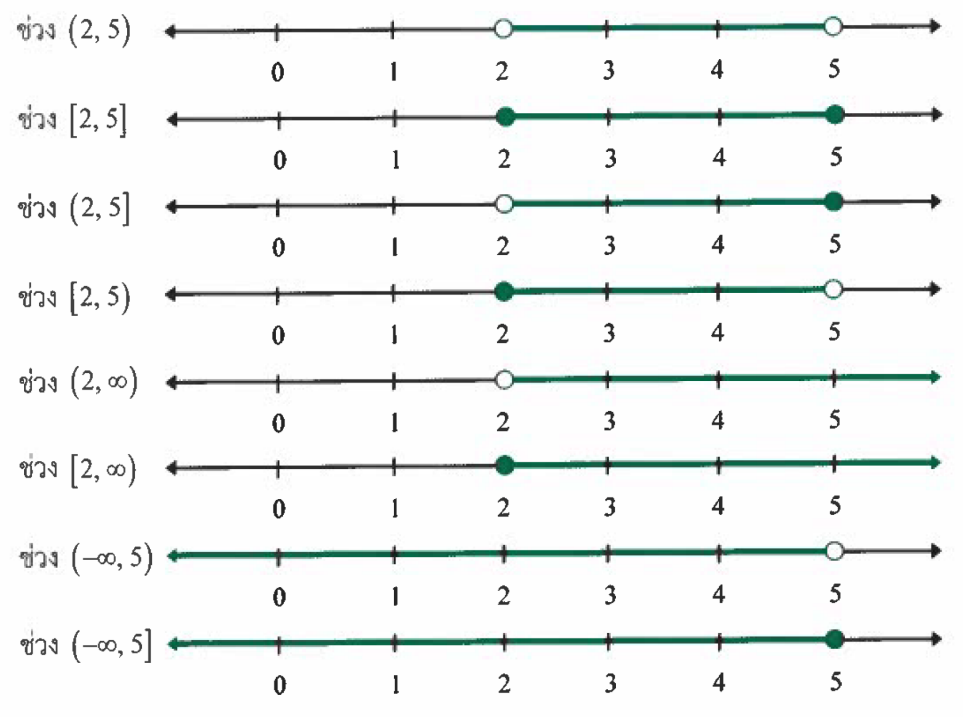
$(-\infty, a)$ หมายถึง เซต $\{x \mid x < a\}$

$[a, \infty)$ หมายถึง เซต $\{x \mid x \geq a\}$

$(-\infty, a]$ หมายถึง เซต $\{x \mid x \leq a\}$

หมายเหตุ อาจเขียนเซตของจำนวนจริงในรูปช่วงอนันต์ได้เป็น $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่างการเขียนกราฟของช่วงบนเส้นจำนวน



รูปที่ 1.1

แบบฝึกหัด

1. จงเขียนช่วงต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของเซตแบบบอกเงื่อนไข พร้อมทั้งแสดงกราฟของช่วงบนเส้นจำนวน

   1) $[-3, 1)$
   2) $(-2, \infty)$
   3) $[4, 7]$
   4) $(-3, 0)$
   5) $(-\infty, -3)$
   6) $[1, \infty)$
   7) $(-1, 4]$
   8) $(-\infty, 1]$
   9) $(-10, -8)$
   10) $[2.5, 4]$

2. ถ้า $A = (-1, 2)$ และ $B = [0, 4]$ จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปช่วง

   1) $A \cup B$
   2) $A \cap B$
   3) $A - B$
   4) $B - A$
   5) A'
   6) B'

3. ถ้า $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid -1 < x < 3\}$ และ $C = \{x \mid 1 < x \leq 4\}$ จงหาเซตต่อไปนี้

   1) $B \cup C$
   2) $A \cap C$
   3) $A \cup B \cup C$
   4) $A \cap B \cap C$
   5) $A' \cap B$
   6) $B' \cap C$
   7) $(A \cup B) \cap C$
   8) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

อสมการพหุนามตัวแปรเดียว

อสมการ (inequality) ใช้บ่งถึงประโยคทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวถึงการไม่เท่ากัน เช่น $2 > 1$ เป็นอสมการที่เป็นจริง และ $0 < -1$ เป็นอสมการที่เป็นเท็จ

ในกรณีที่อสมการเป็นประโยคเปิด เช่น

$$2x < 8, \quad x^2 \geq 0, \quad x^2 + 1 < 0$$

เมื่อนำจำนวนจริงมาแทนตัวแปรในอสมการ จะได้อสมการที่เป็นจริงหรือเท็จ ดังนี้

เมื่อแทน x ใน $2x < 8$ ด้วยจำนวนจริงที่น้อยกว่า 4 จะได้อสมการที่เป็นจริง

เมื่อแทน x ใน $x^2 \geq 0$ ด้วยจำนวนจริงใด ๆ จะได้อสมการที่เป็นจริงเสมอ

เมื่อแทน x ใน $x^2 + 1 < 0$ ด้วยจำนวนจริงใด ๆ จะได้อสมการที่เป็นเท็จเสมอ

เซตคำตอบของอสมการ คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง ซึ่งเมื่อแทน x ในอสมการด้วยจำนวนจริงเหล่านั้นแล้วได้อสมการที่เป็นจริง

ตัวอย่าง 1.32

จงหาเซตคำตอบของอสมการ

$$3x + 5 < x - 7$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.33

จงหาเซตคำตอบของอสมการ

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.34

จงหาเซตคำตอบของอสมการ

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.35

จงหาเซตคำตอบของอสมการ

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.36

จงหาเซตคำตอบของอสมการ

$$\frac{x^2 - 12}{x} > -1$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.37

จงหาเซตคำตอบของอสมการ

$$\frac{x}{x+8} \leq \frac{1}{x-1}$$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด

จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $3x + 1 < 2x - 1$
2. $4y + 7 > 2(y + 1)$
3. $2(3y - 1) > 3(y - 1)$
4. $4 - (3 - x) < 3x - (3 - 2x)$
5. $x^2 - x - 6 \leq 0$
6. $2x^2 + 7x + 3 \geq 0$
7. $6x - x^2 \geq 5$
8. $2x < 3 - x^2$
9. $x^2 + 2x < 15$
10. $3x^2 + 2 \geq 7x$
11. $x^3 - 3x^2 \leq 10x$
12. $x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0$
13. $x^3 - x > 2x^2 - 2$
14. $x\left(x^2 + 4\right) < 5x^2$
15. $\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-2} \leq 0$
16. $\dfrac{2x-3}{(x+2)(x-5)} > 0$
17. $\dfrac{x^2+12}{x} > 7$
18. $\dfrac{x^2+6}{x} \leq 5$
19. $\dfrac{6}{x-1} > 1$
20. $\dfrac{2x-4}{x-1} < 1$
21. $\dfrac{6}{x-4} \leq x + 1$
22. $\dfrac{8}{x+2} \geq x$
23. $\dfrac{5-x}{x^2-3x+2} < 1$
24. $\dfrac{x+6}{x(x+1)} < 6$
25. $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{1}{x+4}$
26. $\dfrac{1}{x+2} \geq \dfrac{1}{2x-3}$
27. $\dfrac{x}{x+2} \geq \dfrac{1}{x}$
28. $\dfrac{x+1}{2x-3} \geq \dfrac{1}{x-3}$
29. $\dfrac{\left(x^2+3x-10\right)\left(x^2+x-6\right)}{x^2+2x-15} \geq 0$
30. $(x-1)^3(x+2)^4 > 0$
31. $(x-1)^3(x+2)^4 < 0$
32. $(2x+1)^3(x+1)^5 < 0$

1.10 ค่าสัมบูรณ์

บทนิยาม 1.6

ให้ a เป็นจำนวนจริง **ค่าสัมบูรณ์ (absolute value)** ของจำนวนจริง a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|a|$ โดยที่

$$\|a\| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

หมายเหตุ

1. จากบทนิยามในกรณีที่ $a < 0$ จะได้ $-a > 0$ แสดงว่า $|a| = -a$ ซึ่งเป็นจำนวนบวก ดังนั้น สำหรับจำนวนจริง a จะได้ว่า $|a|$ มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ โดยที่

$$|a| = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a = 0$$

2. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a สามารถพิจารณาเชิงเรขาคณิตเป็นระยะทางจากจุดที่แทน 0 ถึงจุดที่แทน a บนเส้นจำนวน

ทฤษฎีบท 1.16

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $|x| = |-x|$
2. $|xy| = |x||y|$
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ เมื่อ $y \neq 0$
4. $|x - y| = |y - x|$
5. $|x|^2 = x^2$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$

ตัวอย่าง 1.38

ให้ x เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า

$$|x| = |-x|$$

บทพิสูจน์

กรณีที่ 1: เมื่อ $x > 0$
จากบทนิยาม จะได้

$$|x| = x$$

และเมื่อ $x > 0$ จะได้ $-x < 0$ จากบทนิยามของค่าสัมบูรณ์ในกรณีค่าติดลบ จึงได้ว่า

$$|-x| = -(-x) = x$$

ดังนั้น ในกรณีนี้จะได้ $|x| = |-x|$

กรณีที่ 2: เมื่อ $x = 0$
จากบทนิยาม จะได้

$$|x| = 0 \quad \text{และ} \quad |-x| = |-0| = 0$$

ดังนั้น ในกรณีนี้จะได้ $|x| = 0 = |-x|$

กรณีที่ 3: เมื่อ $x < 0$
จากบทนิยาม จะได้

$$|x| = -x$$

และเมื่อ $x < 0$ จะได้ $-x > 0$ จากบทนิยามของค่าสัมบูรณ์ในกรณีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ จึงได้ว่า

$$|-x| = -x$$

ดังนั้น ในกรณีนี้จะได้ $|x| = |-x|$

จากทั้งสามกรณี สรุปได้ว่า สำหรับทุกจำนวนจริง x จะได้ว่า

$$|x| = |-x| \quad \text{เสมอ}$$

ตัวอย่าง 1.39

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า

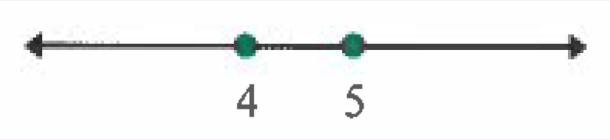
$$|x - y| = |y - x|$$

บทพิสูจน์

$$\begin{aligned} |x - y| &= |-(x - y)| \\ &= |y - x| \end{aligned}$$

ข้อควรรู้ 1.2

สำหรับจำนวนจริง a และ b ค่าสัมบูรณ์ของ $a - b$ สามารถพิจารณาเชิงเรขาคณิตเป็นระยะทางจากจุดที่แทน a ถึงจุดที่แทน b บนเส้นจำนวน (นั่นคือ ความยาวของส่วนของเส้นตรงซึ่งมีจุดปลายทั้งสองคือ จุดที่แทน a และจุดที่แทน b) เช่น



รูปที่ 1.2: ระยะทางระหว่างจุด 4 และ 5 บนเส้นจำนวน

จากรูป 1.2 ระยะจากจุดที่แทน 4 ถึงจุดที่แทน 5 เป็น 1 หน่วย ซึ่งหาได้จากผลต่างระหว่าง 4 กับ 5 เขียนแสดงด้วยค่าสัมบูรณ์ได้เป็น

$$|5 - 4| \quad \text{หรือ} \quad |4 - 5|$$

รูปที่ 1.3: ระยะทางระหว่างจุด -2 และ 4 บนเส้นจำนวน

จากรูป 1.3 ระยะจากจุดที่แทน -2 ถึงจุดที่แทน 4 เป็น 6 หน่วย ซึ่งหาได้จากผลต่างระหว่าง -2 กับ 4 เขียนแสดงด้วยค่าสัมบูรณ์ได้เป็น

$$\left|4 - (-2)\right| \quad \text{หรือ} \quad \left|(-2) - 4\right|$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าของ

   1) $|-12+8|$
   2) $-|25|+|-25|$
   3) $|-5(10)|$
   4) $-|6|^2$
   5) $\left|-\dfrac{28}{6}\right|$
   6) $||-2.5|-|3||$

2. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จงพิจารณาข้อต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ ให้ยกตัวอย่างค้าน

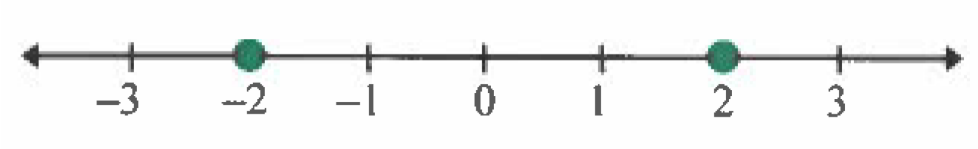
   1) $|a+(-b)| = |a|+|-b|$
   2) $|-a|^2 = -\left(a^2\right)$
   3) $\left|-\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|-a|}{|b|}$ เมื่อ $b \neq 0$
   4) $|(-a)(b)| = |-a||b|$
   5) $|-a-b| \leq |-a|-|b|$
   6) ถ้า $a < 0$ แล้ว $|a| < a$

3. จงหาเงื่อนไขของจำนวนจริง x และ y ที่ทำให้

   1) $|x+y| < |x|+|y|$
   2) $|x+y| = |x|+|y|$

1.11 สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ของพหุนามตัวแปรเดียว

เมื่อพิจารณาบนเส้นจำนวน $|x| = a$ หมายถึง จุดที่แทน x อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 เป็นระยะทาง a หน่วย เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก เช่น จาก $|x| = 2$ จุดที่แทน x คือ จุดที่อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 เป็นระยะทาง 2 หน่วย ซึ่งมีสองจุด ได้แก่ จุดที่แทน 2 และ -2 แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



รูปที่ 1.4: จุดบนเส้นจำนวนที่อยู่ห่างจากจุดแทน 0 เป็นระยะทาง 2 หน่วย

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $|x| = 2$ คือ $\{-2,\ 2\}$

สรุปในกรณีทั่วไปได้ตามทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท 1.17

ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก

เซตคำตอบของสมการ $|x| = a$ คือ $\{-a,\ a\}$

ตัวอย่าง 1.40

จงหาเซตคำตอบของสมการ

$$|2x + 1| = 5$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.41

จงหาเซตคำตอบของสมการ $|x-1| = 2x-3$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด

จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $|2x+1| = 3$
2. $|2x-5| = x+2$
3. $|3x-2| = x-1$
4. $|x| = x+2$
5. $|x| = 3-2x$
6. $\left|x^2-x-4\right| = 2$
7. $|x-1| = |2x+1|$
8. $2|x+3| = |x-2|$

การแก้อสมการในรูปค่าสัมบูรณ์

พิจารณาอสมการในรูป $|x| < a$ และ $|x| \leq a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก โดยอาศัยบทนิยามของค่าสัมบูรณ์และใช้เส้นจำนวนเป็นเครื่องช่วย จะได้ว่า

อสมการ $|x| < a$ หมายถึง จุดที่แทน x อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 น้อยกว่า a หน่วย
นั่นคือ $|x| < a$ มีความหมายตรงกับอสมการ

$$-a < x \quad \text{และ} \quad x < a$$

ซึ่งเขียนรวมเป็น

$$-a < x < a$$

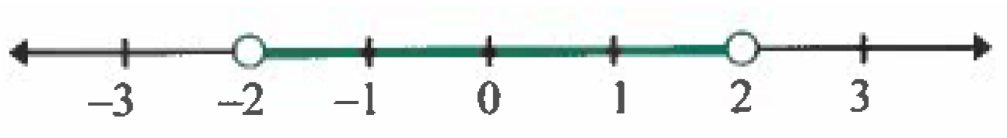
อสมการ $|x| \leq a$ หมายถึง จุดที่แทน x อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 น้อยกว่าหรือเท่ากับ a หน่วย
นั่นคือ $|x| \leq a$ มีความหมายตรงกับอสมการ

$$-a \leq x \quad \text{และ} \quad x \leq a$$

ซึ่งเขียนรวมเป็น

$$-a \leq x \leq a$$

ตัวอย่างเช่น เมื่อ $a = 2$
จาก $|x| < 2$ จุดที่แทน x แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

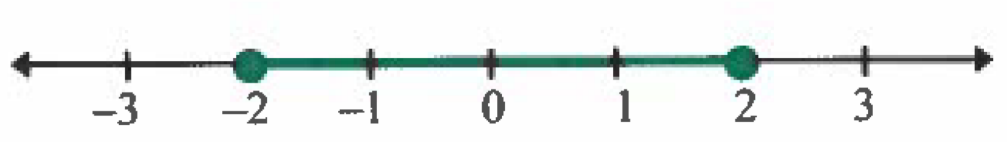


รูปที่ 1.5: กราฟแสดงเซตคำตอบของอสมการ $|x| < 2$

ซึ่งมีความหมายเหมือนกับ $-2 < x < 2$
ดังนั้น เซตคำตอบของ $|x| < 2$ คือ

$$\{x \mid -2 < x < 2\} \quad \text{หรือ} \quad (-2,\ 2)$$

จาก $|x| \leq 2$ จุดที่แทน x แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



รูปที่ 1.6: กราฟแสดงเซตคำตอบของอสมการ $|x| \leq 2$

ซึ่งมีความหมายเหมือนกับ $-2 \leq x \leq 2$
ดังนั้น เซตคำตอบของ $|x| \leq 2$ คือ

$$\{x \mid -2 \leq x \leq 2\} \quad \text{หรือ} \quad [-2,\ 2]$$

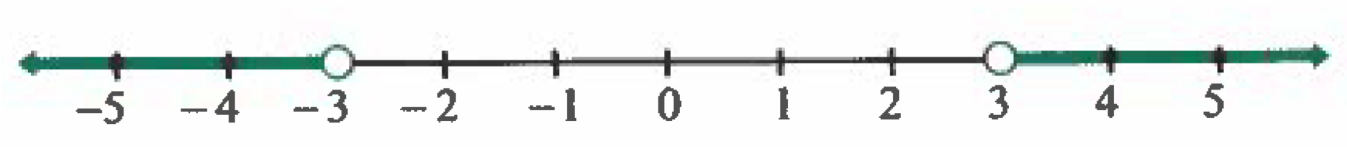
อสมการ $|x| > a$ หมายถึง จุดที่แทน x อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 มากกว่า a หน่วย
นั่นคือ $|x| > a$ มีความหมายตรงกับอสมการ

$$x < -a \quad \text{หรือ} \quad x > a$$

อสมการ $|x| \geq a$ หมายถึง จุดที่แทน x อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 มากกว่าหรือเท่ากับ a หน่วย
นั่นคือ $|x| \geq a$ มีความหมายตรงกับอสมการ

$$x \leq -a \quad \text{หรือ} \quad x \geq a$$

ตัวอย่างเช่น เมื่อ $a = 3$
จาก $|x| > 3$ จุดที่แทน x แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

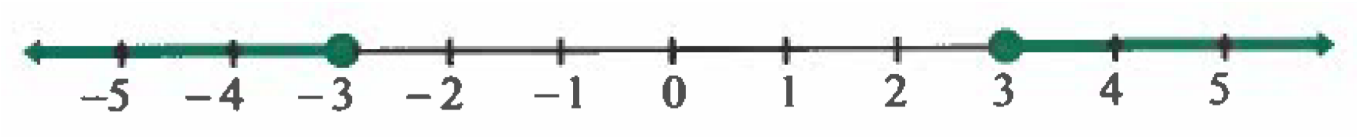


รูปที่ 1.7: กราฟแสดงเซตคำตอบของอสมการ $|x| > 3$

ซึ่งมีความหมายเหมือนกับ $x < -3$ หรือ $x > 3$
ดังนั้น เซตคำตอบของ $|x| > 3$ คือ

$$\{x \mid x < -3 \ \text{ หรือ } \ x > 3\} \quad \text{หรือ} \quad (-\infty,\ -3) \cup (3,\ \infty)$$

จาก $|x| \geq 3$ จุดที่แทน x แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



รูปที่ 1.8: กราฟแสดงเซตคำตอบของอสมการ $|x| \geq 3$

ซึ่งมีความหมายเหมือนกับ $x \leq -3$ หรือ $x \geq 3$
ดังนั้น เซตคำตอบของ $|x| \geq 3$ คือ

$$\{x \mid x \leq -3 \ \text{ หรือ } \ x \geq 3\} \quad \text{หรือ} \quad (-\infty,\ -3] \cup [3,\ \infty)$$

จากที่กล่าวมา สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.18

ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก

1. $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$
2. $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$
3. $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x < -a$ หรือ $x > a$
4. $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

ตัวอย่าง 1.42

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|2x + 1| < 3$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.43

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left|\frac{x}{2} - 3\right| \geq 2$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.44

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|2x+1| < x+5$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.45

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left|\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right| \leq 1$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.46

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $2\left|x-1\right| < \left|x+3\right|$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.47

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| > 2$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.48

ในแต่ละวัน ถ้าแม่ค้าขายสินค้าได้ x หน่วย แล้วจะมีรายได้ $5x - 15$ บาทต่อวัน โดยเฉลี่ยแม่ค้า มีรายได้วันละ $1,000$ บาท ถ้าต้องการให้รายได้แต่ละวันแตกต่างจากรายได้เฉลี่ยไม่เกิน 50 บาท แม่ค้าควรขายสินค้าให้ได้วันละกี่หน่วย

วิธีทำ

แบบฝึกหัด

1. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1) $|x-2| < 1$
2) $|x+3| > 5$
3) $|3x+5| \geq 4$
4) $|2x-1| \leq 11$
5) $2|x-2| > x$
6) $|3x+4| \leq x+2$
7) $|2x+1| < 3x+2$
8) $|x+1| > x-3$
9) $|x| \geq |x-1|$
10) $2|x+2| < |x+3|$
11) $3|x-2| \leq |x+6|$
12) $2|2x-1| > 3|x+1|$
13) $\left|\dfrac{x}{x+4}\right| > 2$
14) $\left|x-\dfrac{4}{x}\right| \leq 3$
15) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| < 1$
16) $\left|\dfrac{x}{x-2}\right| > 2$

2. จากการศึกษาของนักดาราศาสตร์พบว่า อุณหภูมิบนพื้นผิวดาวอังคารเป็นไปตามอสมการ $|C+84| \leq 56$ เมื่อ C แทนอุณหภูมิบนพื้นผิวดาวอังคาร มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส จงหาช่วงของอุณหภูมิบนพื้นผิวของดาวอังคารที่เป็นไปได้จากอสมการนี้

3. ในการทดสอบว่าเหรียญเที่ยงตรงหรือไม่ ทำได้โดยทดลองโยนเหรียญ 100 ครั้ง แล้วบันทึก จำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นหัว กำหนดให้ x เป็นจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นหัว โดยทฤษฎีทางสถิติ กล่าวว่า ถ้าเหรียญที่นำมาทดลองโยนนั้นไม่เที่ยงตรง จะได้ $\left|\dfrac{x-50}{5}\right| \geq 1.645$ จงหา x ที่ทำให้เหรียญไม่เที่ยงตรง

บรรณานุกรม

[1] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2568). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 1* (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.