เอกสารประกอบการสอบสอน

วิชา คณิตศาสตร์

หัวข้อ: ตรีโกณมิติ เบื้อง ต้น

อาจารย์ผู้สอน

ดร. ภาณุวิชญ์ เชื้อพล

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น วิทยาเขตหนองคาย

สารบัญ

1 ตรีโกณมิติเบื้องต้น **1**

1.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ 1

1.1.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติพื้นฐานที่ควรรู้ 1

1.1.2 ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมพื้นฐาน 1

1.1.3 องศาและเรเดียน 2

2 อัตราส่วนตรีโกณมิติพื้นฐาน **4**

2.1 สามเหลี่ยมมุมฉาก 4

2.1.1 ส่วนประกอบของสามเหลี่ยมมุมฉาก 4

2.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติพื้นฐาน 4

2.2.1 ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ 4

3 ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องจำนวนจริง **7**

3.1 พหุนาม 7

3.1.1 การดำเนินการเกี่ยวกับพหุนาม 7

3.1.2 การหารสังเคราะห์ 10

3.1.3 ทฤษฎีบทเศษเหลือ 11

3.2 สมการตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$ 12

3.2.1 ผลบวกรากและผลคูณรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$ . . . 12

3.2.2 ผลบวกรากและผลคูณรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$ . . . 12

บทที่ 1
ตรีโกณมิติเบื้องต้น

ยินดีต้อนรับเข้าสู่บทเรียนเรื่องตรีโกณมิติ เอกสารเล่มนี้ประกอบไปด้วยหัวข้อและสรุปใจความสำคัญต่างๆ

ข้อตกลง 1.1

สัญลักษณ์ต่าง ๆ ตลอดเนื้อหาของเอกสารฉบับนี้ มีความหมายดังนี้

1. สัญลักษณ์ $\times$ และ $\cdot$ หมายถึง เครื่องหมายคูณ
2. สัญลักษณ์ $\angle A$ หรือ $\hat{A}$ หมายถึง ขนาดของมุม A
3. สัญลักษณ์ $\triangle ABC$ หมายถึง สามเหลี่ยม ABC และ $[\triangle ABC]$ หมายถึง พื้นที่ของ $\triangle ABC$
4. สัญลักษณ์ $\square ABCD$ หมายถึง สี่เหลี่ยม $ABCD$ และ $[\square ABCD]$ หมายถึง พื้นที่ของ $\square ABCD$
5. ให้ ℓ_1 และ ℓ_2 แทนเส้นตรงสองเส้น สัญลักษณ์ $\ell_1 // \ell_2$ หมายถึง เส้นตรง ℓ_1 และ ℓ_2 ขนานกัน

1.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

1.1.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติพื้นฐานที่ควรรู้

บทนิยาม 1.1: ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

บทนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่คำนวณจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จากนิยาม 1.1

1.1.2 ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมพื้นฐาน

ตารางต่อไปนี้แสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมพื้นฐานที่ใช้บ่อย ในหน่วยองศา

θ (องศา)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่กำหนดค่า	0	ไม่กำหนดค่า	0

ตารางที่ 1.1: ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมพื้นฐานในหน่วยองศา

ข้อสังเกต 1.1

เนื่องจาก $\sin(A) = \frac{a}{c}$, $\cos(A) = \frac{b}{c}$ และ $\tan(A) = \frac{a}{b}$

จะเห็นได้ว่า $\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$ และ $\cot(A) = \frac{\cos(A)}{\sin(A)}$

ตัวอย่าง 1.1

จงหาค่าของ $\arcsin 30^\circ + \arccos 60^\circ + \arctan 60^\circ$

ตัวอย่าง 1.2

จงหาค่าของ $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$

ตัวอย่าง 1.3

จงหาค่าของ $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$

จากตัวอย่าง 1.1 เราได้ว่า
จากตัวอย่าง 1.2 เราได้ว่า
จากตัวอย่าง 1.3 เราได้ว่า

ข้อควรรู้ 1.1

ตัวอย่างการทดสอบระบบกล่องข้อควรรู้แบบกรอบเส้นประสีพาสเทล

1.1.3 องศาและเรเดียน

* เปลี่ยน **เรเดียน** เป็น **องศา** แทน π ด้วย 180°
* เปลี่ยน **องศา** เป็น **เรเดียน** คูณด้วย $\dfrac{\pi}{180}$

ตัวอย่าง 1.4: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2567

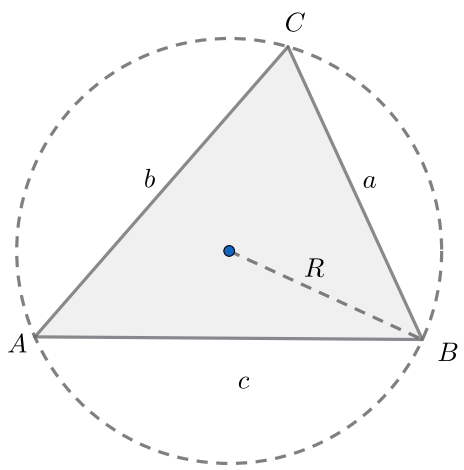
72° เท่ากับกี่เรเดียน

1. $\dfrac{2\pi}{3}$
2. $\dfrac{2\pi}{5}$
3. $\dfrac{3\pi}{4}$
4. $\dfrac{3\pi}{5}$

ทฤษฎีบท 1.1: กฎของไซน์

กำหนดให้ $\triangle ABC$ ถูกล้อมรอบด้วยวงกลมรัศมี R แต่มีความยาวแต่ละด้านซึ่งแสดงดังรูปที่ 1.1 เราจะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R$$



รูปที่ 1.1

บทที่ 2
อัตราส่วนตรีโกณมิติพื้นฐาน

2.1 สามเหลี่ยมมุมฉาก

2.1.1 ส่วนประกอบของสามเหลี่ยมมุมฉาก

สามเหลี่ยมมุมฉากเป็นสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก หรือมีขนาด 90°

- AB เป็น **ด้านตรงข้ามมุมฉาก** ซึ่งเป็นด้านที่ยาวที่สุดของสามเหลี่ยม
- BC เป็น **ด้านตรงข้ามมุม** A
- AC เป็น **ด้านประชิดมุม** A

2.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติพื้นฐาน

2.2.1 ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมีมุม C เป็นมุมฉาก โดยกำหนดให้ความยาวด้านตรงข้ามมุม A, ด้านประชิดมุม A และด้านตรงข้ามมุมฉาก เป็น a, b และ c หน่วย ตามลำดับ

ข้อควรรู้ 2.1

1. **ไซน์ของมุม** A แทนด้วยสัญลักษณ์ $\sin(A)$ นิยามโดย

$$\sin(A) = \frac{\text{ความยาวด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{a}{c}$$

2. **โคไซน์ของมุม** A แทนด้วยสัญลักษณ์ $\cos(A)$ นิยามโดย

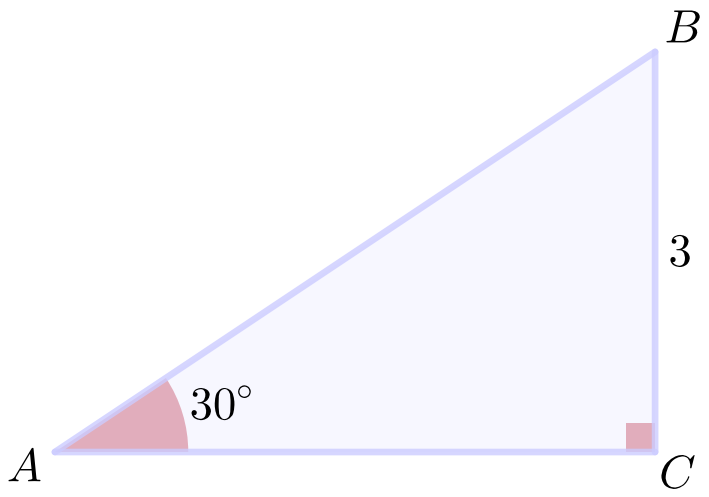
$$\cos(A) = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{b}{c}$$

3. **แทนเจนต์ของมุม** A แทนด้วยสัญลักษณ์ $\tan(A)$ นิยามโดย

$$\tan(A) = \frac{\text{ความยาวด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A} = \frac{a}{b}$$

ตัวอย่าง 2.1

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยที่มุม C เป็นมุมฉาก และมุม $A = 30^\circ$
ถ้าด้าน $BC = 3$ หน่วย จงหาความยาวของด้าน AB และ AC โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติพื้นฐาน

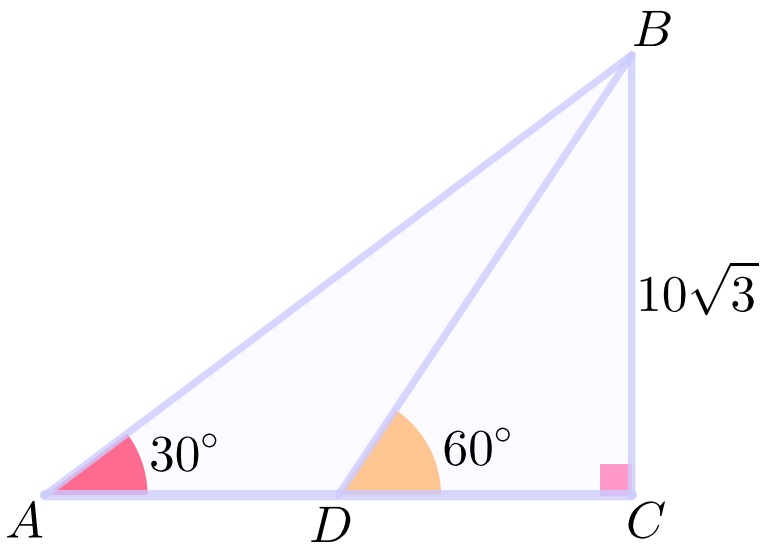


รูปที่ 2.1

วิธีทำ ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างเพิ่มเติมสำหรับฝึกการประยุกต์ใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติในการหาความยาวด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตัวอย่าง 2.2

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC และ DBC ซึ่งทั้งสองสามเหลี่ยมมีมุมฉากที่จุด C
ถ้ามุม A และ D มีขนาด 30° และ 60° ตามลำดับ และความยาวของด้าน BC เท่ากับ $10\sqrt{3}$ หน่วย
จงหาความยาวของด้าน AD โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติพื้นฐาน



รูปที่ 2.2

วิธีทำ กำหนดให้ $x + 5 = 10$
จะได้ว่า $x = 10 - 5$
ดังนั้น $x = 5$

ตัวอย่าง 2.3

$$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$\{3, 5\} \cup \{2, 3, 5\} = \{2, 3, 5\}$$
$$\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$\{1, 2\} \cup \emptyset = \{1, 2\}$$

จากตัวอย่าง 2.3 จะได้สมบัติที่สำคัญคือ

$$A \cup \emptyset = A \quad \text{และ} \quad A \cup U = U$$

ข้อควรรู้ 2.2: หลักการรวมเข้า–เอาออก

ให้ A, B และ C เป็นเซตจำกัด โดยมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $n(A), n(B)$ และ $n(C)$ ตามลำดับ

- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

บทที่ 3
ทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องจำนวนจริง

3.1 พหุนาม

3.1.1 การดำเนินการเกี่ยวกับพหุนาม

หลักการ 3.1: การบวกและการลบพหุนาม

การบวกและการลบพหุนาม ให้บวกลบเฉพาะเอกนามที่เป็นชนิดเดียวกัน (มีตัวแปรและเลขชี้กำลังเท่ากัน) หากไม่สามารถบวกลบกันได้ ให้คงรูปเดิมไว้ เช่น

$$\left(2x^5+4x+5\right)+\left(x^5-x^2-2x\right)=3x^5-x^2+2x+5$$
$$\left(x^2-2x-1\right)-\left(2x^2-x-2\right)=-x^2-x+1$$
$$\left(3x^3-5x+2\right)+\left(-x^3+4x-7\right)=2x^3-x-5$$
$$\left(4x^2+x-6\right)-\left(x^2-3x+1\right)=3x^2+4x-7$$

หลักการ 3.2: การคูณพหุนาม

การคูณพหุนาม ให้ใช้สมบัติการแจกแจง โดยคูณทุกพจน์ของพหุนามหนึ่งเข้ากับทุกพจน์ของอีกพหุนามหนึ่ง เช่น

$$\begin{aligned}
6\left(x^2-x-1\right) &= 6x^2-6x-6 \\
(x+3)\left(x^2-2x+1\right) &= x^3+x^2-5x+3 \\
(2x-1)\left(x^2+4x-3\right) &= 2x^3+7x^2-10x+3\left(2x^2+4x+5\right)\left(x^2-2\right) \\
&= 2x^4-4x^2+4x^3-8x+5x^2-10 \\
&= 2x^4+4x^3+x^2-8x-10
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.1: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

กำหนด $A=-9x^2+4x+2$ และ $B=3x^2+x-7$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $2A-B=-15x^2-3x-5$
2. $2A-3B=-21x^2+24x-17$
3. $A+3B=7x-19$
4. ไม่ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ตัวอย่าง 3.2: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

ข้อใดต่อไปนี้คือการกระจายนิพจน์ $x(x-8)-(x+2)(x-3)$ และทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $-7x+6$
2. $-9x+6$
3. $-10x+6$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ข้อควรรู้ 3.1: สูตรการกระจายที่ควรรู้

* $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
* $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
* $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
* $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
* $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

* $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
* $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

ตัวอย่าง 3.3: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

การกระจายนิพจน์ในข้อใดถูกต้อง

1. $(x-2)^2 + x(x+4) = 2x^2 + 4$
2. $(x+4)^2 - x(x-1) = 7x + 16$
3. $4(x-1)^2 + (x+2)^2 = 3x^2 - 4x$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ตัวอย่าง 3.4: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

การแยกตัวประกอบของนิพจน์ในข้อใดถูกต้อง

1. $100x^2 - 49y^2 = (10x+7y)(10x-7y)$
2. $27x^3 + 125y^3 = (3x+5y)\left(9x^2 - 15xy + 25y^2\right)$
3. $x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3 = (x-4y)^3$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ตัวอย่าง 3.5: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

ข้อใดต่อไปนี้คือการแยกตัวประกอบของนิพจน์ $25x^2 - 81y^2$

1. $(5x-9y)(5x+9y)$
2. $(5x-81y)(5x+y)$
3. $(25x-9y)(x+9y)$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

ตัวอย่าง 3.6: NETSAT คณิตศาสตร์ 2566

ข้อใดต่อไปคือการกระจายพจน์ $(4x-3y)^3$ และทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $64x^3 - 144x^2y + 108xy^2 - 27y^3$
2. $64x^3 + 144x^2y - 108xy^2 - 27y^3$
3. $64x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 27y^3$

4. $64x^3 + 108x^2y - 144xy^2 + 27y^3$

ตัวอย่าง 3.7: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2567

ข้อใดถูกต้อง

1. $(x+3)\left(x^2 - 3x + 9\right) = x^3 - 27$
2. $(x+3)(x+2)(x-2)(x-3) = x^4 - 25x^2 + 36$
3. $(x+5)^2 - (x+3)(x-3) = 10x + 16$
4. $(x+3)(x-2) - x(x+1) = -6$

ตัวอย่าง 3.8: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2567

ข้อใดต่อไปนี้แยกตัวประกอบได้ถูกต้อง

1. $ax^2 - 8ax + 16a = a(x-4)^2$
2. $a^2 + 7a + 12 = (a+4)(a+3)$
3. $ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1, 2 และ 3

3.1.2 การหารสังเคราะห์

ตัวอย่าง 3.9

จงใช้การหารสังเคราะห์เพื่อหาผลหารและเศษ จากการหารพหุนาม $3x^4 + 2x^2 + 3x - 5$ ด้วย $x + 1$

ตัวอย่าง 3.10

จงใช้การหารสังเคราะห์เพื่อหาผลหารและเศษ จากการหารพหุนาม $x^3 + x^2 - 18x + 18$ ด้วย $x - 3$

ตัวอย่าง 3.11

กำหนดให้ $p(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x - 8$ และ $q(x) = x^2 + 4x - 2$ จงใช้การหารสังเคราะห์เพื่อหาผลหารและเศษ จากการหารพหุนาม $p(x)$ ด้วย $q(x)$

3.1.3 ทฤษฎีบทเศษเหลือ

ทฤษฎีบท 3.1

กำหนดให้ $p(x)$ เป็นพหุนาม และ α เป็นจำนวนจริง เมื่อหารพหุนาม $p(x)$ ด้วยพหุนาม $x - \alpha$ แล้ว **เศษจากการหารจะมีค่าเท่ากับ** $p(\alpha)$

ตัวอย่าง 3.12

จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือหาเศษเหลือจากการหารพหุนาม $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 2$ ด้วย $x - 3$

ตัวอย่าง 3.13

จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือหาเศษเหลือจากการหารพหุนาม $x^3 - x^2 - x - 15$ ด้วย $x - 3$

ตัวอย่าง 3.14

กำหนดพหุนาม $p(x) = x^3 + 6x^2 - 2\alpha x - 3$ และ $q(x) = x^2 + 4x - 2$ จงหาจำนวนจริง α ที่ทำให้ $p(x)$ ถูกหารด้วยพหุนาม $x + 3$ ลงตัว

ข้อควรรู้ 3.2

กำหนดให้ $p(x)$ เป็นพหุนาม และ α เป็นจำนวนจริง

- $p(\alpha) = 0$ ก็ต่อเมื่อ พหุนาม $x - \alpha$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$
- ถ้า $p(\alpha) = 0$ จะเรียก α ว่า **ราก** หรือ **คำตอบ** ของพหุนาม $p(x)$ และของสมการ $p(x) = 0$

ตัวอย่าง 3.15: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2565

ถ้าพหุนาม $x^3 - x^2 + ax + 4$ ถูกหารลงตัวด้วย $x + 2$ แล้ว a มีค่าเท่าไร

1. -2
2. 2
3. -4
4. 4

ตัวอย่าง 3.16: NETSAT คณิตศาสตร์ กุมภาพันธ์ 2567

ข้อใดคือเศษที่ได้จากการหารพหนุนามด้วย $3x^3 + 4x^2 - 6x - 10$ ด้วย $x - 2$

1. $-6x^2$
2. $6x$
3. -6
4. 6

3.2 สมการตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$

3.2.1 ผลบวกรากและผลคูณรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$

ทฤษฎีบท 3.2

สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

จะมีคำตอบในระบบจำนวนจริงได้ไม่เกินสองคำตอบ โดยพิจารณาจากค่าของตัวแยกกำลังสอง (discriminant) คือ $b^2 - 4ac$ ดังนี้

- ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ สมการจะมีคำตอบจริง **สองคำตอบที่แตกต่างกัน**
- ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ สมการจะมีคำตอบจริง **เพียงหนึ่งคำตอบ**
- ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ สมการจะ **ไม่มีคำตอบในระบบจำนวนจริง**

และคำตอบของสมการสามารถเขียนในรูป

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3.2.2 ผลบวกรากและผลคูณรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$

ข้อควรรู้ 3.3

ถ้าสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ มี α และ β เป็นคำตอบ (อาจเป็นคำตอบซ้ำหรือคำตอบที่แตกต่างกัน) แล้วจะมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$
$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$